

MATHEMATEG

Mecaneg

Uned M2

W E Williams a S Y Barham

SAFON UG/UWCH

Cyhoeddwyd gan Uned Iaith Genedlaethol Cymru,
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru,
245 Rhodfa'r Gorllewin,
Caerdydd
CF5 2YX

Mae Uned Iaith Genedlaethol Cymru
yn rhan o WJEC CBAC Cyf.,
cwmni a gyfyngir gan warant
ac a reolir gan awdurdodau unedol Cymru.

Mathemateg Safon UG/Uwch CBAC
Mecaneg
Uned M2

Cyhoeddwyd dan nawdd Cynllun Cyhoeddiadau
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru

Cyhoeddwyd gyntaf 2002

Argraffwyd gan Wasg Gomer,
Llandysul, Ceredigion, SA44 4QL

ISBN: 1 86085 525 3

RHAGYMAURODD

Mae'r llyfr hwn yn ymwneud â gofynion Uned M2 maes llafur newydd CBAC, yn ogystal â'r rhan fwyaf o'r testunau sy'n ofynnol ar gyfer Uned MS. Astudir Stateg, sy'n angenrheidiol ar gyfer Uned MS, yn llyfr M3. Cyfyngir trin fectorau i'r agweddau hynny sy'n berthnasol i Fecaneg.

Mae ein dyled yn fawr i nifer o athrawon a wnaeth amryw o awgrymiadau. Yn benodol, caredm ddiolch i Kevin McGuire, John Langley ac Elwyn Davies a wiriodd yr atebion i ymarferion yn yr hen lyfr M1, a'u hanfon atom, gan eu bod yn cael eu defnyddio yn y llyfr hwn hefyd.

Gwnaed pob ymdrech i gywiro unrhyw wallau a welwyd mewn fersiynau blaenorol. Fodd bynnag, cyfrifoldeb yr awduron yw unrhyw wallau a welir yn y fersiwn hwn.

CYNNWYS

	Tudalen
Pennod 1	
Mudiant unionlin	1
Pennod 2	
Gwaith, egni a phŵer	8
Pennod 3	
Ergydion a momentwm	44
Pennod 4	
Mudiant o dan effaith disgyrchiant mewn dau ddimensiwn	59
Pennod 5	
Fectorau	82
Pennod 6	
Cymhwyso fectorau	113
Pennod 7	
Hafaliadau differol trefn un	137
Atebion i'r ymarferion	152
Mynegai	164

Pennod 1

Mudiant Unionlin

Ar ôl gweithio drwy'r bennod hon,

- dylech allu, o wybod naill ai'r dadleoliad, y cyflymder neu'r cyflymiad fel ffwythiant amser, ddarganfod y ddau arall
- dylech allu datrys problemau syml sy'n ymwneud â grymoedd sy'n dibynnu ar amser.

1.1 Problemau sy'n ymwneud â defnyddio calcwlws

Rydych eisoes wedi dysgu yn M1, pennod 4, sut i ddatrys problemau sy'n ymwneud â mudiant mewn llinell syth dan gyflymiad cyson. Yn y bennod hon, byddwn yn ystyried problemau lle mae cyflymiad yn dibynnu ar amser.

Dyma'r berthynas sylfaenol rhwng dadleoliad x , cyflymder v a chyflymiad a :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Y mathau symlaf o broblemau a all godi yw'r rhai pan roddir x yn nhermau t a rhaid darganfod v a/neu a , neu pan roddir v yn nhermau t a rhaid darganfod a . Dim ond differu'r meintiau a roddir sy'n angenrheidiol ar gyfer datrys problemau o'r fath.

Ceir dosbarth o broblemau sydd ychydig yn fwy cymhleth, sef pan roddir a yn nhermau t a rhaid darganfod x . Yn yr achosion hyn, rhaid integru'r meintiau a roddir mewn perthynas ag amser. Mae pob integriad yn cynhyrchu cysonyn integru fel bod rhaid gwybod gwerthoedd x a/neu v ar gyfer rhai o werthoedd t .

Mewn dynameg, fel y cewch weld yn y bennod nesaf, mae grym mewn cyfrannedd union â chyflymiad. Felly, gyda phroblemau yn ymwneud ag effaith grymoedd, fel arfer bydd angen darganfod v a/neu x o wybod y cyflymiad. Mewn sefyllfaoedd ymarferol, efallai na fydd cyflymiad yn ffwythiant o t yn unig ond gall ddibynnu ar x

a/neu v . Mae'n fwy anodd datrys problemau o'r fath, a byddwn yn eu hystyried yn Llyfr M3.

Enghraifft 1.1

Dadleoliad gronyn ar amser t eiliad yw $(t^3 + 4t^2 + 6t)$ m. Darganfyddwch ei gyflymder a'i gyflymiad.

Mae differu mewn perthynas â t yn rhoi'r cyflymder yn $(3t^2 + 8t + 6)$ ms^{-1} ac mae differu eto yn rhoi'r cyflymiad yn $(6t + 8)$ ms^{-2} .

Enghraifft 1.2

Darganfyddwch gyflymiad gronyn ar amser t eiliad o wybod mai ei gyflymder yw $t \sin 3t$ ms^{-1} .

Ceir y cyflymiad trwy ddifferu'r cyflymder mewn perthynas ag amser. Yn yr achos hwn mae angen defnyddio rheol y lluoswm ar gyfer differiad ac felly y cyflymiad yw $(\sin 3t + 3t \cos 3t)$ ms^{-2} .

Enghraifft 1.3

Darganfyddwch safle gronyn ar amser t eiliad o wybod bod ei gyflymiad yn t ms^{-2} a bod dadleoliad y gronyn o bwynt sefydlog ar amser $t = 0$ yn 3 m a chyflymder y gronyn yn 6 ms^{-1} .

Yn yr achos hwn mae

$$\frac{dv}{dt} = t,$$

lle mae'r cyflymder yn v ms^{-1} , ac mae integru'r hafaliad hwn mewn perthynas â t yn rhoi $v = \frac{1}{2}t^2 + \text{cysonyn}$. Gan fod y cyflymder yn 6 ms^{-1} ar amser $t = 0$ mae hyn yn rhoi'r cysonyn yn 6. Felly mae

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}t^2 + 6,$$

lle mae x m yn dynodi'r dadleoliad. Mae integru'r hafaliad hwn mewn perthynas â t yn rhoi $x = \frac{1}{6}t^3 + 6t + \text{cysonyn}$. Gan fod y dadleoliad yn 3 m ar amser $t = 0$ mae rhoi

$t = 0$ yn y mynegiad ar gyfer x yn rhoi'r cysonyn fel 3.

Felly y dadleoliad yw $(\frac{1}{6}t^3 + 6t + 3)$ m.

Dull arall sy'n osgoi cyflwyno cysonyn yw integru rhwng $t = 0$ a $t = t$, sy'n rhoi

$$[x] \text{ ar } t - [x] \text{ ar } t = 0 = \frac{1}{6}t^3 + 6t,$$

mae amnewid 3 am $[x] \text{ ar } t = 0$ yn rhoi'r canlyniad blaenorol.

Yn y bôn mae gan y dull a ddefnyddir mewn problemau lle rhoddir y cyflymiad yn nhermau t ddau gam, fel yn yr enghraifft uchod, sef:

- (i) integru mewn perthynas â t er mwyn darganfod v , gan gofio cyflwyno cysonyn mympwyol neu integru rhwng terfannau os rhoddir v ar gyfer rhyw werth t ;
- (ii) integru'r mynegiad am v er mwyn darganfod x , gan gofio cyflwyno cysonyn arall neu integru rhwng terfannau priodol os yw'n bosibl. Yna darganfod y cysonion trwy ddefnyddio'r amodau dechreuol a roddir.

Enghraifft 1.4

Mae gan ronyn sy'n symud â chyflymiad $t^2 \text{ ms}^{-2}$ ar amser t eiliad, gyflymder o 1 ms^{-1} pan yw $t = 3$. Ei ddadleoliad o bwynt penodol yw 4 m pan yw $t = 12$. Darganfyddwch ei ddadleoliad o'r pwynt pan fydd $t = 9$.

Mae'r cyflymder $v \text{ ms}^{-1}$ ar amser t eiliad yn bodloni'r hafaliad

$$\frac{dv}{dt} = t^2.$$

Mae integru hwn mewn perthynas â t yn rhoi $v = \frac{1}{3} t^3 + c$, lle mae c yn gysonyn. Mae rhoi $v = 1$ a $t = 3$ yn yr hafaliad hwn yn rhoi $1 = 9 + c$, ac felly mae $c = -8$. Felly mae

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} t^3 - 8,$$

lle mae x m yn dynodi'r dadleoliad. Mae angen integru'r hafaliad hwn eto. Un dull yw integru yn uniongyrchol gan gyflwyno cysonyn mympwyol arall a darganfod hwn trwy ddefnyddio gwerth x ar $t = 12$.

Y dull arall, a ddefnyddir yma, yw integru o $t = 12$ i $t = t$.

Mae hyn yn rhoi

$$[x] \text{ ar } t - [x] \text{ ar } t = 12 = \frac{1}{12}(t^4 - 12^4) - 8(t - 12).$$

Mae amnewid x ar $t = 12$ a chyfrifo x ar $t = 9$ yn rhoi bod y dadleoliad o $x = 4$ ar yr amser $t = 12$ yn -1157.25 m .

Felly, y gwir ddadleoliad yw $-1157.25 + 4 = -1153.25 \text{ m}$.

Mewn problemau sydd ychydig yn fwy cymhleth, gall ffurf y cyflymiad amrywio o'r naill gyfwng amser i'r llall. Mewn achosion o'r fath, dylid darganfod y datrysiadau cyffredinol ar gyfer pob cyfwng amser ar wahân a chanfod y cysonion o'r amodau a roddir. Efallai y bydd angen gwerthoedd x a v ar ddiwedd un cyfwng amser er mwyn cyfrifo'r cysonion priodol yn y cyfwng nesaf.

Enghraifft 1.5

Mae gronyn yn cychwyn o ddisymudedd â chyflymiad $(2 + 6t)$ ms^{-2} ar amser t eiliad ac ar ôl 2 eiliad mae'r cyflymiad yn newid i werth cyson 14 ms^{-2} . Yna mae'n cadw at y gwerth hwn. Darganfyddwch y pellter a deithir yn y 5 eiliad cyntaf.

Ar gyfer y 2 eiliad cyntaf,

$$\frac{dv}{dt} = 2 + 6t.$$

Mae integru mewn perthynas â t yn rhoi $v = 2t + 3t^2 + b$, lle mae b yn gysonyn. Mae amnewid y gwerthoedd ar $t = 0$ yn rhoi $b = 0$ ac felly $v = 2t + 3t^2$. Mae integru eto mewn perthynas â t yn rhoi

$$x = t^2 + t^3 + c,$$

lle mae c yn gysonyn arall. Ar $t = 0$, mae $x = 0$, ac felly $c = 0$ ac felly $x = t^2 + t^3$. Felly ar ôl 2 eiliad mae gan y gronyn gyflymder 16 ms^{-1} ac mae wedi teithio pellter o 12 m. Nawr mae'n symud gyda chyflymiad cyson o 14 ms^{-2} gyda'i fuanedd cychwynnol yn 16 ms^{-1} ac yn gwneud hyn am amser pellach o $(5 - 2)$ eiliad = 3 eiliad. Mae defnyddio hafaliad ar gyfer cyflymiad cyson yn rhoi

$$s = 16 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 9 = 111.$$

Felly y dadleoliad sydd ei angen yw $(12 + 111) \text{ m} = 123 \text{ m}$.

Ymarferion 1.1

Mae'r cwestiynau canlynol yn cyfeirio at ronyn yn symud ar hyd Ox , lle mae x m yn dynodi dadleoliad y gronyn o O ar amser t eiliad, ac mae $v \text{ ms}^{-1}$ ac $a \text{ ms}^{-2}$ yn dynodi'r cyflymder a'r cyflymiad yng nghyfeiriad cynyddol x , ar amser t eiliad.

- 1 $x = 7t^4 + 2t^3 + 5$; darganfyddwch a .
- 2 $v = 3t^3 + 4t^2 + 1$; darganfyddwch a .
- 3 $a = 24t^2 + 18t + 2$, mae $v = 2$ ac $x = 0$ pan yw $t = 0$; darganfyddwch x .
- 4 $a = 20t^3 + 12t^2$, mae $x = 1$ pan yw $t = 0$, mae $v = 6$ pan yw $t = 1$; darganfyddwch x .
- 5 $a = e^{-t}$, mae $x = 2$ a $v = 4$ pan yw $t = 0$; darganfyddwch x .
- 6 $a = 6t$ pan yw $0 \leq t \leq 1$, $a = 6$ pan yw $t \geq 1$, a $v = 1$ ac $x = 0$ pan yw $t = 0$; darganfyddwch x ar gyfer $t = 1$ a $t = 2$.
- 7 $a = 24t^2 + 6$ pan yw $0 \leq t \leq 1$, mae $a = 30t$, $t \geq 1$, $v = 2$ ac $x = 1$ pan yw $t = 0$; darganfyddwch x ar gyfer $t > 1$.

1.2 Grymoedd sy'n dibynnu ar amser

Mewn sefyllfaoedd ymarferol, ni fydd y grymoedd sy'n gweithredu yn gyson. Er enghraifft, hyd yn oed gyda car sy'n gweithio ar gyfradd gyson, bydd y grym yn dibynnu ar y cyflymder, ac yn aml nid yw'n hawdd iawn darganfod y safle a'r cyflymder, o wybod y grym. Rydych eisoes wedi gweld nad yw'n anodd darganfod y

dadleoliad o'r grym, pan fo'r grym yn gyson. Yr achos arall sy'n eithaf hawdd i'w ddatrys yw pan fo'r grym yn hysbys yn nhermau t . Mae'r hafaliad mudiant $F = ma$ yn rhoi'r cyflymiad yn nhermau t ac felly gellir darganfod x a v yn yr un ffordd ag a ddefnyddiwyd yn 1.1.

Enghraifft 1.6

Mae gronyn, mäs 0.4kg, yn symud dan effaith grym yn nghyfeiriad positif x , sy'n hafal i $4 \exp \frac{t}{4}$ N ar amser t eiliad ac mae'n gweithredu ar gyfer $0 \leq t \leq 4$.

Pan fo $t = 0$ mae'r gronyn yn llonydd ym mhwynt $x = 0$. Darganfyddwch ei gyflymder a'i ddadleoliad pan fo $t = 4$.

Os yw v ms⁻¹ yn cynrychioli'r cyflymder yng nghyfeiriad positif x , yna mae ail ddeddf Newton yn rhoi

$$0.4 \frac{dv}{dt} = 4 \exp \frac{t}{4}.$$

Drwy integru'r hafaliad hwn o $t = 0$ i $t = t$ cawn $v = 40 \left(\exp \frac{t}{4} - 1 \right)$,

lle defnyddiwyd yr amod bod $v = 0$ pan fo $t = 0$. Drwy amnewid $t = 4$, gwelwn fod y cyflymder yn 68.73 ms⁻¹ pan fo $t = 4$.

Felly, mae $\frac{dx}{dt} = 40 \left(\exp \frac{t}{4} - 1 \right)$, lle mae x m yn cynrychioli'r dadleoliad ar amser t

eiliad, a thrwy integru'r hafaliad hwn o $t = 0$ i $t = t$ cawn

$$x = 40 \left(4 \exp \frac{t}{4} - t \right) - 40(4)$$

lle defnyddiwyd yr amod bod $x = 0$ pan fo $t = 0$. Drwy amnewid $t = 4$, gwelwn fod y dadleoliad yn 115m pan fo $t = 4$.

Ymarferion 1.2

1. Mae gronyn, mäs m kg, yn symud mewn llinell syth dan effaith grym sy'n gweithredu ar hyd yr un linell syth ac sy'n $m(2 + 6t)$ N ar amser t eiliad. Mae'r gronyn yn symud ar 20ms⁻¹ pan fo $t = 2$. Cyfrifwch gyflymder y gronyn pan fo $t = 0$.
2. Mae gwrthrych, mäs 2 kg, yn cychwyn o ddisymudedd yn O ac yn symud ar hyd yr echelin x dan effaith grym $(6t - t^2)$ N sy'n gweithredu yng nghyfeiriad positif x . Beth yw cyflymder y gwrthrych (i) ar ôl 3 eiliad, (ii) ar ôl 9 eiliad o'r cychwyn?
3. Mae gwrthrych, mäs m kg, yn cychwyn o ddisymudedd yn y tarddiad ac yn symud mewn llinell syth dan effaith grym ar hyd y llinell hon, sy'n $0.2me^{2t}$ N ar amser t eiliad. Darganfyddwch gyflymder y gronyn pan fo $t = 3$, a phellter y gronyn o'r tarddiad pan fo $t = 2$.

4. Mae gronyn, mäs m , yn symud i fyny llinell goled mwyaf plân sydd â goled llyfn, lle mae'r ongl α a wna'r llinell goled mwyaf hon gyda'r llorwedd yn golygu bod $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Mae grym yn gweithredu ar y gronyn fyny'r llinell goled mwyaf hon, sy'n hafal i $m(12 - 3t)$ N ar amser t eiliad. Darganfyddwch y cyflymder a gyrrhaeddir, pan fo'r gronyn yn cychwyn o ddisymudedd, mewn (i) 2 eiliad, (ii) t eiliad. Darganfyddwch y pellter a deithir o ddisymudedd mewn 3 eiliad.

Ymarferion Amrywiol 1

- 1 Mae gronyn P yn symud ar hyd echelin x fel bod ei gyflymder ar amser t eiliad yn v ms⁻¹ lle mae $v = 9t^2 - 4t + 1$. O wybod bod P ar y tarddiad pan oedd $t = 0$, darganfyddwch (a) bellter P o'r tarddiad pan fo $t = 1$, (b) gyflymiad P pan fo $t = 1$.
- 2 Mae gronyn yn symud ar hyd llinell syth fel bod ei gyflymiad ar amser t eiliad yn $(6t - 8)$ ms⁻². Ar $t = 0$ eiliad mae'r gronyn yn mynd trwy'r pwynt sefydlog O gyda chyflymder 4 ms⁻¹. Darganfyddwch
- (i) ba mor bell o O yw'r pwynt lle mae'r gronyn yn dod i aros am ennyd y tro cyntaf,
- (ii) gyfanswm yr amser T eiliad a gymerir gan y gronyn i ddychwelyd i'r pwynt cychwynnol,
- (iii) fuanedd mwyaf y gronyn ar gyfer $0 < t < T$.
- 3 Mae gronyn yn symud mewn llinell syth fel bod ei fuanedd ar amser t eiliad mewn cyfrannedd wrthdro â $(t + 3)$, a phan fydd $t = 2$ eiliad, bydd gan y gronyn arafiad o $4/25$ ms⁻². O wybod bod y gronyn ar O ar amser $t = 0$ darganfyddwch ei bellter oddi wrth O pan fydd $t = 1$.
- 4 Cyflymiad gronyn sy'n symud mewn llinell syth ar amser t yw $k \sin pt$, lle mae k a p yn gysonion. Ar amser $t = 0$ mae'r gronyn ar bwynt O ac yn symud gyda chyflymder u . Dangoswch fod ei gyflymder ar unrhyw amser diweddarach yn

$$u + \frac{k}{p}(1 - \cos pt).$$

Dangoswch, ar gyfer $u = 0$, fod y gronyn yn dod i aros am ennyd am y tro cyntaf ar ôl teithio'r pellter $\frac{2\pi k}{p^2}$.

- 5 Mae gronyn, sy'n symud mewn llinell syth, yn cychwyn o ddisymudedd ar amser $t = 0$ eiliad, ac ar amser t eiliad rhoddir ei gyflymder v ms⁻¹ gan
- $$v = 3t(t - 4) \text{ ar gyfer } 0 \leq t \leq 5, v = 75/t \text{ ar gyfer } 5 \leq t \leq k,$$
- lle mae k yn gysonyn.
- (i) Brasluniwch y diagram cyflymder-amser ar gyfer y gronyn pan fo $0 \leq t \leq k$.
- (ii) Darganfyddwch amrediad gwerthoedd t pryd mae cyflymiad y gronyn yn bositif.

- (iii) Dangoswch mai **cyfanswm** y pellter a deithir gan y gronyn yn y cyfwng $0 \leq t \leq 5$ yw 39 metr.
- (iv) O wybod bod y pellter a deithir gan y gronyn yn y cyfwng $5 \leq t \leq k$ hefyd yn 39 metr, darganfyddwch, i 2 ffigur ystyrlon, werth k .
- 6 Er mwyn modelu rhannau olaf mudiant aderyn, tybir bod ei fuanedd yn $(a + bt) \text{ ms}^{-1}$, lle mae a a b yn gysonion. Buanedd yr aderyn pan fydd $t = 0$ yw 4 ms^{-1} ac mae'n dod i aros pan fydd $t = 3$. Darganfyddwch werthoedd a a b . Ceisir ffurfio model mwy manwl gywir gyda chyflymiad yr aderyn yn sero pan ddaw i aros. Gan dybio, yn yr achos hwn, fod $v = p + qt + rt^2$, lle mae p , q ac r yn gysonion, darganfyddwch werthoedd y cysonion hyn. Darganfyddwch, gyda'r model hwn, y pellter a deithir gan yr aderyn yn ystod tri eiliad olaf ei daith.
- 7 Mae grym newidiol yn gweithredu ar ronyn P sydd â màs 0.2 kg fel bod ei gyflymder yn $16 - t^2$, mewn ms^{-1} , ar amser t eiliad. Darganfyddwch y pellter y mae P yn ei deithio o amser $t = 0$ hyd nes y daw i ddisymudedd mewn ennyd. Darganfyddwch hefyd y grym sy'n gweithredu ar y gronyn ar amser t eiliad.
- 8 Mae dau wrthrych sydd â màs 1 kg a 2 kg , sydd ar y cychwyn wrth bwyntiau A a B , yn y drefn honno, yn cychwyn o ddisymudedd pan fo $t = 0$ ac yn symud ar hyd y llinell syth lorweddol AB . Mae grym o $(6t + 2)\text{N}$ yn gweithredu ar y cyntaf tuag at B ac mae grym o $2(12t^2 + 16)\text{N}$ yn gweithredu ar yr ail tuag at A . Darganfyddwch
- fuanedd pob gwrthrych ar ôl 1 eiliad,
 - y pellteroedd a deithiwyd gan y ddau wrthrych yn ystod yr eiliad gyntaf.
- O wybod bod y gwrthrychau'n gwrthdaro ar ôl 1 eiliad, faint yw'r pellter AB ?
- 9 Mae trên trydanol, màs $M \text{ kg}$, yn symud o ddisymudedd ar hyd cledrau lefel syth. Mae grym tynnol y modur, sy'n $P \text{ N}$ ar y cychwyn, yn lleihau ar gyfradd gyson i $R \text{ N}$ dros gyfnod o T eiliad ac yna mae'n parhau'n gyson ar $R \text{ N}$. $R \text{ N}$ yw cyfanswm y gwrthiant i fudiant. Dangoswch mai $Ma = P + (R - P)\frac{t}{T} - R$ yw cyflymiad a y trênn ar amser t eiliad ar ôl iddo ddechrau symud, ar gyfer $0 \leq t \leq T$. Darganfyddwch fuanedd uchaf y trênn a'r pellter a deithiodd cyn cyrraedd y buanedd hwnnw. Darganfyddwch y pŵer a ddatblygwyd gan y modur ar amser (i) $\frac{T}{2}$, (ii) $\frac{3T}{2}$.
- 10 Mae car, màs 1000 kg , yn symud ar hyd ffordd lorweddol gyda'i gyflymiad mewn cyfrannedd â thrydydd isradd yr amser t eiliad ar ôl cychwyn o ddisymudedd. Pan fo $t = 27$, mae buanedd y car yn 8 ms^{-1} . Darganfyddwch ar ba gyfradd y mae injan y car yn gweithio pan fo $t = 64$. Cewch anwybyddu gwrthiannau ffriathiannol.

Pennod 2

Gwaith, Egni a Phŵer

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon dylech

- allu cyfrifo'r gwaith a wneir gan rymoedd cyson a hefyd gan rymoedd sy'n ddibynnol ar safle yn unig,
- wybod beth a olygir wrth egni cinetig, egni potensial a phŵer,
- allu defnyddio'r egwyddor gwaith-egni i ddarganfod y gwaith a wneir gan rym,
- wybod pryd y bydd cyfanswm yr egni mecanyddol yn cael ei gadw a defnyddio egwyddor cadwraeth egni mecanyddol i ddatrys problemau syml,
- allu cyfrifo'r pŵer sydd ei angen er mwyn i beiriannau megis pŵmpiau dŵr gyflawni eu tasgau.

2.1 Gwaith a wneir gan rym cyson

Mae'n debyg eich bod yn cysylltu'r gair gwaith â rhywbeth sy'n galw am ymdrech. Er enghraifft, os ydych yn gwrthio berfa i fyny llethr, neu hyd yn oed yn dringo rhiw ar feic, byddwch yn teimlo eich bod wedi gwneud gwaith. Mewn Mecaneg gellir rhoi diffiniad manwl o waith sydd, mewn gwirionedd, yn gyson â'r syniad cyffredinol hwn o ddefnyddio ymdrech. Ceir y diffiniad symlaf yn yr achos pan fo'r grym yn gyson.

Y gwaith a wneir gan rym cyson wrth symud gronyn ar hyd llinell yw lluoswm y pellter y mae'r gronyn yn symud a chydran y grym i gyfeiriad y mudiant.

Y gwaith a wneir gan rym o 1 newton wrth symud trwy 1 metr yw'r uned o waith a'r enw arni yw'r joule (J).

Gall y gwaith a wneir fod yn bositif neu'n negatif gan ddibynnu a yw'r grym yn gweithredu tuag at, neu oddi wrth, gyfeiriad mudiant y gronyn.

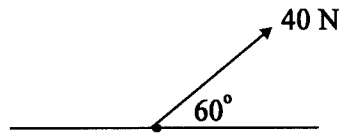
Enghraifft 2.1

Darganfyddwch y gwaith a wneir gan rym llorwedd 30 N sy'n gwrthio parcel trwm trwy bellter 4 m ar hyd llawr llyfn.



Y gwaith yw lluoswm y pellter a chydran y grym i gyfeiriad y mudiant, ac felly mae'n $30 \times 4 \text{ J} = 120 \text{ J}$.

Enghraifft 2.2



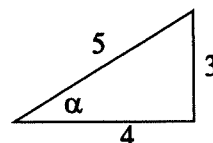
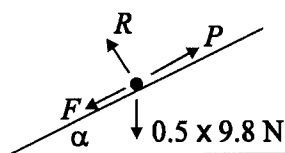
Mae'r diagram yn dangos gronyn ar wifren lorwedd yn cael ei dynnu gan rym cyson o 40 N ar oled 60° i'r wifren. Darganfyddwch y gwaith a wneir gan y grym wrth symud y gronyn trwy bellter 0.4 m ar hyd y wifren.

Cydran y grym ar hyd y wifren yw $40 \cos 60^\circ\text{ N} = 20\text{ N}$ ac felly y gwaith a wneir yw $20 \times 0.4\text{ J} = 8\text{ J}$.

Weithiau nid y gwaith a wneir gan rym sydd angen ei ddarganfod, ond y gwaith a wneir yn ei erbyn, a rhaid i chi fod yn glir beth rydych yn ei gyfrifo. Er enghraifft, os yw pecyn â màs m yn cael ei godi trwy bellter fertigol h , yna y gwaith a wneir gan ddisgyrchiant yw $-mgh$ gan mai cydran disgyrchiant i gyfeiriad mudiant y gronyn hwn yw $-mg$. Er mwyn darganfod y gwaith sydd i'w wneud wrth ei godi, tybir bod y codi yn digwydd yn araf iawn ar fuanedd cyson fel bod cyfanswm y grym sy'n gweithredu yn sero a bod y grym codi felly yn union gydbwyso'r grym disgyrchiant. Felly maint y grym codi yw mg a'r gwaith a wneir gan y grym codi yw mgh . Gyda berfa'n symud i fyny llethyr mae'r grym ffrithiantol a chydran y pwysau ar hyd y llethyr ill dau i'r cyfeiriad dirgroes i'r mudiant, ac felly mae'r gwaith a wneir ganddynt yn negatif. Os yw'r ferfa yn symud ar fuanedd cyson yna mae'r grym gwrthio yn union gytbwys â'r grymoedd eraill trwy'r amser, a'r gwaith a wneir ganddo yw minws y gwaith a wneir gan ffrithiant a disgyrchiant. Yn gyffredinol cymerir bod y gwaith a wneir yn erbyn grym penodol yn hafal i minws y gwaith a wneir gan y grym.

Enghraifft 2.3

Mae gronyn, màs 0.5 kg , yn cael ei dynnu trwy bellter 4 m , ar fuanedd cyson, i fyny llethyr ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Mae'r grym tynnu yn gweithredu yn baralel i linell goled mwyaf y plân. Y cyfernod ffrithiant rhwng y gronyn a'r plân yw 0.5 . Darganfyddwch y gwaith a wneir gan y grym tynnu.



Mae'r diagram ar y chwith yn dangos y grymoedd yn gweithredu ar y gronyn gydag F , R a P yn dynodi meintiau'r grym ffrithiannol, yr adwaith normal a'r grym tynnu, yn ôl eu trefn. Nid yw adwaith y plân yn gwneud gwaith gan fod ei gydran i gyfeiriad y mudiant yn sero, ac yn yr un modd dim ond cydran y pwysau ar hyd y plân sy'n gwneud gwaith. Mae dwy ffordd o wneud y cyfrifiad. Un ffordd yw darganfod y gwaith a wneir gan y ffrithiant a'r gwaith a wneir gan ddisgyrchiant ar wahân ac yna eu hadio. Yna y gwaith a wneir gan y grym tynnu yw minws y gwaith hwn. Y ffordd arall yw dweud, gan fod y gronyn yn symud ar fuanedd cyson ac felly nad oes ganddo gyflymiad, bod y grym sy'n gweithredu ar hyd y plân yn hafal ei faint ond yn ddirgroes ei gyfeiriad i gydrannau ffrithiant a disgyrchiant ar hyd y plân, ac yna gyfrifo'r gwaith a wneir gan y grym hwn. Yr ail ddull hwn a ddefnyddir yma.

Er mwyn dod o hyd i'r adwaith, rydym yn cydrannu yn berpendicwlar i'r plân, sef $0.5 \times 9.8 \times \cos \alpha$ N. Mae'r diagram ar y dde uchod yn dangos bod $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ac

felly'r adwaith yw 3.92 N a'r grym ffrithiannol yw 1.96 N.

Cydran y pwysau i lawr y plân yw $0.5 \times 9.8 \times \sin \alpha = 2.94$ N.

Felly cyfanswm y grym tynnu yw $(2.94 + 1.96)$ N = 4.9 N.

Felly y gwaith a wneir yw 4.9×4 J = 19.6 J.

Wrth gyfrifo'r gwaith a wneir, dylech wirio bod y grym yn gyson cyn ei luosi â'r pellter a symudir. Nid yw'r dull hwn yn synhwyrol ond ar gyfer grym cyson. Yn achos grymoedd sy'n amrywio gyda safle bydd angen defnyddio'r diffiniad yn yr adran nesaf.

Ymarferion 2.1

- 1 Darganfyddwch y gwaith a wneir gan rym llorwedd 2 N sy'n gwthio gronyn trwy bellter 0.8 m ar hyd arwyneb llorwedd.
- 2 Mae dringwr, màs 55 kg, sy'n dringo ar fuanedd cyson, yn gwneud 1000 J o waith. Darganfyddwch y pellter mae'n ei ddringo.
- 3 Mae parcel, màs 5 kg, yn cael ei godi, ar fuanedd cyson, trwy uchder 5 m. Darganfyddwch, gan fodelu'r parcel fel gronyn, y gwaith a wneir yn erbyn disgyrchiant.
- 4 Mae gronyn, màs 0.2 kg, yn cael ei dynnu ar fuanedd cyson 5 ms^{-1} ar hyd arwyneb llorwedd garw. O wybod bod y cyfernod ffrithiant yn 0.3, darganfyddwch y gwaith a wneir yn erbyn ffrithiant mewn 4 eiliad.
- 5 Mae gronyn, màs 0.3 kg, yn cael ei dynnu ar fuanedd cyson i fyny plân llyfn ar ongl 20° i'r llorwedd. Darganfyddwch y gwaith a wneir yn erbyn disgyrchiant wrth symud y gronyn bellter 3 m i fyny'r plân.
- 6 Mae blwch pacio yn cael ei dynnu trwy bellter 4 m ar fuanedd cyson ar draws llawr llorwedd gan raff sydd ynghlwm wrtho ac yn goleddu ar ongl 40° i'r llorwedd. O

wybod mai cyfanswm y gwaith a wneir gan y grym tynnu yw 80 J, darganfyddwch y tyniant yn y rhaff.

- 7 Mae sled, màs 20 kg, yn cael ei thynnu ar fuanedd cyson trwy bellter 12 m i fyny llethr eira sy'n goleddu ar ongl 20° i'r llorwedd. Y cyfernod ffrithiant rhwng y sled a'r eira yw 0.6. Darganfyddwch

- (i) y gwaith a wneir yn erbyn disgrychiant,
- (ii) y gwaith a wneir yn erbyn ffrithiant.

O wybod bod y sled yn cael ei thynnu gan raff ynghlwm wrth flaen y sled, darganfyddwch y tyniant yn y rhaff yn y ddau achos:

- (a) pan fydd y rhaff yn baralel i'r goled,
- (b) pan fydd y rhaff ar ongl 45° i'r goled.

- 8 Mae gronyn, màs 5 kg, yn cael ei dynnu ar fuanedd cyson i fyny plân ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Y cyfernod ffrithiant rhwng y plân a'r gronyn yw $\frac{1}{3}$.

O wybod bod y grym tynnu yn gweithredu ar hyd llinell y goled mwyaf, darganfyddwch y gwaith a wneir wrth symud y gronyn trwy bellter 10 m.

- 9 Cyfanswm màs dyn a beic yw 100 kg. Mae'r dyn yn teithio, ar fuanedd cyson, trwy bellter 1 km i fyny llethr ar ongl α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{20}$.

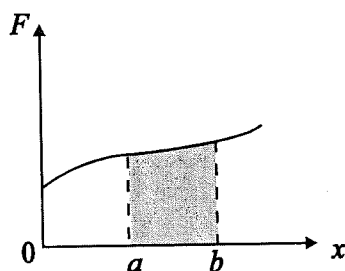
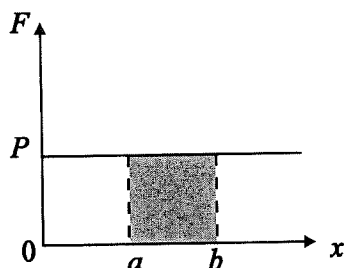
Cyfanswm y gwrthiannau eraill sy'n gweithredu arno ac sy'n gwrthwynebu ei fudiant yn uniongyrchol yw 20 N. Darganfyddwch gyfanswm y gwaith a wneir gan y beiciwr.

- 10 Mae'r beiciwr yn y cwestiwn blaenorol yn teithio ar fuanedd cyson i lawr llethr sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{160}$ ac yn gwneud 1200 J o

waith wrth deithio pellter o 400 m. Darganfyddwch gyfanswm y gwrthiant i'w fudiant, gan gymryd ei fod yn gyson.

2.2 Gwaith a wneir gan rym sy'n ddibynnol ar safle yn unig

Os nad yw grym yn gyson a'i fod, yn hytrach, yn dibynnu ar safle, nid yw'n ddoeth diffinio gwaith fel grym wedi'i luosi â phellter gan na fydddech yn gwybod ar ba bwynt i gyfrifo'r grym! Er mwyn darganfod diffiniad mwy synhwyrol mae angen cael dehongliad graffigol o waith.



Os dynodir cydran grym i gyfeiriad positif x gan F yna mae'r diagram ar y chwith yn dangos graff F ar gyfer grym cyson P ac mae'r diagram ar y dde yn dangos graff posibl pan nad yw F yn gyson ond yn dibynnu ar safle, h.y. ar x . Os oes gan F y gwerth cyson P , yna y gwaith a wneir wrth symud o $x = a$ i $x = b$ yw $P(b - a)$; dyma'r arwynebedd o dan y llinell syth yn y diagram ar y chwith. Felly diffiniad synhwyrol o'r gwaith a wneir wrth symud o $x = a$ i $x = b$ pan fo F yn dibynnu ar x fyddai'r arwynebedd dan y gromlin yn y diagram ar y dde rhwng y llinellau $x = a$ ac $x = b$. Dyma'r diffiniad a ddefnyddir, ac oherwydd y gellir cynrychioli'r arwynebedd dan gromlin fel integryn, mae'r gwaith a wneir wrth ddadleoli pwynt gweithrediad y grym o $x = a$ i $x = b$ yn cael ei ddiffinio fel

$$\int_a^b F(x) dx.$$

Mae'r diffiniad hwn, fel a ddangoswyd uchod, yn lleihau i'r diffiniad gwreiddiol pan fo'r grym yn gyson.

Mewn gwirionedd mae'r diffiniad integrol yn ddilys ar gyfer pob grym ond, pan fo'r grym yn dibynnu ar newidynnau eraill megis t a v , nid yw'n hawdd enrhifo'r integryn.

Enghraifft 2.4

Pan fydd dadleoliad gronyn o'r tarddiad yn x m, mae gan y grym sy'n gweithredu arno faint $(10 + 4e^{-x})$ N ac mae'n gweithredu i gyfeiriad positif x . Darganfyddwch y gwaith a wneir pan fydd y gronyn yn symud o $x = 0$ i $x = 1$.

Y gwaith a wneir yw

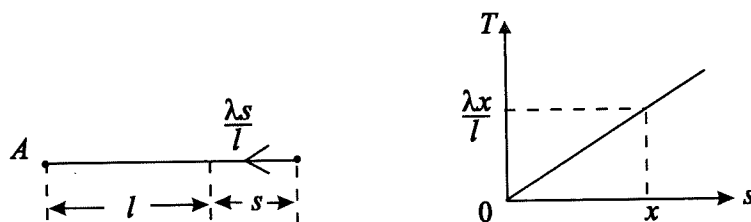
$$\int_0^1 (10 + 4e^{-x}) dx \quad J = 10 - 4(e^{-1} - 1) \quad J = 14 - 4e^{-1} \text{ J.}$$

Ymarferion 2.2

- 1 Pan fydd gronyn P ar bwynt ar echelin positif x sydd bellter x m o'r tarddiad, maint y grym i gyfeiriad positif x yw $4x$ N. Darganfyddwch y gwaith a wneir gan y grym
 - (i) pan fydd y gronyn yn symud o'r pwynt $x = 1$ i $x = 2$,
 - (ii) pan fydd y gronyn yn symud o'r pwynt $x = 4$ i $x = 3$.
- 2 Pan fydd dadleoliad gronyn o'r tarddiad yn x m, dynodir y grym sy'n gweithredu arno i gyfeiriad positif x gan $F(x)$ N. Darganfyddwch y gwaith a wneir wrth symud y gronyn o'r pwynt $x = a$ i'r pwynt $x = b$ pan fydd
 - (i) $F = 4x^3 + 3x^2$, $a = 1$, $b = 2$,
 - (ii) $F = 3 + 4e^{-x}$, $a = 0$, $b = 1$,
 - (iii) $F = \frac{4}{x^2}$, $a = 2$, $b = 4$.

- 3 Mae wagen yn cael ei thynnu ar hyd cledrau llorwedd syth gan rym llorwedd sydd â'i faint, pan fydd y wagen ar bellter o x m o'i phwynt cychwynnol, yn $(8 - \frac{x}{20})$ N. Darganfyddwch y gwaith a wneir wrth i'r wagen symud trwy bellter o 100 m.

2.3 Gwaith a wneir gan y tyniant mewn llinyn elastig



Os yw un pen llinyn elastig yn sefydlog ar bwynt A a'r pen arall yn cael ei estyn bellter s tu hwnt i'w hyd naturiol, yna mae deddf Hooke yn dangos bod gan y tyniant T faint $\frac{\lambda s}{l}$, lle mae λ yn dynodi'r modwlws elastig ac l yn dynodi hyd naturiol y llinyn. Mae'r tyniant hwn yn gweithredu i ffwrdd oddi wrth ei ben estynedig fel a ddangosir yn y diagram ar y chwith ac felly ei gydran tuag at ei ben sefydlog yw $\frac{\lambda s}{l}$.

Mae'r diagram ar y dde yn dangos sut mae'r tyniant yn amrywio gydag estyniad s . Felly maint y gwaith a wneir gan y tyniant pan fydd y llinyn yn cael ei estyn o $s = 0$ i $s = x$ yw'r arwynebedd dan y llinell syth rhwng $s = 0$ ac $s = x$, sef $\frac{\lambda x^2}{2l}$. Gan fod tyniant i'r cyfeiriad dirgroes i gyfeiriad yr estyniad, y gwaith a wneir ganddo wrth i'r llinyn gael ei estyn yw $-\frac{\lambda x^2}{2l}$. Ceir yr un canlyniad trwy integru'r grym i gyfeiriad yr estyniad, h.y. $-\frac{\lambda s}{l}$, rhwng $s = 0$ ac $s = x$; mae hyn yn rhoi

$$-\int_0^x \frac{\lambda s}{l} ds = -\frac{\lambda x^2}{2l}.$$

Nid yw'n bwysig iawn pa lythyren sy'n cael ei defnyddio am newidyn yr integriad, dyma'r hyn a elwir yn newidyn ffug, ond mae'n well, er mwyn osgoi dryswch, peidio â defnyddio newidyn sy'n ymddangos yn un o'r terfannau fel newidyn integriad.

Felly y gwaith a wneir yn erbyn y tyniant wrth estyn llinyn elastig trwy bellter x yw $\frac{\lambda x^2}{2l}$ a gellir dangos, mewn modd tebyg, fod hyn hefyd yn wir pan gaiff sbring ei gywasgu trwy bellter x .

Y gwaith a wneir yn erbyn y tyniant wrth gynyddu estyniad sbring elastig o a i b yw

$$\int_a^b \frac{\lambda s}{l} ds = \frac{\lambda}{2l} (b^2 - a^2).$$

Ymarferion 2.3

Darganfyddwch y gwaith a wneir wrth estyn llinyn elastig, hyd naturiol l m a modwlws λ N, trwy bellter x m o'i hyd anestynedig pan fydd

1 $l = 2, \lambda = 100, x = 0.2.$

2 $l = 3, \lambda = 300, x = 0.4.$

3 $l = 2.5, \lambda = 500, x = \frac{l}{4}.$

Darganfyddwch y gwaith a wneir wrth gynyddu estyniad llinyn elastig, hyd naturiol l m a modwlws λ N, o a m i b m pan fydd

4 $l = 2, \lambda = 300, a = 0.2, b = 0.4.$

5 $l = 3, \lambda = 600, a = 0.4, b = 0.7.$

6 Mae llinyn elastig ysgafn, modwlws 30 N a hyd naturiol 1 m, yn hongian heb ei estyn. Darganfyddwch y gwaith a wneir gan ddyn wrth estyn y llinyn bellter 0.1 m. Faint o waith ychwanegol sy'n rhaid ei wneud i estyn y llinyn trwy 0.3 m ymhellach?

7 Mae llinyn elastig gyda hyd naturiol 1 m a modwlws 50 N yn llorwedd. Mae un pen yn sefydlog ac mae'r llinyn yn cael ei estyn trwy roi grym o 5 N i'r pen arall. Darganfyddwch y gwaith a wneir gan y grym hwn.

2.4 Egni cinetig a'r egwyddor gwaith-egni

Clywir y gair egni, neu ynni, yn aml iawn mewn bywyd bob dydd ac mae llawer o ffurfiau gwahanol o egni, e.e. egni gwres, egni trydanol, egni cemegol. Defnyddir y gair yn llac iawn ond mewn unrhyw waith gwyddonol mae angen bod yn fwy manwl. Egni gronyn yw ei allu i wneud gwaith. Nid yw'r diffiniad hwn yn eglur iawn ond efallai y byddwch yn ei ddeall yn gliriach trwy ystyried un ffurf arbennig o egni a geir mewn Mecaneg. Dyma **Egni Cinetig (E.C.)**, a ddiffinnir, ar gyfer gronyn sydd â màs m ac sy'n symud ar fuanedd v , fel $\frac{1}{2}mv^2$. Yn y bôn, egni cinetig yw'r egni sydd gan ronyn oherwydd ei fudiant. Yr uned i fesur egni cinetig yw'r joule (J).

Gellir cysylltu egni cinetig â gallu gronyn i wneud gwaith trwy ddychmygu gronyn, màs m , yn symud â buanedd cychwynnol v ar lawr llorwedd garw. Bydd y grym ffrithiannol yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes i'r mudiant gan leihau'r buanedd. Mae'r pwynt lle mae'r grym ffrithiannol yn gweithredu yn symud ac felly mae'r grym yn gwneud gwaith nes i'r gronyn ddod i aros. Felly roedd gan y gwrthrych symudol

yw allu i wneud gwaith. Gellir gwneud hyn yn fwy manwl trwy dybio bod y grym ffrithiannol F yn gyson fel bod arafiad y gronyn yn $-\frac{F}{m}$.

Mae defnyddio s i ddynodi'r pellter y mae'r gronyn wedi symud a defnyddio

$$v^2 = u^2 + 2as \text{ gyda } v = 0, u = v \text{ ac } a = -\frac{F}{m} \text{ yn rhoi}$$

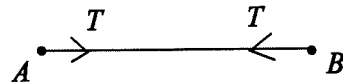
$$0 = v^2 - 2\frac{F}{m}s,$$

ac felly mae $Fs = \frac{1}{2}mv^2$. Felly mae'r gwaith a wneir wrth leihau'r buanedd i sero yn hafal i egni cinetig gwreiddiol y gronyn. Dylai hyn egluro'r syniad o egni fel gallu i wneud gwaith.

Mae'r canlyniad uchod sy'n cysylltu'r gwaith a wneir â newid mewn egni cinetig yn enghraifft syml o ganlyniad cyffredinol a fydd yn cael ei brofi yn Adran 2.7 ac a elwir yr **egwyddor gwaith-egni**. Yr hyn a ddywed yw bod:

Newid yn yr E.C. = Cyfanswm y gwaith a wneir gan y grymoedd sy'n gweithredu.

Gellir defnyddio'r egwyddor gyffredinol hon i ddatrys llawer o broblemau mecanyddol yn rhwydd. Mantais arbennig ei defnyddio yw bod yna rai grymoedd nad ydynt yn gwneud gwaith, ac nid oes angen eu hystyried hwy o gwbl. Yr enghraifft symlaf o rym o'r fath yw adwaith arwyneb llyfn. Os bydd gronyn yn symud ar hyd arwyneb llyfn, yna nid oes gan yr adwaith gydran i gyfeiriad y mudiant ac felly nid yw'n gwneud gwaith. Enghraifft arall yw'r tyniant mewn llinyn ysgafn tynn.



Mae'r tyniant yn gweithredu i gyfeiriad oddi wrth y ddau ben fel a ddangosir yn y diagram, ac os yw A yn symud trwy bellter d yna mae B hefyd yn symud yr un fath ac, o ganlyniad, cyfanswm y gwaith a wneir yw sero. Mae hyn yn dal yn wir os yw'r llinyn yn mynd dros bwli llyfn.

Mantais arall defnyddio'r egwyddor gwaith-egni yw, hyd yn oed os nad yw union natur y grymoedd sy'n gweithredu yn hysbys, gellir defnyddio'r egwyddor i ddarganfod cyfanswm y gwaith a wneir cyn belled â bod y newid mewn egni cinetig yn hysbys.

Yn aml gellir datrys llawer o broblemau sy'n cynnwys mudiant dan effaith grymoedd cyson yr un mor rhwydd trwy ddefnyddio'r fformiwla cyflymiad cyson ac yn aml gallwch ddefnyddio pa ddull bynnag sydd orau gennych. Mewn arholiadau, fodd bynnag, efallai y dywedir rhywbeth fel "Darganfyddwch trwy ystyried egni ...", ac yna bydd yn rhaid i chi ddefnyddio'r egwyddor gwaith-egni.

Mae'r egwyddor o gadwraeth egni mecanyddol a ddisgrifir yn Adran 2.5 yn debyg iawn i'r egwyddor gwaith-egni ac mewn sawl sefyllfa mae yr un fath i bob pwrpas.

Enghraifft 2.5

Mae gronyn yn cael ei ollwng o ddisymudedd ar uchder 3 m uwchben llawr llorwedd; darganfyddwch ei fuanedd pan fydd yn taro'r llawr.

Ni roddir mäs y gronyn ac felly fe'i dynodir gan m kg. Os yw buanedd y gronyn wrth daro'r llawr yn v ms⁻¹, yna y newid yn ei egni cinetig yw $\frac{1}{2}mv^2$ J. Mae grym disgyrchiant yn gweithredu i gyfeiriad y mudiant ac felly y gwaith a wneir ganddo yw $3 \times 9.8 \text{ m J} = 29.4 \text{ m J}$. Mae hafalu'r rhain yn rhoi $v^2 = 58.8$ a $v = 7.67$. Hefyd gellir datrys y broblem hon trwy ddefnyddio fformwlâu cyflymiad cyson. Y cyflymiad tuag i lawr yw 9.8 ms^{-1} ac mae rhoi $a = 9.8$, $s = 3$, $u = 0$ yn yr hafaliad $v^2 = u^2 + 2as$ yn rhoi'r un ateb.

Enghraifft 2.6

Mae gronyn, mäs 0.3 kg, a ollyngir o uchder 4 m, yn taro'r llawr ar fuanedd 8 ms^{-1} . Darganfyddwch y gwaith a wneir gan wrthiant aer.

Y newid yn ei egni cinetig yw $\frac{1}{2} \times 0.3 \times 64 \text{ J} = 9.6 \text{ J}$.

Y gwaith a wneir gan ddisgyrchiant yw $0.3 \times 4 \times 9.8 \text{ J} = 11.76 \text{ J}$.

Yna mae'r egwyddor gwaith-egni yn rhoi

$$9.6 = 11.76 + \text{gwaith a wneir gan wrthiant aer},$$

ac felly y gwaith a wneir gan wrthiant aer yw -2.16 J , gyda'r arwydd minws yn dangos bod y gwrthiant yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes i'r mudiant.

Enghraifft 2.7

Mae gronyn, mäs 0.3 kg, yn symud ar blân llorwedd llyfn dan effaith grym llorwedd o 12 N. Darganfyddwch fuanedd y gronyn ar ôl iddo symud 5 m o ddisymudedd.

Nid yw adwaith y plân yn gwneud gwaith ac nid yw grym disgyrchiant chwaith gan fod hwnnw hefyd yn berpendicwlar i'r mudiant. (Nid oes angen ystyried y grymoedd hyn ar wahân oherwydd, fel a nodwyd yn Adran 5.1 o'r llyfr M1, mae grymoedd sy'n berpendicwlar i linell y mudiant mewn cydbwysedd. Felly mae'r grym cydeffaith yn sero ac felly mae'r gwaith a wneir hefyd yn sero.)

Y gwaith a wneir yn ystod y mudiant felly yw $12 \times 5 \text{ J} = 60 \text{ J}$. Mae hyn yn hafal i'r newid yn yr egni cinetig, h.y. $\frac{1}{2} \times 0.3 \times v^2 \text{ J}$, lle mae'r buanedd terfynol yn v ms⁻¹.

Mae hyn yn rhoi

$$v = \sqrt{400} = 20.$$

Cyflymiad y gronyn ar hyd y plân yw $\frac{12}{0.3} \text{ ms}^{-2} = 40 \text{ ms}^{-2}$ ac eto mae defnyddio

$v^2 = u^2 + 2as$ gyda'r gwerth hwn ar gyfer a yn rhoi'r un canlyniad.

Enghraifft 2.8

Mae parsel trwm, màs 10 kg, yn cael ei wthio ar hyd llawr llorwedd garw gan rym ac mae ei fuanedd yn cynyddu o 1 ms^{-1} i 2 ms^{-1} tra bo'n teithio pellter o 5 m. Os 0.5 yw'r cyfernod ffrithiant, darganfyddwch y gwaith a wneir gan y grym gwrthio.

Darganfyddwch hefyd y grym hwn ar gyfer y ddau achos

- (i) pan dybir ei fod yn gyson,
- (ii) pan dybir ei fod ar ffurf kx gydag x yn cynrychioli'r pellter o'r pwynt lle mae'r buanedd yn 1 ms^{-1} .

(i) Y newid mewn egni cinetig yw $5 \times (2^2 - 1^2) \text{ J} = 15 \text{ J}$. Yr adwaith yw 98 N ac felly y grym ffrithiannol yw 49 N. Mae'r grym ffrithiannol yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes i'r mudiant ac felly y gwaith a wneir ganddo yw $-49 \times 5 \text{ J} = -245 \text{ J}$.

Fel yn Enghraifft 2.7, mae'r gwaith a wneir gan ddisgyrchiant a chan yr adwaith normal, yn sero. Felly mae'r egwyddor gwaith-egni yn rhoi

$$15 \text{ J} = \text{Gwaith a wneir gan y grym gwrthio} - 245 \text{ J},$$

ac felly y gwaith a wneir gan y grym gwrthio yw 260 J.

Os tybir bod y grym gwrthio yn $F \text{ N}$, yna y gwaith a wneir yw $5F \text{ J}$, ac felly $F = 52$.

(ii) Os tybir bod y grym ar ffurf $kx \text{ N}$, gydag $x \text{ m}$ yn cynrychioli'r dadleoliad o'r pwynt lle mae'r buanedd yn 1 ms^{-1} , yna y gwaith a wneir yw $\int_0^5 kx \, dx \text{ J} = 12.5k \text{ J}$.

Mae hyn yn rhoi $k = 20.8$.

Enghraifft 2.9

Mae gronyn, màs 0.3 kg, yn symud ar hyd yr echelin x dan weithrediad grym atyniadol i gyfeiriad y tarddiad. Ei faint yw $\frac{6}{x^2} \text{ N}$ pan fo'r gronyn ar bellter $x \text{ m}$ o'r tarddiad. Caiff y gronyn ei daflu i gyfeiriad positif x ar fuanedd 10 ms^{-1} o'r pwynt lle mae $x = 1$. Darganfyddwch ei fuanedd pan fydd $x = 2$.

Gan ddynodi'r buanedd pan fydd $x = 1$ gan $v \text{ ms}^{-1}$, y newid yn yr egni cinetig yw $(0.15v^2 - 0.15 \times 100) \text{ J}$. Mae'r grym yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes i'r mudiant ac felly y gwaith a wneir yw

$$- \int_1^2 \frac{6}{x^2} dx \text{ J} = \left(\frac{6}{x} \right)_{x=1}^{x=2} \text{ J} = -3 \text{ J}.$$

Mae'r egwyddor gwaith-egni yn rhoi

$$0.15v^2 - 15 = -3,$$

sy'n rhoi $v = \sqrt{80} = 8.94.$

Enghraifft 2.10

Pan fydd dadleoliad gronyn, màs 0.4 kg, o'r tarddiad yn x m, cydran y grym sy'n gweithredu arno i gyfeiriad positif x yw $(8 + 6e^{-x})$ N. O wybod bod gan y gronyn fuanedd 2 ms^{-1} ar y tarddiad, darganfyddwch ei fuanedd pan fydd $x = 1$.

Os dynodir y buanedd pan fydd y gronyn ar bellter 1 m gan $v \text{ ms}^{-1}$, y newid yn yr egni cinetig yw $(0.2 v^2 - 0.2 \times 2^2) \text{ J} = (0.2 v^2 - 0.8) \text{ J}$.

Mae'r mudiant i gyfeiriad y grym, a'r gwaith a wneir wrth symud o $x = 0$ i $x = 1$ yw $\int_0^1 (8 + 6e^{-x}) dx$ N. Mae'r egwyddor gwaith-egni yn rhoi

$$0.2 v^2 - 0.8 = \int_0^1 (8 + 6e^{-x}) dx,$$

h.y.
$$0.2 v^2 = \int_0^1 (8 + 6e^{-x}) dx + 0.8 = 14.8 - 6e^{-1} = 12.59,$$

sy'n rhoi $v = 7.93 \text{ ms}^{-1}.$

Gyda phroblemau lle mae'r grymoedd sy'n gweithredu yn ddibynnol ar safle yn unig, gellir olrhain yr 'egwyddor cadwraeth egni mecanyddol' o'r egwyddor gwaith-egni. Mae ychydig yn haws defnyddio'r egwyddor hon mewn achosion lle mae'r grymoedd i gyd o fath safonol.

Ymarferion 2.4

1 Darganfyddwch egni cinetig

- (i) gronyn, màs 0.2 kg, sy'n symud ar fuanedd 8 ms^{-1} ,
- (ii) car, màs 800 kg, sy'n symud ar fuanedd 22 ms^{-1} ,
- (iii) menyw, màs 55 kg, sy'n rhedeg ar fuanedd 4 ms^{-1} .

2 Mae buanedd car, màs 600 kg, yn lleihau o 25 ms^{-1} i 20 ms^{-1} . Darganfyddwch y newid yn ei egni cinetig.

3 Mae egni cinetig gronyn, màs 0.4 kg, sy'n symud ar fuanedd 20 ms^{-1} , yn lleihau 10 J yn sydyn. Darganfyddwch fuanedd newydd y gronyn.

4 Mae bwled, màs 0.02 kg ac sy'n symud ar fuanedd 100 ms^{-1} , yn mynd i mewn i floc o bren ac yn dod i aros ar ôl treiddio pellter o 0.05 m. Darganfyddwch wrthiant y pren

- (i) gan dybio ei fod yn gyson;
- (ii) gan dybio ei fod mewn cyfrannedd union â'r pellter mae'r bwled wedi treiddio i'r pren.

- 5 Mae car, màs 1000 kg, yn arafu o fuanedd 12 ms^{-1} ac yn dod i aros mewn 40 m. Gan gymryd mai maint y gwrthiannau eraill sy'n gweithredu ar y car yw 90 N, darganfyddwch y gwaith a wneir gan y grym arafu.
- 6 Mae car, màs 1000 kg, yn cael ei wthio gan ddau ddyn, un ar bob cornel yn y cefn. Mae'r naill ddyn a'r llall yn rhoi grym o 100 N ar ongl 15° i gyfeiriad mudiant y car ac mae gwrthiant cyson o 80 N yn gweithredu. Darganfyddwch
- (i) y gwaith a wneir gan y dynion wrth symud y car trwy bellter 10 m,
 - (ii) y buanedd a gyrhaeddir o ddisymudedd mewn 10 m.
- 7 Mae bachgen, màs 30 kg, ar lithren ddŵr yn disgyn trwy uchder fertigol 5 m o ddisymudedd. Darganfyddwch y buanedd y mae'n ei gyrraedd.
- 8 Mae dyn yn gwrthio berfa, màs 35 kg, gan roi grym 20 N ar ongl 30° i'r llorwedd. Mae gwrthiant o faint 10 N i'r mudiant. Darganfyddwch, o wybod bod y ferfa yn cael ei symud trwy bellter 10 m o ddisymudedd,
- (i) y gwaith a wneir gan y dyn;
 - (ii) y buanedd a gyrhaeddir.
- 9 Mae pêl, màs 0.4 kg, a deflir i fyny yn fertigol â buanedd o 10 ms^{-1} yn dod i aros yn enydaidd ar uchder 4.5 m uwchben y pwynt lle cafodd ei thaflu. Darganfyddwch faint y gwaith a wnaed gan y gwrthiant aer. Gan gymryd bod maint y gwaith a wneir gan y gwrthiant aer yr un fath ar y llwybr i lawr, darganfyddwch fuanedd y bêl wrth iddi ddychwelyd i'r pwynt lle cafodd ei thaflu.
- 10 Mae buanedd gronyn, màs 0.15 kg, sy'n llithro ar lawr garw yn lleihau o 7 ms^{-1} i 4 ms^{-1} tra bo'n symud trwy bellter o 6 m. Darganfyddwch
- (i) y gwaith a wneir gan ffrithiant;
 - (ii) y cyfernod ffrithiant.
- 11 Teflir gronyn, màs 0.4 kg, i fyny plân garw sy'n goleddu ar ongl 40° i'r llorwedd. Ei fuanedd yw 15 ms^{-1} a'r cyfernod ffrithiant yw 0.3. Defnyddiwch yr egwyddor gwaith-egni er mwyn darganfod y pellter mae'r gronyn yn symud i fyny'r plân cyn dod i aros.
- 12 Mae gronyn, màs 0.5 kg, sy'n rhydd i symud ar hyd yr echelin x , yn cael ei atynnu tuag at y tarddiad gan rym $\frac{10}{x^3}$ N pan fo'r gronyn ar bellter o x m o'r tarddiad. O wybod ei fod yn cael ei daflu o'r pwynt $x = 1$ ar fuanedd 10 ms^{-1} i gyfeiriad positif x , darganfyddwch ei fuanedd pan fydd $x = 2$.
- 13 Mae gronyn, màs 0.5 kg, yn symud ar hyd yr echelin x o dan weithrediad grym atyniadol i gyfeiriad y tarddiad ac â maint $\frac{10}{x^2}$ N pan fo'r gronyn ar bellter o x m o'r tarddiad. Teflir ef i gyfeiriad positif x ar fuanedd $u \text{ ms}^{-1}$ o'r pwynt lle mae $x = 1$. Darganfyddwch yr amod y mae angen i u ei fodloni er mwyn i'r gronyn beidio â dychwelyd i'w safle cychwynnol.

2.5 Egni potensial a chadwraeth egni

Yn achos grymoedd sy'n dibynnu ar safle yn unig, fel y rhai a ystyriwyd yn Adran 2.2, gellir diffinio ail fath o egni, sef **yr egni potensial** a gellir defnyddio hwn i ddatrys problemau cymharol gymhleth sy'n ymwneud â mwy nag un math o'r grymoedd hynny. Mae'r dull hwn yn arbennig o ddefnyddiol lle mae dau neu ragor o fathau safonol o rymoedd yn gweithredu, megis grym disgyrchiant a'r grym mewn llinyn elastig.

Dim ond ar gyfer grymoedd sy'n dibynnu ar safle y gellir diffinio **Egni Potensial (E.P.)**, sef y gwaith a wneir yn erbyn y grym er mwyn symud y pwynt lle mae'n gweithredu (gronyn fel arfer) o safle safonol i'w safle presennol. Ffordd arall o ystyried egni potensial yw dweud mai dyma'r gwaith a wneir gan y grym wrth symud y pwynt lle mae'n gweithredu o'i safle presennol i safle safonol. Egni potensial yw egni sy'n perthyn i ronyn yn rhinwedd ei safle.

Os yw'r grym i gyfeiriad positif x yn $F(x)$, y gwaith a wneir yn ei erbyn wrth symud o'r safle safonol $x = a$ i'r safle $x = x$ yw

$$- \int_a^x F(s) ds,$$

gyda'r safle safonol (h.y. y safle lle mae egni potensial yn sero) yn $x = a$.

Egni potensial oherwydd disgyrchiant

Wrth drafod grym disgyrchiant, y safle safonol a gymerir yn aml yw lefel y ddaear, ond mae unrhyw lefel briodol yn foddhaol. Os mesurir x tuag i fyny, yna y grym i'r cyfeiriad x sy'n gweithredu ar ronyn, mäs m , yw $-mg$, ac felly yr egni potensial oherwydd disgyrchiant (egni potensial disgyrchedd) ar uchder h uwchben y lefel sero yw mgh . Yn yr un modd yr egni potensial ar uchder H o dan y lefel sero yw $-mgH$.

Os caiff gronyn ei ryddhau o ddisymudedd ar uchder h uwchben y llawr, mae'n dechrau symud ar unwaith; h.y. mae gwaith yn cael ei wneud. Mae hyn eto yn cydfynd â'r syniad o egni fel y gallu i wneud gwaith. Erbyn i'r gronyn gyrraedd y llawr mae ei egni potensial yn sero ond bydd wedi ennill egni cinetig.

Wrth gyfrifo egni potensial disgyrchedd gronyn dylid cofio ei fod yn bositif os yw'r gronyn uwchben y lefel sero ac yn negatif os yw dan y lefel honno.

Egni potensial llinyn elastig

Gyda llinyn elastig mae'r egni potensial yn sero ar y pwynt lle nad yw'r llinyn yn cael ei estyn, h.y. mae'r estyniad s yn sero. Y gwaith a wneir yn erbyn y tyniant i estyn y

llinyn wrth fynd o $s = 0$ i $s = x$ yw $\int_0^x \frac{\lambda s}{l} ds = \frac{\lambda x^2}{2l}$, lle mae λ yn cynrychioli'r

modwlws elastig ac l yw'r hyd naturiol. Felly egni potensial llinyn estynedig, a estynnir trwy bellter x , yw
$$\int_0^x \frac{\lambda s}{l} ds = \frac{\lambda x^2}{2l}.$$

Weithiau gelwir hyn yn egni potensial elastig neu'n egni a gaiff ei storio yn y llinyn. Mae'r un canlyniad yn wir gyda sbring a gywesgir bellter x .

Yn y bôn, dull o gyfrifo'r gwaith a wneir gan fathau arbennig o rymoedd yw egni potensial, a gellir defnyddio'r syniad o egni potensial i ddatgan yr egwyddor gwaith-egni mewn ffordd ychydig yn wahanol. Rhoddir y manylion yn Adran 2.7 lle dangosir:

Mae cyfanswm egni mecanyddol yn gyson cyn belled â bod pob grym yn ddibynnol ar safle yn unig,

lle mae cyfanswm yr egni mecanyddol yn golygu swm egni cinetig ac egni potensial pob grym sy'n gweithredu.

Dyma'r egwyddor cadwraeth egni mecanyddol, ac mae grymoedd sy'n dibynnu ar safle yn unig yn cael eu galw, am resymau amlwg, yn rymoedd cadwrol.

Wrth gyfrifo egni potensial, gellir anwybyddu grymoedd nad ydynt yn gwneud gwaith, fel y rhai sy'n normal i gyfeiriad y mudiant a'r tyniant mewn llinyn tynn.

Os oes grymoedd anghadwrol yn bresennol, mae angen newid yr egwyddor cadwraeth egni mecanyddol gan ddatgan bod

Newid yng nghyfanswm yr egni mecanyddol =

Gwaith a wneir gan rymoedd anghadwrol

Os yw grym yn gadwrol, h.y. yn dibynnu ar safle yn unig, y gwaith a wneir wrth symud o $x = a$ i $x = b$ yw
$$\int_a^b F(x) dx$$
 a'r gwaith a wneir wrth fynd yn ôl o $x = b$ i $x = a$

yw
$$\int_b^a F(x) dx = - \int_a^b F(x) dx.$$
 Felly, cyfanswm y gwaith a wneir o $x = a$ i $x = b$ ac yn

ôl o $x = b$ i $x = a$ yw sero. Felly ffordd arall o brofi a yw grym yn gadwrol yw dweud bod cyfanswm y gwaith o un pwynt i un arall ac yn ôl yn sero. Gellir defnyddio'r prawf hwn i ddangos nad yw grymoedd ffrithiannol, sy'n ymddangos ar yr olwg gyntaf i fod yn gyson, yn gadwrol. Os yw gronyn yn llithro ar blân llorwedd garw, yna mae grym ffrithiannol μmg yn gweithredu ar y gronyn, lle mae μ yn cynrychioli'r cyfernod ffrithiant. Wrth symud yn uniongyrchol o $x = 0$ i $x = a$, y gwaith a wneir gan y grym ffrithiannol yw $-\mu mga$, gan fod y mudiant i'r cyfeiriad dirgroes i'r grym. Wrth symud yn ôl o $x = a$ i $x = 0$ mae rhagor o waith $-\mu mga$ yn cael ei wneud gan y grym ffrithiannol gan ei fod yn gweithredu eto yn y cyfeiriad dirgroes i'r mudiant. Felly nid yw'r gwaith a wneir wrth symud o bwynt ac yna yn ôl yn sero. Felly nid yw grymoedd ffrithiannol yn gadwrol.

Gellir defnyddio'r egwyddor cadwraeth egni mecanyddol pryd bynnag mae'r grymoedd yn gadwrol ond mae'n fwyaf defnyddiol mewn problemau sy'n ymwneud â

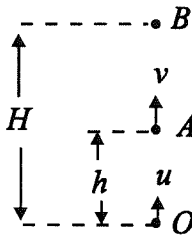
sbringiau neu linyddau a grym disgrychiant gan fod yr egnïon potensial ar gyfer y rhain yn hysbys. Bydd cwestiynau sy'n cynnwys defnyddio cadwraeth egni yn rhoi gwybodaeth ar wahanol bwyntiau o'r mudiant ac mae'n syniad da gosod y datrysiad mewn ffordd sy'n dangos yn eglur yr egnïon ar y pwyntiau hyn ac yna cymhwyso'r egwyddor cadwraeth egni mecanyddol ar gyfer pob pwynt posibl.

Enghraifft 2.11

Teflir gronyn, màs m , i fyny yn fertigol ar fuanedd cychwynnol u . Darganfyddwch

(i) yr uchder mwyaf a gyrhaeddir,

(ii) y buanedd pan fydd y gronyn ar uchder h sy'n llai na'r uchder mwyaf.



Y pwyntiau perthnasol yn y broblem yw'r pwynt cychwynnol O , y pwynt A ar uchder h , a phwynt B ar yr uchder mwyaf a ddynodir gan H . Ar y pwynt hwn y buanedd yw sero. Dynodir y buanedd ar A gan v .

Ar O ,	E.P. = 0,	E.C. = $\frac{1}{2}mu^2$,
Ar A ,	E.P. = mgh ,	E.C. = $\frac{1}{2}mv^2$,
Ar B ,	E.P. = mgH ,	E.C. = 0.

Mae cyfanswm yr egni mecanyddol yn O yn hafal i'r cyfanswm yn B .

h.y. mae
$$\frac{1}{2}mu^2 = mgH,$$

ac felly mae
$$H = \frac{u^2}{2g}.$$

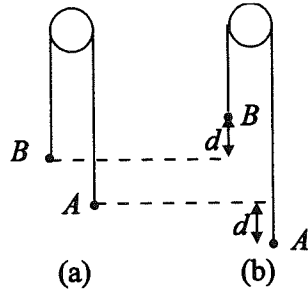
Mae cyfanswm yr egni mecanyddol yn A yn hafal i'r cyfanswm yn O .

h.y. mae
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mu^2.$$

Mae datrys am v yn rhoi
$$v = \sqrt{u^2 - 2gh}.$$

Gellid datrys y broblem benodol hon yr un mor rhwydd trwy ddefnyddio'r hafaliadau mudiant o dan gyflymiad unffurf.

Enghraifft 2.12



Mae diagram (a) yn dangos dau ronyn A a B , masau $5m$ ac m , gyda'r naill a'r llall ynghlwm wrth ddau ben llinyn anestynadwy ysgafn sy'n mynd dros bwli ysgafn llyfn. Ar y cychwyn mae'r gronynnau yn cael eu dal yn ddisymud gyda'r llinyn yn dynn ac yna maent yn cael eu rhyddhau. Darganfyddwch, trwy ddefnyddio cadwraeth egni, fuanedd A ar ôl iddo gwmpo bellter d .

Cyfanswm y gwaith a wneir gan y tyniant yw sero ac felly, os ystyrir y ddau ronyn, mae cyfanswm yr egni mecanyddol yn cael ei gadw. Mae'r ddau ronyn hefyd yn symud gyda'r un buanedd ac os yw'r naill yn cwmpo bellter d mae'r llall yn codi yr un pellter. Dangosir y safle cychwynnol a'r safle pan fydd gronyn A wedi cwmpo bellter d yn niagramau (a) a (b).

Diagram (a)	Gronyn A : E.C. = 0, E.P. = 0,
	Gronyn B : E.C. = 0, E.P. = 0.
Diagram (b),	Gronyn A : E.C. = $\frac{1}{2} 5mv^2$, E.P. = $-5mgd$,
	Gronyn B : E.C. = $\frac{1}{2} mv^2$, E.P. = mgd .

Mae hafalu cyfanswm yr egni ar y ddau safle yn rhoi

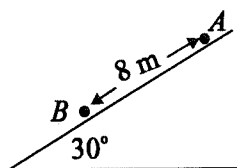
$$3mv^2 - 4mgd = 0.$$

Felly
$$v = \sqrt{\frac{4gd}{3}}.$$

Gellir datrys yr enghraifft hon fel yn adran 5.3 yn y llyfr M1 trwy ddarganfod y cyflymiad a defnyddio'r fformwlâu cyflymiad cyson ond, yn yr achos hwn, mae defnyddio cadwraeth egni yn osgoi cyfrifo cyflymiad.

Enghraifft 2.13

Mae gronyn yn cael ei ryddhau o ddisymudedd ar bwynt A ar blân llyfn sy'n goleddu ar ongl 30° i'r llorwedd. Darganfyddwch ei fuanedd ar ôl iddo symud i bwynt B , sef pellter o 8 m i lawr y plân.



Ar wahân i ddisgyrchiant, yr unig rym sy'n gweithredu ar y gronyn yw adwaith y plân. Mae hyn yn berpendicwlar i'r mudiant ac nid yw'n gwneud gwaith. Felly mae cyfanswm yr egni mecanyddol yn cael ei gadw.

Ni roddir y màs ac felly fe'i dynodir gan m kg a dynodir y buanedd ar B gan v ms⁻¹. Ar A bydd y gronyn ar uchder $8 \times \sin 30^\circ m = 4$ m uwchben B .

Ar A : E.C. = 0, E.P. = $m9.8 \times 4$ J = $39.2m$ J.

Ar B : E.C. = $\frac{1}{2} mv^2$ J, E.P. = 0.

Mae hafalu cyfanswm yr egnïon yn rhoi

$$39.2m = \frac{1}{2} mv^2,$$

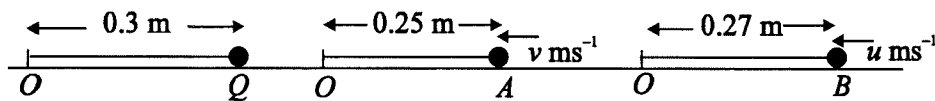
ac felly mae $v^2 = 78.4$ a $v = 8.85$.

Gellid bod wedi datrys hon trwy ddarganfod y gydran ar hyd plân y grym disgyrchiant; sef $\frac{1}{2} mg$. Yna y cyflymiad i lawr y plân yw $\frac{1}{2} g$ a gellir defnyddio'r fformwlâu cyflymiad cyson.

Enghraifft 2.14

Mae gronyn, màs 0.4 kg, ynghlwm wrth un pen llinyn elastig, modwlws 2 N a hyd naturiol 0.25 m. Mae pen arall y llinyn ynghlwm wrth bwynt sefydlog O ar fwrdd llorwedd llyfn. Caiff y llinyn ei estyn bellter o 0.05 m ac yna mae'r gronyn yn cael ei ryddhau o ddisymudedd. Darganfyddwch

- (i) fuanedd y gronyn pan fydd y llinyn yn dychwelyd i'w safle anestynedig,
- (ii) y buanedd pan fydd yr estyniad yn 0.02 m.



Mae'r diagramau yn dangos y safle cychwynnol, y safle gydag estyniad sero a'r safle pan fydd yr estyniad yn 0.02 m.

Mae tri phwynt sydd angen eu hystyried, sef y pwynt cychwynnol Q , y pwynt A gydag estyniad sero a'r pwynt B gydag estyniad 0.02 m. Dynodir y cyflymderau ar A a B gan v ms⁻¹ ac u ms⁻¹, yn ôl eu trefn. Y grym cydeffaith yn berpendicwlar i'r bwrdd yw sero ac felly nid yw'n gwneud gwaith.

Mae'r fformiwla ar gyfer egni potensial llinyn elastig yn dangos, pan gaiff y llinyn ei estyn x m, mai ei egni potensial yw $\frac{\lambda x^2}{l} = \frac{2x^2}{2 \times 0.25}$ J = $4x^2$ J.

Ar Q , E.P. = $4 \times (0.05)^2 = 0.01$ J, E.C. = 0.

Ar A , E.P. = 0, E.C. = $\frac{1}{2} \times 0.4v^2 = 0.2v^2$ J,

Ar B , E.P. = $4 \times (0.02)^2$ J, E.C. = $0.2u^2$ J.

Mae hafalu'r egni ar Q i'r egni ar A yn rhoi

$$0.2 v^2 = 0.01,$$

ac felly

$$v = 0.22.$$

Mae hafalu'r egni ar Q i'r egni ar B yn rhoi

$$0.2 u^2 + 4 \times (.02)^2 = 0.01,$$

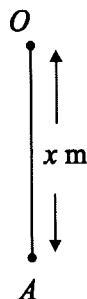
ac felly

$$u = 0.2.$$

Enghraifft 2.15

Mae gronyn, màs 0.6 kg, ynghlwm wrth un pen llinyn elastig, modwlws 352.8 N a hyd naturiol 0.5 m. Mae pen arall y llinyn ynghlwm wrth bwynt sefydlog O . Ar y cychwyn mae'r gronyn yn cael ei ddal ar O ac yna mae'n cael ei ryddhau o ddisymudedd. Darganfyddwch estyniad mwyaf y llinyn.

Model o 'naid bynji' sydd dan sylw yma.



Mae dau safle'r gronyn yn cael eu dangos yn y diagram. Bydd yn cwmpo nes iddo ddod i aros yn enydaidd ar bwynt A ar bellter x m o dan O , fel bod yr egni cinetig yn sero ar ddechrau ac ar ddiwedd y mudiant.

Mae dau derm sy'n cyfrannu at yr egni potensial, sef yr egni potensial disgyrchedd a'r egni potensial elastig. Mae'r fformiwla ar gyfer egni potensial y llinyn elastig yn dangos bod yr egni potensial elastig pan fydd y gronyn ar ddyfnder x m dan O yn

$$\frac{352.8(x - 0.5)^2}{2 \times 0.5} \text{ J os bydd } x > 0.5, \text{ neu yn sero fel arall.}$$

Ar O ,

$$\text{E.P. disgyrchedd} = 0,$$

$$\text{E.P. elastig} = 0,$$

$$\text{E.C.} = 0.$$

Ar A ,

$$\text{E.P. disgyrchedd} = -0.6 \times 9.8 x = -5.88x \text{ J},$$

$$\text{E.P. elastig} = \frac{352.8(x - 0.5)^2}{2 \times 0.5} \text{ J},$$

$$\text{E.C.} = 0.$$

Mae hafalu cyfanswm yr egni ar O ac A yn rhoi

$$\frac{352.8(x - 0.5)^2}{2 \times 0.5} - 5.88x = 0.$$

Mae ehangu $(x - 0.5)^2$ a chasglu'r termau yn yr hafaliad yn rhoi

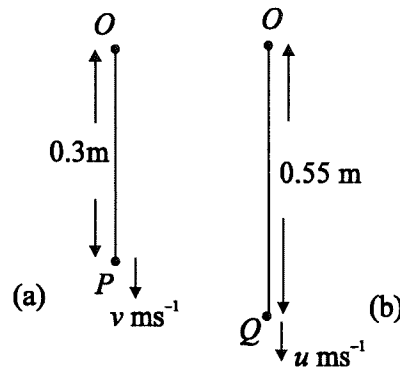
$$352.8x^2 - 358.68x + 88.2 = 0.$$

Hafaliad cwadratig am x yw hwn. Mae defnyddio'r fformiwla i ddatrys hafaliadau cwadratig yn rhoi'r gwraidd fel 0.6 a 0.417. Dim ond pan fo'r llinyn elastig yn dynn y mae'r hafaliad yn ddilys, h.y. pan fo $x > 0.5$, felly y datrysiad cywir yw $x = 0.6$.

Enghraifft 2.16

Darganfyddwch fuanedd y gronyn yn yr enghraifft uchod pan fo'r gronyn

- (i) ar ddyfnder 0.3 m o dan O ,
- (ii) ar ddyfnder 0.55 m o dan O .



Mae diagram (a) yn dangos y pwynt P , sy'n cyfateb i'r achos cyntaf, ac mae diagram (b) yn dangos y pwynt Q , sy'n cyfateb i'r ail achos.

Dynodir y cyflymder ar P gan $v \text{ ms}^{-1}$ a'r cyflymder ar Q gan $u \text{ ms}^{-1}$.

Achos (i)

Bydd y llinyn yn llac ar P ac felly ni fydd ganddo egni potensial elastig. Cymerir y pwynt O fel lefel sero o egni potensial.

Ar O , E.P. disgyrchedd = 0,

E.P. elastig = 0,

E.C. = 0.

Ar P , E.P. disgyrchedd = $-0.6 \times 9.8 \times 0.3 \text{ J} = -1.764 \text{ J}$,

E.P. elastig = 0,

E.C. = $\frac{1}{2} \times 0.6 v^2 \text{ J} = 0.3v^2 \text{ J}$.

Mae hafalu cyfanswm yr egnion ar O a P yn rhoi

$$0.3v^2 - 1.764 = 0,$$

ac felly $v = 2.42$.

Achos (ii)

Ar Q , E.P. disgyrchedd = $-0.6 \times 9.8 \times 0.55 \text{ J} = -3.234 \text{ J}$,

E.P. elastig = $\frac{352.8(0.55 - 0.5)^2}{2 \times 0.5} \text{ J} = 0.882 \text{ J}$,

$$E.C. = 0.3u^2.$$

Mae hafalu cyfanswm yr egniön ar O a Q yn rhoi

$$0.3u^2 - 3.234 + 0.882 = 0.$$

Datrysiaid yr hafaliad hwn yw $u = 2.8$.

Enghraifft 2.17

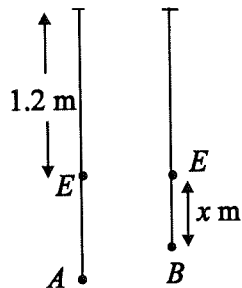
Mae gronyn, màs 0.4 kg, ynghlwm wrth un pen llinyn elastig, hyd naturiol 1 m a modwlws 19.6 N, ac mae pen arall y llinyn ynghlwm wrth bwynt sefydlog O . Ar y cychwyn mae'r gronyn mewn cydbwysedd ac mae'r llinyn yn fertigol. Yna mae'n cael ei dynnu i bwynt A ar bellter 0.2 m o dan y safle cydbwysedd ac yn cael ei ryddhau o ddisymudedd. Darganfyddwch

- hyd y llinyn yn y safle cydbwysedd,
- fuanedd y gronyn pan fydd ar ddyfnder 0.1 m o dan y safle cydbwysedd,
- safle'r gronyn pan ddaw i aros am yr ail dro.

Y cam cyntaf yw darganfod y pwynt cydbwysedd E . Os yw estyniad y llinyn yn y m, yna mae

$$\frac{19.6y}{1} = 0.4 \times 9.8,$$

ac felly mae $y = 0.2$. Felly hyd y llinyn yn y safle cydbwysedd yw 1.2 m.



Mae'r diagram yn dangos pwynt cychwynnol A y gronyn a'r sefyllfa lle mae'r gronyn ar bwynt B sydd ddyfnder x m o dan E . Yr estyniad yn y safle hwn yw $(0.2 + x)$ m ac felly yr egni potensial elastig yw $\frac{19.6(0.2 + x)^2}{2}$. Darganfyddir yr egni potensial elastig cychwynnol trwy amnewid $x = 0.2$ yn y term hwn. Cymerir yr egni potensial ar y safle cydbwysedd fel sero.

Ar A , $E.P. \text{ disgyrchedd} = -0.4 \times 9.8 \times 0.2 \text{ J} = 0.784 \text{ J}$

$$E.P. \text{ elastig} = \frac{19.6(0.4)^2}{2} \text{ J} = 1.568 \text{ J}$$

$$E.C. = 0.$$

Ar B , $E.P. \text{ disgyrchedd} = -0.4 \times 9.8 \times x \text{ J} = -3.92x \text{ J}$

$$\text{E.P. elastig} = \frac{19.6(0.2 + x)^2}{2} \text{ J}$$

$$\text{E.C.} = 0.2v^2 \text{ J.}$$

Mae hafalu cyfanswm yr egniïon ar A a B yn rhoi

$$\frac{19.6(0.2 + x)^2}{2} - 3.92x + 0.2v^2 = 1.568 - 0.784.$$

$$\text{Mae'r hafaliad yn symleiddio i} \quad 9.8x^2 + 0.2v^2 = 0.392.$$

Mae amnewid $x = 0.1$ yn rhoi $v = 1.21$.

Mae amnewid $v = 0$ yn rhoi $x = \pm 0.2$ ac felly mae'r gronyn yn dod i aros am yr ail dro ar uchder 0.2 m uwchben y safle cydbwysedd lle mae'r llinyn ar fin mynd yn llac. Gan nad yw'r pwynt hwn yn bwynt cydbwysedd nid yw cyfanswm y grym yno yn sero ac felly bydd y gronyn yn symud oddi yno. Gellir gwirio bod y grym ar y pwynt hwn yn gweithredu tuag i lawr ac felly y bydd y gronyn yn symud i lawr. Bydd yn aros am ennyd ar y pwynt A ac yna bydd yn mynd trwy'r gylchred unwaith eto.

Enghraifft 2.18

Atebwch rannau (ii) a (iii) Enghraifft 2.17 pan fydd y gronyn yn cael ei dynnu i bellter 0.3 m o dan y pwynt cydbwysedd.

Yr unig wahaniaeth rhwng y cwestiwn hwn a'r un blaenorol yw bod y safle cychwynnol yn cyfateb i $x = 0.3$. Mae hyn yn golygu mai dyma'r hafaliad egni nawr:

$$\frac{19.6(0.2 + x)^2}{2} - 0.4 \times 9.8x + 0.2v^2 = \frac{19.6(0.5)^2}{2} - 0.4 \times 9.8 \times 0.3.$$

Mae ehangu $(0.2 + x)^2$ a chasglu termau yn rhoi

$$9.8x^2 + 0.2v^2 = 0.882.$$

Mae amnewid $x = 0.1$ yn rhoi $v = 1.98$.

Mae amnewid $v = 0$ yn rhoi $x = \pm 0.3$ ac felly bydd y gronyn yn dod i aros am yr ail dro ar uchder 0.3 m uwchben y pwynt cydbwysedd. Fodd bynnag, bydd y llinyn wedi llacio pan gyrhaeddodd y gronyn bellter 0.2 m uwchben y safle cydbwysedd ac felly mae'r hafaliad uchod yn ddilys pan fo $x \leq 0.2$ yn unig. Yna mae $0.2v^2 = 0.49$. Tu hwnt i'r safle hwn yr unig egni potensial yw egni potensial disgyrchedd. Mae cymryd yr egni potensial ar y pwynt hwn i fod yn sero a chymhwyso'r egwyddor cadwraeth egni yn rhoi $0.49 = 0.4 \times 9.8h$, lle mae h yn dynodi'r uchder pan fydd y buanedd yn sero, sef 0.125. Felly yr uchder uwchben y safle cydbwysedd yw 0.325 m.

Ymarferion 2.5

1 Darganfyddwch y newid mewn egni potensial yn yr achosion canlynol:

- (i) gronyn, màs 0.3 kg, sy'n codi trwy bellter fertigol o 1.5 m,
- (ii) dyn, màs 60 kg, yn cerdded 50 m i lawr llethr sy'n goleddu ar 45° i'r llorwedd,
- (iii) carreg, màs 2 kg, a ollyngir i syrthio 5 m o ben pont.

- 2 Darganfyddwch gynnnydd yn egni potensial disgrychedd dyn, màs 70 kg, sy'n dringo i ddegfed llawr bloc o fflatiau. (Llawr 0 yw'r llawr isaf.)
Y pellter rhwng y lloriau yw 3 m.
- 3 Gollyngir carreg o ddisymudedd o ben pont i'r dŵr 10 m islaw. Darganfyddwch ei buanedd yn taro'r dŵr.
- 4 Teflir gronyn ar fuanedd 5 ms^{-1} i fyny llinell goledd mwyaf plân llyfn sy'n goleddu ar ongl 40° i'r llorwedd. Defnyddiwch yr egwyddor cadwraeth egni i ddarganfod y pellter mae'r gronyn yn teithio ar hyd y plân cyn dod i aros yn enydaidd.
- 5 Atebwch y cwestiwn blaenorol pan fydd y plân yn arw gyda chyfernod ffrithiant 0.2.
- 6 Mae gronyn, màs m , yn aros ar fwrdd llorwedd llyfn ac mae wedi ei gysylltu trwy llinyn anestynadwy ysgafn, dros bwli llyfn, â gronyn, màs $3m$. Mae'r gronynnau yn cael eu dal yn ddisymud gyda'r llinyn yn dynn ac yna cânt eu rhyddhau. Darganfyddwch, trwy ddefnyddio cadwraeth egni, fuanedd y gronynnau pan fydd yr un trymaf wedi cwmpo trwy bellter h .
- 7 Mae dau ronyn, masau 0.8 kg ac 0.6 kg, wedi eu cysylltu trwy llinyn anestynadwy ysgafn sy'n mynd dros bwli llyfn bach. Cânt eu rhyddhau o ddisymudedd gyda'r llinyn yn dynn. Darganfyddwch eu buaneddau pan fo'r gronyn trymaf wedi cwmpo 0.2 m.

8



Mae'r diagram yn dangos sbring, gydag un pen yn sefydlog, mewn tiwb llorwedd. Mae gan y sbring hyd naturiol 0.2 m a modwlws elastig 160 N. Rhoddir gronyn, màs 0.02 kg, ar y pen rhydd ac mae'r sbring yn cael ei gywasgu trwy bellter 0.05 m ac yna ei ryddhau. Darganfyddwch fuanedd y gronyn pan fydd y sbring ar ei safle anestynedig.

- 9 Mae dau ronyn, y naill a'r llall â màs m , wedi eu cysylltu trwy llinyn elastig ysgafn sydd â hyd naturiol a a modwlws 4 mg . Mae'r llinyn yn gorwedd ar fwrdd llorwedd llyfn ac yn cael ei estyn gan rymoedd cyfartal nes bod ei hyd yn $1.6a$. Yna caiff y ddau ronyn eu rhyddhau ar yr un pryd. Gan gymryd bod y ddau ronyn yn symud ar yr un buanedd darganfyddwch werth y buanedd pan fyddant bellter a oddi wrth ei gilydd.

Yng nghwestiynau 10 i 12 mae un pen llinyn elastig ysgafn, modwlws $k \text{ mg}$ N a hyd naturiol l m, yn sefydlog ar bwynt O ac mae gronyn â màs m kg ynghlwm wrth y pen arall. Yna caiff y gronyn ei ryddhau o O . Darganfyddwch estyniad y llinyn pan fydd y gronyn yn dod i aros yn enydaidd am y tro cyntaf.

- 10 $k = 1$; $l = 1$

11 $k = 4; l = 3$.

12 $k = 5; l = 2$.

Yng nghwestiynau 13 i 14 mae un pen llinyn elastig ysgafn, modwlws kmg N a hyd naturiol l m, yn sefydlog ar bwynt O ac mae gronyn â màs m kg ynghlwm wrth y pen arall. Ar y cychwyn mae'r gronyn yn ddisymud mewn cydbwysedd ac yna mae'n cael ei dynnu i lawr trwy bellter d m a'i ryddhau o ddisymudedd. Darganfyddwch y pellter o dan O lle mae'r gronyn yn dod i aros yn enydaidd am y tro cyntaf.

13 $l = 3, k = 6$, a $d = 0.5$.

14 $l = 2, k = 8$, a $d = 0.4$.

2.6 Pŵer

Yn ymarferol mae angen i beiriant nid yn unig wneud maint penodol o waith, ond hefyd wneud y gwaith hwnnw mewn cyfwng amser penodol. Mae car cryf yn dangos ei bŵer trwy allu cyflymu'n sydyn; h.y. mae'n cynhyrchu egni cinetig yn gyflymach na char sydd â llai o bŵer.

Pŵer yw'r gyfradd gwneud gwaith. Os caiff 1 joule ei gynhyrchu mewn 1 eiliad, y gyfradd weithio yw 1 wat. Y wat (W) a'r kilowat ($kW = 10^3$ W) yw'r unedau safonol ar gyfer mesur pŵer.

Os yw'r pwynt lle mae grym F yn gweithredu yn symud pellter bychan δx mewn cyfwng amser bychan δt , yna y newid yn y gwaith, a ddynodir gan δW , yw $F\delta x$. Darganfyddir y gyfradd gwneud gwaith trwy rannu δW â δt a gadael i δt fynd yn fychan iawn. Felly y gyfradd weithio, h.y. y pŵer, yw gwerth $F \frac{\delta x}{\delta t}$ wrth i δx a δt fel ei gilydd fynd yn fychan iawn. Mae hyn, ar sail y syniad o ddeilliad fel cyfradd newid, yn $F \frac{dx}{dt}$ ac, yn ôl y diffiniad o gyflymder, yn Fv .

Wrth ddatrys problemau ar gerbydau'n symud, gellir cyfrifo cyfradd weithio peiriant cerbyd trwy ddadansoddi ei fudiant.

Yna tybir bod y pŵer hwn i gyd yn cael ei drosglwyddo i'r olwynion gyrru heb golled.

Os dynodir y gwaith a wneir rhwng rhyw amser safonol ac amser t gan $W(t)$, gan y gallai amrywio gydag amser, yna mae'r diffiniad o bŵer P yn rhoi

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

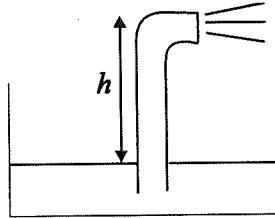
Gan fod W yn dibynnu ar t , bydd P hefyd ac felly darganfyddir y gwaith a wneir rhwng $t = 0$ a $t = T$ trwy integru'r mynegiad hwn; h.y.

$$\text{Mae'r gwaith a wneir} = \int_0^T P dt.$$

Os, a dim ond os, yw'r pŵer yn gyson,

y gwaith a wneir dros gyfwng amser T yw PT .

Gellir defnyddio'r berthynas rhwng pŵer a gwaith i gyfrifo'r pŵer y mae ei angen ar bwmp er mwyn codi dŵr trwy uchder h ac yna ei bwmpio allan ar fuanedd v fel yn y diagram.



Mae'r gwaith a wneir gan y pwmp yn cael ei drawsnewid i egni cinetig a photensial y dŵr a maint y gwaith a wneir bob eiliad felly yw $\frac{1}{2}mv^2 + mgh$, lle mae m yn dynodi'r màs a godir bob eiliad. Gan y tybir bod y pŵer P yn gyson, mae'r gwaith hwn yn hafal i P ac felly

$$P = \frac{1}{2}mv^2 + mgh.$$

Enghraifft 2.19

Mae grym yn gweithredu ar ronyn, màs 0.2 kg, sy'n symud ar hyd llinell syth fel bod cyflymder y gronyn ar amser t eiliad yn $t^4 \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch gyfradd gweithio'r grym sy'n gweithredu ar y gronyn.

Y cam cyntaf yw darganfod y grym, sef $0.2 \times \text{cyflymiad}$. Gellir darganfod y cyflymiad trwy ddifferu'r cyflymder a chael ei fod yn $4t^3 \text{ ms}^{-2}$. Felly y gyfradd weithio yw

$$0.8 t^3 \times \text{cyflymder} = 0.8 t^7 \text{ W}.$$

Enghraifft 2.20

Ar amser t eiliad, cyfradd weithio'r grym sy'n gweithredu ar ronyn 0.4 kg sy'n symud ar linell syth yw $6t^5 \text{ W}$. O wybod bod gan y gronyn fuanedd 2 ms^{-1} ar amser $t = 0$ darganfyddwch ei fuanedd ar amser $t = 1$.

Y newid yn yr egni cinetig yw'r gwaith a wneir, a'r gwaith a wneir rhwng $t = 0$ a $t = 1$

$$\text{yw} \quad \int_0^1 6t^5 dt \text{ J} = 1 \text{ J}.$$

Os yw'r buanedd yn $v \text{ ms}^{-1}$ pan fo $t = 1$, yna y newid yn yr egni cinetig yw $0.2v^2 - 0.8 \text{ J}$.

Felly mae $v^2 = 9$ ac felly $v = 3$.

Enghraifft 2.21

Bob eiliad mae angen i bwmp godi 100 kg o ddŵr i uchder 15 m a'i ryddhau trwy chwistrell ar fuanedd 10 ms^{-1} . Darganfyddwch y gyfradd weithio leiaf sydd ei hangen ar y pwmp os yw effeithlonedd y pwmp yn

- (i) 100%,
- (ii) 50 %.

Y newid mewn E.P. bob eiliad yw $100 \times 9.8 \times 15 \text{ J} = 14700 \text{ J}$.

Y newid mewn E.C. bob eiliad yw $50 \times 10^2 \text{ J} = 5000 \text{ J}$.

Cyfanswm y newid egni bob eiliad, h.y. y gwaith a wneir bob eiliad, yw 19 700 J.

Felly y gyfradd weithio leiaf, os yw'r pwmp yn 100% effeithlon, yw 19.7 kW.

Gydag effeithlonedd o 50%, byddai angen cyfradd o 39.4 kW.

2.7 Deilliant o'r canlyniadau sylfaenol

Yn yr adran hon rhoddir deilliant o'r egwyddor gwaith-egni ar gyfer achos gronyn â màs m , sy'n symud ar hyd yr echelin x , dan weithrediad grym, y dynodir ei gydran i gyfeiriad positif x gan F . Dynodir y cyflymder i gyfeiriad positif x ar amser t gan v .

Mae ail ddeddf mudiad Newton yn rhoi

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

Mae lluosgi'r hafaliad hwn â v yn rhoi

$$mv \frac{dv}{dt} = Fv.$$

Wrth ddefnyddio rheol y lluoswm ar gyfer differu, gellir ysgrifennu'r ochr chwith fel

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right), \text{ sef y gyfradd newid egni cinetig.}$$

Yr ochr dde yw'r pŵer, h.y. y gyfradd wneud gwaith. Felly yr hafaliad yw

$$\text{Cyfradd newid egni cinetig} = \text{Cyfradd gwneud gwaith.}$$

Felly mae integru'r hafaliad hwn yn rhoi

$$\text{Newid egni cinetig dros unrhyw gyfwng} = \text{Gwaith a wneir dros y cyfwng.}$$

Dyma'r egwyddor gwaith-egni yn ei ffurf symlaf. Mewn gwirionedd rydym wedi profi hyn ar gyfer gronyn sy'n symud ar linell, a'r gwaith a wneir yw'r gwaith a wneir gan rymoedd ar hyd y llinell. Mae'n wir hefyd pan gynhwysir gwaith a wneir gan rymoedd nad ydynt yn gweithredu ar hyd y llinell. Y rheswm yw y bydd y gwaith a wneir gan gydrannau'r grymoedd hyn yn berpendicwlar i'r llinell yn sero, gan y bydd mudiad y cydrannau hyn yn berpendicwlar i'r llinell.

Os yw pob grym sy'n gweithredu yn ddibynnol ar safle, yna mae cyflwyno'r egni potensial yn rhoi'r egwyddor cadwraeth egni mecanyddol. Gellir dangos hyn fel a ganlyn.

Y gwaith a wneir gan rym F wrth symud o $x = x_1$ i $x = x_2$ yw $\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$.

O briodweddau integrynau, gellir ailysgrifennu hyn fel

$$\int_a^{x_2} F(x) dx - \int_a^{x_1} F(x) dx.$$

Yr egni potensial ar $x = x_1$, er enghraifft, yw $-\int_a^{x_1} F(x) dx$, ac felly mae'r mynegiad

uchod ar gyfer y gwaith a wneir yn hafal i

$$-\text{E.P. ar } x = x_2 + \text{E.P. ar } x = x_1.$$

Felly gellir ailysgrifennu'r egwyddor gwaith-egni fel

$$(\text{E.C. ar } x = x_2 - \text{E.C. ar } x = x_1) = -(\text{E.P. ar } x = x_2 + \text{E.P. ar } x = x_1).$$

Gellir aildrefnu hyn eto fel

$$(\text{E.C. ar } x = x_2 + \text{E.P. ar } x = x_2) = (\text{E.C. ar } x = x_1 + \text{E.P. ar } x = x_1).$$

Swm yr egni cinetig a'r egni potensial yw cyfanswm yr egni mecanyddol ac felly

Mae cyfanswm yr egni mecanyddol yn gyson cyn belled â bod pob grym yn ddibynnol ar safle yn unig.

Ni ellir diffinio egni potensial ond ar gyfer grymoedd cadwrol. Os oes grymoedd anghadwrol yn bresennol, yna y gwaith a wneir gan y grymoedd i gyd yw minws y newid yn E.P. y grymoedd cadwrol plws y gwaith a wneir gan y grymoedd anghadwrol. Yna mae angen newid yr egwyddor cadwraeth egni mecanyddol fel hyn:

Newid yng nghyfanswm yr egni mecanyddol =

Gwaith a wneir gan rymoedd anghadwrol.

Ymarferion 2.6

- 1 Mae gan ronyn fàs 0.5 kg a chydran ei gyflymder i gyfeiriad positif x ar amser t eiliad yw $4\exp 3t \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch ar ba gyfradd y mae'r grym sy'n gweithredu arno yn gweithio.
- 2 Darganfyddwch gyfanswm y gwaith a wneir mewn 10 eiliad gan rym pan fo'r gyfradd weithio yn
 - (i) 3 kW,
 - (ii) $3\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{10}\right)\right) \text{ kW}$.
- 3 Mae gan ronyn, mäs 0.8 kg, fuanedd 4 ms^{-1} ar amser $t = 0$ eiliad, ac mae'r grym sy'n gweithredu arno yn gweithio ar gyfradd o $10t^9 \text{ W}$ ar amser t eiliad. Darganfyddwch ei fuanedd pan fydd $t = 2$.

- 4 Mae pwmp dŵr am godi 50 kg o ddŵr bob eiliad trwy uchder 20 m. Mae'r dŵr yn dod allan fel jet ar fuanedd 50 ms^{-1} .
Darganfyddwch yr egni cinetig a'r egni potensial a roddir i'r dŵr bob eiliad a thrwy hyn darganfyddwch y pŵer y byddai angen i'r pwmp ei ddatblygu petai ei effeithlonedd yn
(i) 100%,
(ii) 75%.
- 5 Mae pwmp yn pwmpio 220 kg o ddŵr bob munud, ac mae'r dŵr yn dod allan mewn jet llorwedd ar fuanedd 30 ms^{-1} .
Darganfyddwch egni cinetig y dŵr a bwmpir bob eiliad. Effeithlonedd y peiriant sy'n gyrru'r pwmp yw 35%.
Darganfyddwch ar ba gyfradd y mae'r peiriant hwn yn gweithio.

2.8 Problemau sy'n ymwneud â mudiant cerbydau

Mae'r problemau mudiant cerbydau rydym eisoes wedi delio â hwy wedi bod yn rhai lle rhoddwyd y grym gyrru yn echblyg. Nid dyma sy'n digwydd yn ymarferol gan mai'r hyn sy'n hysbys fel arfer am injan cerbyd yw ei gyfradd weithio neu ei bŵer. Gyda cheir, yr uned bŵer hen ffasiwn, y cyfeirir ati'n aml, yw marchnerth (M.N.) ac mae 1 M.N. = 745.7 wat. Os yw injan yn gweithio ar P wat a bod pwynt cyffwrdd yr olwynion gyda'r llawr yn symud ar fuanedd $v \text{ ms}^{-1}$, yna mae'r grym gyrru F N ar yr olwynion yn bodloni'r hafaliad

$$P = Fv.$$

Gellir defnyddio'r hafaliad hwn i gyfrifo grym gyrru cerbydau sy'n gweithio ar gyfradd o P W sy'n symud ar fuanedd $v \text{ ms}^{-1}$. (Pan nad yw car yn llithro, mae buanedd pwynt cyffwrdd yr olwynion yn hafal i fuanedd y car, ac fel arfer cymerir hyn yn ganiataol.)

Mae problemau lle roddir y pŵer a ddatblygwyd gan gerbyd yn debyg iawn i broblemau blaenorol sy'n ymwneud â mudiant cerbydau, ar wahân i'r ffaith bod yn rhaid cyfrifo'r grym o'r pŵer a'r buanedd. Mewn rhai problemau, rhaid darganfod y buanedd cyson y gall y cerbyd deithio arno pan fo'r injan yn gweithio ar bŵer penodol. Gan fod y cerbyd yn symud ar fuanedd cyson, rhoddir y cyflymiad, sef sero. Weithiau, efallai y rhoddir y buanedd uchaf. Mae macsimwm yn bwynt sefydlog, felly mae $\frac{dv}{dt} = 0$, h.y. bydd y cyflymiad yn sero.

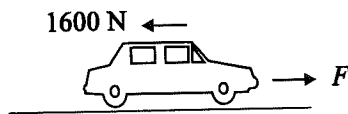
Enghraifft 2.22

Mae beic modur penodol yn cynhyrchu pŵer mwyaf o 24 kW ac, wrth iddo weithio ar y gyfradd hon, ei fuanedd yw 40 ms^{-1} . Darganfyddwch y grym gyrru.

Mae'r grym gyrru $F \text{ N}$ yn bodloni'r hafaliad $24000 = 40 F$, sy'n rhoi F yn 600.

Enghraifft 2.23

Mae car yn teithio ar fuanedd cyson, gyda'i beiriant yn gweithio ar gyfradd o 40 kW, yn erbyn gwrthiant o 1600 N. Darganfyddwch y buanedd.



Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu. Os yw $v \text{ ms}^{-1}$ yn dynodi buanedd y car yna mae $F = \frac{40\,000}{v} \text{ N}$. Gan fod y cyflymiad yn sero mae'r grym yn hafal i'r gwrthiant; h.y. $\frac{40000}{v} = 1600$, ac felly mae $v = 25$.

Enghraifft 2.24

Cyfanswm màs lori yw 2 dunnell fetrig. Mae ei pheiriant yn gweithio ar 50 kW. Mae'r lori yn teithio ar fuanedd cyson o 20 ms^{-1} ar hyd ffordd wastad. Darganfyddwch gyfanswm y gwrthiant i'r mudiant.

Os cynyddir y pŵer i 60kW, darganfyddwch gyflymiad y lori ar yr ennyd pan fo'n symud ar fuanedd 20 ms^{-1} , gan gymryd bod y gwrthiannau i'r mudiant yn aros yn gyson.

Pan fo'r pŵer yn 50kW, rhoddir y grym gyrru $F \text{ N}$ gan

$$F \times 20 = 50\,000,$$

ac felly mae $F = 2500 \text{ N}$.

Gan fod y lori yn symud gyda buanedd cyson rhaid bod y cyflymiad yn sero; h.y. mae cyfanswm y grym yn sero ac felly y gwrthiant yw 2500 N.

Pan fo'r pŵer yn 60 kW, y grym gyrru $F \text{ N}$ ar yr ennyd pan fo'r buanedd yn 20 ms^{-1} yw

$$\frac{60\,000}{20} \text{ N} = 3000 \text{ N}.$$

Cyfanswm y grym ar y lori yw $(3000 - 2500) \text{ N} = 500 \text{ N}$, a'r hafaliad mudiant yw

$$2000a = 500,$$

lle mae $a \text{ ms}^{-2}$ yn dynodi'r cyflymiad, ac felly mae $a = 0.25$.

Enghraifft 2.25

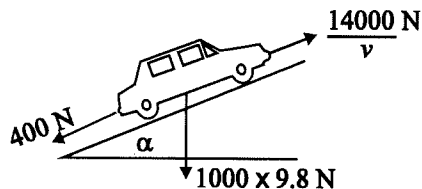
Mae gan gar, màs 1000 kg, fuanedd mwyaf o 35 ms^{-1} ar ffordd wastad yn erbyn gwrthiant 400 N. Darganfyddwch, gan gymryd bod y peiriant yn gweithio ar yr un gyfradd a bod y gwrthiant heb newid, ei fuanedd mwyaf i fyny llethr sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{7}$.

Yn yr achos hwn nid yw'r pŵer yn cael ei roi, ac fe'i cymerir fel P W. Y grym gyrru yw $\frac{P}{35}$ N, ac oherwydd bod y cyflymiad, ac felly cyfanswm y grym, yn sero ar y buanedd mwyaf, mae

$$\frac{P}{35} = 400.$$

Felly mae $P = 14\,000$.

Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu ar y car pan fo'n symud ar fuanedd $v \text{ ms}^{-1}$ i fyny'r llethr.



Cyfanswm cydran y grym mewn N sy'n gweithredu i'r cyfeiriad i fyny'r llethr yw

$$\frac{14000}{v} - 400 - 1000 \times 9.8 \times \sin \alpha = \frac{14000}{v} - 1800.$$

Pan fo'r buanedd ar ei fwyaf mae cyfanswm y grym yn sero; h.y.

$$v = \frac{14000}{1800} = 7.8.$$

Ymarferion 2.7

- 1 Darganfyddwch y pŵer a gynhyrchir pan fo grym o 1500 N yn tynnu trol ar fuanedd cyson o 6 ms^{-1} .
- 2 Darganfyddwch y pŵer a gynhyrchir gan beiriant car sy'n symud ar fuanedd o 12 ms^{-1} , o wybod bod y grym gyrru yn 750 N.
- 3 Mae car, y mae ei beiriant yn gweithio ar gyfradd o 5 kW, yn symud gyda buanedd 10 ms^{-1} ; darganfyddwch y grym gyrru.
- 4 Mae car yn teithio ar hyd ffordd lorwedd yn erbyn gwrthiant o 600 N. O wybod bod y peiriant yn gweithio ar gyfradd gyson o 4.8 kW, darganfyddwch fuanedd mwyaf y car.
- 5 Mae car, màs 1000 kg, yn symud ar ffordd lorwedd yn erbyn gwrthiant o 600 N gyda'r peiriant yn gweithio ar gyfradd o 8 kW. Darganfyddwch gyflymiad y car ar yr ennyd pan fydd yn symud ar fuanedd o 10 ms^{-1} .

- 6 Mae gan gar, màs 1200 kg, sy'n teithio ar hyd ffordd lorwedd, gyda'i beiriant yn gweithio ar gyfradd gyson yn erbyn gwrthiant o 500 N, fuanedd mwyaf o 25 ms^{-1} . Darganfyddwch gyfradd weithio'r peiriant.
Darganfyddwch hefyd y buanedd mwyaf y gall y car ddringo llethr sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{14}$, gan gymryd bod y gwrthiannau a chyfradd weithio'r peiriant heb newid.
- 7 Mae trên, màs 300 tonnall fetrig, yn teithio ar hyd cledrau gwastad syth. Y gwrthiant i'r mudiant yw 18 kN. Darganfyddwch y grym tynnu sydd ei angen er mwyn achosi cyflymiad o 0.1 ms^{-2} , a'r pŵer mewn kW a gynhyrchir gan yr injan pan fo buanedd y trên yn 10 ms^{-1} .
Darganfyddwch hefyd y buanedd mwyaf y gellir ei gael pan fydd yr injan yn gweithio ar gyfradd o 360 kW.
- 8 Mae car, màs 1500 kg, yn teithio i fyny llethr ar oled α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{49}$, yn erbyn gwrthiannau ffrithiannol cyson o 3600 N. Darganfyddwch fuanedd mwyaf y car o wybod bod y peiriant yn gweithio ar gyfradd o 80 kW. Ar ôl cyrraedd pen y llethr mae'r peiriant yn cael ei ddiffodd ac mae'r car yn dod i lawr y llethr ar fuanedd cyson ac ar oled β i'r llorwedd yn erbyn yr un gwrthiannau ffrithiannol cyson. Cyfrifwch $\sin \beta$.
- 9 Mae gan gar, màs 1000 kg, fuanedd mwyaf o 15 ms^{-1} yn erbyn grym ffrithiannol cyson sy'n hafal i un wythfed o bwysau'r car, i fyny llethr sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{7}$. Darganfyddwch fuanedd mwyaf y car ar ffordd lorwedd gan gymryd bod y peiriant yn gweithio ar yr un gyfradd.
Os yw'r car yn dod i lawr yr un llethr â'i beiriant yn gweithio ar hanner y gyfradd hon, darganfyddwch gyflymiad y car ar yr ennyd pan fydd ei fuanedd yn 25 ms^{-1} .
- 10 Y grymoedd gwrthiannol sy'n gwrthwynebu mudiant trên, gyda chyfanswm ei fâs yn 50 tonnall fetrig, yw 5000 N.
(a) Darganfyddwch y pŵer sydd ei angen er mwyn cadw'r trên i symud ar hyd cledrau gwastad syth ar fuanedd cyson o 10 ms^{-1} .
(b) Os bydd cynnydd sydyn o 10 kW yn y pŵer hwn pan fo'r trên yn symud ar hyd y cledrau gwastad ar 10 ms^{-1} , darganfyddwch ei gyflymiad cychwynnol.
(c) Pan fydd y trên yn dringo llethr, ar oled α i'r llorwedd, ar fuanedd cyson 8 ms^{-1} , mae injan y trên yn gweithio ar gyfradd o 180 kW. Darganfyddwch werth $\sin \alpha$.
- 11 Mae car, màs 1600 kg, yn dringo llethr ar oled α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{14}$, ar fuanedd cyson o 12 ms^{-1} . O wybod bod y gwrthiant ffrithiannol yn 400 N, cyfrifwch y pŵer, mewn kW, a gynhyrchir gan y car.

Pan fydd y car yn cyrraedd pen y llethr mae'r peiriant yn cael ei ddiffodd ac mae'r car yn dod i lawr y llethr ar oledd β i'r llorwedd, lle mae $\sin \beta = \frac{1}{28}$. Gan gymryd bod y gwrthiant ffrithiannol yn aros yn 400 N, cyfrifwch gyflymiad y car i lawr y llethr.

- 12 Mae car 1600 kg ar ffordd lorwedd. Y gwrthiant i'w fudiant yw 800 N. Cyfrifwch ei gyflymiad ar yr ennyd pan fo'r buanedd yn 7.5 ms^{-1} a phŵer ei beiriant yn 15 kW.
- 13 Pan fo car yn symud ar fuanedd $v \text{ ms}^{-1}$, mae'r gwrthiant i fudiant y car yn $(200 + 2.5v) \text{ N}$. Darganfyddwch fuanedd mwyaf y car pan fo ei beiriant yn gweithio ar gyfradd 5 kW.

Ymarferion Amrywiol 2

- 1 Teflir gronyn i fyny'n fertigol ar fuanedd 5 ms^{-1} o bwynt 2 m uwchben y ddaear. Darganfyddwch
- (a) yr uchder mwyaf a gyrhaeddir uwchben y ddaear,
 - (b) buanedd y gronyn pan fydd yn taro'r ddaear.
- 2 Mae merch yn taflu pêl i fyny'n fertigol ar fuanedd cychwynnol 10 ms^{-1} .
- (a) Lluniwch ddiagram i ddangos y grymoedd sy'n gweithredu ar y bêl a nodwch yn eglur beth sy'n achosi pob grym.
 - (b) Darganfyddwch yr uchder mwyaf y byddai'r bêl yn ei gyrraedd pe na bai unrhyw rym heblaw disgrychiant yn gweithredu, gan dybio bod disgrychiant yn gyson.
 - (c) Fel mae'n digwydd, nid yw'r bêl, sydd â màs 0.2 kg, ond yn cyrraedd uchder 4.5 m; darganfyddwch y gwaith a wneir gan y gwrthiant wrth i'r bêl deithio o law y ferch i'w huchder mwyaf.
- 3 Mae bachgen, màs 60 kg, yn llithro i lawr llithren mewn pwll nofio gan gychwyn ar fuanedd o 1 ms^{-1} ; ei fuanedd yn taro'r dŵr yw 9 ms^{-1} . Darganfyddwch y gwaith a wneir yn erbyn ffrithiant os yw uchder y llithren yn 5 m.
- Os yw hyd y llithren yn 20 m, darganfyddwch y grym ffrithiannol, gan gymryd ei fod yn unffurf.
- 4 Mae llwybr slediau yn syth, 1213 m o hyd, ac mae'n cwmpo 157 m o'r cychwyn i'r diwedd. Un diwrnod, ar ôl cychwyn o ddisymudedd, cyrhaeddodd sled a'r slediwr, màs y ddau gyda'i gilydd yn 112 kg, fuanedd o 117 kmh^{-1} ar y diwedd.
- (a) Cyfrifwch faint o egni cinetig a enillwyd.
 - (b) Darganfyddwch faint o egni potensial a gollwyd.
 - (c) Darganfyddwch y gwaith a wnaed yn erbyn grymoedd gwrthiannol gan dybio eu bod yn gyson.

- 5 Mae cerbyd, mäs 4000 kg, yn symud i fyny llethr sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{20}$. Ei fuanedd cychwynnol yw 2 ms^{-1} . Pum eiliad yn ddiweddarach mae wedi teithio 15 m i fyny'r llethr a'i fuanedd bryd hynny yw 6 ms^{-1} . Darganfyddwch y newid yn egni cinetig ac egni potensial y cerbyd.
O wybod bod y peiriant yn gweithio ar gyfradd gyson o 44 kW darganfyddwch gyfanswm y gwaith a wneir yn erbyn y grymoedd gwrthiannol (ni ellir tybio eu bod yn gyson) yn ystod y cyfnod hwn o 5 eiliad.
- 6 Mae gan sbring elastig sy'n bodloni deddf Hooke hyd naturiol o 0.5 m. Pan fo'r estyniad yn 0.05 m, y tyniant yn y sbring yw 50 N. Darganfyddwch y gwaith a wneir pan gaiff y sbring ei estyn o hyd 0.6 m i hyd 0.7 m.
- 7 Y grym disgyrchedd am bob uned o fäs ar bellter r ($> R$) o ganol y Ddaear yw $\frac{gR^2}{r^2}$. Lle mae R yn cynrychioli radiws y Ddaear a g yw'r cyflymiad a achosir gan ddisgyrchiant ar arwyneb y Ddaear. Darganfyddwch y gwaith a wneir wrth symud gronyn, mäs m , o safle $r = 2R$ i safle $r = 3R$.
Os yw buanedd gronyn ar $r = 2R$ yn $\sqrt{\frac{gR}{2}}$, darganfyddwch ei fuanedd ar $r = 3R$.
- 8 Mae catapwlt yn cynnwys dau ddarn o elastig, y ddau â modwlws 20 N a hyd naturiol 0.2 m. Estynnir y catapwlt fel bod hyd y naill elastig a'r llall yn cael ei gynyddu 0.08 m. Gan anwybyddu effaith disgyrchiant a thrwy ystyried yr egni, darganfyddwch y buanedd a roddir gan y catapwlt i garreg sydd â'i mäs yn 0.02 kg.
- 9 Mae pen A llinyn elastig ysgafn AB , hyd naturiol 1.2 m, yn sefydlog. Gyda gronyn, mäs 2.4 kg, ynghlwm wrth y llinyn ar B ac yn hongian yn rhydd o dan effaith disgyrchiant, estyniad y llinyn yw 0.09 m. Beth yw modwlws elastigedd y llinyn?
Yna mae'r gronyn cael ei dynnu'n fertigol trwy 0.12 m pellach a'i ryddhau o ddisymudedd. Trwy ystyried yr egni, darganfyddwch yr uchder mwyaf yn y mudiant dilynol uwchben y pwynt lle cafodd ei ryddhau.
- 10 Mae gronyn P , mäs 0.02 kg, ynghlwm wrth un pen sbring elastig ysgafn sydd â hyd naturiol 0.5 m a modwlws 1.6 N. Mae'r pen arall ynghlwm wrth bwynt sefydlog A ar fwrdd llorwedd llyfn. Caiff y gronyn ei ryddhau o ddisymudedd ar y bwrdd pan fydd y sbring yn syth gydag estyniad o 0.25 m. Darganfyddwch fuanedd y gronyn
(i) pan fydd y sbring ar ei hyd naturiol,
(ii) pan gywesgir y sbring 0.10 m.
- 11 Mae gronyn, mäs 2 kg, wedi ei glymu wrth ddau llinyn elastig, y ddau â hyd naturiol 0.5 m a modwlws 15 N; mae pennau eraill y llinynnau ynghlwm wrth ddau bwynt sefydlog A a B sydd 1 m oddi wrth ei gilydd ar yr un llinell lorwedd. Mae'r gronyn yn cael ei ollwng o ddisymudedd o ganolbwynt AB .
(a) Dangoswch fod y tyniant T N ym mhob llinyn yn cael ei roi gan
 $T = 15(\sec \theta - 1)$, lle mae θ yn dynodi'r ongl rhwng pob llinyn a'r llorwedd.

- (b) Darganfyddwch, yn gywir i ddau le degol, gyflymiad y gronyn pan fydd $\theta = 60^\circ$.
- (c) Trwy ystyried egni, darganfyddwch, yn gywir i ddau le degol, fuanedd y gronyn pan fydd $\theta = 60^\circ$.
- 12 Mae gronyn yn hongian o bwynt sefydlog O wrth llinyn elastig ysgafn, hyd naturiol a . Mae'n hongian mewn cydbwysedd ar bellter $\frac{5a}{4}$ o dan O . O wybod bod y gronyn yn cael ei ryddhau o ddisymudedd ar O , darganfyddwch y pellter y mae'n cwmpo cyn iddo ddod i aros am y tro cyntaf.
- 13 Mae pen llinyn elastig ysgafn, hyd naturiol $4l$, ynghlwm wrth bwynt sefydlog O . Mae gronyn P , mäs m , ynghlwm wrth ben arall y llinyn ac yn hongian mewn cydbwysedd gydag $OP = 5l$. Mae'r gronyn yn cael ei dynnu i lawr yn fertigol trwy bellter pellach $\frac{l}{2}$ a'i ryddhau o ddisymudedd. Dangoswch fod P yn codi am bellter l cyn dod i aros yn enydaidd am y tro cyntaf.
- 14 Darganfyddwch hefyd, ar gyfer y trefniant yn y cwestiwn blaenorol, yr uchder mwyaf y byddai P yn codi petai wedi cael ei ryddhau o ddisymudedd ar ddyfnder $2l$ o dan y safle cydbwysedd.
- 15 Mae un pen llinyn elastig ysgafn, modwlws 4.9 N a hyd naturiol 0.5 m , ynghlwm wrth bwynt sefydlog A ac mae gronyn, mäs 0.1 kg , ynghlwm wrth y pen arall. Mae'r gronyn yn cael ei ddal ar A a'i ryddhau o ddisymudedd. Ei fuanedd ar ôl iddo gwmpo pellter $x \text{ m}$ yw $v \text{ ms}^{-1}$.
- (i) Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer ei fuanedd pan fo $x \leq 0.5$.
- (ii) Dangoswch trwy ystyried egni, ar gyfer $x \geq 0.5$, fod
- $$v^2 = 117.6x - 9.8x^2 - 24.5.$$
- 16 Yn y gêm beryglus 'neidio bynji', mae person yn clymu un pen rhaff elastig wrth bwynt sefydlog ar bont dros afon. Yna clymir ef neu hi wrth y pen arall cyn neidio dros y bont a syrthio i lawr yn fertigol tuag at y dŵr. Trefnir y rhaff fel bod y neidiwr yn dod i aros ychydig uwchben arwyneb y dŵr. Er mwyn darganfod pa raffau penodol sy'n addas, gwneir arbrofion gyda phwysau, yn hytrach na phobl, ynghlwm wrth y rhaff. Yn un arbrawf darganfuwyd y canlynol: pan gafodd pwysau â mäs m ei glymu wrth raff benodol, hyd naturiol a , a'i ollwng o bont ar uchder $3a$ uwchben arwyneb y dŵr, cyrhaeddodd y pwysau union lefel y dŵr. Dangoswch mai modwlws elastigedd y rhaff yw $\frac{3mg}{2}$.
- Yn lle'r pwysau â mäs m , mae pwysau â mäs $\frac{5m}{2}$ yn cael ei glymu wrth y rhaff hon a'i ollwng o'r un uchder. Darganfyddwch fuanedd y pwysau wrth iddo gyrraedd y dŵr.

Pan ddaw'r pwysau allan o'r dŵr mae ei fuanedd wedi'i leihau i sero gan wrthiant y dŵr.

Dangoswch, trwy ddefnyddio cadwraeth egni, a thrwy dybio nad yw'r rhaff yn mynd yn llac, fod buanedd v y pwysau wedyn ar uchder h uwchben lefel y dŵr yn cael ei roi gan

$$v^2 = \frac{gh}{5a}(2a - 3h).$$

Disgrifiwch fudiant y pwysau ar ôl hynny.

- 17 Mae gronyn, màs m , ynghlwm wrth un pen o linyel elastig sydd â modwlws 4 mg a hyd naturiol a , gyda phen arall y llinyn ynghlwm wrth bwynt sefydlog O . Caiff y gronyn ei ollwng o bwynt ar bellter o $\frac{5a}{3}$ yn union o dan O .

Darganfyddwch (i) yr uchder y bydd y gronyn yn codi iddo,

(ii) buanedd y gronyn pan fo ar bellter o $\frac{3a}{2}$ o dan O .

- 18 Mae pwmp dŵr yn codi 40 kg o ddŵr bob eiliad drwy uchder o 20m ac mae'n ei fwrw allan gyda buanedd o 45 ms^{-1} .

Darganfyddwch yr egni cinetig a'r egni potensial a roddir i'r dŵr bob eiliad a'r gyfradd effeithiol y mae'r pwmp yn gweithio arni.

- 19 Mae car, màs 1000 kg, sydd â'i injan yn gweithio ar gyfradd o P wat, yn symud ar fuanedd cyson o 20 ms^{-1} ar ffordd lorwedd. Darganfyddwch, yn nhermau P , gyfanswm y gwrthiant ffrithiannol ar y car.

Yna mae'r car yn mynd o ran ei hun (h.y. heb i'r injan roi unrhyw rym) lawr allt sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{14}$, ar fuanedd cyson.

Darganfyddwch P .

Gan gymryd yr un gwrthiant ffrithiannol a bod yr injan yn gweithio ar gyfradd o P wat, darganfyddwch werth rhifiadol cyflymiad y car ar yr adeg pan fo'n symud i fyny'r allt gyda buanedd 7 ms^{-1} .

- 20 Mae car, màs 1000 kg, yn symud, gyda'i injan yn gweithio ar ei gyfradd uchaf bosibl, ar fuanedd cyson o 10 ms^{-1} fyny allt sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{14}$. R N yw'r gwrthiant ffwythiannol i fudiant. Mynegwch y

gyfradd weithio fwyaf bosibl yn nhermau R .

Gyda'r injan yn dal i weithio ar ei chyfradd uchaf bosibl, aiff y car i lawr yr allt ar fuanedd cyson o 20 ms^{-1} . O wybod bod y gwrthiant ffrithiannol nawr yn $4R$ N, darganfyddwch werth R .

- 21 Mae locomotif, màs M kg, yn gweithio ar gyfradd o R kW yn symud i fyny cledrau syth sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd. Pan fo'r buanedd yn v ms⁻¹, mae'r cyflymiad yn a ms⁻².
Darganfyddwch fynegiad ar gyfer y gwrthiant ar fuanedd v ms⁻¹.
- 22 Mae car, màs 1500 kg, yn symud ar hyd ffordd lorweddol. 750 N yw'r gwrthiant i fudiant y car.
Gan gymryd bod injan y car yn gweithio ar 15 kW, darganfyddwch
(i) y buanedd cyson uchaf y gall y car deithio arno,
(ii) cyflymiad y car pan fo'r buanedd yn 8 ms⁻¹.
- 23 Mae car, màs 1300 kg, yn tynnu ôl-gerbyd â màs m kg ar hyd ffordd wastad. Mae'r gwrthiant ar y car yn 1000 N a'r gwrthiant ar yr ôl-gerbyd yn 1.5 m N. Darganfyddwch gyfanswm y pŵer a gynhyrchir gan yr injan pan fo $m = 600$ a'r car a'r ôl-gerbyd yn symud ar fuanedd cyson o 20 ms⁻¹.
Ar gyfer $m = 1700$ a phan fo'r car yn symud ar fuanedd o 25 ms⁻¹ a'i injan yn gweithio ar gyfradd gyson o 75 kW, darganfyddwch
(i) gyflymiad y car a'r ôl-gerbyd,
(ii) y tyniant yn y cysylltiad rhwng y car â'r ôl-gerbyd.
Nodwch a all y car gadw buanedd cyson o 25 ms⁻¹ gyda'r injan yn gweithio ar gyfradd gyson o 25 kW.
O wybod mai 18 ms⁻¹ yw'r buanedd isaf mwyaf diogel y gellir teithio arno ar draffordd, a bod injan y car yn gweithio ar gyfradd o 72 kW, darganfyddwch amrediad posibl gwerthoedd m fel y gall y car a'r ôl-gerbyd deithio ar fuaneddau cyson sydd ddim yn is na'r buanedd isaf mwyaf diogel.
- 24 Mae car yn teithio ar fuanedd cyson o 20 ms⁻¹ ar ffordd lorweddol yn erbyn gwrthiant cyson o 1000N. Darganfyddwch gyfradd weithio'r injan.
Yna caiff y car ei roi ynghlwm wrth garafán gyda bar tynnu ac mae'r gwrthiant i fudiant y garafán yn 800 N.
O wybod bod cyfradd weithio'r injan yn 35 kW, darganfyddwch fuanedd uchaf y car a'r garafán ar ffordd lorweddol a darganfyddwch y tyniant yn y bar tynnu.
Mae cyfanswm màs y car a'r garafán yn 1.8 tonnau ac mae'r car yn tynnu'r garafán yn syth i fyny allt sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae
$$\sin \alpha = \frac{1}{35}.$$

O wybod bod y car yn gweithio ar gyfradd o 42 kW, cyfrifwch y cyflymiad fyny'r allt pan fo'r car a'r garafán yn teithio ar 14 ms⁻¹. Gellir cymryd bod y gwrthiannau anffrithiannol i fudiant y car a'r garafán yn gyson.

- 25 30 ms^{-1} yw buanedd uchaf car, y gall ei injan gynhyrchu 15 kW , ar ffordd wastad. Darganfyddwch gyfanswm y gwrthiant i fudiant y car ar ei fuanedd uchaf. O wybod bod y gwrthiant anffrithiannol i fudiant y car yn amrywio fel sgwâr y buanedd a bod màs y car yn 800 kg , darganfyddwch y pŵer a gynhyrchir gan yr injan pan fo'r car yn symud ar fuanedd cyson o 35 ms^{-1} yn syth i fyny allt sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd pan fo $\alpha = \frac{1}{21}$.
- 26 Mae car, màs 800 kg , yn symud ar fuanedd cyson o 50 ms^{-1} ar ffordd wastad. Mae'r gwrthiant anffrithiannol i fudiant y car ar bob buanedd ac ar bob ffordd yn 700 N . Cyfrifwch ar ba gyfradd y mae injan y car yn gweithio. Pan fo'r car yn dringo'n syth i fyny allt benodol, mae ganddo fuanedd uchaf o 25 ms^{-1} ac mae'r injan yn gweithio ar gyfradd o 20 kW . Cyfrifwch ongl oledd y ffordd i'r llorwedd. Darganfyddwch gyflymiad y car hwn pan fo'n teithio ar 25 ms^{-1} fyny allt sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{21}$, gyda'i injan yn gweithio ar gyfradd o 15 kW .
- 27 Mae car, màs 800 kg , yn tynnu ôl-gerbyd sydd â màs 200 kg fyny allt sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{14}$. Pan fo cyfanswm y grym a gaiff ei gynhyrchu gan yr injan yn 1000 N , mae'r car a'r ôl-gerbyd yn symud fyny'r allt ar fuanedd cyson. Darganfyddwch gyfanswm y gwrthiant ffrithiannol i fudiant y car a'r ôl-gerbyd. Pan fo'r car a'r ôl-gerbyd yn teithio ar fuanedd cyson o 10 ms^{-1} i fyny'r allt, mae'r pŵer a gynhyrchir gan yr injan yn cynyddu 2 kW ar unwaith. Darganfyddwch
- (i) y cyflymiad enydaidd,
 - (ii) y tyniant enydaidd yn y cysylltiad rhwng y car a'r ôl-gerbyd, o wybod bod cyfanswm y gwrthiant ar yr ôl-gerbyd yn 75 N .

Pennod 3

Ergydion a Momentwm

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon dylech

- allu defnyddio'r egwyddor momentwm ergyd ar rymoedd sy'n dibynnu ar amser,
- wybod ystyr tyniant ergydol,
- allu datrys problemau lle cysylltir gwrthrychau gyda llinynnau anelastig.

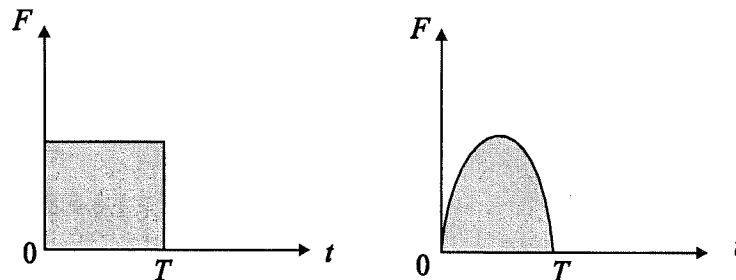
3.1 Egwyddor momentwm ergyd

Yn M1 6.1, gwelsom, gyda grym cyson P yn gweithredu ar ronyn sydd â màs m am amser T , lle mae cyflymder y gronyn yng nghyfeiriad y grym yn newid o u i v , bod

$$PT = m(v - u),$$

hynny yw, ergyd = newid mewn momentwm.

Mae'n annhebygol iawn y bydd y grym yn gyson trwy gydol y cysylltiad ac felly mae angen cyffredinolï'r diffiniad o ergyd. Fel yn achos gwaith, gellir gweld y cyffredinolï trwy ddehongli'r ergyd yn graffigol. Mae'r ddau ddiagram canlynol yn dangos ymddygiad cydran o rym i gyfeiriad penodol gydag amser t .



Mae'r diagram ar y chwith yn dangos bod gan y gydran werth cyson tra bo'r diagram ar y dde yn dangos ei bod yn amrywio gydag amser. Mae hyn yn debycach o fod yn ffurf realistig ar gyfer trawiad sydyn gan ei bod yn diflannu ar $t = 0$ a $t = T$. Ergyd y grym cyson felly yw'r arwynebedd tywyll o dan y llinell ac mae hyn yn awgrymu bod

Ergydion a Momentwm

yr ergyd yn cael ei diffinio fel $\int_0^T F dt$. Y cam nesaf yw gweld a all hyn ein galluogi i ddarganfod newid cyflymder yn nhermau'r ergyd.

Mae Deddf mudiant Newton yn rhoi

$$F = m \frac{dv}{dt}.$$

Drwy integru'r hafaliad hwn o $t = 0$ i $t = T$ cawn

$$\begin{aligned} \int_0^T F dt &= \int_{t=0}^{t=T} m \frac{dv}{dt} \\ &= [mv]_{t=0}^{t=T} \\ &= (mv)_{t=T} - (mv)_{t=0}. \end{aligned}$$

Y newid mewn momentwm sydd ar ochr dde'r hafaliad hwn, a'r ergyd sy'n gweithredu sydd ar yr ochr chwith ac felly mae'r egwyddor momentwm ergyd yn wir ar gyfer pob grym.

Enghraifft 3.1

Mae pêl â màs 0.3 kg yn symud gyda buanedd 5 ms^{-1} wrth iddi daro llawr llorwedd a sboncio oddi ar y llawr, gyda buanedd o 2 ms^{-1} . Darganfyddwch yr ergyd y mae'r llawr yn ei weithredu ar y bêl, o wybod bod yr amser cyffwrdd yn 0.05 eiliad. Gan gymryd llwybr y cyfeiriad tuag i fyny.

Mae momentwm y bêl yn syth ar ôl y gwrthdrawiad yn $0.3 \times 2 = 0.6 \text{ Ns}$ tuag i fyny, ac yn union cyn y gwrthdrawiad, mae'n $0.3 \times (-5) = -1.5 \text{ Ns}$. Mae cyfanswm y newid mewn momentwm yn $0.6 - (-1.5) = 2.1 \text{ Ns}$. $(F - 0.3 \times 9.8) \text{ N}$ yw cyfanswm y grym sy'n gweithredu, lle mae $F \text{ N}$ yn cynrychioli'r grym a weithredir gan y llawr.

$$\text{Mae cyfanswm yr ergyd yn } \int_0^{0.05} (F - 0.3 \times 9.8) dt \text{ Ns}$$

$$= \int_0^{0.05} F dt - 0.147 \text{ Ns}$$

$$\text{Cyfanswm yr ergyd} = \text{newid mewn momentwm}$$

$$\int_0^{0.05} F dt = 0.147 \quad = 2.1$$

$$\int_0^{0.05} F dt \quad = 2.247 \text{ Ns}$$

Ymarferion 3.1

- 1 Mae pêl denis, mäs 0.08 kg, yn symud yn llorweddol tuag at raced gyda buanedd 6 ms^{-1} a chaiff ei tharo gan y raced ac mae'n gadael y raced yn llorweddol gyda buanedd o 12 ms^{-1} . Mae'r bêl a'r raced mewn cysylltiad am 0.04 eiliad. Darganfyddwch y grym sy'n gweithredu, gan gymryd
 - (i) ei fod yn gyson,
 - (ii) ei fod ar y ffurf ct N, lle mae t yn cynrychioli'r amser, mewn eiliadau, a fesurir o'r gwrthdrawiad ac mae c yn gysonyn.
- 2 Mae pêl griced, mäs 0.15 kg, yn symud yn llorweddol gyda buanedd 14 ms^{-1} wrth iddi gyrraedd batiwr, caiff ei tharo'n ôl yn llorweddol yn syth gyda buanedd o 24 ms^{-1} . Mae'r bat a'r bêl mewn cysylltiad am 0.05 eiliad. Darganfyddwch ffurf y grym a gynhyrchir gan y bat ar y bêl, gan gymryd y gellir ei fynegi fel $kt(0.05 - t)$ N, lle mae k yn gysonyn.
- 3 Mae pêl, mäs 0.2 kg, yn disgyn yn fertigol a phan fo'n teithio ar fuanedd o 6 ms^{-1} caiff ei tharo gan fat sy'n symud yn fertigol tuag i fyny, fel bod gan y bêl fuanedd o 4 ms^{-1} yn fertigol tuag i fyny ar ôl iddi adael y bat. Darganfyddwch, gan gymryd bod y bat a'r bêl mewn cysylltiad am 0.05 eiliad, yr ergyd a gynhyrchir gan y bat.

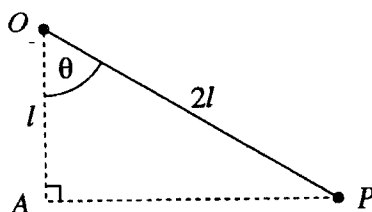
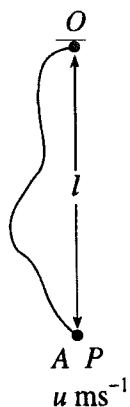
3.2 Tyniannau ergydiol

Llinynnau

Pan fo llinyn yn plycio, mae tyniannau hafal a dirgroes yn gweithredu'n sydyn ym mhob pen. Felly mae ergydion hafal a dirgroes yn gweithredu ar y gwrthrychau sydd ynghlwm wrth bob pen i'r llinyn. Os yw un pen o'r llinyn yn sefydlog, ni chaiff yr ergyd sy'n gweithredu ar y pen sefydlog unrhyw effaith ar y mudiant. Bydd y gwrthrych sydd ynghlwm wrth y pen rhydd yn profi newid mewn momentwm sy'n hafal i'r tyniant ergydiol ar hyd y llinyn. Ni fydd y momentwm yn y cyfeiriad perpendicwlar i'r llinyn yn newid.

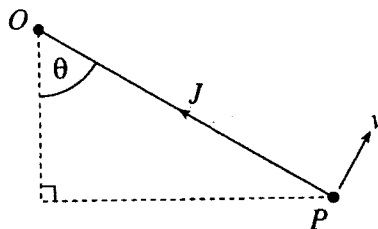
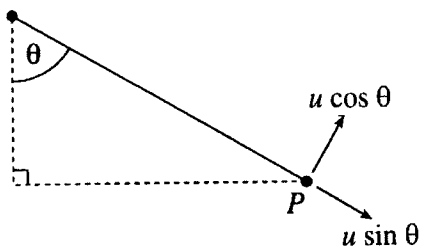
Enghraifft 3.2

Mae llinyn anelastig ysgafn, hyd $2l$, ynghlwm wrth un pen i bwynt O ar lawr llorwedd llyfn. Mae gronyn P â màs m kg ynghlwm wrth ben arall y llinyn. Ar y cychwyn, mae P wrth bwynt A sydd bellter l oddi wrth O . Caiff P ei daflunio yn llorweddol gyda buanedd $u \text{ ms}^{-1}$ ar ongl sgwâr i OA . Darganfyddwch gyflymder P yn syth ar ôl i'r llinyn dynhau, a maint y tyniant ergydïol.



Ar yr ennyd pan aiff y llinyn yn dynn, mae $OP = 2l$, $OA = l$ ac $O\hat{A}P = 90^\circ$.

Felly mae $\cos A\hat{O}P = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$ ac $A\hat{O}P = 60^\circ$. Yn union cyn y plwc, mae cyflymder P yn $u \cos 60^\circ$ yn berpendicwlar i'r llinyn ac yn $u \sin 60^\circ$ yng nghyfeiriad y llinyn. Ar ôl y plwc, ni all P deithio dim pellach yng nghyfeiriad y llinyn sydd erbyn hyn yn dynn ac mae gan P gydran cyflymder v yn berpendicwlar i'r llinyn.



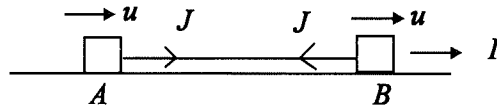
	Ergyd =	newid mewn momentwm
Ar hyd OP	J	$= 0 - (-mu \sin \theta)$
		$= \frac{mu\sqrt{3}}{2}$

Yn berpendicwlar i OP

0	$=$	$mv - mu \cos 60^\circ$
v	$=$	$\frac{u}{2}$

3.3 Mudiant ergydiol gronynnau cysylltiedig

Gronynnau sy'n symud ar hyd yr un llinell



Dangosir yn y diagram broblem nodweddiadol: mae dau ronyn A a B , màs m ac M , yn ôl eu trefn, wedi eu cysylltu gan llyn anestynadwy ysgafn. Pan fo'r llyn yn dynn, mae ergyd I yn cael ei rhoi i B i'r cyfeiriad o A i B . Bydd y ddau ronyn yn symud ar yr un buanedd u fel a ddangosir ac felly bydd ergyd J yn gweithredu ar A i'r cyfeiriad A i B . Yn ôl trydedd ddeddf Newton, bydd ergyd o'r un maint yn gweithredu ar B o B i A . Fel arfer gelwir yr ergyd hon sy'n gweithredu ar hyd y llyn yn dyniant ergydiol er nad yw'n rym.

Cyfanswm yr ergyd a roddir yw I ac, yn ôl yr egwyddor momentwm ergyd ar gyfer system o ronynnau, mae hyn yn hafal i gyfanswm y newid momentwm, h.y. $(m + M) u$.

Felly

$$u = \frac{I}{m + M}.$$

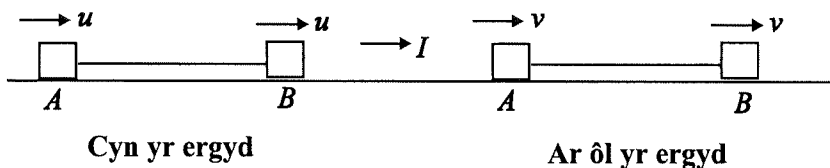
Nawr gellir darganfod y tyniant ergydiol trwy gymhwyso'r egwyddor momentwm ergyd i ronyn A , h.y. $mu = J$, fel bod

$$J = \frac{mI}{m + M}.$$

Dull arall fyddai cymhwyso'r egwyddor momentwm ergyd i A a B . Yr hafaliad ar gyfer B fyddai $I - J = Mu$. Mae dileu J yn rhoi u fel o'r blaen. Gyda phroblemau o'r fath, fel gyda phroblemau ar fudiant dau ronyn, mae'n haws ystyried y system gyfan yn gyntaf ac yna un o'r gronynnau.

Mae angen gofal wrth ystyried mudiant ergydiol gronynnau sydd wedi eu cysylltu.

Mae'r diagram yn dangos y ddau ronyn A a B a drafodwyd uchod yn symud ar fuanedd u i gyfeiriad AB pan fydd ergyd maint I yn cael ei rhoi i B i'r cyfeiriad o A i B .



Ar ôl i'r ergyd gael ei rhoi, bydd y ddau yn symud ar fuanedd newydd v ac mae egwyddor momentwm ergyd ar gyfer system o ronynnau yn rhoi

$$(m + M)(v - u) = I.$$

Felly gellir darganfod v .

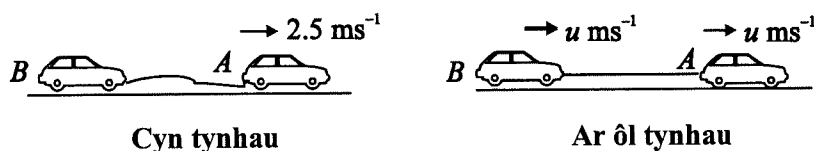
Petai'r ergyd wedi'i rhoi o B i A a thrwy dybio y byddai'r ddau ronyn yn dal i symud gyda'i gilydd, yna byddai'r canlyniad hwn wedi dangos eu bod yn symud i'r chwith ar fuanedd v lle mae

$$(m + M)(v + u) = I.$$

Byddai hyn yn golygu tyniant ergydiol i'r chwith ar ronyn A . Mae hyn yn amhosibl ac felly yn yr achos hwn byddai'r ergyd yn effeithio ar ronyn B yn unig.

Enghraifft 3.3

Mae car A yn y diagram ar fin tynnu car B . Mae'r rhaff lusgo ychydig yn llac ac felly gall car A gyrraedd buanedd o 2.5 ms^{-1} cyn i'r rhaff dynhau. Darganfyddwch fudiant y ceir yn syth ar ôl i'r rhaff dynhau. Mâs car A yw 1500 kg a mâs car B yw 1250 kg .



Yn syth ar ôl i'r rhaff dynhau, bydd y ceir yn symud ar yr un buanedd $u \text{ ms}^{-1}$. Yn yr achos hwn ni roddir ergyd allanol a gellir defnyddio'r egwyddor cadwraeth momentwm.

Mae'r egwyddor cadwraeth momentwm yn rhoi

$$1500 \times 2.5 = (1500 + 1250)u$$

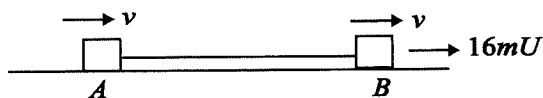
ac felly

$$u = 1.36.$$

Y tyniant ergydiol yn y rhaff yw $1250u \text{ N s} = 1700 \text{ N s}$.

Enghraifft 3.4

Mae dau ronyn A a B , mâs $2m$ a $6m$, yn gorwedd mewn llinell syth ac wedi eu cysylltu gan llinyn anestynadwy tynn. Rhoddir ergyd maint $16mU$ i B i'r cyfeiriad o A i B . Darganfyddwch y mudiant sy'n digwydd wedyn.



Bydd yr unig fudiant posibl ar hyd y llinyn ac oherwydd bod y llinyn yn anestynadwy, bydd y ddau ronyn yn symud ar yr un buanedd v . Cyfanswm y momentwm ar ôl i'r gronynnau ddechrau symud yw $2mv + 6mv = 8mv$.

Mae'r egwyddor momentwm ergyd yn rhoi

$$8mv = 16mU,$$

ac felly

$$v = 2U.$$

Dynodir y tyniant ergydiol sy'n gweithredu ar A tuag at B gan I .

Mae cymhwyso'r egwyddor momentwm ergyd i A yn rhoi

$$I = 2mv = 4mU.$$

Petai'r ergyd wreiddiol wedi bod o B i A ni fyddai tyniant ergydiol yn y llinyn, ac felly ni fyddai A yn symud a byddai $6mv = 16mU$, sy'n rhoi

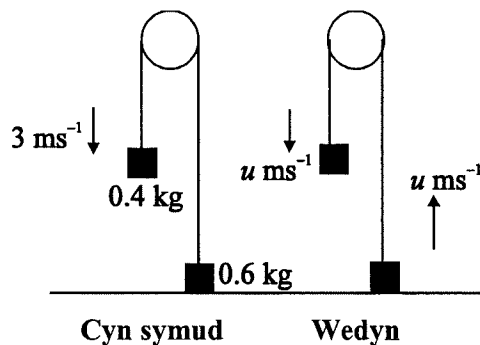
$$v = \frac{8U}{3}.$$

Problemau sy'n cynnwys pwlliau

Gellir datrys problemau sy'n trin gronynnau ar llinyn dros bwli trwy ystyried y system gyfan, fel yn achos problemau ar fudiant pwlliau yn gyffredinol, ond nid yw'r dull hwn yn ddiogel mewn gwirionedd. Mae'n well cymhwyso'r egwyddor momentwm ergyd yn ofalus i bob gronyn. Dangosir y mathau o broblemau sy'n digwydd amlaf yn yr enghreifftiau canlynol.

Enghraifft 3.5

Mae dau ronyn, mäs 0.4 kg a 0.6 kg, ynghlwm wrth ddau ben llinyn anestynadwy sy'n mynd dros bwli llyfn, fel yn y diagram. Maent yn cael eu rhyddhau i symud. Pan fo gan y gronynnau fuanedd cyffredin o 3 ms^{-1} , mae'r gronyn trymaf yn taro arwyneb llorwedd ac nid yw'n adlamu. (Dywedir bod yr arwyneb yn anelastig.) Darganfyddwch ar ba fuanedd mae'r gronyn trymaf yn cael ei blycio i symud am y tro cyntaf ar ôl hyn.



Unwaith bod y gronyn trymaf wedi stopio, bydd yr un ysgafnaf yn dal i godi i'w bwynt uchaf ac yna'n cwmpo o dan effaith disgyrchiant i'r pwynt lle mae'r llinyn yn dod yn dynn eto a bydd ei fuanedd eto yn 3 ms^{-1} ar y pwynt hwn. Pan fydd y llinyn yn mynd yn dynn, bydd tyniant ergydiol T Ns yn y llinyn a bydd y gronyn trymaf yn cael ei blycio oddi ar y plân a'r ddau ronyn yn dechrau symud ar fuanedd cyffredin $u \text{ ms}^{-1}$.

Mae cymhwyso'r egwyddor momentwm ergyd i'r gronyn trymaf yn rhoi $T = 0.6u$.

Bydd y tyniant ergydiol sy'n gweithredu ar y gronyn ysgafnaf tuag i fyny, a bydd cyflymder y gronyn wedi newid o 3 ms^{-1} tuag i lawr i $u \text{ ms}^{-1}$ tuag i lawr. Felly y newid yn y momentwm llinol tuag i lawr yw $0.4(u - 3)$ ac mae hyn yn hafal i $-T$.

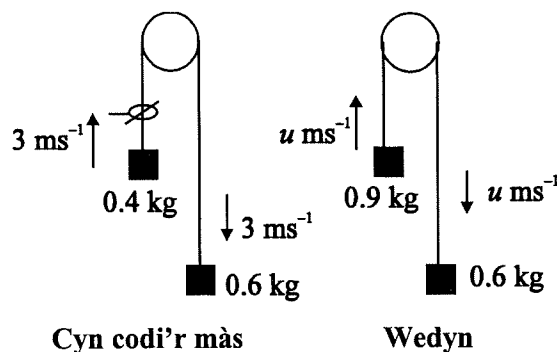
Mae dileu T yn rhoi $0.4(u - 3) + 0.6u = 0$

h.y. $0.4u + 0.6u = 1.2$

ac felly bydd y gronyn trymaf yn cael ei blycio tuag i fyny ar fuanedd 1.2 ms^{-1} .

Mae'r hafaliad ar gyfer u yn union yr un fath â phetai'r ddau ronyn wedi bod mewn llinell syth a'r egwyddor cadwraeth momentwm yn cael ei defnyddio. Ni ddylid defnyddio'r dull hwnnw i ddatrys problem mewn arholiad gan fod angen ei gyfiawnhau yn ofalus ond gall fod yn ddefnyddiol i wirio'r canlyniad.

Enghraifft 3.6



Wrth i'r gronynnau symud yn rhydd ar fuanedd 3 ms^{-1} fel yn y diagram, mae'r gronyn ysgafnaf yn codi màs 0.5 kg sy'n gorwedd ar fodrwy sefydlog y mae'r gronyn yn mynd trwyddi. Darganfyddwch fuanedd cyffredin y system yn syth ar ôl i'r màs gael ei godi.

Mae'r gronynnau yn symud ar fuanedd newydd anhysbys $u \text{ ms}^{-1}$.

Bydd tyniant ergydiol T yn y llinyn a dyma'r ergyd sy'n gweithredu ar y gronyn cyfansawdd ac felly, trwy gymhwyso'r egwyddor momentwm ergyd i'r gronyn cyfansawdd hwn, mae

$$T = (0.5 + 0.4)u - 3 \times 0.4.$$

Bydd cyflymder y gronyn trymaf, tuag i lawr, yn newid o 3 ms^{-1} i $u \text{ ms}^{-1}$ ac felly y newid yn ei fomentwm llinol i lawr yw $0.6u - 0.6 \times 3$ ac mae hyn yn hafal i $-T$.

Mae dileu T yn rhoi

$$(0.5 + 0.4)u - 0.4 \times 3 + 0.6u - 0.6 \times 3 = 0$$

h.y. $(0.5 + 0.4)u + 0.6u = 0.4 \times 3 + 0.6 \times 3,$

ac $u = 2.$

Ymarferion 3.2

- 1 Mae dau ronyn P a Q , mäs 4 kg a 3 kg yn ôl eu trefn, yn gorwedd ar fwrdd llyfn ac wedi'u cysylltu â'i gilydd gan llyn anestynadwy ysgafn. Teflir y gronyn P oddi wrth Q ar fuanedd 8 ms^{-1} . Darganfyddwch fuanedd cyffredin y gronynnau ar ôl i'r llyn fynd yn dynn a darganfyddwch y tyniant ergydol yn y llyn.
- 2 Mae gronyn A , mäs 0.2 kg, yn gorwedd yn ddisymud ar fwrdd llorwedd llyfn ar bellter 0.4 m o'i ymyl. Mae arwyneb y bwrdd 2 m uwchben y llawr. Cysylltir gronyn A trwy llyn anelastig ysgafn, hyd 0.9 m, ag ail ronyn B , mäs 0.4 kg. Rhoddir y gronyn hwn ar ymyl y bwrdd ac yna mae'n cael ei wthio dros yr ymyl fel bod y llyn yn berpendicwlar i ochr y bwrdd. Darganfyddwch fuanedd A pan fydd yn dechrau symud a hefyd y tyniant ergydol yn y llyn.

Mae cwestiynau 3 i 6 yn cyfeirio at ddau ronyn A a B , masau m kg ac M kg yn ôl eu trefn, wedi eu cysylltu trwy llyn anestynadwy ysgafn sy'n mynd dros bwli llyfn ysgafn.

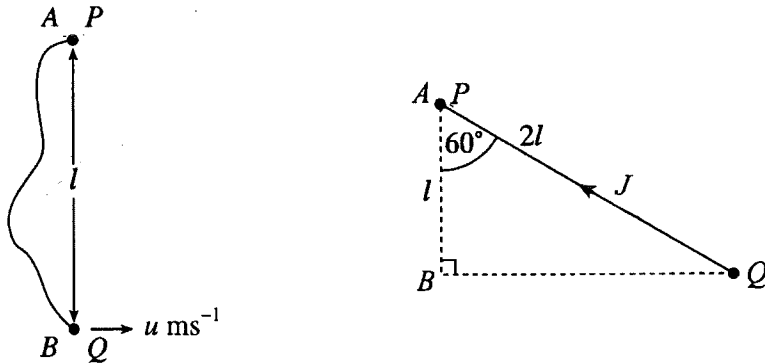
- 3 $m = 0.3$, $M = 0.2$; mae'r system yn cael ei rhyddhau o ddisymudedd, a phan fydd y ddau ronyn yn symud ar fuanedd 2 ms^{-1} , bydd y gronyn B yn codi gronyn ychwanegol, mäs 0.3 kg, o ddisymudedd. Darganfyddwch y pellter pellach a deithir cyn i'r system ddod i aros yn enydaidd am y tro cyntaf.
- 4 $m = 0.5$, $M = 0.3$; mae'r system yn cael ei rhyddhau o ddisymudedd, ac ar ôl disgyn 5 m, mae'r gronyn A yn taro llawr anelastig a dod i aros. Darganfyddwch yr amser y mae'n aros ar y llawr a'i fuanedd yn syth ar ôl iddo gael ei blycio i fyny.
- 5 $m = 0.8$, $M = 0.4$, a phan fydd y ddau fäs yn symud ar fuanedd 2 ms^{-1} , bydd A yn mynd trwy fodrwy fach ac yn codi mäs o 0.5 kg oddi arni. Darganfyddwch yr amser cyn i A fynd trwy'r fodrwy am y tro nesaf.
- 6 $m = 0.5$, $M = 0.2$; mae'r system yn llonydd gydag A yn gorwedd ar blân llyfn. Mae gronyn, mäs 0.2 kg, sy'n cwmpo ar fuanedd 4 ms^{-1} yn taro B ac yn glynu wrtho. Darganfyddwch yr uchder y mae A yn codi.

Mwy o Enghreifftiau

Enghraifft 3.7

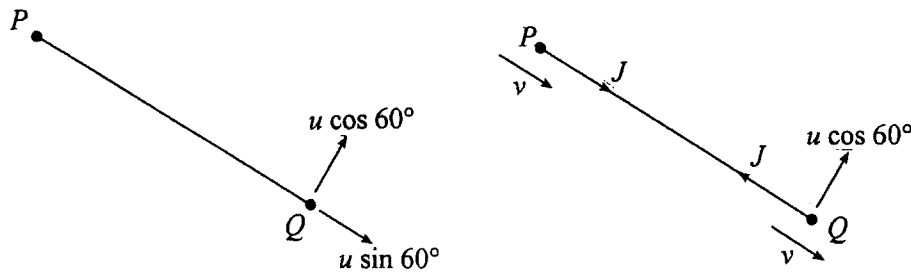
Mae gronynnau P , Q , pob un â mäs m kg, ynghlwm, un i bob pen o llyn anestynadwy ysgafn sydd â hyd $2l$ m. Mae'r gronynnau'n gorwedd ar lawr llorweddol llyfn. I ddechrau, mae P ym mhwynt A a Q ym mhwynt B , pellter o l m oddi wrth A . Caiff Q ei daflu ar hyd y llawr gyda chyflymder $u \text{ ms}^{-1}$ yn

berpendicwlar i AB . Darganfyddwch gyflymder y gronynnau yn union ar y plwc a maint y tyniannau ergydol.



Yn union cyn y plwc, mae P yn llonydd, mae gan Q gyflymder $u \cos 60^\circ$ yn berpendicwlar i'r llinyn ac $u \sin 60^\circ$ ar hyd y llinyn.

Yn union ar ôl y plwc, mae P, Q yn symud yng nghyfeiriad y llinyn gyda chyflymder v . Yn berpendicwlar i'r llinyn, nid oes ergyd ar y naill ronyn na'r llall ac mae'r cyflymderau yn y cyfeiriad hwn yn aros yr un fath.



Ergyd = newid mewn momentwm

Ar hyd y llinyn

ar gyfer P $J = mv$

ar gyfer Q $-J = mv - \frac{mu\sqrt{3}}{2}$

Adio $2v = \frac{u\sqrt{3}}{2}$

$v = \frac{u\sqrt{3}}{4}$

Yn union ar ôl y plwc,

cyflymder $P = \frac{u\sqrt{3}}{4} \text{ ms}^{-1}$ ar hyd y llinyn.

$$\text{cyflymder } Q = \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{u\sqrt{7}}{4} \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{yng nghyfeiriad} \quad \tan^{-1} \left(\frac{\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u\sqrt{3}}{4}} \right) \text{ i'r llinyn}$$

$$\text{h.y.} \quad \tan^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \text{ i'r llinyn.}$$

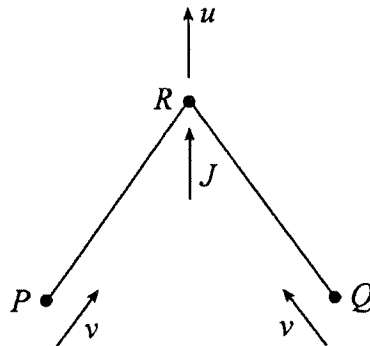
$$\begin{aligned} \text{Hefyd mae } J &= mv \\ &= \frac{mu\sqrt{3}}{4} \text{ Ns.} \end{aligned}$$

Enghraifft 3.8

Mae llinyn ysgafn anestynadwy, hyd 2ℓ m, yn cario masau P , Q , pob un â màs m kg yr un, gydag un ym mhob pen a màs R o $3m$ kg yn ei ganolbwynt. I ddechrau, mae P , Q a R yn llonydd ar fwrdd llorweddol llyfn ar gorneli triongl hafalochrog gydag ochr ℓ m. Rhoddir ergyd J i R ar hyd hanerydd perpendicwlar PQ . Darganfyddwch gyflymder y gronynnau

- (a) yn syth ar ôl yr ergyd,
- (b) yn union cyn i P a Q wrthdaro.

(a) Yn union ar ôl yr ergyd, mae cyflymderau P , Q a R fel a ddangosir yn y diagram.



Yng nghyfeiriad J

$$\begin{aligned} J &= 3mu + mv \cos 30^\circ + mv \cos 30^\circ \\ &= 3mu + mv\sqrt{3} \end{aligned} \quad (i)$$

Hefyd, gan fod y gronynnau'n gysylltiedig, rhaid i gyflymderau'r gronynnau ar hyd y llinyn fod yr un peth ar y ddau ben.

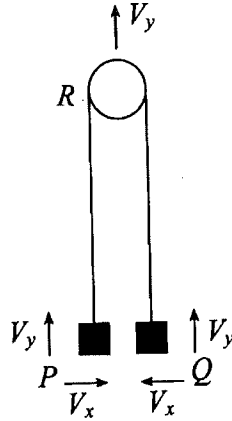
Felly ar gyfer P ac R , neu ar gyfer Q ac R

$$v = u \cos 30^\circ = \frac{u\sqrt{3}}{2} \quad (\text{ii})$$

Drwy ddatrys y ddau hafaliad hwn cawn

$$u = \frac{2J}{9m} \quad \text{a} \quad v = \frac{J\sqrt{3}}{9m}.$$

(b) Yn union cyn i P a Q wrthdaro, mae eu cyflymderau fel a ddangosir yn y diagram.



Nawr mae gennym

$$\begin{aligned} J &= 3mV_y + mV_y + mV_y \\ V_y &= \frac{J}{5m} \end{aligned}$$

sef cyflymder R .

Er mwyn darganfod V_x , rhaid cofio nad oes unrhyw newid yn yr E.C. yn union ar ôl yr ergyd ac yn union cyn i P , Q wrthdaro.

Felly, mae cadwraeth egni yn rhoi

$$\frac{1}{2} \cdot 3mu^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 3mV_y^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2)$$

Drwy amnewid am u , v a V_y , cawn

$$V_x = \frac{J}{m\sqrt{90}} \quad \text{a} \quad (V_x^2 + V_y^2) = \frac{23J^2}{450m^2}.$$

Felly mae gan P a Q gyflymder gyda maint $\frac{J}{m}\sqrt{\frac{23}{450}}$ mewn cyfeiriad sy'n gwneud

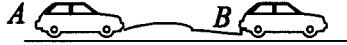
ongl o $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{18}}\right)$ gyda chyfeiriad yr ergyd.

Ymarferion 3.3

- 1 Mae dau ronyn P a Q , pob un â màs 5 kg, ynghlwm trwy llyn anestynadwy ysgafn â hyd 2m. Ar y dechrau, maent yn gorwedd yn llonydd ar fwrdd llorweddol llyfn gyda P yn A a Q yn B lle mae A a B ar bellter o 1m oddi wrth ei gilydd. Caiff gronyn Q ei daflunio ar draws y bwrdd gyda chyflymder 4ms^{-1} i gyfeiriad sy'n gwneud ongl θ gydag AB .
Darganfyddwch fuanedd P pan fo'n dechrau symud, a'r tyniant ergydiol yn y llinyn pan fo
 - (a) $\theta = 0$
 - (b) $\theta = 120^\circ$
 - (c) $\theta = 45^\circ$
 - (d) $\theta = 90^\circ$.
- 2 Mae dwy belen P a Q , màs 4 kg a 2 kg yn ôl eu trefn, yn gorwedd ar blân llorweddol llyfn ac maent ynghlwm drwy llyn anestynadwy ysgafn. I ddechrau, mae Q yn wynebu i'r Dwyrain o P . Rhoddir ergyd i Q , a phetai'n rhydd, byddai'n symud i gyfeiriad y Gogledd-Ddwyrain gyda chyflymder 21ms^{-1} .
Dangoswch fod Q yn symud gyda chyflymder 15.65ms^{-1} i gyfeiriad Gogledd 72° Dwyrain. Cyfrifwch yr ergyd a roddir i Q a'r tyniant ergydiol yn y llinyn.
- 3 Mae dau ronyn â masau 4 kg a 3 kg yn gorwedd ar fwrdd llyfn ac maent ynghlwm drwy llyn llac. Caiff y gronyn cyntaf ei daflunio ar hyd y bwrdd gyda chyflymder 21ms^{-1} i gyfeiriad sy'n mynd i ffwrdd oddi wrth yr ail ronyn. Darganfyddwch gyflymder pob gronyn ar ôl i'r llinyn dynhau, a chyfrifwch faint o egni cinetig a gollir.
Mae'r ail ronyn ynghlwm wrth drydydd gronyn, sydd â màs anhysbys, trwy llyn llac arall. Ar ôl i'r ddau llyn dynhau, mae cyflymder y ddau ronyn yn 10ms^{-1} .
Darganfyddwch fâs y trydydd gronyn.
- 4 Mae tri gwrthrych â masau 0.4, 0.5 a 0.6 kg, yn ôl eu trefn, yn gorwedd mewn trefn mewn llinell syth ar fwrdd mawr llyfn, ac mae'r pellter rhwng gwrthrychau dilynol yn 0.15m. Mae dau llyn llac sy'n ysgafn ac yn anestynadwy, pob un â hyd 0.6m, yn cysylltu'r màs cyntaf a'r ail, a'r ail fâs a'r trydydd. Caiff y trydydd gwrthrych ei daflunio gyda buanedd 4.5ms^{-1} yn uniongyrchol oddi wrth y ddau arall.
Cyfrifwch yr amser aiff heibio cyn i'r màs cyntaf ddechrau symud a buanedd y màs cyntaf pan fo'n dechrau symud. Cyfrifwch faint o egni cinetig a gollir yn y system.
Dangoswch mai 8 : 15 yw cymhareb y tyniannau ergydiol yn y ddau llyn pan ddechreu'r màs cyntaf symud.

Ymarferion Amrywiol 3

1



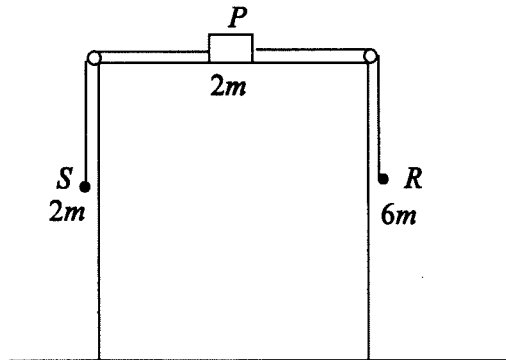
Mae'r diagram yn dangos dau gar A a B , masau 1200 kg a 1800 kg , ar ffordd lorwedd. Mae car A wedi torri ac mae car B ar fin ei dynnu. Buanedd car B wrth i'r rhaff dynhau yw 5 ms^{-1} . Gan fodelu'r ceir fel gronynnau a chymryd bod y rhaff lusgo yn ysgafn ac yn baralel i'r ffordd ar hyd y llinell sy'n cysylltu'r ceir, darganfyddwch

- (i) fuanedd cyffredin y ddau gar yn syth ar ôl i gar A ddechrau symud,
- (ii) y tyniant ergydol yn y rhaff.

Yna mae'r ddau gar yn dal i symud ar hyd y ffordd lorwedd nes iddynt gyrraedd buanedd cyson o 15 ms^{-1} . Yna maent yn parhau ar y buanedd cyson hwn. O wybod bod car B yn gweithio ar gyfradd gyson o 20 kW , darganfyddwch gyfanswm y gwrthiant sy'n gweithredu ar y ddau gar.

O wybod ymhellach fod y gwrthiant ar y ddau gerbyd mewn cyfrannedd â'i fâs, darganfyddwch y tyniant yn y rhaff.

2



Mae'r diagram yn dangos gronyn P , mäs $2m$, ar fwrdd llorwedd garw ynghlwm trwy llinynnau anestynadwy ysgafn wrth ronynnau R ac S , mäs $6m$ a $2m$ yn ôl eu trefn. Y cyfernod ffrithiant rhwng P a'r bwrdd yw 0.5 . Mae'r llinynnau yn mynd dros bwlïau ysgafn llyfn ar ochrau cyferbyn y bwrdd fel bod R ac S yn gallu symud yn rhydd gyda'r llinynnau yn berpendicwlar i ochrau'r bwrdd. O wybod bod y system yn cael ei rhyddhau o ddisymudedd, darganfyddwch gyflymiad cyffredin y gronynnau a'r tyniant yn y llinyn sy'n cysylltu P ac S .

Ar ôl disgyn bellter d o ddisymudedd, mae'r gronyn R yn taro llawr anelastig a dod i aros. Darganfyddwch, yn y cyfnod ar ôl i R daro'r llawr, faint ymhellach mae S yn codi.

Darganfyddwch hefyd, gan gymryd bod P yn aros ar y bwrdd yn y mudiant dilynol ac nad yw S byth yn cyrraedd y bwrdd, fuanedd plycio R oddi ar y llawr.

- 3 Mae dau ronyn A a B , pob un â màs m kg, ynghlwm trwy llyn anestynadwy ysgafn hyd 2ℓ , ac maent yn gorwedd ar fwrdd llorwedd llyfn ar bellter ℓ oddi wrth ei gilydd. Rhoddir ergyd lorweddol μNs i B mewn cyfeiriad sy'n berpendicwlar i AB . O wybod bod
- (i) A yn sefydlog
 - (ii) A yn rhydd i symud,
- darganfyddwch yr ergyd yn y llinyn pan gaiff ei dynhau a chyflymder B yn union wedyn. Dangoswch fod maint yr egni cinetig a gollir yn (i) yn ddwywaith cymaint â maint yr egni cinetig a gollir yn (ii).
- 4 Mae plân llyfn yn goleddu ar ongl o 30° i'r llorwedd yn sefydlog fel bod ei ymyl isaf ar uchder o a m uwchben bwrdd llorwedd. Mae dau ronyn, pob un â màs m kg, ynghlwm trwy llyn anestynadwy ysgafn hyd $2a$ m. I ddechrau, mae P ar ymyl isaf y plân ar oledd ac mae Q yn gorwedd ar y bwrdd yn fertigol o dan P . Yna caiff P ei dafluio gyda chyflymder $u \text{ ms}^{-1}$, lle mae $u > \sqrt{ga}$, tuag i fyny ar hyd llinell goled mwyaf y plân.
- (a) Darganfyddwch y tyniant ergydiol yn y llinyn pan rhoddir plwc i Q ddechrau symud.
 - (b) Cyfrifwch y tyniant yn y llinyn tra bo Q yn symud.
 - (c) O wybod bod Q yn cyrraedd ymyl y bwrdd, cyfrifwch werth u .
- 5 Mae dau ronyn â masau 1 kg a 3 kg ynghlwm trwy llyn anestynadwy ysgafn hyd 0.8 m. Aiff y llinyn dros beg llyfn. I ddechrau, mae'r gronynnau'n cyffwrdd y peg. Yna cânt eu gollwng o ddisymudedd ar union yr un adeg, un ar bob ochr i'r peg.
- (i) Darganfyddwch fuanedd pob gronyn yn syth ar ôl i'r llinyn dynhau.
 - (ii) Cyfrifwch faint o egni a gollir oherwydd bod y llinyn yn cael ei dynhau'n sydyn.
 - (iii) Darganfyddwch faint o amser aeth heibio o'r adeg pan ollyngwyd y gronynnau hyd nes bo'r gronyn ysgafnaf yn cyrraedd y peg eto.

Pennod 4

Mudiant o dan effaith disgyrchiant mewn dau ddimensiwn

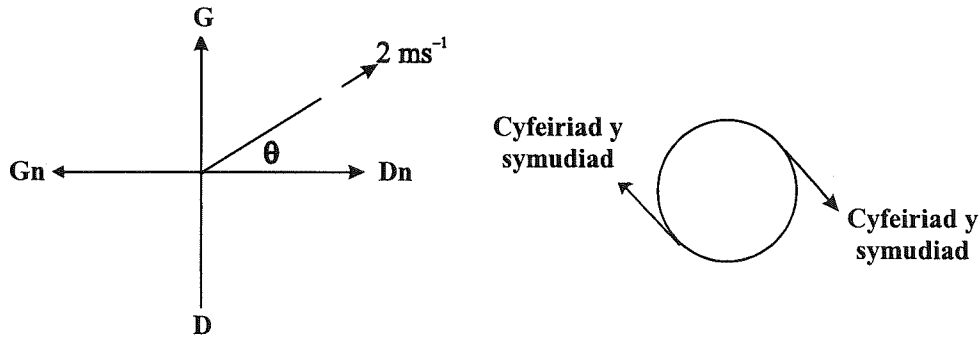
Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon

- dylech, ar gyfer mudiant mewn plân, allu darganfod maint a chyfeiriad cyflymder gronyn mewn dau ddimensiwn, o wybod ei gydrannau, ac yn y drefn arall,
- dylai bod gennych syniad clir o ffurf llwybr gronyn sy'n symud o dan effaith disgyrchiant a dylech allu datrys problemau sy'n ymwneud â thaflu gronyn o bwynt.

4.1 Cinemateg sylfaenol

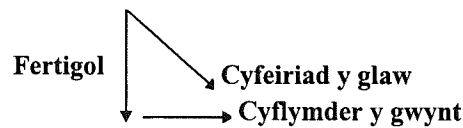
Mae pob problem mewn dynameg a gawsoch hyd yn hyn wedi ymwneud â mudiant mewn llinell lle nad yw'n bosibl ond symud yn ôl ac ymlaen. Nid yw'r sefyllfa mor syml ar gyfer mudiant mewn plân. Er enghraifft, mae pêl sy'n symud ar blân llorwedd yn gallu symud i nifer anfeidraidd o gyfeiriadau gwahanol. Felly mae angen cyffredinolï'r syniad o gyflymder i broblemau sy'n ymwneud â mudiant mewn dau ddimensiwn.

Diffinnir cyflymder fel rhywbeth sy'n cynrychioli yn llwyr gyfradd newid safle gwrthrych, sy'n cynnwys cyfradd teithio gwrthrych trwy bellter a chyfeiriad teithio'r gwrthrych. Nid yw'n arbennig o hawdd ar hyn o bryd, ac eithrio gyda mudiant mewn llinell syth, rhoi diffiniad clir o gyfradd teithio gwrthrych trwy bellter, er eich bod yn dal yn ymwybodol o ryw fath o 'fuanedd' wrth gerdded ar hyd unrhyw fath o lwybr crwm. Y pwynt sylfaenol, fodd bynnag, yw bod maint a chyfeiriad yn gysylltiedig â chyflymder: sef ei 'fuanedd' a chyfeiriad ei fudiant. Diffinnir cyflymder dyn sy'n symud ar fuanedd cyson o 2 ms^{-1} ar ongl θ i'r Gogledd o'r Dwyrain, fel yn y diagram ar y chwith, fel cyflymder maint 2 ms^{-1} , ar ongl θ i'r Gogledd o'r Dwyrain.

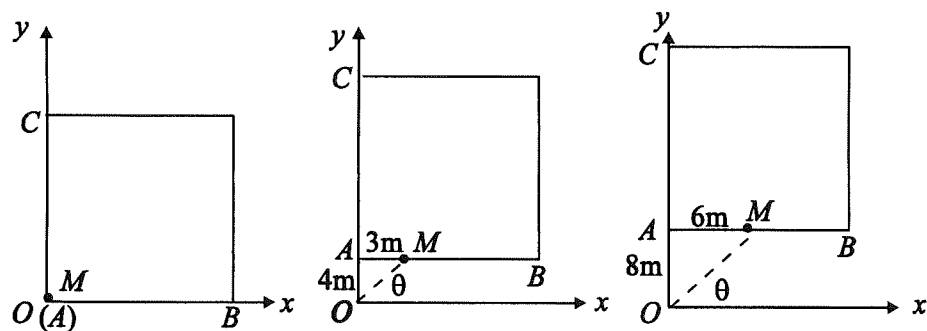


Petai'r dyn yn cerdded o gwmpas cylch fel yn y diagram ar y dde, gan gymryd yr un amser i gerdded trwy bob arc fach o'r cylch, yna cyfeiriad y mudiant ar unrhyw bwynt fyddai ar hyd y tangiad i'r cylch. Yna mae ei gyflymder ar unrhyw bwynt ar y cylch yn cael ei ddiffinio ar hyd y tangiad i'r cylch ar y pwynt hwnnw a'i faint yw cylchedd y cylch wedi'i rannu â'r amser a gymerir i gerdded cylch cyfan. Bydd diffiniad mwy manwl o hwn yn cael ei roi yn nes ymlaen.

Felly gellir cynrychioli cyflymder ar bwynt gan linell, gyda chyfeiriad y llinell yn cynrychioli cyfeiriad y mudiant a hyd y llinell yn cynrychioli maint y cyflymder. Felly mae cyflymder, fel grym, yn fector. Mae hyn yn golygu y gellir ystyried unrhyw gyflymder fel cyfuniad o ddau, neu ragor, o fudiannau neu gydrannau gwahanol. Enghraifft syml yw mudiant glaw yn y gwynt. Os nad oes gwynt mae'r glaw yn disgyn yn fertigol ond pan fydd hi'n wyntog bydd y glaw yn disgyn ar ongl. Y rheswm yw bod gwir gyflymder y glaw yn gyfuniad o'r cyflymder trwy ddisgyn o dan effaith disgyrchiant a chyflymder y gwynt.

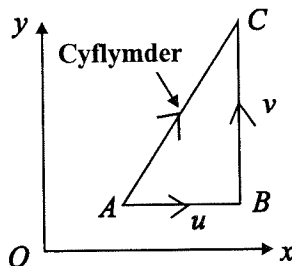


Mae cyflymderau yn cyfuno, fel grymoedd, yn ôl rheol y paralelogram.



Gellir gweld hyn trwy ddychmygu bwrdd mawr ar lawr sglefrio iâ gyda dwy ochr berpendicwlar AB ac AC yn pwyntio tua'r Dwyrain a thua'r Gogledd. Ar y dechrau, fel yn y diagram, mae'r bwrdd yn gorwedd gydag A ar bwynt sefydlog O ac AB ac AC yn baralel i linellau sefydlog a luniwyd tua'r Dwyrain a'r Gogledd trwy O . Cymerir y llinellau hyn fel yr echelinau cyfesurynnol Ox ac Oy . Yna tynnir y bwrdd tua'r Gogledd ar fuanedd 4 ms^{-1} ac ar yr un pryd dychmygir bod anifail bach M yn symud ar hyd y llinell AB ar fuanedd 3 ms^{-1} . Ar ôl 1 eiliad, bydd OA yn 4 m ac AM yn 3 m ac felly, o gyfeirio at yr echelinau Ox , Oy , bydd gan M y cyfesurynnau $(3,4)$ ac OM fydd $\sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m} = 5 \text{ m}$. Ar ôl 2 eiliad, y cyfesurynnau fydd $(6, 8)$ a bydd $OM = 10 \text{ m}$. Felly mae M yn symud ar hyd y llinell trwy O a'r pwynt $(3, 4)$, a'i fuanedd yw 5 ms^{-1} . Felly mudiant M yw buanedd 5 ms^{-1} ar ongl θ i Ox , lle mae $\tan \theta = \frac{4}{3}$ yn gyfuniad o'r ddau fudiant gwahanol; h.y. cydrannau'r cyflymder yw 3 ms^{-1} ar hyd Ox a 4 ms^{-1} ar hyd Oy . Mae hyn yn cadarnhau dilysrwydd paralelogram y cyflymderau mewn achos syml.

Gyda mudiannau mwy cyffredinol, mae'n haws diffinio'r cydrannau i ddau gyfeiriad perpendicwlar yn gyntaf, yn hytrach na cheisio diffinio'n uniongyrchol rywbeth sy'n cynrychioli cyfradd newid safle. Os diffinnir cydrannau'r cyflymder ar hyd Ox ac Oy gan u a v ,



yn ôl eu trefn, yna cynrychiolir y cyflymder, fel yn y diagram, gan hypotenws y triongl ongl sgwâr ABC , lle mae AB yn baralel i Ox ac mewn cyfrannedd ag u , a BC yn baralel i Oy ac mewn cyfrannedd â v . Mae hyd y llinell AC yn cynrychioli'r buanedd w a ddiffinnir gan $w = \sqrt{u^2 + v^2}$. Felly diffinnir y cyflymder fel un â maint w i'r cyfeiriad sy'n ffurfio ongl θ â chyfeiriad positif x , lle mae $\tan \theta = \frac{v}{u}$.

O'r triongl ongl sgwâr ABC , $\frac{u}{w} = \cos \theta$, $\frac{v}{w} = \sin \theta$,

h.y. $u = w \cos \theta$, $v = w \sin \theta$.

Mae'r hafaliadau uchod yn eich galluogi i drawsnewid y diffiniad maint-cyfeiriad o gyflymder i ffurf gydrannol, ac fel arall.

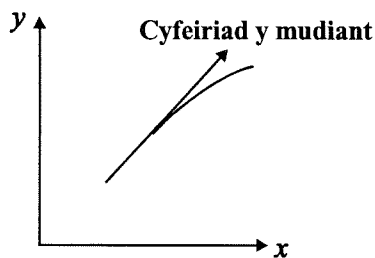
Mae'r hafaliadau yn union yr un fath â'r rhai sy'n perthnasu maint a chyfeiriad grym i'w gydrannau, ac mae angen gofalu, fel mewn Statag yn Adran 2.3 Llyfr M1, eich bod yn dewis y pedrant cywir ar gyfer cyfeiriad y cyflymder.

Pennir safle gronyn sy'n symud mewn plân yn llwyr gan ei gyfesurynnau x ac y ; a gall y rhain ddibynnu ar amser. Cyfeirir yn gyffredinol at y cyfesurynnau hyn fel dadleoliadau'r gronyn o'r tarddiad. Diffinnir cydrannau x ac y cyflymder, sef u a v yn ôl eu trefn, fel

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}.$$

Os nad ydych wedi astudio differiadau eto, gellir diffinio'r cydrannau cyflymder, fel yn Adran 4.1 Llyfr M1, fel graddiannau graffiau x ac y yn erbyn amser.

Felly, o wybod x ac y , gellir darganfod u a v ac felly faint y cyflymder (sef y buanedd) a'i gyfeiriad. Wrth i t amrywio, bydd y pwynt â chyfesurynnau x ac y yn ffurfio cromlin, sef llwybr y gronyn, fel a ddangosir yn y diagram.



Bydd mudiant y gronyn ar ongl θ i'r echelin x , lle mae

$$\tan \theta = \frac{v}{u} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx},$$

ac felly bydd cyfeiriad mudiant y gronyn ar hyd y tangiad i'r llwybr.

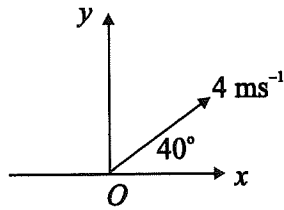
Diffinnir cyflymiad hefyd fel fector, a'i gydrannau yw $\frac{d^2x}{dt^2}$ a $\frac{d^2y}{dt^2}$. Fodd bynnag, mae'r cyflymiad o dan effaith disgyrchiant yn gyson ac yn fertigol i lawr. Felly, os dewisir echelinau x ac y yn llorwedd a fertigol, dim ond un gydran cyflymiad sydd angen ei hystyried mewn problemau mudiant o dan effaith disgyrchiant, fel y rhai a ystyrir yn Adran 4.2.

Enghraifft 4.1

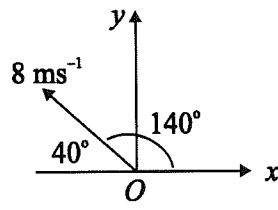
Darganfyddwch y cydrannau x ac y ar gyfer y cyflymderau canlynol:

- (i) 4 ms^{-1} ar ongl 40° i echelin bositif x ,
- (ii) 8 ms^{-1} ar ongl 140° i echelin bositif x ,
- (iii) 14 ms^{-1} ar ongl 60° o dan echelin bositif x .

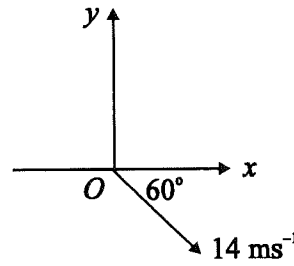
Dangosir y cyflymderau i gyd yn y diagram isod lle cymerir yr echelin x ar draws y dudalen i'r dde a'r echelin y i fyny'r dudalen.



(i)



(ii)



(iii)

(i) Y cydrannau x ac y yw

$$4 \cos 40^\circ \text{ ms}^{-1} = 3.06 \text{ ms}^{-1} \quad \text{a} \quad 4 \sin 40^\circ \text{ ms}^{-1} = 2.57 \text{ ms}^{-1}.$$

(ii) Y cydrannau x ac y yw

$$8 \cos 140^\circ \text{ ms}^{-1} = -6.13 \text{ ms}^{-1} \quad \text{ac} \quad 8 \sin 140^\circ \text{ ms}^{-1} = 5.14 \text{ ms}^{-1}.$$

Gellir hefyd ddarganfod y cydrannau hyn, fel mewn problemau Stateg, trwy gymryd cydrannau ar hyd cyfeiriad positif y a chyfeiriad negatif x ;

$$\text{sef} \quad 8 \cos 40^\circ \text{ ms}^{-1} = 6.13 \text{ ms}^{-1} \quad \text{ac} \quad 8 \sin 40^\circ \text{ ms}^{-1} = 5.14 \text{ ms}^{-1}.$$

Yna, ceir y gydran x trwy newid arwydd y gydran gyntaf.

(iii) Yn yr achos hwn, y ffordd symlaf yw darganfod y cydrannau ar hyd echelin positif x ac echelin negatif y ; sef

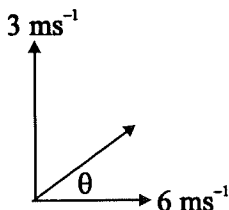
$$14 \cos 60^\circ \text{ ms}^{-1} = 7 \text{ ms}^{-1} \quad \text{ac} \quad 14 \sin 60^\circ \text{ ms}^{-1} = 12.1 \text{ ms}^{-1}$$

Y cydrannau x ac y felly yw 7 ms^{-1} a -12.1 ms^{-1} .

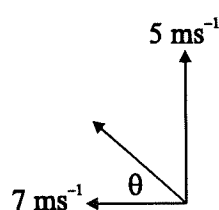
Enghraifft 4.2

Darganfyddwch faint a chyfeiriad y cyflymderau canlynol o wybod mai eu cydrannau x ac y , yn ôl eu trefn, yw

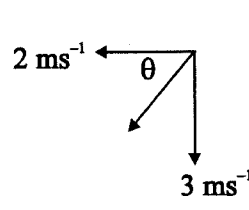
(i) 6 ms^{-1} , 3 ms^{-1} , (ii) -7 ms^{-1} , 5 ms^{-1} , (iii) -2 ms^{-1} , -3 ms^{-1} .



(i)



(ii)



(iii)

Dangosir y cydrannau yn y diagram uchod lle cymerir yr echelin x ar draws y dudalen i'r dde a'r echelin y i fyny'r dudalen.

(i) Y buanedd yw $\sqrt{6^2 + 3^2} \text{ ms}^{-1} = 6.71 \text{ ms}^{-1}$ ac mae'r mudiant ar ongl θ i echelin bositif x , lle mae $\tan \theta = \frac{3}{6}$ ac felly $\theta = 26.6^\circ$.

Felly y cyflymder yw 6.71 ms^{-1} ar ongl 26.6° i echelin bositif x .

(ii) Y buanedd yw $\sqrt{7^2 + 5^2} \text{ ms}^{-1} = 8.6 \text{ ms}^{-1}$ ac mae'r mudiant ar ongl θ i echelin negatif x , lle mae $\tan \theta = \frac{5}{7}$ ac felly $\theta = 35.5^\circ$.

Felly y cyflymder yw 8.6 ms^{-1} ar ongl 144.5° i echelin bositif x .

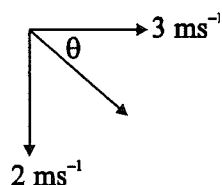
(iii) Y buanedd yw $\sqrt{2^2 + 3^2} \text{ ms}^{-1} = 3.61 \text{ ms}^{-1}$ ac mae'r mudiant ar ongl θ i echelin negatif x yn y trydydd pedrant, lle mae $\tan \theta = \frac{3}{2}$ ac felly $\theta = 56.3^\circ$.

Felly y cyflymder yw 3.61 ms^{-1} ar ongl 236.3° i echelin bositif x .

Enghraifft 4.3

Dadleoliadau x ac y gronyn o'r tarddiad ar amser t eiliad, mewn metrau, yw $(3t, 4t - 3t^2)$. Darganfyddwch gydrannau'r cyflymder pan fo $t = 1$ a phan fo $t = 3$. Darganfyddwch hefyd gyfeiriad y mudiant pan fo $t = 1$.

Darganfyddir cydrannau'r cyflymder trwy ddifferu'r dadleoliadau ac mae hyn yn rhoi $u = 3 \text{ ms}^{-1}$, $v = (4 - 6t) \text{ ms}^{-1}$. Felly cydrannau'r cyflymder pan fo $t = 1$ yw 3 ms^{-1} a -2 ms^{-1} , a phan fo $t = 3$, maent yn 3 ms^{-1} a -14 ms^{-1} .

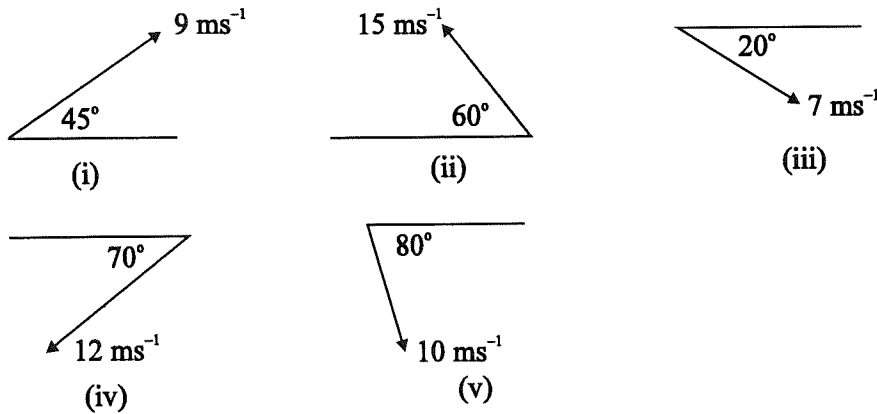


Dangosir y cydrannau pan fydd $t = 1$ yn y diagram, gyda'r cyfeiriadau x ac y fel a ddifiniwyd yn Enghraifft 4.2. Mae'r cyflymder ar ongl θ o dan yr echelin x , lle mae $\tan \theta = \frac{2}{3}$, ac felly $\theta = 33.7^\circ$.

Ymarferion 4.1

Yn y cwestiynau canlynol dynodir dadleoliadau x ac y gronyn o'r tarddiad gan x m ac y m yn ôl eu trefn, a chydannau x ac y ei gyflymder gan $u \text{ ms}^{-1}$ a $v \text{ ms}^{-1}$ yn ôl eu trefn.

- 1 O gymryd yr echelin x ar draws y dudalen i'r dde a'r echelin y i fyny'r dudalen, darganfyddwch u a v yn yr achosion canlynol.



- 2 Darganfyddwch faint a chyfeiriadau'r cyflymderau sy'n cyfateb i
 (i) $u = 2, v = 6$, (ii) $u = -3, v = 8$, (iii) $u = 4, v = -12$, (iv) $u = -9, v = -4$,
 (v) $u = 12, v = -15$.
- 3 Darganfyddwch u a v pan fydd
 (i) $x = 5t, y = 2t + 4t^2$, (ii) $x = 3t, y = 4t - 3t^2$, (iii) $x = 8t^2, y = 5t^2 + 4t^3$,
 (iv) $x = e^{-t}, y = e^{-t} + e^{-2t}$.
- 4 Darganfyddwch fuanedd a chyfeiriad y mudiant ar gyfer 3(i) a 3(ii) pan fydd $t = 2$.

4.2 Hafaliadau mudiant

Mae mudiant unrhyw wrthrych sy'n symud o dan effaith disgrychiant yn cael ei reoli gan ail ddeddf mudiant Newton. (Fel arfer, gelwir mudiant o'r fath yn *fudiant taflegryn* a gelwir y gwrthrych sy'n symud yn *daflegryn*.) Rydych yn gyfarwydd â'r ddeddf hon yn y ffurf $m\ddot{x} \times \text{cyflymiad}$ ar gyfer mudiant ar hyd llinell. Mae'r ffurf ar gyfer mudiant cyffredinol yr un fath yn y bôn, ac eithrio bod angen nawr cymryd i ystyriaeth y ffaith nad yw'r mudiant bellach mewn llinell syth. Yn gyffredinol, deddf Newton yw:

$m\ddot{x} \times \text{cydran cyflymiad i unrhyw gyfeiriad} = \text{cydran y grym i'r cyfeiriad hwnnw}$.

Wrth drin mudiant taflegrau, y **tybiaethau modelu** a wneir yw bod pob gwrthrych yn cael ei fodelu fel gronyn ac nad oes grymoedd gwrthiannol yn gweithredu, ac felly yr unig rym sy'n gweithredu yw grym disgrychiant. Os dewisir yr echelin x yn llorwedd a'r echelin y yn fertigol i fyny, yna nid oes cydran x i'r grym a'i gydran y yw $-mg$, lle mae g yn dynodi'r cyflymiad oherwydd disgrychiant. Felly mae deddf Newton yn rhoi

$$m\ddot{x} \times \text{cydran } x \text{ y cyflymiad} = 0; \quad m\ddot{y} \times \text{cydran } y \text{ y cyflymiad} = -mg,$$

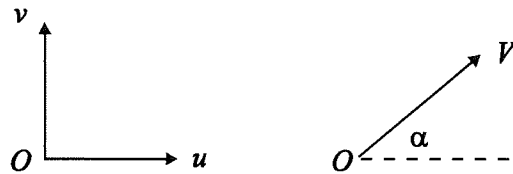
$$\text{h.y.} \quad \text{cydran } x \text{ y cyflymiad} = 0; \quad \text{cydran } y \text{ y cyflymiad} = -g.$$

Mae'r hafaliad cyntaf yn dangos bod y gydran x yn gysonyn, e.e. u , ac felly mai dadleoliad llorwedd gronyn o'i safle cychwynnol yw ut . Mae'r ail hafaliad yn dangos y bydd y mudiant fertigol yr un fath â mudiant gronyn sy'n disgyn yn rhydd o dan effaith disgrychiant, h.y. gyda chyflymiad g i lawr. Felly gellir darganfod y

dadleoliad fertigol o'r hafaliad $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ lle mae $a = -g$ ac u yn hafal i werth cydran y cyflymder i fyny ar amser $t = 0$; dynodir hyn gan v . Felly rhoddir dadleoliadau llorwedd a fertigol, ar amser t , gronyn o bwynt O gan

$$x = ut \quad \text{ac} \quad y = vt - \frac{1}{2}gt^2,$$

lle mae u a v yn dynodi cydrannau cyflymder y gronyn ar amser $t = 0$ ar y pwynt cychwynnol O . Felly os yw gronyn yn cael ei daflu o O gyda chydrannau cyflymder u a v fel yn y diagram ar y chwith, rhoddir ei gyfesurynnau gan yr hafaliadau uchod.



Yn amlach, rhoddir maint V y cyflymder cychwynnol a'i gyfeiriad α o'r llorwedd, fel ar y dde. Felly $u = V \cos \alpha$, $v = V \sin \alpha$ ac mae amnewid yn y mynegiadau ar gyfer y dadleoliadau yn rhoi

$$x = V \cos \alpha t \quad \text{ac} \quad y = V \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Gellir defnyddio'r naill set o hafaliadau uchod neu'r llall i ddatrys unrhyw broblem ar daflegrau ond ar y cyfan mae'n well trafod unrhyw broblem trwy ddefnyddio'r egwyddorion sylfaenol. Mae'n bwysig sylwi bod yr hafaliadau sy'n rheoli'r dadleoliadau fertigol a llorwedd yn annibynnol ar ei gilydd. Mudiant ar fuanedd cyson yw'r mudiant llorwedd, a mudiant gronyn sy'n symud yn fertigol yw'r mudiant fertigol; rydych wedi datrys problemau o'r fath yn Adran 4.3 Llyfr M1. Mae mudiant gwirioneddol y gronyn yn gyfuniad o'r ddau fudiant annibynnol.

Gellir hefyd gyffredinoli'r egwyddor cadwraeth egni er mwyn cynnwys mudiant taflegrau a gellir defnyddio hyn fel dull cyflym o ddarganfod buanedd. Cymhwysir yr egwyddor cadwraeth egni i'r mudiant fertigol yn y ffurf

$$\frac{1}{2}m (\text{cydran fertigol y cyflymder})^2 + \text{E.P. disgrychedd} = \text{cysonyn}.$$

Mae cydran lorwedd y cyflymder yn gyson ac felly mae'r hafaliad uchod yn dal yn wir os ychwanegir $\frac{1}{2}m (\text{cydran lorwedd y cyflymder})^2$ at y ddwy ochr. Hefyd

$$(\text{cydran lorwedd y cyflymder})^2 + (\text{cydran fertigol y cyflymder})^2 = (\text{buanedd})^2.$$

Gellir cyffredinoli'r diffiniad o egni cinetig i fudiannau mewn plân fel hyn:

$$\text{E.C.} = \frac{1}{2}m (\text{buanedd})^2$$

ac felly trwy'r diffiniad hwn mae'r egni mecanyddol yn cael ei gadw.

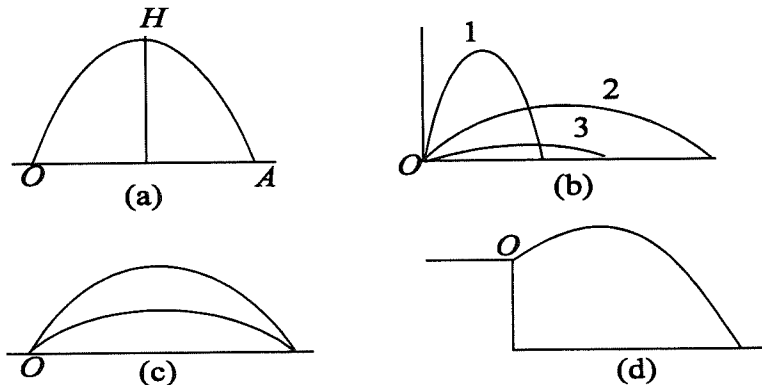
Ffordd arall o ddarganfod y dadleoliadau, ond un sy'n hollol gywerth, fyddai defnyddio'r diffiniad o gyflymiad yn nhermau deilliad i gael

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Gellir integru'r rhain i roi x ac y , ac wrth reswm mae hyn eto yn rhoi'r un mynegiadau ag a geir yn uniongyrchol o'r fformiwlâu cyflymiad.

Gellir defnyddio'r mynegiadau a gafwyd uchod ar gyfer x ac y i roi rhai fformiwlâu cyffredinol megis fformiwlâ ar gyfer yr uchder mwyaf a gyrhaeddir. Fel arfer mewn arholiadau, ni roddir marciau llawn am ddefnyddio'r fformiwlâu hyn heb eu deillio, a nodir hyn ym maes llafur M2. Er hynny, mae'r fformiwlâu hyn yn ddefnyddiol gan eu bod yn dangos ymddygiad cyffredinol taflegryn, a rhoddir eu deilliannau yn Adran 4.3.

Cyn gweithio trwy rai enghreifftiau efallai y bydd yn fuddiol cael syniad cyffredinol o lwybr taflegryn o dan dybiaethau'r model. Bydd y llwybr gwirioneddol ychydig yn wahanol, yn bennaf oherwydd effaith gwrthiant aer. Bydd gennych ryw syniad o sut mae taflegryn yn symud trwy wyllo mudiant pêl droed, pêl dennis neu bêl griced. Gellir cael darlun arbennig o eglur trwy edrych ar ddŵr yn dod allan trwy flaen pibell a gyfeirir ar ongl.



Mae diagram (a) yn dangos llwybr taflegryn a deflir oddi ar lawr gwastad ac sy'n glanio ar lawr gwastad. Mae'n codi i'w bwynt uchaf H ac yna'n taro'r llawr eto. Enw'r gromlin a geir yw parabola ac mae'n gymesurool o amgylch y llinell fertigol trwy ei phwynt uchaf H . Ar H , bydd y gronyn yn symud yn llorwedd ac, oherwydd y cymesuredd, yr amser a gymerir i gyrraedd H fydd hanner yr amser a gymerir i gyrraedd A . Enw'r pellter OA o'r llawr i'r llawr yw'r cyrhaeddiad, R . Mae diagram (b) yn dangos sut mae'r cyrhaeddiad yn amrywio yn ôl ongl y taflriad ar gyfer yr un buanedd taflu. Mae cromlin 1 yn dangos bod y cyrhaeddiad yn gymharol fach os yw ongl y taflriad yn fawr. Mae'r cyrhaeddiad yn cynyddu wrth i ongl y taflriad leihau, nes iddo gyrraedd gwerth uchaf ar ongl daflriad 45° , sef cromlin 2. Ar ôl hynny mae'r cyrhaeddiad yn lleihau gydag ongl y taflriad fel a ddangosir gan gromlin 3. Ar fuanedd

penodol, mae dwy ongl dafliaid sy'n rhoi yr un cyrhaeddiad (os yw'n llai na'r gwerth uchaf); os yw α° yn un o'r onglau hyn, yna $90^\circ - \alpha^\circ$ yw'r llall. Dangosir hyn yn niagram (c). Os teflir y gronyn o ben clogwyn, bydd y llwybr fel yn niagram (d).

Y dull sylfaenol o ddatrys unrhyw broblem yw ysgrifennu'r dadleoliadau o bwynt y tafliaid ar unrhyw amser. Byddant yn cynnwys cydrannau cychwynnol cyflymder y tafliaid, neu (yn gywerth) y buanedd, ac ongl y tafliaid. Bydd y rhain yn hysbys neu bydd digon o wybodaeth ar gael i'w darganfod. Mewn achosion lle teflir y gronyn o lefel y llawr, mae'n well fel arfer cymryd y cyfeiriad y yn fertigol i fyny. Gyda phroblemau sy'n cynnwys tafliaid o bwynt uwchben lefel y llawr, efallai y bydd yn werth cymryd y cyfeiriad y tuag i lawr. Mewn achos o'r fath dylech gofio defnyddio'r arwyddion cywir yn yr hafaliad $s = ut + \frac{1}{2}at^2$.

Yn yr enghreifftiau canlynol dynodir dadleoliadau gronyn yn llorwedd a fertigol i fyny ar amser t eiliad gan x m ac y m yn ôl eu trefn; $u \text{ ms}^{-1}$ a $v \text{ ms}^{-1}$ yw cydrannau'r cyflymder cychwynnol yn llorwedd a fertigol, a chymerir bod g yn 9.8 ms^{-2} .

Enghraifft 4.4

Teflir gronyn o bwynt O ar lawr gwastad gyda chydrannau cyflymder o 7 ms^{-1} yn llorwedd a 19.6 ms^{-1} yn fertigol i fyny. Darganfyddwch bellter oddi wrth O y pwynt lle mae'r gronyn yn taro'r llawr nesaf a darganfyddwch hefyd yr uchder mwyaf a gyrrhaeddir uwchben O .

Gan nad oes gan y cyflymiad gydran llorwedd, mae gan gydran llorwedd y cyflymder werth cyson, sef 7 , ac felly

$$x = 7t.$$

O'r hafaliad $s = ut + \frac{1}{2}at^2$, gydag $a = -9.8$ ac $u = 19.6$, ceir

$$y = 19.6t - 4.9t^2.$$

Mae'r gronyn ar y llawr pan fo $y = 0$

h.y. $19.6t - 4.9t^2 = 0,$

ac felly $t = 0$ neu $t = 4$. Felly mae'n taro'r llawr eto pan fydd $t = 4$ ac $x = 28$.

Cyrhaeddir yr uchder mwyaf ar y pwynt lle nad oes cyflymder fertigol. Mae'r hafaliad $v = u + at$, gydag $u = 19.6$ ac $a = -9.8$, yn dangos y rhoddir y cyflymder fertigol v gan

$$v = 19.6 - 9.8t.$$

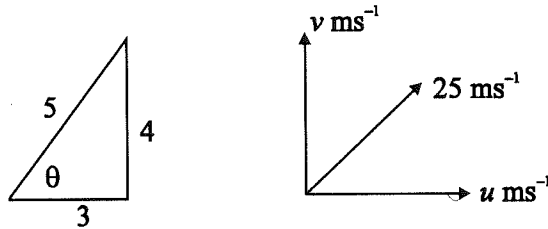
Mae hyn yn diflannu pan fydd $t = 2$. Gellid bod wedi diddwytho'r canlyniad hefyd o'r cymesuredd o amgylch y fertigol trwy bwynt yr uchder mwyaf. Mae amnewid $t = 2$ i'r mynegiad ar gyfer y yn rhoi yr uchder mwyaf fel $(39.2 - 19.6) \text{ m} = 19.6 \text{ m}$.

Ffordd arall fyddai defnyddio $v^2 = u^2 + 2as$, gydag $u = 19.6$, $a = -9.8$ a $v = 0$.

Enghraifft 4.5

Teflir gronyn o bwynt O ar fuanedd 25 ms^{-1} ac ongl θ i'r llorwedd lle mae $\tan \theta = \frac{4}{3}$.

Darganfyddwch hafaliad llwybr y gronyn a hefyd gyfeiriad ei fudiant pan fydd $t = 3$.



Mae'r diagram ar y chwith yn dangos bod $\cos \theta = \frac{3}{5}$ a bod $\sin \theta = \frac{4}{5}$; yna mae'n dilyn o'r diagram mai cydran lorwedd y cyflymder yw $25 \cos \theta = 15$ ac mai cydran fertigol y cyflymder yw $25 \sin \theta = 20$.

Bydd gan gydran lorwedd y cyflymder werth cyson o 15 ac felly

$$x = 15t.$$

Trwy ddefnyddio $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ gydag $a = -9.8$, $u = 20$, ceir

$$y = 20t - 4.9t^2.$$

Mae amnewid t yn nhermau x yn rhoi

$$y = \frac{20}{15}x - 4.9 \frac{x^2}{225} = \frac{4}{3}x - \frac{4.9x^2}{225},$$

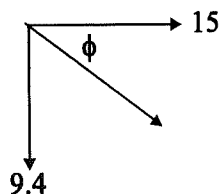
sef hafaliad y llwybr.

Darganfyddir cydran fertigol y cyflymder trwy roi $u = 20$ ac $a = -9.8$ yn yr hafaliad $v = u + at$, a chael

$$20 - 9.8t.$$

(Gellid cael hyn hefyd trwy ddifferu y mewn perthynas â t .)

Pan fydd $t = 3$, cydran fertigol y cyflymder yw -9.4 ac mae cydrannau'r cyflymder fel a ddangosir yn y diagram.



Felly mae'r gronyn yn symud ar ongl ϕ o dan y llorwedd, lle mae $\tan \phi = 0.63$, ac felly $\phi = 32.1^\circ$.

Gellid hefyd gael y cyfeiriad trwy ddifferu hafaliad y llwybr mewn perthynas ag x a darganfod y graddiant ar gyfer $t = 3$, sef ar gyfer $x = 45$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} - \frac{9.8x}{225},$$

a'i werth ar gyfer $x = 45$ yw -0.63 . Mae'r arwydd minws yn dangos ei fod yn symud o dan y llorwedd.

Enghraifft 4.6

Teflir pêl o lefel y llawr fel ei bod ar ôl 2 eiliad yn prin glirio wal sydd ar bellter o 6 m ac yn 3 m o uchder. Darganfyddwch gydrannau llorwedd a fertigol cychwynnol y cyflymder.

Yn yr achos hwn nid yw cydrannau cychwynnol y cyflymder yn cael eu rhoi ond, fel yn yr enghreifftiau blaenorol, gellir mynegi'r cyfesurynnau yn nhermau'r cydrannau fel

$$x = ut.$$

$$y = vt - 4.9t^2.$$

Mae'r amodau yn rhoi $x = 6$ pan fydd $t = 2$, ac mae amnewid yn yr hafaliad ar gyfer x yn rhoi $u = 3$.

Mae rhoi $t = 2$ ac $y = 3$ yn yr hafaliad ar gyfer y yn rhoi

$$3 = 2v - 4.9 \times 4,$$

ac felly $v = 11.3$.

Enghraifft 4.7

Teflir pêl golff o'r llawr ar fuanedd 35 ms^{-1} ac θ i'r llorwedd, lle mae $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Ar ei llwybr i lawr mae'n prin glirio coeden 5.6 m o uchder. Darganfyddwch bellter y goeden o bwynt y taflid.

Rhoddir cydrannau llorwedd a fertigol y cyflymder gan $u = 35 \cos \theta$ a $v = 35 \sin \theta$.

Gan fod $\tan \theta = \frac{3}{4}$, mae'n dilyn trwy lunio triongl ongl sgwâr fel yn enghraifft 4.5 fod

$\cos \theta = \frac{4}{5}$ a bod $\sin \theta = \frac{3}{5}$. Felly mae $u = 28$ ac mae $v = 21$.

Rhoddir y dadleoliadau o'r pwynt cychwynnol gan

$$x = 28t,$$

$$y = 21t - 4.9t^2.$$

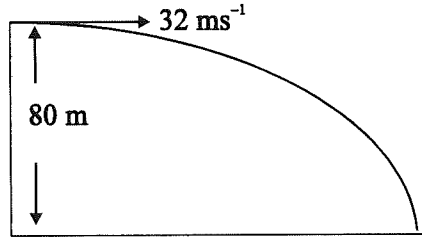
Mae defnyddio $y = 5.6$ yn y mynegiad ar gyfer y yn rhoi

$$5.6 = 21t - 4.9t^2.$$

Dyma hafaliad cwadratig ar gyfer t , y gellir ei ddatrys trwy ddefnyddio'r fformiwla safonol, a'r gwraidd yw $t = 4$ a $t = 0.29$. Mae'r cwestiwn yn nodi bod y bêl yn taro'r goeden ar ei ffordd i lawr, ac felly y gwreiddyn cywir yw'r un mwyaf, sef $t = 4$. Mae rhoi hyn yn y mynegiad ar gyfer x yn rhoi'r pellter i waelod y goeden fel 112 m.

Enghraifft 4.8

Teflir gronyn yn llorweddol ar fuanedd 32 ms^{-1} , fel a ddangosir yn y diagram, o ben clogwyn fertigol i ddaear lorwedd sydd 80 m o dan bwynt y taflad. Darganfyddwch bellter y pwynt glanio o waelod y clogwyn.



Yn yr achos hwn, gan fod y mudiant i gyd tuag at i lawr, gellir dewis y cyfeiriad y yn fertigol i lawr. Y cyflymder fertigol cychwynnol yw sero ac felly rhoddir y dadleoliadau gan

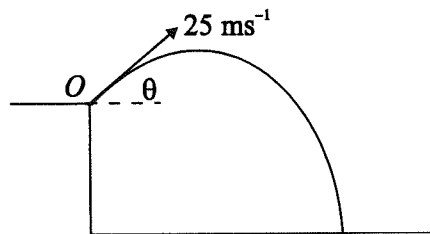
$$\begin{aligned}x &= 32t, \\y &= 4.9t^2.\end{aligned}$$

Mae'r gronyn yn taro'r ddaear pan fydd $y = 80$ fel bod $80 = 4.9t^2$, sy'n rhoi $t = 4.04$. Mae rhoi hwn yn y mynegiad ar gyfer x yn dangos bod y gronyn yn taro'r ddaear ar bellter 129.3 m o waelod y clogwyn.

Enghraifft 4.9

Teflir gronyn ar fuanedd 25 ms^{-1} ac â chydran cyflymder cychwynnol 9.6 ms^{-1} tuag i fyny, fel a ddangosir yn y diagram, o ben clogwyn fertigol i ddaear lorwedd sydd bellter o 58.8 m o dan bwynt y taflad. Darganfyddwch

- (i) bellter y pwynt glanio o waelod y clogwyn,
- (ii) fuanedd y gronyn wrth lanio.



Yn y cwestiwn hwn, rhoddir v ond nid u . Gellir darganfod ongl y taflad θ uwchben y llorwedd o'r mynegiad $19.6 = 25 \sin \theta$, sy'n rhoi $\theta = 51.6^\circ$ ac $u = 25 \cos \theta = 15.52$. Yn yr achos hwn, cymerir y cyfeiriad y i fyny ac felly y dadleoliadau yw

$$\begin{aligned}x &= 15.2t, \\y &= 19.6t - 4.9t^2.\end{aligned}$$

Mae'r gronyn yn taro'r llawr pan fydd $y = -58.8$

ac felly $-58.8 = 19.6t - 4.9t^2$.

Mae'r hafaliad hwn yn symleiddio i

$$t^2 - 4t - 12 = 0,$$

sy'n ffactorio i

$$(t - 6)(t + 2) = 0.$$

Y gwreiddyn positif yw $t = 6$ ac mae rhoi hwn yn y mynegiad ar gyfer x yn dangos bod y gronyn yn taro'r llawr ar bellter 91.2 m o waelod y clogwyn.

Gellir darganfod y buanedd glanio, $V \text{ ms}^{-1}$, trwy ddefnyddio'r egwyddor cadwraeth egni sy'n rhoi

$$\frac{1}{2} m (25)^2 + m \times 9.8 \times 58.8 = \frac{1}{2} m V^2,$$

lle mae m yn dynodi màs y gronyn a lle mae lefel gwaelod y clogwyn wedi'i chymryd fel lefel egni potensial sero. Mae'r hafaliad hwn yn rhoi $V = 42.16$.

Ymarferion 4.2

Mae cwestiynau 1 i 6 yn cyfeirio at ronyn a deflir o'r tarddiad gyda chydrrannau cyflymder llorwedd a fertigol $u \text{ ms}^{-1}$ a $v \text{ ms}^{-1}$ (neu fuanedd $V \text{ ms}^{-1}$ ar ongl α uwchben y llorwedd); dynodir dadleoliadau'r gronyn ar amser t eiliad ar ôl y taflriad gan x m ac y m, yn ôl eu trefn. Hefyd dylid cymryd g fel 9.8 ms^{-2} .

- 1 $u = 4$, $v = 5$; darganfyddwch x ac y yn nhermau t , pa bryd fydd y gronyn ar lefel y taflriad eto a beth fydd ei ddadleoliad llorwedd o bwynt y taflriad ar yr amser hwnnw.
- 2 $u = 6$, $v = 11$; darganfyddwch x ac y yn nhermau t , a'i uchder mwyaf o lefel y taflriad.
- 3 $u = 4$, $v = 12$; darganfyddwch x ac y yn nhermau t , a maint a chyfeiriad ei gyflymder pan fydd $t = 1$ a phan fydd $t = 8$.
- 4 $V = 25$, $\alpha = 30^\circ$; darganfyddwch x ac y yn nhermau t , pa bryd fydd y gronyn ar lefel y taflriad eto a beth fydd ei ddadleoliad llorwedd o bwynt y taflriad ar yr amser hwnnw.
- 5 $V = 30$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; darganfyddwch x ac y yn nhermau t , a darganfyddwch ei uchder mwyaf uwchben lefel y taflriad.
- 6 $V = 40$, $\alpha = 20^\circ$; darganfyddwch x ac y yn nhermau t , a darganfyddwch faint a chyfeiriad ei gyflymder pan fydd $t = 1$ a phan fydd $t = 8$.
- 7 Un eiliad ar ôl taflriad mae gan gyflymder gronyn gydran lorwedd 8 ms^{-1} a chydrran fertigol 25 ms^{-1} tuag i fyny. Darganfyddwch yr uchder mwyaf a gyrhaeddir uwchben pwynt y taflriad.

- 8 Teflir pêl ar fuanedd 20 ms^{-1} ac ongl 20° uwchben y llorwedd. Mae'n prin glirio pen wal ar bellter 18 m o'r pwynt O . Darganfyddwch uchder y wal uwchben lefel O .
- 9 Teflir carreg o ben clogwyn sydd 75 m uwchben lefel y môr. Ei buanedd cychwynnol yw 25 ms^{-1} ar ongl α uwchben y llorwedd, lle mae $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Darganfyddwch bellter y pwynt lle mae'r carreg yn taro'r môr o waelod y clogwyn.
- 10 Mae gan ronyn, a deflir o'r tarddiad ac sy'n symud o dan effaith disgrychiant, gyfesurynnau $(10, 5)$ ddau eiliad yn ddiweddarach. Darganfyddwch gydrannau ei gyflymder cychwynnol.
- 11 Mae gronyn a deflir o lawr gwastad yn codi i uchder 19.6 m uwchben y llawr. Darganfyddwch gydran fertigol ei gyflymder cychwynnol.
- 12 Mae gyrrwr beic modur mewn sioe gampau yn ceisio croesi afon 60 m o led trwy neidio ar fuanedd 35 ms^{-1} oddi ar ramp sydd ar ongl 25° i'r llorwedd. Darganfyddwch a yw'n llwyddo i groesi'r afon. Mae'n amcangyfrif y bydd gwrthiant aer yn gweithredu fel bod y pellter a deithir yn 60% yn unig o'r pellter a ragfynegir gan y model sy'n anwybyddu gwrthiant aer. Darganfyddwch y buanedd lleiaf y bydd ei angen arno pan fydd yn gadael y ramp.

4.3 Fformiwlâu sylfaenol ar gyfer taflegrau

Yn yr adran hon bydd rhai o fformiwlâu sylfaenol mudiant taflegryn yn cael eu deillio a'u defnyddio i ddod o hyd i rai o briodweddau'r llwybr a ddisgrifiwyd yn Adran 4.2. Dylech fod yn ymwybodol o'r fformiwlâu hyn a gwybod sut i'w deillio er, mewn arholiad, mae'n debyg y byddech yn cael eich cosbi am eu dyfynnu heb eu profi.

Os teflir gronyn o bwynt O ar gyflymder V ac ongl α uwchben y llorwedd, yna cydrannau llorwedd a fertigol ei gyflymder cychwynnol fydd $V \cos \alpha$ a $V \sin \alpha$. Gan fod y cyflymder llorwedd yn aros yn gyson, y dadleoliad llorwedd yw $V \cos \alpha t$.

Ar gyfer y mudiant fertigol mae defnyddio $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ gydag $a = -g$ ac $u = V \sin \alpha$

yn dangos mai'r dadleoliad fertigol yw $y = V \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$.

Felly rhoddir dadleoliadau llorwedd a fertigol x ac y gan

$$x = V \cos \alpha t, \quad y = V \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Bydd y gronyn ar yr un lefel â phwynt y taflad ar amser $t = T$ pan fydd $y = 0$;

h.y.
$$V \sin \alpha T - \frac{1}{2}gT^2 = 0.$$

Gan fod y datrysiad $T = 0$ yn cyfeirio at y safle cychwynnol, mae hyn yn rhoi

$$T = \frac{2V \sin \alpha}{g},$$

a chyfeirir at T yn aml fel yr amser hedfan. Mae rhoi T yn y mynegiad am x yn rhoi, ar gyfer gronyn a deflir o lefel y llawr, bellter pwynt yr ardrawiad o bwynt y tafliaid. Cyfeirir at hyn fel y cyrhaeddiad, R , a ddiffinnir felly gan

$$R = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Gwyddoch o briodweddau cymesurool y ffwythiannau trigonometrig fod

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \text{ a } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$$

ac felly os yw gwerth α yn rhoi cyrhaeddiad R , yna bydd $\frac{\pi}{2} - \alpha$ hefyd yn rhoi'r un cyrhaeddiad R . Dangosir yn Llyfr P3 fod $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ ac felly fod gwerth uchaf R , ar gyfer V penodol, yn digwydd pan fydd $\sin 2\alpha = 1$, h.y. pan fydd $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Rhoddir prawf (nad yw'n dibynnu ar waith yn Llyfr P3) fod gwerth uchaf y cyrhaeddiad yn digwydd pan fydd $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ar ddiwedd yr adran hon.

Mae rhoi $u = V \sin \alpha$ ac $a = -g$ yn yr hafaliad $v = u + at$ yn rhoi cydran fertigol y cyflymder fel $V \sin \alpha - gt$, ac mae hyn yn diflannu ar bwynt yr uchder mwyaf uwchben O . Felly yr amser a gymerir i gyrraedd y pwynt hwn yw $\frac{V \sin \alpha}{g}$, sy'n

hanner yr amser hedfan. Mae rhoi'r gwerth hwn yn y mynegiad ar gyfer y yn dangos y rhoddir yr uchder mwyaf h gan

$$h = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

(Gellid cael hyn hefyd trwy roi $v = 0$, $u = V \sin \alpha$ ac $a = -g$ yn $v^2 = u^2 + 2as$.)

Mae rhoi gwerth yr amser a gymerir i gyrraedd pwynt yr uchder mwyaf yn y mynegiad ar gyfer x yn dangos mai dadleoliad pwynt yr uchder mwyaf yw $\frac{1}{2}R$.

Mae dileu t rhwng y mynegiadau ar gyfer x ac y yn rhoi

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V^2 \cos^2 \alpha} = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V^2} \sec^2 \alpha,$$

sef hafaliad llwybr y gronyn.

Gallwch wirio, trwy ehangu'r term a sgwariwyd mewn cromfachau, y gellir ailysgrifennu hafaliad y llwybr fel

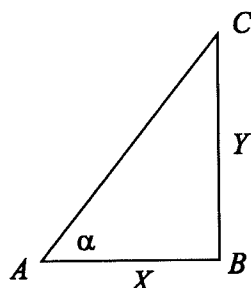
$$y = -\frac{g \sec^2 \alpha}{2V^2} \left(x - \frac{V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 + \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Gellir symleiddio hyn ymhellach i

$$y - h = -\frac{g \sec^2 \alpha}{2V^2} \left(x - \frac{1}{2}R \right)^2,$$

sy'n dangos y cymesuredd o amgylch y pwynt $x = \frac{1}{2}R$, h.y. bod y gromlin yn gymesuroi o amgylch y fertigol trwy bwynt yr uchder mwyaf.

Darganfod yr ongl ar gyfer y cyrhaeddiad mwyaf



Mae'r diagram yn dangos triongl ongl sgwâr ABC gydag ongl $BAC = \alpha$ ac $AB = X$ a

$BC = Y$. Felly $\sin \alpha = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$, $\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ a

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2XY}{(X^2 + Y^2)}.$$

Hefyd $(X - Y)^2 = X^2 + Y^2 - 2XY$.

Mae'r ochr chwith yn bositif ac yn cyrraedd ei gwerth lleiaf, sef sero, pan fydd $X = Y$, ac felly

$$\frac{2XY}{(X^2 + Y^2)} \leq 1,$$

gyda'r ddwy ochr yn hafal pan fydd $X = Y$. Felly mae hyn yn dangos bod gan

$2 \sin \alpha \cos \alpha$ ei werth mwyaf pan fydd $\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, h.y. pan fydd $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Efallai yr hoffech ddefnyddio'r canlyniadau hyn i ateb enghreifftiau 4.4 a 4.5 a chwestiynau 1, 2, 5 a 6 yn Ymarferion 4.2.

Ymarferion Amrywiol 4

- 1 Mae pêl golff yn cael ei tharo o bwynt O ar dir llorwedd gan symud i ddechrau ar fuanedd 25 ms^{-1} ac ongl θ i'r llorwedd, lle mae $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Ysgrifennwch fynegiadau am gydrannau llorwedd a fertigol ei dadleoliad o O ar unrhyw amser t ar ôl hynny.
Nodwch ddwy dybiaeth ffisegol a wnewch wrth ddarganfod y dadleoliadau.
Darganfyddwch yr amser a gymerir i gyrraedd yr uchder mwyaf a darganfyddwch y cyrhaeddiad yn ôl rhagfynegiad eich model.
- 2 (a) Mae gofalwr sw yn taflu dart tawelu at rinoseros. Mae'n cael ei saethu ar fuanedd 25 ms^{-1} ac ongl α uwchben y llorwedd. Wrth i'r dart daro'r rhinoseros,

mae ar yr un uchder â phan gafodd ei saethu. O wybod bod $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ a bod $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, darganfyddwch

(i) amser hedfan y dart,

(ii) pa mor agos yw'r gofalwr at y rhinoseros pan saethir y dart.

(Modelir y dart fel gronyn a gellir anwybyddu gwrthiant aer.)

(b) Mae angen i ofalwr y sw dawelu rhinoseros arall sydd ymhell tu hwnt i gyrhaeddiad y dart ond sy'n rhedeg tuag at y gofalwr ar fuanedd 10 ms^{-1} . Mae'r gofalwr yn saethu'r dart ar yr un buanedd ac ongl dafliaid ag yn rhan (a). Pa mor bell oddi wrth y gofalwr y dylai'r rhinoseros fod pan saethir y dart?

- 3 (a) Ar amser $t = 0$ teflir gronyn P o bwynt O ar dir llorwedd ar fuanedd 40 ms^{-1} ac ongl α i'r llorwedd, lle mae $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Ysgrifennwch fynegiadau am ei ddadleoliadau fertigol a llorwedd o O ar amser t eiliad a dangoswch ei fod yn cyrraedd ei uchder mwyaf ar ôl tua 3.27 eiliad.

Rywbyrd ar ôl cyrraedd ei uchder mwyaf mae'r gronyn yn taro sgrîn, sy'n berpendicwlar i blân ei fudiant, ar bwynt B sydd 49.6 m uwchben y llorwedd.

(i) Dangoswch fod y gronyn yn taro'r sgrîn 4 eiliad ar ôl cael ei daflu.

(ii) Darganfyddwch raddiant y llwybr yn union cyn yr ardrawiad.

(b) Yna mae'r sgrîn yn cael ei symud yn nes at O fel bod y gronyn, wrth gael ei daflu fel uchod, yn dal i'w tharo ar bwynt B . Darganfyddwch, mewn metrau yn gywir i un lle degol, bellter perpendicwlar y sgrîn oddi wrth O yn yr achos hwn.

(c) Symudir y sgrîn i'r safle lle mae P , wrth gael ei daflu fel uchod, yn ei tharo ar bwynt uchaf ei fudiant. O wybod mai'r cyfernod adfer rhwng y gronyn a'r sgrîn yw $\frac{1}{4}$ darganfyddwch, mewn metrau yn gywir i un lle degol, y pellter perpendicwlar o'r sgrîn at y pwynt lle mae P yn taro'r llawr am y tro cyntaf.

- 4 Teflir gronyn P o bwynt O ar blân llorwedd ar fuanedd v ac ongl α uwchben y llorwedd. Mae'n codi i uchder mwyaf h uwchben y plân ac yn taro'r plân eto ar bellter r o O . Ysgrifennwch x ac y , dadleoliadau llorwedd a fertigol P o O ar amser t ar ôl y tafliaid, yn nhermau v , α , g a t . Trwy hyn, darganfyddwch r ac h yn nhermau v , g ac α .

Mae'r gronyn yn mynd trwy'r pwynt A lle mae ei ddadleoliad llorwedd o O yn pr , lle mae $0 < p < 0.5$. Darganfyddwch, yn nhermau p ac α , dangiad yr ongl β rhwng y llorwedd a llwybr y gronyn yn A . Nodwch ddadleoliad llorwedd pwynt B , lle mae'r llwybr yn goleddu ar ongl β o dan y llorwedd.

O wybod bod y gronyn ar uchder a uwchben y plân llorwedd ar A , mynegwch a yn nhermau p ac h .

- 5 Mae pêl golff yn cael ei tharo o bwynt O ar fuanedd cychwynnol 42 ms^{-1} ac ongl α i'r llorwedd. Gan anwybyddu gwrthiant aer, olrheiniwch gydran lorwedd x a chydran fertigol y dadleoliad y bêt o O ar amser t ar ôl y tafliaid. Dangoswch fod

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{360 \cos^2 \alpha}.$$

Mae'r bêt golff yn prin glirio coeden ar B , lle mae B ar yr un lefel lorwedd ag O ac mae OB yn 150 m. Uchder y goeden yw 5 m. Cadarnhewch fod un o werthoedd α yn golygu bod $\tan \alpha = \frac{3}{5}$.

Trwy ddefnyddio'r unfathiant $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$, darganfyddwch hafaliad cwadratig a fodlonir gan $\tan \alpha$ a thrwy hyn darganfyddwch werth arall i $\tan \alpha$ fel bod y bêt yn prin glirio'r goeden yn B .

- 6 Mae gronyn, a deflir ar fuanedd V ac ongl α i'r llorwedd o O , yn symud yn rhydd o dan effaith disgyrchiant. Darganfyddwch u a v , cydrannau lorwedd a fertigol ei gyflymder, ac x ac y , ei ddadleoliadau lorwedd a fertigol yn ôl eu trefn, ar amser t ar ôl y tafliaid. Dangoswch fod

$$2 \frac{v}{x} - \frac{v}{u} = \tan \alpha.$$

O wybod bod y gronyn yn taro, ar ongl sgwâr, blân trwy bwynt y tafliaid sy'n goleddu ar ongl β i'r llorwedd, lle mae $\tan \beta = \frac{1}{2}$, darganfyddwch werth y gymhareb $\frac{v}{u}$ ar ennyd yr ardrawiad. Trwy hyn darganfyddwch werth $\tan \alpha$.

- 7 Teflir gronyn P ar fuanedd V ac ongl α i'r llorwedd o O . Darganfyddwch u a v , cydrannau lorwedd a fertigol ei gyflymder, ac x ac y , ei ddadleoliadau lorwedd a fertigol yn ôl eu trefn, ar amser t ar ôl y tafliaid.

O wybod bod y gronyn yn taro'r plân lorwedd trwy O ar ôl amser T , dangoswch fod

$$T = \frac{2V \sin \alpha}{g}.$$

Darganfyddwch, yn nhermau g a T , uchder mwyaf y gronyn uwchben lefel O .

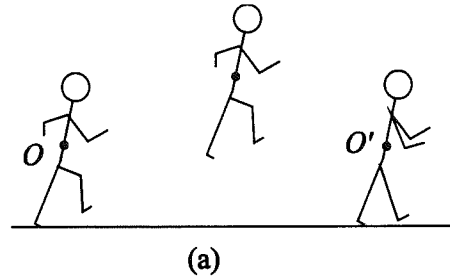
O wybod bod y gronyn yn symud ar ongl sgwâr i gyfeiriad gwreiddiol ei fudiant ar amser $\frac{5T}{8}$, darganfyddwch werth $\tan \alpha$.

- 8 Teflir gronyn o bwynt O ar lawr gwastad ac mae'n taro'r llawr eto ar ôl amser T ar bwynt A , lle mae $OA = 2a$. Darganfyddwch gydrannau lorwedd a fertigol cyflymder y tafliaid.

- 9 Teflir carreg ar gyflymder 14.7 ms^{-1} ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Cyn cyrraedd ei uchder mwyaf mae'n prin osgoi pen polyn 2 m o uchder. Ar yr ennyd pan deflir y garreg mae aderyn yn gadael pen y polyn ac yn hedfan yn llorwedd ar fuanedd cyson o $v \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch v o wybod bod y garreg yn taro'r aderyn.
- 10 Ddau eiliad ar ôl i garreg gael ei thaflu, mae'n symud ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\tan \alpha = 2$. Eiliad yn ddiweddarach, mae'r garreg yn symud ar ongl β i'r llorwedd, lle mae $\tan \beta = 1$. Darganfyddwch, trwy ystyried y gymhareb $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$, gydran fertigol cyflymder cychwynnol y taflad. Darganfyddwch hefyd gydran lorwedd cyflymder cychwynnol y taflad.
- 11 Caiff gronyn ei daflu o bwynt ar fuanedd 25 ms^{-1} ac ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\tan \alpha = \frac{7}{25}$. Darganfyddwch faint a chyfeiriad cyflymder y gronyn ddau eiliad ar ôl y taflad.
- 12 Ar ennyd penodol teflir gronyn P o bwynt O gyda chydannau cyflymder llorwedd ac i fyny o $3nu$ a $5nu$ yn ôl eu trefn, lle mae n ac u yn gysonion positif. Ar yr un ennyd, teflir ail ronyn Q o bwynt â chyfesurynnau $(16a, 17a)$ gan gyfeirio at O , lle mae'r echelin x yn llorwedd a'r echelin y yn fertigol i fyny. Cydrannau x ac y cyflymder Q ar y cychwyn yw $-4u$ ac $3u$ yn ôl eu trefn. Darganfyddwch gydrannau llorwedd a fertigol dadleoliadau P a Q o O ar amser t ar ôl y taflad a darganfyddwch werth n fel bod y gronynnau yn taro ei gilydd.
- 13 (a) Teflir gronyn o bwynt O ar fuanedd u ac ongl α uwchben y llorwedd.
- Ysgrifennwch fynegiadau ar gyfer dadleoliadau llorwedd a fertigol y gronyn o O ar amser t ar ôl y taflad.
 - Diddwythwch fod y gronyn yn taro'r plân llorwedd trwy O am y tro cyntaf ar bellter $\frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ oddi wrth O .
 - Dangoswch mai'r uchder mwyaf a gyrhaeddir gan y gronyn uwchben lefel O yw $\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.
- (b) Teflir gronyn P o bwynt O ar fuanedd $\sqrt{12ga}$ ac ar yr ongl sy'n rhoi'r cyrhaeddiad mwyaf ar y plân llorwedd trwy O . Darganfyddwch dangiad yr ongl rhwng cyflymder P a'r llorwedd ar amser $\sqrt{\frac{3a}{8g}}$ ar ôl y taflad.
- (c) Teflir gronyn Q ar fuanedd $\sqrt{12ga}$ o bwynt A ar lawr llorwedd ystafell sydd â nenfwd llorwedd ar uchder $\frac{3a}{2}$ o'r llawr. Darganfyddwch, gan

gymryd na ddylai Q daro'r nenfwd, werth mwyaf y pellter rhwng A a'r pwynt lle mae Q yn taro'r llawr am y tro cyntaf.

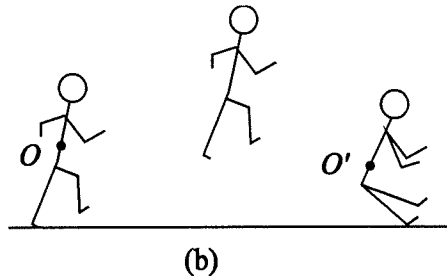
14



Mae (a) uchod yn ddiagram sgematig syml o fodel o symudiad neidiwr naid hir. Mae'r pwyntiau O ac O' yn dynodi safleoedd craidd disgyrchiant y neidiwr ar ddechrau a diwedd y naid, yn ôl eu trefn. Yn y model hwn, tybir bod y pwyntiau O ac O' ar yr un lefel lorwedd ac mai'r unig rym sy'n gweithredu ar y neidiwr yn ystod y naid yw'r grym oherwydd effaith disgyrchiant. Cymerir bod y neidiwr yn ronyn a leolir yn safle ei graidd disgyrchiant ac sy'n cael ei daflu ar amser $t = 0$ eiliad ar fuanedd V ac ar ongl α i'r llorwedd. Dynodir cydrannau llorwedd a fertigol ei ddadleoliad o O ar amser t gan x ac y , yn ôl eu trefn. Ysgrifennwch fynegiadau ar gyfer x ac y ar amser t a thrwy hyn dangoswch fod

$$y = px - qx^2,$$

lle mae p a q yn gysonion y dylid eu darganfod yn nhermau V , g ac α .



Mae diagram (b) yn dangos model mwy realistig lle tybir bod craidd disgyrchiant y neidiwr yn disgyn pellter fertigol 0.3 m rhwng neidio a glanio. Mewn un achos penodol mae gwerthoedd α a V (nid oes angen eu darganfod) fel bod yr hafaliad uchod, gydag x ac y yn cael eu mesur mewn metrau, yn dod yn

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}x^2.$$

Darganfyddwch y gwahaniaeth rhwng dadleoliad llorwedd y craidd disgyrchiant rhwng neidio a glanio, wedi'i gyfrifo gan ddefnyddio'r ail fodel hwn, a'r dadleoliad wedi'i gyfrifo gan ddefnyddio'r model cyntaf.

- 15 Mae pêl golff yn ddisymud ar bwynt A ar dir llorwedd. Heb fod ymhell iawn mae coeden 17.5 m o uchder. Mae'r bêl yn cael ei tharo fel bod cydrannau llorwedd a fertigol ei chyflymder cychwynnol yn 24.5 ms^{-1} a 28 ms^{-1} yn ôl eu trefn. Mae'r bêl golff yn prin glirio pen y goeden yn ystod ail ran ei hediad, sef ar ei ffordd i lawr. Darganfyddwch

- (a) yr amser a gymerir gan y bêl i gyrraedd pen y goeden,
- (b) bellter gwaelod y goeden o A ,
- (c) bellter gwaelod y goeden o'r pwynt lle mae'r bêl yn taro'r llawr.

- 16 Teflir gronyn P ar fuanedd 49 ms^{-1} ac ongl α i'r llorwedd o O . Darganfyddwch x ac y , ei ddadleoliadau llorwedd a fertigol yn ôl eu trefn, ar amser t eiliad ar ôl y taflriad. Trwy hyn dangoswch, pan fydd $x = 140$, y bydd

$$y = 140 \tan \alpha - 40 \sec^2 \alpha.$$

Mae'r gronyn yn prin glirio wal 20 m o uchder ar bellter 140 m o bwynt y taflriad. Darganfyddwch, trwy ddefnyddio'r canlyniad $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, ddau werth tan α lle mae hyn yn bosibl.

- 17 Mae pwynt O yn uniongyrchol uwchben pwynt sefydlog A ar blân llorwedd a theflir gronyn P o O ar fuanedd $5V$ ac ongl α uwchben y llorwedd, lle mae $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Mae'n taro'r plân ar bwynt B , pellter $\frac{48V^2}{g}$ o A .

Dangoswch mai uchder O uwchben A yw $\frac{64V^2}{g}$ a darganfyddwch bellter P o O

pan fydd yn union ar yr un lefel.

Nawr teflir ail ronyn o O ar fuanedd $24W$ ac ongl α uwchben y llorwedd. Mae hwn hefyd yn taro'r plân ar B . Darganfyddwch hafaliad sy'n cynnwys V , W , g ac α . O wybod mai un o werthoedd α yw 45° , darganfyddwch V yn nhermau W a dangoswch fod gwerth arall α yn bodloni'r hafaliad

$$7 \tan^2 \alpha - 6 \tan \alpha - 1 = 0.$$

- 18 Teflir gronyn o bwynt O ar blân llorwedd ar fuanedd u i gyfeiriad sy'n ffurfio ongl α uwchben y llorwedd. Ar amser t yn ddiweddarach, dynodir dadleoliadau llorwedd a fertigol y gronyn o O gan x ac y , yn ôl eu trefn, ac mae'n symud i gyfeiriad sy'n goleddu ar ongl β uwchben y llorwedd, gyda chydran fertigol ei gyflymder yn v tuag i fyny.

- (a) Dangoswch, o'r hafaliadau mudiant, fod

(i) $v + u \sin \alpha = \frac{2y}{t},$

(ii) $x(\tan \alpha + \tan \beta) = 2y.$

- (b) Wrth symud ar ongl 45° uwchben y llorwedd, mae'r gronyn yn prin glirio wal o uchder 3 m ar bellter perpendicwlar 2 m o O . Mae'r wal yn berpendicwlar i blân mudiant y gronyn. Wedyn, wrth symud ar ongl 45° o dan y llorwedd, mae'r gronyn yn prin glirio ail wal sydd yn union yr un fath â'r wal gyntaf, ac yn baralel iddi. Darganfyddwch
- (i) $\tan \alpha$,
 - (ii) y pellter rhwng y ddwy wal,
 - (iii) y cyrhaeddiad ar y plân llorweddol trwy O ,
 - (iv) yr uchder mwyaf a gyrhaeddir uwchben y plân.

Pennod 5

Fectorau

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon, dylech

- wybod beth a olygir wrth fector,
- fod yn gyfarwydd â sut mae fector yn cael ei gynrychioli gan ei gydrannau cartesaid,dd,
- allu defnyddio'r gynrychiolaeth gartesaidd i ganfod maint fector ac i adio a thynnu fectorau,
- allu cyfrifo lluoswm sgalar dau fector,
- allu differu ac integru fector ar ffurf cydrannau cartesaid,dd mewn perthynas â pharamedr.

Y nod yn y bennod hon yw cyflwyno'r egwyddorion sylfaenol y mae fectorau yn seiliedig arnynt er mwyn cymhwyso'r egwyddorion hyn i amrywiol feysydd mewn Mecaneg. Yn y bôn, mae'r bennod yn cynnwys y Fathemateg Bur y mae ei hangen er mwyn defnyddio fectorau yng ngweddill y cwrs Mecaneg.

5.1 Fectorau a sgalarau

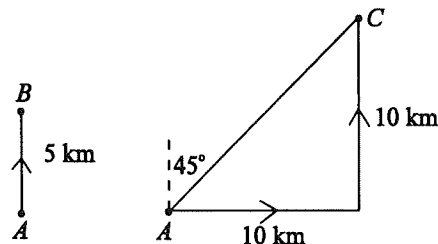
Sgalarau

Mesur a gynrychiolir gan un rhif yn unig, fel rheol ei faint, yw sgalar. Sgalarau yw'r rhan fwyaf o'r mesurau yr ydych wedi dod ar eu traws eisoes, megis màs, buanedd a phellter.

Fectorau

Mesur sydd â maint a chyfeiriad yw fector. Yr enghraifft symlaf o fector yw pellter a chyfeiriad pwynt B oddi wrth bwynt arall A .

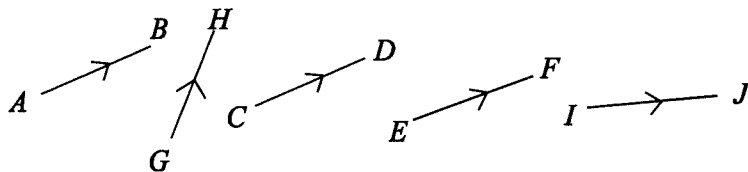
Gelwir hyn yn ddadleoliad B oddi wrth A ac mae'n estyn y syniad o ddadleoliad fel y'i diffiniwyd ym Mhennod 1 M1 i fwy nag un dimensiwn. Weithiau rhoddir dadleoliad un pwynt oddi wrth bwynt arall yn uniongyrchol. Er enghraifft, trwy ddweud bod pwynt B 5 km i'r Gogledd o bwynt arall A , fel a ddangosir ar y chwith yn y diagram canlynol.



Ffordd arall lai uniongyrchol o roi'r dadleoliad yw, er enghraifft, trwy ddweud bod awyren yn teithio 10 km i'r Dwyrain o A , ac yna yn troi a theithio 10 km i'r Gogledd i bwynt C fel a ddangosir ar yr ochr dde yn y diagram ar y dudalen flaenorol. Yn yr achos hwn, dadleoliad C o A yw $\sqrt{10^2 + 10^2} = 14.1$ km ar gyfeiriant 45° .

Mae llinell sy'n cysylltu dau bwynt a lle diffinnir y cyfeiriad o'r naill bwynt i'r llall yn cael ei galw yn segment llinell cyfeiriol. Gellir cynrychioli unrhyw fector yn llawn gan segment llinell cyfeiriol gan fod ganddo faint, sef ei hyd, a chyfeiriad, sef y cyfeiriad a deithir ar hyd y llinell. Defnyddir y nodiant $\vec{AB}$ i ddisgrifio'r segment llinell sy'n cysylltu A a B i'r cyfeiriad o A i B . Yn yr un modd, dywedir bod y segment llinell sy'n cysylltu A a B i'r cyfeiriad o A i B yn diffinio'r fector $\vec{AB}$. Yn yr un modd, defnyddir $\vec{BA}$ i ddisgrifio'r segment llinell sy'n cysylltu A a B i'r cyfeiriad o B i A .

Yn gyffredinol, nid yw fector yn sefydlog mewn lle penodol ac mae'r tri segment llinell paralel a hafal $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$ yn y diagram i gyd yn cynrychioli'r un fector.



Nid yw'r ddau segment llinell arall, sef $\vec{GH}$ ac $\vec{IJ}$, sydd â'r un hyd â'r segmentau llinell hyn, yn cynrychioli'r un fector gan fod eu cyfeiriadau yn wahanol.

Rydych eisoes wedi dod ar draws grymoedd yn eich cwrs. Mae'r rhain yn fectorau gan fod ganddynt faint a chyfeiriad.

Nodiant fector

Yn y bôn, mae dau wahanol nodiant ar gyfer fectorau ac fel rheol nid yw'r nodiant y byddwch yn ei ddefnyddio wrth ysgrifennu fectorau yn hwylus ar gyfer ei ddefnyddio mewn llyfrau.

Yn aml mae dadleoliad B oddi wrth A yn cael ei ysgrifennu, gan ddefnyddio'r nodiant uchod ar gyfer segment llinell, fel $\vec{AB}$. Ysgrifennir hyd y dadleoliad, sy'n sgalar, fel $|\vec{AB}|$ neu weithiau yn syml fel AB . Yn eithaf aml, defnyddir llythyren sengl i ddynodi fector ac fe'i dangosir mewn llyfrau mewn print trwm, h.y. tywyll, fel $\mathbf{a}$. Mae maint, neu fodwlws, fector yn sgalar ac fe'i hysgrifennir fel $|\mathbf{a}|$ neu a .

Mewn llawysgrifen mae'n anodd dangos llythrennau trwm ac felly dangosir fector trwy danlinellu'r llythyren, e.e. $\underline{a}$, neu trwy danlinellu tonnog, e.e. $\underline{\underline{a}}$, neu trwy ysgrifennu saeth uwchben, e.e. $\vec{a}$. Dangosir maint fector trwy ysgrifennu $|\underline{a}|$, $|\underline{\underline{a}}|$, $|\vec{a}|$ neu a . Pa nodiant bynnag a ddefnyddir gennych, mae'n hynod bwysig eich bod yn dangos yn glir bob tro y gwahaniaeth rhwng fector a sgalar.

Fector safle

Mewn llawer o broblemau, mae'r rhan fwyaf o'r mesuriadau yn ymwneud â rhyw darddiad O . Disgrifir y dadleoliad $\vec{OP}$, fel fector safle P mewn perthynas ag O ac yn aml fe'i dynodir gan r , a'i faint fel r . Gellir dehongli'r fector $\vec{AB}$ fel fector safle B mewn perthynas ag A .

5.2 Priodweddau fectorau**Maint fector**

Maint fector yw hyd y segment llinell sy'n ei gynrychioli.

Fectorau hafal

Diffinnir dau fector fel rhai hafal os oes ganddynt yr un maint ac os ydynt yn gweithredu i'r un cyfeiriad. Mae'r fectorau a gynrychiolir yn y diagram uchod gan y ddau segment llinell paralel a hafal $\vec{AB}$ ac $\vec{CD}$ yn hafal. Ffordd arall o ddweud hyn yw nodi bod y segmentau llinell yn ddau ddisgrifiad o'r un fector.

Fectorau negatif

Mae'r fector $-a$ yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes i gyfeiriad y fector a ond mae ganddo'r un maint.



Dangosir hyn yn y diagram ac rydych wedi cwrdd â'r syniad hwn eisoes wrth drin a thrafod grymoedd. Yn yr un modd, mae

$$\vec{BA} = -\vec{AB}.$$

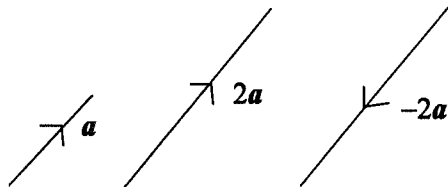
Lluosi fector â sgalar, a fectorau gyda'r un cyfeiriad a'r cyfeiriad dirgroes

Mae'r fector $m a$, lle mae m yn sgalar positif, yn fector gyda'r un cyfeiriad ag a ond gyda maint $m a$ neu $m |a|$. Mae'r fector $m a$, lle mae m yn sgalar negatif, yn fector gyda'r cyfeiriad dirgroes i gyfeiriad a ond gyda maint $|m| a$ neu $|m| |a|$.

Wrth i chi ysgrifennu mynegiadau fel $m a$ mae'n arbennig o bwysig i chi ddangos yn glir, trwy danlinellu, pa un yw'r fector. Os na wnewch hyn, byddwch yn cael mynegiadau fel ma , sef sgalar, lle dylai fod gennych fector.

Dywedir bod fectorau gyda'r un cyfeiriad, neu gyfeiriad dirgroes, yn baralel.

Dangosir y fectorau a , $2a$ a $-2a$ yn y diagram.

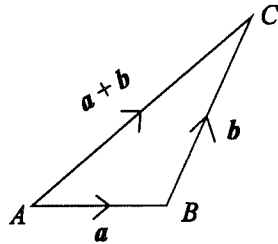


Fectorau unedol

Fector unedol yw fector sydd â maint unedol. Ceir y fector unedol gyda chyfeiriad y fector a trwy rannu a gyda'i faint ac felly $\frac{a}{a}$ ydyw. Dyma ffordd arall o ddweud hyn: os yw n yn dynodi'r fector unedol gyda chyfeiriad y fector a , yna $a = an$ neu, mewn nodiant arall $|a|n$.

Adio a thynnu fectorau

Mae deddf adiad fectorau yr un fath â chyfuno dadleoliadau. Os teithiwch o A i B ac yna o B i C fe'ch dadleolir o A i C .

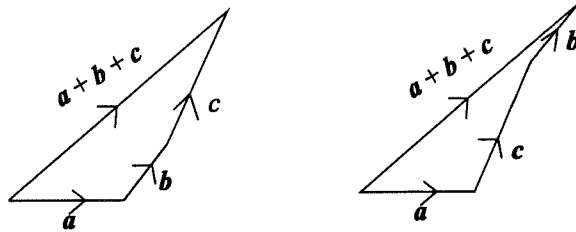


Swm y dadleoliadau $\vec{AB}$ a $\vec{BC}$ yw'r dadleoliad $\vec{AC}$. Hynny yw

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Felly os yw $\vec{AB}$ yn cynrychioli'r fector a ac os yw $\vec{BC}$ yn cynrychioli'r fector b yna mae $\vec{AC}$ yn cynrychioli'r fector $a + b$. Dyma'r ddeddf driongl ac rydych wedi cwrdd â hi eisoes ar gyfer grymoedd. Weithiau cyfeirir at y swm $a + b$, fel gyda grymoedd, fel **cydeffaith a a b** .

Gellir estyn y diffiniad hwn i ddangos sut y gellir adio nifer o fectorau at ei gilydd. Adir pâr o fectorau at ei gilydd gyntaf, ac yna adir fector arall ayb. Mae'r diagram ar y chwith yn dangos swm $a + b + c$ y tri fector a , b ac c .

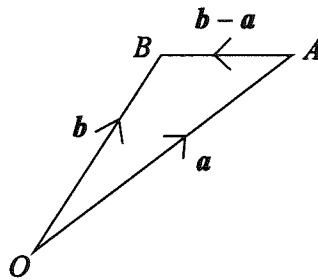


Nid yw trefn adio'r fectorau yn bwysig, fel y gwelir yn y diagram ar y dde.

Mae'n bwysig sylweddoli, cyn cymryd yn ganiataol y gellir adio meintiau ffisegol megis grymoedd trwy ddefnyddio'r ddeddf driongl, bod angen gwireddu trwy arbrawf bod hyn yn wir.

Diffinnir tynnu gan

$$b - a = b + (-a).$$



Yn y diagram, a a b yw'r fectorau safle ar gyfer A a B yn ôl eu trefn ac felly gellir cynrychioli'r fector $-a$ gan $\vec{AO}$. Felly cynrychiolir $b - a$ gan $\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$

h.y. $\vec{AB} = b - a$.

Gellid darganfod hyn oddi wrth y ddeddf driongl hefyd, sy'n dangos bod

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

h.y. $a + \vec{AB} = b$,

ac mae symud a i'r ochr dde yn rhoi $\vec{AB}$.

Mae'n bwysig sylwi y gellir symud fectorau ar draws hafalnodau, gan newid yr arwydd, yn yr un modd â sgalarau.

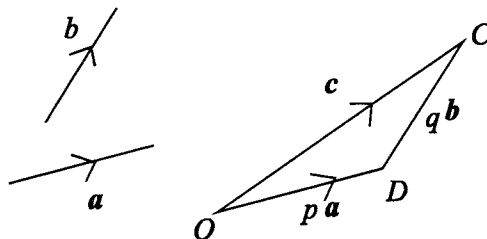
Mae fectorau hefyd yn cydymffurfio â'r rheolau algebraidd arferol yn yr un modd â sgalarau h.y.

$$pa + qa = (p + q)a, \quad pa + qa + rb + sb = (p + q)a + (r + s)b,$$

h.y. wrth adio fectorau, gellir adio cyfernodau'r fectorau yn yr un modd yn union ag mewn algebra arferol.

Cynrychioli fectorau

Gellir ysgrifennu unrhyw fector c mewn dau ddimensiwn fel swm unrhyw ddau fector nad ydynt yn baralel. Gellir gweld hyn yn y diagram canlynol lle cynrychiolir c gan $\vec{OC}$.

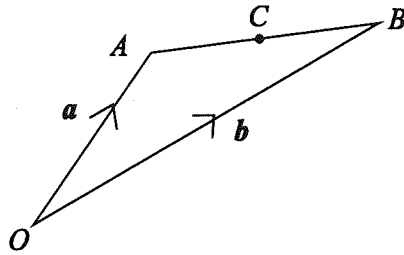


Os tynnir llinell o O i gyfeiriad y fector a a thynnu llinell arall o C i gyfeiriad y fector b yna bydd y llinellau yn croestorri yn D . Hefyd, oherwydd diffiniad lluosiad sgalar, mae $\vec{OD} = pa$ a $\vec{DC} = qb$, lle mae p a q yn sgalarau. Yna dengys y ddeddf driongl fod $c = pa + qb$. Gelwir y fectorau pa a qb yn fectorau cydrannol c . Mae eu meintiau, h.y. hydoedd OD a DC , yn cael eu galw yn gydrannau c i gyfeiriad y fectorau a a b yn ôl eu trefn.

Defnyddir y dull hwn, gydag a a b yn berpendicwlar i'w gilydd, fel sail y cydrannau cartesaidd a ddisgrifir yn adran 5.3.

Enghraifft 5.1

Mae'r diagram yn dangos dau bwynt A a B gyda fectorau safle a a b , ac C yw canolbwynt AB . Darganfyddwch fectorau $\vec{AC}$ ac $\vec{OC}$ yn nhermau a a b .



Oddi wrth ddiffiniad lluosiad gan sgalar

$$\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(b - a).$$

Mae'r ddeddf adiad yn rhoi

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(b + a).$$

Enghraifft 5.2.

Diffinnir y fectorau p a q gan $p = 2a + 3b$, $q = 4a + 5b$. Mynegwch, yn nhermau a a b ,

(a) $p + 3q$, (b) $2p - q$, (c) y fector c fel bod $3p + q + c = a$.

(a) Mae amnewid am p a q yn $p + 3q$ yn rhoi

$$\begin{aligned} p + 3q &= 2a + 3b + 3(4a + 5b) \\ &= 2a + 3b + 12a + 15b = 14a + 18b. \end{aligned}$$

(b) Yn yr un modd

$$2p - q = 2(2a + 3b) - (4a + 5b) = b.$$

(c) Mae amnewid am p a q yn $3p + q + c$ yn rhoi

$$3p + q + c = 3(2a + 3b) + (4a + 5b) + c = 10a + 14b + c.$$

Mae hafalu hwn i a yn rhoi

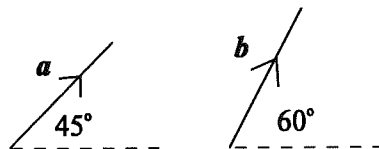
$$10a + 14b + c = a,$$

ac felly

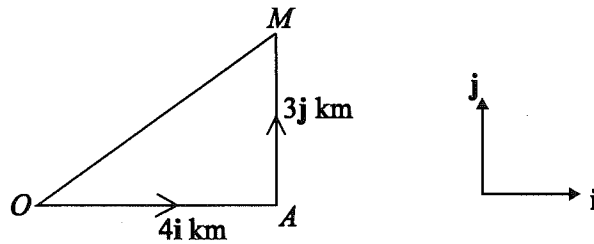
$$c = -9a - 14b.$$

Enghraifft 5.3

Yn y diagram, hyd y fector a yw 2 ac mae ar ongl lem 45° gyda'r llinell doredig a ddangosir, a hyd y fector b yw 3 ac mae ar ongl lem 60° gyda'r llinell doredig. Darganfyddwch faint a chyfeiriad $2a + 3b$.



Cydrannau cartesaid



Mae'r diagram yn dangos safle terfynol dyn M sydd wedi teithio 4 km i'r dwyrain o bwynt O i bwynt A ac yna 3 km yn syth i'r gogledd o A . Ei ddadleoliad terfynol yw swm fectoraidd ei ddadleoliadau i'r dwyrain ac i'r gogledd h.y.

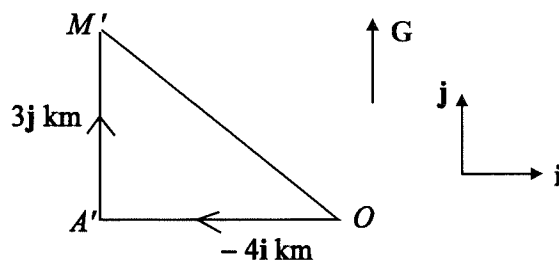
$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}.$$

Gellir dewis fectorau unedol $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ fel bod $\mathbf{i}$ yn pwyntio i'r dwyrain a bod $\mathbf{j}$ yn pwyntio i'r gogledd. Gelwir fectorau unedol perpendicwlar fel hyn yn fectorau unedol cartesaid fel rheol. Yna $\vec{OA} = OA \mathbf{i} = 4 \mathbf{i}$ km ac $\vec{AM} = AM \mathbf{j} = 3 \mathbf{j}$ km ac

$$\vec{OM} = (OA \mathbf{i} + AM \mathbf{j}) = (4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}) \text{ km}.$$

Disgrifir y ffurf arall hon ar y dadleoliad fel ei ffurf cydrannau cartesaid a dyma'r ffurf fwyaf defnyddiol ar gyfer fector. Hydoedd OA ac AM , h.y. y rhifau 4 a 3, yw cydrannau cartesaid y dadleoliad, mewn metrau, i gyfeiriad $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ yn ôl eu trefn. Er mwyn bod yn gryno, byddwn fel rheol yn hepgor yr ansoddair cartesaid o hyn allan. Gellir mynegi unrhyw fector dau ddimensiwn yn y ffurf $c \mathbf{i} + d \mathbf{j}$. Disgrifir cyfernodau $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$, sef c a d yn ôl eu trefn, fel y cydrannau i gyfeiriadau $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ yn ôl eu trefn.

Nid yw'r cydrannau yn bositif bob amser. Gellir gweld hyn yn y diagram hwn



sy'n dangos safle M' y dyn ar ôl teithio pellter o 4 km i'r gorllewin i bwynt A' ac yna 3 km i'r gogledd o A' . Yn yr achos hwn

$$\vec{OM'} = \vec{OA'} + \vec{A'M'}.$$

Fodd bynnag, mae $\vec{OA'}$ i'r cyfeiriad dirgroes i $\mathbf{i}$ ac felly

$$\vec{OA'} = -4 \mathbf{i} \text{ km ac } \vec{A'M'} = 3 \mathbf{j} \text{ km ac felly}$$

$$\vec{OM'} = (-4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}) \text{ km},$$

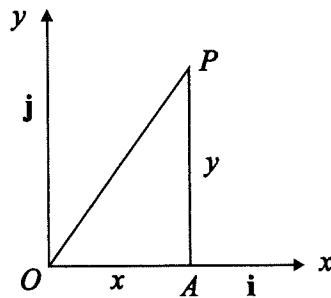
sy'n dangos bod cydran negatif yn bosibl.

Dengys Theorem Pythagoras fod hyd OM , h.y. maint y fector $\vec{OM}$, yn 5 km. Dyma ail isradd symiau sgwariau'r cydrannau a dyma ddiffiniad maint fector ar ffurf cydrannau cartesaid.

Y nodiant $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ yw'r un a ddefnyddir fel rheol mewn mecaneg ond mae'n bosibl eu cynrychioli yn gwbl gywerth trwy ddefnyddio fectorau colofn, gyda

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ km, ac } \vec{OM}' = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ km.}$$

Cydrannau fector safle



Yn y diagram mae $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ yn dynodi fectorau unedol ar hyd echelinau Ox ac Oy . Mae'r perpendicwlar o bwynt $P(x, y)$ i'r echelin x yn ei chroestorri ar bwynt A .

Felly $\vec{OA} = x \mathbf{i}$, $\vec{AP} = y \mathbf{j}$, ac $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$. Hefyd, fel rheol mae $\vec{OP}$, sef fector safle pwynt P , yn cael ei ddynodi gan $\mathbf{r}$ ac felly

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j},$$

$$a \quad |\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Enghraifft 5.4

Darganfyddwch fectorau safle'r pwyntiau sydd â chyfesurynnau cartesaidd (4, 6) a (-4, 3).

Cydrannau'r fectorau safle yw'r cyfesurynnau ac felly y fectorau sydd eu hangen yw $4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ a $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ a'u meintiau yw $\sqrt{52}$ ac $\sqrt{25} = 5$, yn ôl eu trefn.

Dyma grynodeb o briodweddau fector a fynegir ar ffurf cydrannau cartesaid:

Hafaledd fectorau

Mae fectorau yn hafal os, a dim ond os, yw eu cydrannau i gyd yn hafal.

Enghraifft 5.5

O wybod bod y fectorau $\mathbf{a} = (4 - x) \mathbf{i} + 6 \mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = 7 \mathbf{i} + (5 - y) \mathbf{j}$ yn hafal, darganfyddwch x ac y .

Rhoddir bod $\mathbf{a} = (4 - x) \mathbf{i} + 6 \mathbf{j} = \mathbf{b} = 7 \mathbf{i} + (5 - y) \mathbf{j}$.

Os yw'r fectorau yn hafal, rhaid i'w cydrannau fod yn hafal, h.y.

$$4 - x = 7, \quad 6 = 5 - y,$$

felly $x = -3$ ac $y = -1$.

Fectorau negatif

Os yw $\mathbf{a} = c \mathbf{i} + d \mathbf{j}$ yna mae $-\mathbf{a} = -c \mathbf{i} - d \mathbf{j}$,

h.y. mae arwyddion y ddwy gydran yn newid.

Lluosiad gan sgalar

Os yw $\mathbf{a} = c \mathbf{i} + d \mathbf{j}$ yna mae $m \mathbf{a} = mc \mathbf{i} + md \mathbf{j}$,

h.y. lluosir y ddwy gydran ag m .

Adio a thynnu fectorau

Gellir adio dau neu ragor o fectorau trwy adio eu cydrannau cyfatebol a gellir tynnu fector o fector arall trwy dynnu eu cydrannau cyfatebol.

Enghraifft 5.6

Rhoddir fectorau $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ gan $\mathbf{p} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, $\mathbf{q} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Darganfyddwch, ar ffurf cydrannau cartesaidd, (a) $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, (b) $2\mathbf{p} + 4\mathbf{q}$, (c) $3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$.

(a) $\mathbf{p} + \mathbf{q} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = 7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

(b) $2\mathbf{p} + 4\mathbf{q} = 2(2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) + 4(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = 24\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(c) $3\mathbf{p} - 2\mathbf{q} = 3(2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - 2(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = -4\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$.

Fector sero

Dyma'r fector gyda chydannau sero a ddynodir fel rheol gan $\mathbf{0}$. Mae'r rheol ar gyfer tynnu dau fector yn dangos bod

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Fector yn cysylltu dau bwynt

Os $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yw fectorau safle dau bwynt A a B , yna dangoswyd ar dudalen 86 bod $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Cydrannau $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yw cyfesurynnau'r pwyntiau cyfatebol. Felly mae'r rheol ar gyfer tynnu yn dangos mai cydrannau'r fector sy'n cysylltu dau bwynt yw'r gwahaniaethau rhwng cyfesurynnau cyfatebol y pwyntiau.

Enghraifft 5.7

Darganfyddwch y fector $\vec{PQ}$ lle mae cyfesurynnau P a Q yn $(2, 1)$ a $(5, -3)$ yn ôl eu trefn.

Fectorau safle P a Q , sef p a q , yw $p = 2i + j$ a $q = 5i - 3j$.

Hefyd $\vec{PQ} = q - p = 5i - 3j - (2i + j) = 3i - 4j$.

Maint fector

Maint y fector $c i + d j$ yw $\sqrt{c^2 + d^2}$ h.y. y maint yw ail isradd swm sgwariau'r cydrannau.

Enghraifft 5.8

Darganfyddwch feintiau'r fectorau (a) $3i + 4j$, (b) $7i - 11j$.

Maint fector yw ail isradd swm sgwariau'r cydrannau. Felly ar gyfer (a) y maint yw $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ac ar gyfer (b) y maint yw $\sqrt{7^2 + (-11)^2} = 13.04$.

Enghraifft 5.9

Darganfyddwch y fector sydd â chyfeiriad y fector $5i + 12j$ a maint 104.

Y fector sydd ei angen yw $k(5i + 12j)$, lle mae k yn gysonyn. Maint y fector yw $k\sqrt{5^2 + 12^2} = 13k = 104$, ac felly mae $k = 8$ ac felly y fector sydd ei angen yw $40i + 96j$.

Fectorau unedol

Y fector unedol sydd â chyfeiriad y fector $a = c i + d j$ yw $\frac{c i + d j}{\sqrt{c^2 + d^2}}$.

Enghraifft 5.10

Darganfyddwch y fectorau unedol sydd â chyfeiriad y fectorau

(a) $3i - 4j$,

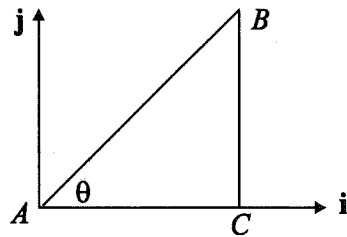
(b) $4i + 7j$.

(a) Darganfyddir y fector unedol trwy rannu'r fector gan ei faint.

Y maint yw $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ac felly y fector unedol yw $\frac{3i - 4j}{5} = 0.6i - 0.8j$.

(b) Yn yr achos hwn, maint y fector yw $\sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

a'r fector unedol yw $\frac{4i + 7j}{\sqrt{65}}$.

Trawsnewid i ffurf cydrannau cartesaid

Yn y diagram uchod, mae $\vec{AB}$ yn cynrychioli'r fector $\mathbf{a}$ ac mae llinellau AC ac CB wedi'u tynnu yn baralel i'r fectorau unedol cartesaid $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$. Y fectorau $\vec{AC}$ ac $\vec{CB}$ felly yw $AC\mathbf{i}$ ac $CB\mathbf{j}$ yn ôl eu trefn ac mae'r ddeddf adio fectorau yn rhoi $\vec{AB} = AC\mathbf{i} + CB\mathbf{j}$. Felly cydran gartesaid $\vec{AB}$ i gyfeiriad $\mathbf{i}$ yw AC , sy'n hafal i $AB \cos \theta$, lle mae θ yn cynrychioli'r ongl rhwng $\vec{AB}$ ac $\mathbf{i}$. Yn yr un modd felly, cydran gartesaid $\vec{AB}$ i gyfeiriad $\mathbf{j}$ yw BC , sy'n hafal i $AB \sin \theta$.

Yr arfer y dyddiau hyn yw hepgor yr ansoddair “cartesaid”, a diffinio cydran fector i unrhyw gyfeiriad fel lluoswm maint y fector a chosin yr ongl rhwng y fector a'r cyfeiriad a ddewiswyd. Rydych wedi cael hyn eisoes mewn perthynas â grymoedd yn M1. Yn amlwg, nid yw'r diffiniad hwn yn ddilys pan nad yw cyfeiriadau'r cydrannau yn berpendicwlar. Felly os defnyddir y gair “cydran”, oni bai fod yna dystiolaeth i'r gwrthwyneb, dylid ei ddehongli fel y gydran gartesaid.

Wrth wneud gwaith cyfrifo ar ffurf cydrannau, fel mewn Stateg, mae angen i chi fod yn ofalus, gan sicrhau eich bod yn dewis yr ongl gywir a chymryd ei chosin yn gywir. Mae'n bosibl hefyd cydrannu fector yn gyntaf yn ddwy gydran bositif ar hyd y llinellau sy'n cynnwys $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ ac yna addasu'r arwyddion.

Mae labelu'r cydrannau yn aml yn gymorth wrth wneud gwaith damcaniaethol gyda fectorau fel ei bod yn amlwg yn syth pa un yw cydran $\mathbf{i}$ a pha un yw cydran $\mathbf{j}$. Oherwydd y cymerir bod y fectorau unedol hyn yn baralel i echelinau x ac y yn ôl eu trefn, un dull o adnabod y cydrannau yw defnyddio nodiant olldodiant; h.y. dynodir cydrannau $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ y fector $\mathbf{a}$ gan a_x ac a_y yn ôl eu trefn, fel bod $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$. Defnyddir y nodiant hwn o hyn allan. Nodiant arall a ddefnyddir weithiau yw un rhifiadol, lle dynodir cydrannau $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ y fector $\mathbf{a}$ gan a_1 ac a_2 yn ôl eu trefn.

Trawsnewid o ffurf cydrannau

Os cynrychiolir fector $\mathbf{a}$ gan $\vec{OA}$, mae'r ddadl uchod yn dangos y rhoddir y cydrannau a_x ac a_y gan

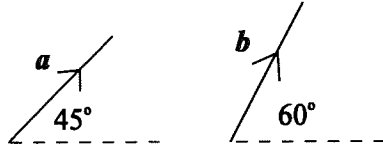
$$a_x = OA \cos \theta \quad a_y = OA \sin \theta.$$

Mae sgwario ac adio yn rhoi

$$OA = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Yna gellir darganfod $\cos \theta$ ($\sin \theta$) a bydd arwyddion a_x ac a_y yn dweud wrthyhch ym mha bedrant y mae'r fector yn gorwedd. Yna gellir darganfod θ .

Enghraifft 5.11 (Sef Enghraifft 5.3 wedi'i hailadrodd i bob pwrpas)



Yn y diagram, hyd y fector a yw 2 ac mae ar ongl lem 45° gyda'r fector unedol i a hyd y fector b yw 3 ac mae ar ongl lem 60° gyda j . Trawsnewidiwch y fectorau a a b i ffurf cydrannau cartesaidd a chanfyddwch ffurf cydrannau cartesaidd ar gyfer $2a + 3b$. Darganfyddwch hefyd faint a chyfeiriad $2a + 3b$.

Cydrannau a yng nghyfeiriad i a j yw $2 \cos 45^\circ$ a $2 \sin 45^\circ$ yn ôl eu trefn.

Felly $a = \sqrt{2}i + \sqrt{2}j$.

Cydrannau b yng nghyfeiriad i a j yw $3 \cos 60^\circ$ a $3 \sin 60^\circ$ yn ôl eu trefn.

Felly $b = \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}j$.

Felly $2a + 3b = 2(\sqrt{2}i + \sqrt{2}j) + 3\left(\frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}j\right) = 7.33i + 10.62j$.

Maint y fector yw 12.91 ac mae ar ongl $\tan^{-1} \frac{10.62}{7.33} = 55.4^\circ$ gydag i . Dyma'r un canlyniadau ag a gafwyd yn Enghraifft 5.3.

Ymarferion 5.2

1 Darganfyddwch x ac y ym mhob un o'r achosion canlynol

(a) pan fydd $a = (5 - x)i + 3j$, $b = 9i + (4 - y)j$ ac $a = b$,

(b) pan fydd $a = (3 - x)i + 4j$, $b = 2i + (7 - y)j$ ac $a = 2b$,

(c) pan fydd $a = (5 - x - y)i + (3 - x)j$, $b = 4i + (6 - y)j$ a $2a = -b$.

2 O wybod bod $a = 2i + 8j$, $b = -3i + 5j$, $c = 5i - 3j$ darganfyddwch

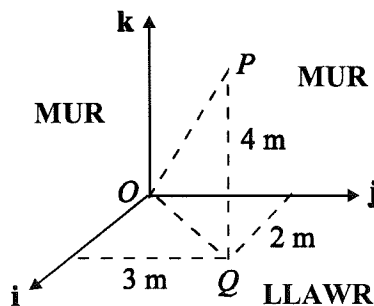
(a) $2a + 3b$, (b) $5b - 2a$, (c) $2a + 4b + c$, (d) $a - 3b + 2c$.

3 Darganfyddwch fectorau safle y pwyntiau canlynol $P(1,4)$, $Q(3,-2)$, $R(-4,3)$, $S(-2,-6)$.

- 4 Darganfyddwch, ar gyfer y pwyntiau yn yr ymarfer blaenorol, $\vec{PQ}$, $\vec{RS}$, $\vec{PS}$, $\vec{QR}$, $\vec{PR}$.
- 5 Darganfyddwch feintiau'r fectorau canlynol a chanfyddwch y fectorau unedol ar hyd bob un.
(a) $5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$, (b) $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, (c) $-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, (d) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$.
- 6 Yn y cwestiwn hwn mae d yn dynodi maint fector ac mae θ yn dynodi'r ongl rhyngddo a'r echelin x bositif (h.y. y fector unedol $\mathbf{i}$). Darganfyddwch y ffurf cydrannau cartesaidd ar gyfer pob fector.
(a) $d = 4, \theta = 60^\circ$, (b) $d = 6, \theta = 150^\circ$,
(c) $d = 10, \theta = 200^\circ$, (d) $d = 3, \theta = -40^\circ$.
- 7 Darganfyddwch faint a chyfeiriad y fectorau canlynol.
(a) $3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, (b) $4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, (c) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, (d) $-8\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.
- 8 Diffinnir fectorau unedol $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ yn Ddwyrain a Gogledd yn ôl eu trefn. Rhewch y dadleoliadau canlynol ar ffurf cydrannau cartesaidd (a) 50 km, cyfeiriant 060° , (b) 80 km, cyfeiriant 120° , (c) 110 km, cyfeiriant 225° , (d) 75 km, cyfeiriant 300° .

5.4 Fectorau mewn tri dimensiwn

Hyd yn hyn bu'r holl ddadleoliadau yr ydych wedi dod ar eu traws yn yr un plân (h.y. yr un arwyneb gwastad) ac felly gellid eu mynegi yn nhermau dau gyfeiriad perpendicwlar. Ni ellir mynegi pob dadleoliad yn y modd hwn. Er enghraifft ni fydd safle gwrthrych symudol, fel awyren, yn aros yn hir yn yr un plân. Felly mae angen estyn y syniad o gydrannau i dri dimensiwn.



Gellir dychmygu sut y gwneir hyn trwy geisio sefydlu safle pwynt mewn ystafell, gyda waliau fertigol a llawr llorweddol. Diffinnir unrhyw bwynt ar y llawr gan ei bellterau oddi wrth ddau fur cyfagos. Os cymerir fectorau unedol $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ ar hyd dwy ochr gyfagos, yna dadleoliad $\vec{OQ}$ pwynt Q sy'n 2 m o un mur a 3 m o'r mur cyfagos yw $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ m. Er mwyn darganfod dadleoliad pwynt P sy'n 4 m yn union uwchben

Q mae angen cyflwyno trydydd fector unedol $\mathbf{k}$ yn fertigol tuag i fyny, fel a ddangosir yn y diagram. Felly mae'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ yn baralel i ochrau'r llawr ac i fyny'r mur ar gornel O .

Felly dadleoliad $\vec{QP}$ yw $4\mathbf{k}$ m ac mae cymhwyso deddf adio fectorau i'r triongl OQP yn rhoi

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$$

h.y.

$$\vec{OP} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \text{ m.}$$

Mae hyn yn cynrychioli'r fector dadleoliad ar ffurf cydrannau cartesaid ac, yn gyffredinol, gellir cynrychioli unrhyw fector yn y modd hwn.

Mae'n dilyn oddi wrth Theorem Pythagoras bod

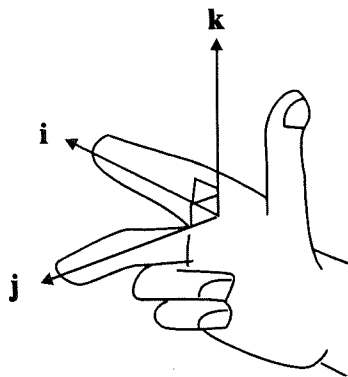
$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2$$

ac felly y maint yw ail isradd swm sgwariau'r cydrannau.

Rhoddir y dadleoliad $\vec{OP}$ yn nodiant fector colofn gan

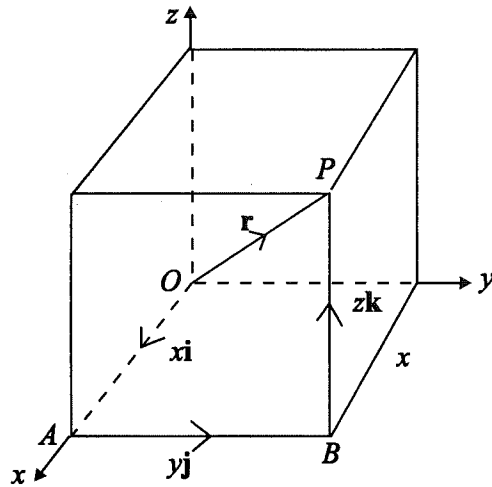
$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ m.}$$

Mae'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ yn fectorau cydberpendicwlar (h.y. mae pob un yn berpendicwlar i'r ddau arall). Gellir gweld hyn yn y diagram uchod ar gyfer cornel ystafell. Gellir delweddu'r tri chyfeiriad hefyd trwy estyn eich bawd a dau fys cyfagos ar eich llaw dde fel bod pob un yn berpendicwlar i'r ddau arall fel a ddangosir yn y diagram.



Mae'r bys cyntaf yn pwyntio i gyfeiriad $\mathbf{i}$, yr ail fys i gyfeiriad $\mathbf{j}$ a'r bawd i gyfeiriad $\mathbf{k}$. Mae gan y cyfeiriadau arbennig a ddangosir yn y diagram briodwedd ychwanegol, sef eu bod yr hyn a elwir yn llaw dde. Golyga hyn, os dychmygwch sgrïw yn cylchdroi i'r cyfeiriad o $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$, yna bydd yn symud i gyfeiriad $\mathbf{k}$.

Cydrannau fector safle



Dangosir yn y diagram dair echelin gydberpencwlar, sef Ox , Oy ac Oz . Mae'r rhain yn debyg i'r tair llinell sy'n croestorri yng nghornel ystafell. Mae dadleoliad perpendicwlar pwynt P o'r plân sy'n cynnwys Oy ac Oz yn cael ei ddynodi gan x a chyfeirir at y plân hwn fel y plân $x = 0$. Yn yr un modd mae dadleoliadau perpendicwlar pwynt P o'r plân sy'n cynnwys Ox ac Oz a'r plân sy'n cynnwys Ox ac Oy yn cael eu dynodi gan y a z , yn ôl eu trefn. Cyfeirir at y planau hyn fel y planau $y = 0$ a $z = 0$ yn ôl eu trefn. Y tri rhif hyn yw cyfesurynnau cartesaidd P ac maent yn ei ddiffinio yn unigryw. Yn yr enghraifft uchod o bwynt mewn ystafell, mae $x = 2$, $y = 3$ a $z = 4$. Diffinnir y fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ ar hyd yr echelinau Ox , Oy a Oz yn ôl eu trefn. Y dadleoliad $\vec{OP}$ yw swm y dadleoliadau $\vec{OA}$, $\vec{AB}$ a $\vec{BP}$ a ddangosir yn y diagram. Hefyd

$$\vec{OA} = x\mathbf{i}, \vec{AB} = y\mathbf{j} \text{ a } \vec{BP} = z\mathbf{k}.$$

Felly rhoddir, $\mathbf{r}$, sef fector safle pwynt P gan

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Oherwydd y cymerir y fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ fel rheol ar hyd yr echelinau Ox , Oy ac Oz mae'r nodiant olddodiad a gyflwynwyd uchod yn cael ei ddefnyddio yn aml i ddynodi'r cydrannau yn y cyfeiriadau hyn; h.y. ysgrifennir fector $\mathbf{a}$ yn aml fel

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

neu, yn nodiant fector colofn, fel

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Mae'r un rheolau sylfaenol ar gyfer fectorau yn ddilys mewn tri dimensiwn ag mewn dau ddimensiwn h.y.

- (i) Mae fectorau yn hafal os, ac yn unig os, yw eu cydrannau i gyd yn hafal.
- (ii) Os $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ yna $-\mathbf{a} = -a_x\mathbf{i} - a_y\mathbf{j} - a_z\mathbf{k}$.

- (iii) Gellir adio dau neu ragor o fectorau trwy adio eu cydrannau cyfatebol a gellir tynnu fector o fector arall trwy dynnu ei gydrannau cyfatebol.
- (iv) Cydrannau'r fector sy'n cysylltu dau bwynt yw'r gwahaniaeth rhwng cyfesurynnau'r pwyntiau.
- (v) Mae llusosi fector gan sgalar yn golygu y lluosir pob cydran gan y sgalar.
- (vi) Maint fector $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ yw $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
- (vii) Y fector unedol yng nghyfeiriad $\mathbf{a}$ yw $\frac{a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$.

Gellir ymdrin â phroblemau sy'n cynnwys fectorau ar ffurf gartesaidd yn yr un modd yn union â'r rhai mewn dau ddimensiwn, a'r unig wahaniaeth yw bod tair cydran i'w hystyried bellach!

Enghraifft 5.12

O wybod bod y fectorau $\mathbf{a} = (2 - x) \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} + 8 \mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = 7 \mathbf{i} + (5 - y) \mathbf{j} + 4z \mathbf{k}$ yn hafal, darganfyddwch x , y a z .

Gan fod y fectorau yn hafal mae eu cydrannau hefyd yn hafal ac felly

$$2 - x = 7, \quad 4 = 5 - y, \quad 8 = 4z.$$

Mae datrys yr hafaliadau hyn yn rhoi $x = -5, y = 1, z = 2$.

Enghraifft 5.13

Darganfyddwch fectorau safle y pwyntiau sydd â chyfesurynnau cartesaidd $(3, 1, 5)$ a $(-5, 2, 3)$.

Cydrannau'r fectorau safle yw'r cyfesurynnau ac felly y fectorau sydd eu hangen yw $3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ a $-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Enghraifft 5.14

Rhoddir y fectorau $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ gan $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{q} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

Darganfyddwch (a) $2\mathbf{p} + \mathbf{q}$, (b) $\mathbf{p} + 3\mathbf{q}$, (c) $3\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$.

- (a) $2\mathbf{p} + \mathbf{q} = 2(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$.
- (b) $\mathbf{p} + 3\mathbf{q} = (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + 3(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) = 18\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 23\mathbf{k}$.
- (c) $3\mathbf{p} - 2\mathbf{q} = 3(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - 2(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) = -\mathbf{i} + 21\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

Enghraifft 5.15

Darganfyddwch feintiau'r fectorau (a) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, (b) $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.

Maint fector yw ail isradd swm sgwariau'r cydrannau.

Felly ar gyfer (a) y maint yw $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

ac ar gyfer (b) y maint yw $\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 9^2} = 10.04$.

Enghraifft 5.16

Darganfyddwch y fector $\vec{PQ}$ lle mae cyfesurynnau P a Q yn $(4, 1, 6)$ a $(5, -9, 3)$ yn ôl eu trefn.

Fectorau safle P a Q , sef $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$, yw $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ a $\mathbf{q} = 5\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Hefyd $\vec{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = 5\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 3\mathbf{k} - (4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Enghraifft 5.17

Darganfyddwch y fectorau unedol yng nghyfeiriad y fectorau (a) $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ a

(b) $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

(a) Darganfyddir y fector unedol trwy rannu'r fector gan ei faint.

Y maint yw $\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$ ac felly y fector unedol yw $\frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3}$.

(b) Yn yr achos hwn, maint y fector yw $\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{83}$

a'r fector unedol yw $\frac{5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{\sqrt{83}}$.

Ymarferion 5.3

1 Darganfyddwch x , y a z ym mhob un o'r achosion canlynol.

(a) pan fydd $\mathbf{a} = (7 - x)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} + (4 - y)\mathbf{j} + (2 - z)\mathbf{k}$ ac $\mathbf{a} = \mathbf{b}$;

(b) pan fydd $\mathbf{a} = (4 + x)\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + (8 - y)\mathbf{j} + (7 + 2z)\mathbf{k}$ ac $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$;

(c) pan fydd $\mathbf{a} = (9 - x - y)\mathbf{i} + (2 - x)\mathbf{j} + (2 - 2z)\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} + (5 - y)\mathbf{j} + (8 - 5z)\mathbf{k}$
a $2\mathbf{a} = -\mathbf{b}$.

2 O wybod bod $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,
darganfyddwch

(a) $3\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, (b) $4\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$, (c) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + \mathbf{c}$, (d) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

3 Darganfyddwch fectorau safle'r pwyntiau canlynol:

$P(2, 3, 6)$, $Q(4, -3, 8)$, $R(-5, 4, -2)$, $S(-2, 6, -7)$.

4 Darganfyddwch, ar gyfer y pwyntiau yn y cwestiwn blaenorol, $\vec{PQ}$, $\vec{RS}$,
 $\vec{PS}$, $\vec{QR}$, $\vec{PR}$.

5 Darganfyddwch feintiau'r fectorau canlynol a'r fectorau unedol ar hyd pob un.

(a) $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, (b) $5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, (c) $4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

5.5 Lluoswm sgalar fectorau dau ddimensiwn

Mae lluoswm fectorau braidd yn gymhleth ac mae dau lluoswm gwahanol ar gyfer dau fector. Un lluoswm yw'r lluoswm sgalar, a gynhwysir yn eich cwrs, a'r llall yw'r lluoswm fector, nad yw'n cael ei gynnwys. Mae'r syniad o lluoswm sgalar dau fector yn bwysig iawn, yn enwedig mewn Mecaneg. Er bod y diffiniad yr un fath ar gyfer fectorau mewn dau ddimensiwn a thri dimensiwn, mae'r algebra ychydig yn haws mewn dau ddimensiwn ac felly mae'n haws edrych ar yr achos hwn gyntaf.

Mae lluoswm sgalar dau fector $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn sgalar (h.y. rhif) a ysgrifennir yn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ac a ddiffinnir fel $ab \cos \theta$ lle mae θ yn cynrychioli'r ongl rhwng $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Mae'n bwysig bob amser i gynnwys y dot ac i danlinellu'r fectorau neu fel arall fe ellir ei ddarllen fel ab nad yw'n golygu'r un peth. Gydag $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, h.y. lluoswm sgalar $\mathbf{a}$ ag $\mathbf{a}$ ei hun, yr ongl θ yw sero a, gan fod $\cos 0 = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$. Felly maint fector yw ail isradd ei lluoswm sgalar ag ef ei hun. Mae cymhwyso hyn i'r fectorau unedol $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ yn rhoi

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1.$$

Yr ongl rhwng y fectorau unedol $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ yw 90° ac felly, gan fod $\cos 90^\circ = 0$,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}.$$

Priodweddau'r lluoswm sgalar

(i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. Mae diffiniad $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ yr un fath â diffiniad $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, ac felly maent yn hafal i'w gilydd.

(ii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ sef y ddeddf ddosbarthol.

Rhoddir prawf ar gyfer y ddeddf ddosbarthol mewn dau ddimensiwn yn adran 5.7.

Mae'r ddeddf ddosbarthol hefyd yn ymhlygu bod

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{c},$$

h.y. lluoswm sgalar swm fectorau yw swm y gwahanol luosymiau sgalar.

Gellir cymhwyso hyn i'r fectorau $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}$ ac felly

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) = a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}.$$

Mae'r canlyniadau uchod ar gyfer lluosymiau sgalar y fectorau unedol yn symleiddio'r canlyniad hwn i

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y,$$

h.y. y lluoswm sgalar yw swm lluosymiau'r cydrannau cyfatebol.

Mae'r mynegiad ar gyfer y lluoswm sgalar yn nhermau cydrannau yn darparu ffordd rwydd o ddarganfod yr ongl rhwng dau fector, neu rhwng dwy linell.

Enghraifft 5.18

Darganfyddwch yr ongl rhwng y fectorau $4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ a $7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Lluoswm sgalar y fectorau yw $4 \times 7 - 6 \times 3 = 10$.

Meintiau'r fectorau yw $\sqrt{4^2 + 6^2}$ ac $\sqrt{7^2 + 3^2}$, ac felly mae diffiniad y lluoswm sgalar yn dangos bod lluoswm sgalar y ddau fector hefyd yn

$$\sqrt{4^2 + 6^2} \times \sqrt{7^2 + 3^2} \times \cos \theta$$

lle mae θ yn cynrychioli'r ongl rhwng y fectorau.

Felly mae $\sqrt{4^2 + 6^2} \times \sqrt{7^2 + 3^2} \times \cos \theta = 10$ ac mae $\theta = 79.5^\circ$.

Trwy ddefnyddio'r dull yn yr enghraifft uchod gellir cael y fformiwla ganlynol ar gyfer cosin yr ongl rhwng dau fector $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}$.

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Nid oes pwrpas ceisio cofio'r fformiwla hon mewn gwirionedd gan ei bod yn haws gwneud y gwaith cyfrifo yn uniongyrchol fel a wnaed yn Enghraifft 5.18.

Y pellter rhwng dau bwynt (h.y. $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$)

Gellir defnyddio'r lluoswm sgalar i ganfod y pellter rhwng dau bwynt A a B sydd â fectorau safle $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn ôl eu trefn. Mae'r fector $\vec{AB}$ yn hafal i $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ac mae'r pellter rhwng y pwyntiau, h.y. maint $\vec{AB}$, yn cael ei ddynodi $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Hefyd

$$AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Gellir ehangu hyn trwy ddefnyddio'r ddeddf ddosbarthol ac felly

$$AB^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Dyma'r rheol gosin mewn gwirionedd, fel y gwelwn os defnyddir $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$.

Profi a yw fectorau yn berpendicwlar

Mae'r ddau fector $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn berpendicwlar os yw $\cos \theta = 0$ h.y.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y = 0.$$

Adeiladu fectorau perpendicwlar

Bodlonir yr amod i ddau fector fod yn berpendicwlar os yw $b_y = a_x$ a $b_x = -a_y$. Mae posibiliadau eraill, ond mae hyn yn rhoi'r rheol sylfaenol (**ar gyfer fectorau dau ddimensiwn yn unig**) y gellir darganfod fector sy'n berpendicwlar i fector a roddir trwy gydgyfnwid y cydrannau a newid arwydd un ohonynt, e.e. un fector sy'n berpendicwlar i $5\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$ yw $11\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

Cydrannau fector

Fel y nodwyd uchod, diffiniad cydran fector $\mathbf{a}$ yng nghyfeiriad y fector unedol $\mathbf{n}$ yw $a \cos \theta$ lle mae θ yn cynrychioli'r ongl rhwng $\mathbf{a}$ ac $\mathbf{n}$.

Gan fod $\mathbf{n}$ â maint unedol, $a \cos \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$. Mae hyn yn darparu dull syml a buddiol o ddarganfod cydran fector mewn cyfeiriad a roddir, h.y. cydran $\mathbf{a}$ yng nghyfeiriad y fector unedol $\mathbf{n}$ yw $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$.

Enghraifft 5.19

Darganfyddwch gydran y fector $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, yng nghyfeiriad y fector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Y cam cyntaf yw darganfod y fector unedol yn y cyfeiriad sydd ei angen.

Maint $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ yw 5 ac felly y fector unedol yw $\frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5}$.

Y gydran sydd ei hangen felly yw

$$7 \times \frac{3}{5} + 6 \times \frac{4}{5} = 9.$$

Rhan gydrannol fector

Diffiniad rhan gydrannol fector mewn cyfeiriad a roddir yw'r rhan honno o fector sy'n baralel i'r cyfeiriad a roddir. Er enghraifft, os yw $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$, yna $a_x \mathbf{i}$ yw rhan gydrannol $\mathbf{a}$ yng nghyfeiriad $\mathbf{i}$. Y rhan gydrannol felly yw'r gydran mewn cyfeiriad a roddir sy'n lluosu'r fector unedol yn y cyfeiriad hwnnw.

O Enghraifft 5.19, rhan gydrannol $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ yng nghyfeiriad y fector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ yw

$$9 \times \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} = \frac{27\mathbf{i} + 36\mathbf{j}}{5}.$$

Gweddill $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (h.y. y rhan gydrannol sy'n berpendicwlar i $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$) felly yw

$$7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \frac{27\mathbf{i} + 36\mathbf{j}}{5} = \frac{8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}}{5}.$$

Ar gyfer fector unedol cyffredinol, sef $\mathbf{n}$, rhan gydrannol $\mathbf{a}$ yng nghyfeiriad fector $\mathbf{n}$ yw $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ ac felly y rhan o $\mathbf{a}$ sy'n berpendicwlar i $\mathbf{n}$ yw $\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Ymarferion 5.4

- 1 Darganfyddwch luosymiau sgalar y parau canlynol o fectorau (a) $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ a $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, (b) $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ a $5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, (c) $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ac $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, (d) $-2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ a $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.
- 2 Darganfyddwch yr onglau rhwng y parau canlynol o fectorau (a) $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ ac $\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, (b) $3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ a $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, (c) $-\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ a $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, (d) $-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ a $2\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$.
- 3 Darganfyddwch fectorau sy'n berpendicwlar i (a) $4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, (b) $9\mathbf{i} - 11\mathbf{j}$.
- 4 Darganfyddwch yr ongl rhwng y llinell sy'n cysylltu'r pwyntiau (1, 4) a (3, 2) a'r llinell sy'n cysylltu'r pwyntiau (5, 3) a (2, 8).
- 5 Darganfyddwch yr ongl rhwng $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn yr achosion canlynol:
(a) $a = 2, b = 4, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$, (b) $a = 4, b = 2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -4$.
- 6 O wybod bod $a = 1, b = 6, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5$ darganfyddwch $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ a $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.
- 7 Darganfyddwch (a) cydran $\mathbf{a}$ yng nghyfeiriad y fector $\mathbf{b}$, (b) rhan gydrannol $\mathbf{a}$ yng nghyfeiriad y fector $\mathbf{b}$, (c) rhan gydrannol $\mathbf{a}$ mewn cyfeiriad perpendicwlar i'r fector $\mathbf{b}$, ar gyfer yr achosion
(a) $\mathbf{a} = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$,
(b) $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 15\mathbf{j}, \mathbf{b} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

5.6 Lluoswm sgalar mewn tri dimensiwn

Yr unig wahaniaeth rhwng y lluoswm sgalar mewn dau ddimensiwn ac mewn tri dimensiwn yw bod gan y fectorau dair cydran berpendicwlar. Mae'r diffiniad yn union yr un fath ac yn awr mae angen i'r tri fector unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, a $\mathbf{k}$ fodloni

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}.$$

Bodlonir y ddeddf ddosbarthol o hyd ac mae ei chymhwyso i $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ a defnyddio'r hafaliadau a fodlonir gan $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, a $\mathbf{k}$ yn rhoi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Mae'r mynegiad ar gyfer y lluoswm sgalar dibyn yn hirach, ond swm lluosymiau'r cydrannau cyfatebol ydyw o hyd.

Yr ongl rhwng fector a'r echelinau

Os θ yw'r ongl rhwng y fector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ a'r fector unedol $\mathbf{i}$, yna, gan fod gan y fector unedol faint unedol, mae

$$\mathbf{i} \cdot (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} \cos \theta$$

$$\text{ac felly} \quad \cos \theta = \frac{3}{13} \quad \text{a} \quad \theta = 76.7^\circ.$$

Felly y cosin yw cymhareb y gydran gyfatebol i faint y fector. Byddech yn darganfod canlyniad tebyg petaech yn ceisio darganfod yr onglau rhwng y fector a'r ddau fector unedol arall.

Y canlyniad cyffredinol yw mai cosinau'r onglau rhwng y fector $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ a'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, a $\mathbf{k}$, yn ôl eu trefn, yw

$$\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Yr unig syniad mewn dau ddimensiwn nad yw'n trosglwyddo i dri dimensiwn yw adeiladu fectorau perpendicwlar. Yr amod y mae angen ei fodloni yw

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$$

ond nid yw'n bosibl rhoi datrysiad syml ar gyfer hwn.

Enghraifft 5.20

Darganfyddwch yr ongl rhwng y fectorau $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ a $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Lluoswm sgalar y fectorau yw $2 \times 3 + 4 \times (-2) + 3 \times 1 = 1$.

Meintiau'r fectorau yw $\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29}$ a $\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.

Felly, os θ yw'r ongl rhwng y fectorau, $\sqrt{29} \times \sqrt{14} \times \cos \theta = 1$ ac felly $\theta = 87.2^\circ$.

Enghraifft 5.21

Darganfyddwch

- (a) cydran $4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ yng nghyfeiriad y fector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
 (b) rhan gydrannol $4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ yng nghyfeiriad y fector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
 (c) rhan gydrannol $4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ yn berpendicwlar i'r fector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

- (a) Maint $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ yw $\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, ac felly y fector unedol yng nghyfeiriad y fector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ yw $\frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3}$ a'r gydran sydd ei hangen yw

$$4 \times \frac{2}{3} + 7 \times \frac{-1}{3} - 2 \times \frac{2}{3} = -1.$$

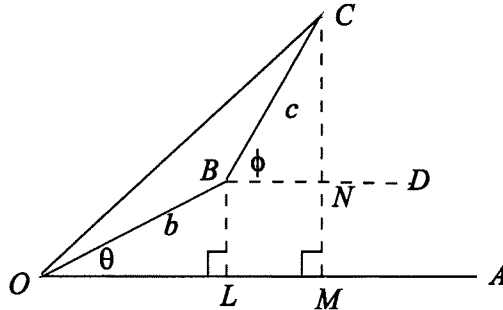
- (b) Y rhan gydrannol yw lluoswm y fector unedol a'r gydran yng nghyfeiriad y fector unedol h.y. $\frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3}$.

- (c) Darganfyddir y rhan gydrannol yn berpendicwlar i $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ trwy dynnu canlyniad (b) o $4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, ac mae hyn yn rhoi $\frac{14\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 4\mathbf{k}}{3}$.

Gallwch wireddu bod lluoswm sgalar y mynegiad hwn â $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ yn diflannu ac felly bod y fectorau yn berpendicwlar.

5.7 Profi'r ddeddf ddosbarthol ar gyfer lluosymiau sgalar

Tybir bod y fectorau $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ac $\mathbf{c}$, yn gymhlan ac, yn y diagram,



$\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, $\vec{BC} = \mathbf{c}$, ac felly $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{OC}$. Tynnir perpendicwlarau BL ac CM o B ac C i OA , tynnir y llinell BD trwy B yn baralel i $\mathbf{a}$, ac CN yw'r perpendicwlar o C i BD .

Dynodir yr onglau rhwng OA ac OB a rhwng BD a BC gan θ a ϕ , yn ôl eu trefn.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta = a OL, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = ac \cos \phi = a BN = a LM,$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = a OC \cos \angle COM = a OM.$$

Gan fod $OM = OL + LM$ mae hyn yn rhoi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = a OL + a LM = a OM = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Er mwyn profi hyn ar gyfer fectorau tri dimensiwn mae angen defnyddio syniadau o faes geometreg tri dimensiwn, ac ni roddir y prawf yma.

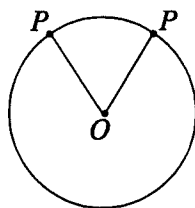
Ymarferion 5.5

- Darganfyddwch luosymiau sgalar y parau canlynol o fectorau.
 - $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ac $\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,
 - $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ac $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,
 - $8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ac $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
 - $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ac $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
- Darganfyddwch ba rai o'r parau canlynol o fectorau sy'n berpendicwlar i'w gilydd a darganfyddwch yr onglau rhwng y parau hynny nad ydynt yn berpendicwlar i'w gilydd,
 - $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ac $\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$,
 - $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ac $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
 - $4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ac $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$,
 - $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ac $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- Darganfyddwch yr ongl rhwng y llinell sy'n cysylltu'r pwyntiau (1, 4, 6) a (3, 2, 1) a'r llinell sy'n cysylltu'r pwyntiau (5, 3, 5) a (2, 8, 4).
- O wybod bod $a^2 = 6$, $b^2 = 2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, darganfyddwch $|2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}|$, $|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$.
- O wybod bod $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, a bod $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ darganfyddwch y sgalar p fel bod $p\mathbf{a} + \mathbf{b}$ yn berpendicwlar i $\mathbf{a}$.
- O wybod bod $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, a $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ dangoswch fod y fectorau $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ac $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ yn berpendicwlar i'w gilydd.
- Darganfyddwch (a) cydran $\mathbf{a}$ yng nghyfeiriad y fector $\mathbf{b}$, (b) y rhan gydrannol o $\mathbf{a}$ yng nghyfeiriad y fector $\mathbf{b}$, (c) y rhan gydrannol o $\mathbf{a}$ mewn cyfeiriad perpendicwlar i'r fector $\mathbf{b}$, ar gyfer yr achosion
 - $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
 - $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$.

5.8 Differiad ac integriad fectorau

Gall cydrannau fector, ac felly y fector ei hun, amrywio gydag amser.

Er enghraifft yn y diagram mae pwynt P yn disgrifio cylch o amgylch pwynt O .



Er bod hyd OP yn aros yn sefydlog mae cyfeiriad $\vec{OP}$ yn amrywio ac felly mae'r fector $\vec{OP}$ yn amrywio gydag amser. Yn y bôn, mae deilliad fector mewn perthynas ag amser yn mesur cyfradd newid fector mewn perthynas ag amser ac felly mae'r deilliad ei hun yn fector. Gellir diffinio deilliad fector fel terfan, yn fras fel y gwnaed

yn eich cwrs P1, ond mae hyn yn fwy cyffredinol na'r hyn sydd ei angen mewn Mecaneg, lle mae diffiniad syml o ddeilliad ar ffurf cydrannau yn ddigonol, lle cymerir nad yw'r fectorau unedol yn amrywio gydag amser. Gall fector newid mewn perthynas ag unrhyw baramedr a'r un yw'r diffiniad sylfaenol beth bynnag yw'r paramedr.

Mae'r syniad o ddifferu ac integru fectorau yn bwysig iawn mewn cinemateg a dynameg a bydd y diffiniadau sylfaenol a roddir yn yr adran hon yn cael eu defnyddio yn adrannau 7.2 a 7.3.

Differiad

Yn y diffiniad hwn, cymerir nad yw'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ yn dibynnu ar t .

Deilliad fector $\mathbf{a}$ mewn perthynas â t , sef $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, yw'r fector y mae ei gydrannau yn ddeilliadau cydrannau $\mathbf{a}$ mewn perthynas â t ; h.y. os $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ yna

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k}.$$

Os yw fector yn gyson, yna mae ei gydrannau i gyd yn gyson. Mae eu deilliadau felly yn sero ac felly deilliad fector cyson yw'r fector sero.

Integriad

Yn y diffiniad hwn, cymerir nad yw'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ yn dibynnu ar t .

Integryn $\int \mathbf{a} dt$ fector $\mathbf{a}$ yw'r fector y mae ei gydrannau yn integrynau cydrannau $\mathbf{a}$;

h.y. os $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ yna

$$\int \mathbf{a} dt = \int a_x dt \mathbf{i} + \int a_y dt \mathbf{j} + \int a_z dt \mathbf{k}.$$

Pan gaiff fector ei integru mae angen cyflwyno fector cyson integriad lle cyflwynir cysonyn integriad ar gyfer sgalarau.

Rheolau ar gyfer differiad ac integriad

$$(i) \quad \frac{d(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

$$(ii) \quad \frac{d(m\mathbf{a})}{dt} = m \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \frac{dm}{dt}.$$

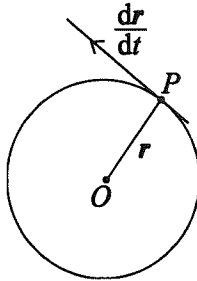
$$(iii) \quad \text{Ar gyfer } \mathbf{a} \text{ cyson } \frac{d(m\mathbf{a})}{dt} = \mathbf{a} \frac{dm}{dt}, \text{ h.y. deilliad sgalar yn lluosgi fector cyson yw lluoswm y fector cyson a deilliad y sgalar.}$$

$$(iv) \quad \frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{dt} = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$

$$(v) \quad \text{Ar gyfer } \mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ mae rheol (iv) yn dod yn } \frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})}{dt} = 2\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$

$$\text{Hefyd } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \text{ ac felly } \frac{d(a^2)}{dt} = 2\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt}.$$

O'r canlyniad diwethaf mae'n dilyn, ar gyfer unrhyw fector $\mathbf{a}$ sydd â maint cyson, ac felly ar gyfer unrhyw fector unedol, fod $\mathbf{a}$ yn berpendicwlar i $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ gan fod $\frac{d(a^2)}{dt}$ yn sero.



Mae hyn yn golygu pan fydd pwynt P , gyda fector safle $\mathbf{r}$ mewn perthynas ag O , yn disgrifio cylch gyda chanol O , fel yn y diagram uchod, y bydd $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ yn berpendicwlar i'r radiws, h.y. ar hyd y tangiad, er y gall ei gyfeiriad fod yn ddirgroes i'r un a ddangosir.

(vi) $\int (\mathbf{a} + \mathbf{b}) dt = \int \mathbf{a} dt + \int \mathbf{b} dt.$

(vii) Os yw $\mathbf{a}$ yn fector cyson yna $\int m \mathbf{a} dt = \mathbf{a} \int m dt$, h.y. integryn lluoswm sgalar a fector cyson yw integryn y sgalar wedi'i luosi gan y fector cyson.

Gallwch wirio'r rhain i gyd trwy gymhwyso diffiniadau deilliad ac integryn i ddwy ochr yr hafaliadau.

Enghraifft 5.22

Darganfyddwch $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ a $\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2}$ ar gyfer

(a) $\mathbf{a} = t^2 \mathbf{i} + 4 \cos t \mathbf{j},$

(b) $\mathbf{a} = e^{-t} \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j} + 4t^2 \mathbf{k}.$

(a) $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{dt^2}{dt} \mathbf{i} + 4 \frac{d\cos t}{dt} \mathbf{j} = 2t \mathbf{i} - 4 \sin t \mathbf{j},$

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 2 \frac{dt}{dt} \mathbf{i} - 4 \frac{d\sin t}{dt} \mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 4 \cos t \mathbf{j}.$$

(b) $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{de^{-t}}{dt} \mathbf{i} + \frac{dt^3}{dt} \mathbf{j} + 4 \frac{dt^2}{dt} \mathbf{k} = -e^{-t} \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + 8t \mathbf{k},$

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\frac{de^{-t}}{dt} \mathbf{i} + 3 \frac{dt^2}{dt} \mathbf{j} + 8 \frac{dt}{dt} \mathbf{k} = e^{-t} \mathbf{i} + 6t \mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

Enghraifft 5.23

O wybod bod $\mathbf{a}$ yn fector cyson, darganfyddwch ddeilliadau'r canlynol mewn perthynas â t : (a) $t^2\mathbf{a}$, (b) $t^3\mathbf{a} + \cos t\mathbf{a}$.

- (a) Ni roddir cydrannau $\mathbf{a}$ ac felly mae rheol (iii) uchod yn rhoi

$$\frac{d^2 t^2 \mathbf{a}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{a} = 2t\mathbf{a}.$$

- (b) Yn yr achos hwn mae angen defnyddio rheol (i) ar gyfer differu swm fectorau gyntaf ac yna ddefnyddio rheol (iii) ar gyfer differu lluoswm sgalar a fector.

Mae hyn yn rhoi

$$\begin{aligned} \frac{d(t^3 \mathbf{a} + \cos t \mathbf{a})}{dt} &= \frac{d(t^3 \mathbf{a})}{dt} + \frac{d(\cos t \mathbf{a})}{dt} \\ &= \frac{dt^3}{dt} \mathbf{a} + \frac{d \cos t}{dt} \mathbf{a} = 3t^2 \mathbf{a} - \sin t \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Enghraifft 5.24

Darganfyddwch integrynnau'r fectorau canlynol mewn perthynas ag amser:

- (a) $2t\mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j}$, (b) $2e^{-2t}\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$.

- (a) Darganfyddir yr integryn trwy integru'r cydrannau a chynnwys fector integriad cyson. Mae hyn yn rhoi $t^2\mathbf{i} - 4 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{b}$, lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson.
- (b) Mae integru'r cydrannau yn yr achos hwn yn rhoi $-e^{-2t}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} + \mathbf{b}$, lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson.

Enghraifft 5.25

O wybod bod $\mathbf{a}$ yn fector cyson, darganfyddwch integrynnau'r canlynol mewn perthynas â t : (a) $\mathbf{a}$, (b) $3t^2\mathbf{a}$.

- (a) Mae rheol (vii) uchod yn rhoi'r integryn fel $t\mathbf{a} + \mathbf{b}$, lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson.
- (b) Mae rheol (vi) uchod yn rhoi'r integryn fel $t^3\mathbf{a} + \mathbf{b}$, lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson.

Enghraifft 5.26

O wybod bod $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, a bod $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, pan fydd $t = 0$, darganfyddwch $\mathbf{r}$.

Y cam cyntaf yw integru $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ i ddarganfod $\mathbf{r}$ ar amser t .

Mae hyn yn rhoi $\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k} + \mathbf{b}$, lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson. Mae amnewid gwerth $\mathbf{r}$ a roddir pan fydd $t = 0$ yn dangos bod

$$2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = -\mathbf{j} - \mathbf{k} + \mathbf{b}.$$

Mae datrys hyn yn rhoi $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ ac felly

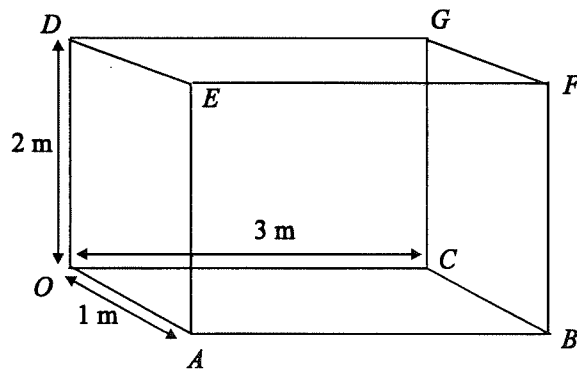
$$\mathbf{r} = t^2\mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k} + 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Ymarferion 5.6

- 1 Darganfyddwch $\frac{da}{dt}$ a $\frac{d^2a}{dt^2}$ ar gyfer
- (a) $a = 2t\mathbf{i} + 5t^4\mathbf{j}$, (b) $a = e^t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$,
 (c) $a = \cos t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j}$, (d) $a = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$,
 (e) $a = \cos t\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + \sin 3t\mathbf{k}$, (f) $a = e^{2t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$.
- 2 O wybod bod a a b yn fectorau cyson, darganfyddwch ddeilliad y canlynol mewn perthynas â t
- (a) $\frac{a}{t}$, (b) $a \cos t + t^2 b$, (c) $e^t a + 2e^{-t} b$.
- 3 O wybod bod $r = \cos nt\mathbf{a} + \sin nt\mathbf{b}$, lle mae a a b yn fectorau cyson ac n yn gysonyn, darganfyddwch y berthynas rhwng r a $\frac{d^2r}{dt^2}$.
- 4 Integrwch y mynegiadau canlynol mewn perthynas â t :
- (a) $4t^3\mathbf{i} + 6t^5\mathbf{j}$, (b) $2e^{2t}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, (c) $2\cos 2t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, (d) $3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$,
 (e) $2\cos t\mathbf{i} + 5t^4\mathbf{j} + 4\sin t\mathbf{k}$, (f) $2e^{2t}\mathbf{i} + 4\cos 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$.
- 5 Enrhifwch (a) $\int_{-1}^2 (12t^3\mathbf{i} + 15t^4\mathbf{j}) dt$, (b) $\int_{-1}^2 (6t^5\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 8t^3\mathbf{k}) dt$.
- 6 Darganfyddwch r pan fydd (a) $\frac{dr}{dt} = 7t^6\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ ac $r = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ar gyfer $t = 1$,
 (b) $\frac{dr}{dt} = 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$ ac $r = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ ar gyfer $t = 1$.
- 7 Darganfyddwch fynegiad ar gyfer r pan fydd $\frac{d^2r}{dt^2} = a$, lle mae a yn fector cyson.

Ymarferion Amrywiol 5

1



Mae'r ffigur yn dangos ciwboid lle mae $OA = 1$ m, $OC = 3$ m ac $OD = 2$ m.

Gan gymryd O fel tarddbwynt a'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ i gyfeiriadau OA , OC ac OD yn ôl eu trefn, mynegwch yn nhermau $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ y fectorau (a) $\vec{OF}$ a (b) $\vec{AG}$. Trwy ystyried lluoswm sgalar priodol, darganfyddwch yr ongl lem rhwng croesliniau OF ac AG .

- 2 Rhoddir y fectorau $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ gan $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Rhoddir pedwerydd fector gan $\mathbf{d} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Darganfyddwch werthoedd α , β a γ yn gyfryw fel bod $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.
- 3 Cyfesurynnau tri phwynt P , Q ac R yw $(9, 2, -4)$, $(3, 1, -4)$ a $(2, 7, 6)$ yn ôl eu trefn. Darganfyddwch y fectorau $\vec{PQ}$ a $\vec{QR}$ a dangoswch eu bod yn berpendicwlar i'w gilydd.
- 4 Yn achos tri fector, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ac $\mathbf{r}$, mae $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| = |\mathbf{p} - 3\mathbf{q}| = |2\mathbf{p} - \mathbf{q}|$. Darganfyddwch y gymhareb $\frac{p}{q}$ a'r ongl rhwng y fectorau $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$.
- 5 Rhoddir y fectorau $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ac $\vec{OC}$ gan

$$\vec{OA} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k},$$

$$\vec{OB} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

$$\vec{OC} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Dangoswch fod $\vec{AB} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ a darganfyddwch fynegiad tebyg ar gyfer $\vec{AC}$.
Cyfrifwch $|\vec{AB}|$ ac $|\vec{AC}|$ a'r lluoswm sgalar $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
a dangoswch fod $\cos \hat{BAC} = \frac{57}{65}$.
- 6 Mae gan bwyntiau A , B , C a D fectorau safle $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $10\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ yn ôl eu trefn. Mae pwyntiau P a Q yn gorwedd ar AB ac CD yn ôl eu trefn ac mae $AP = \lambda AB$, $CQ = \mu CD$, lle mae λ a μ yn gysonion. Dangoswch fod

$$\vec{OP} = \mathbf{i} + (5\lambda - 2)\mathbf{j} + 5(1 - \lambda)\mathbf{k},$$

a darganfyddwch fynegiad tebyg ar gyfer $\vec{OQ}$.
O wybod bod PQ yn berpendicwlar i AB ac i CD , darganfyddwch bâr o hafaliadau cydamserol ar gyfer λ a μ .
Trwy ddatrys y rhain dangoswch fod $\vec{PQ} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
- 7 Diffinnir y fectorau $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ gan $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$, lle mae p a q yn gysonion. O wybod bod $\mathbf{c}$ yn berpendicwlar i $\mathbf{a}$, darganfyddwch $\frac{p}{q}$.
- 8 Darganfyddwch rannau cydrannol y fector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ar hyd y fector $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ac yn berpendicwlar iddo.
- 9 O wybod y fectorau $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + m\mathbf{j}$, darganfyddwch werthoedd m sy'n golygu bod
(a) $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn berpendicwlar i'w gilydd,
(b) $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn baralel,
(c) yr ongl lem rhwng $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn $\frac{\pi}{4}$.

- 10 Fectorau safle A a B mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog yw $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ a $5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Darganfyddwch AB a chosinâu'r onglau rhwng $\overrightarrow{AB}$ a'r echelinau cyfesurynnol.
- 11 Darganfyddwch fector unedol sy'n berpendicwlar i $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ ac i $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- 12 Fectorau safle'r pedwar pwynt A , B , C a D yw $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $4\mathbf{i} + \mathbf{k}$ a $3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ yn ôl eu trefn. Dangoswch fod triongl ABC yn driongl ongl sgwâr a bod triongl ABD yn isosgeles.

Pennod 6

Cymhwyso Fectorau

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon, dylech

- allu darganfod, ar ffurf cydrannau, cydeffaith grymoedd yn gweithredu ar bwynt,
- allu darganfod y gwaith a wneir gan rymoedd cyson mewn dau a thri dimensiwn,
- allu cyfrifo cyflymder a chyflymiad gronyn mewn dau a thri dimensiwn,
- allu datrys problemau yn ymwneud â rhyngdoriadau a phellter byrraf dynesiad,
- ddeall cysyniadau ergyd, momentwm, pŵer, egni cinetig ar gyfer mudiannau cyffredinol a gallu cyfrifo'r meintiau hyn mewn achosion penodol,
- allu cyfrifo'r gwaith a wneir mewn amser penodol gan rym y rhoddir ei gydrannau yn nhermau amser.

6.1 Statteg

Rydych eisoes wedi dod ar draws defnydd fectorau mewn Statteg, er mewn ffurf ychydig yn guddiedig.

Cydeffaith grymoedd yn gweithredu ar bwynt

Cydeffaith sawl grym yn gweithredu ar bwynt yw swm fector y grymoedd unigol; h.y. cydrannau y grym cydeffaith yw swm cydrannau cyfatebol y grymoedd unigol. Dyma'r union ddiffiniad a ddefnyddiwyd ym Mhennod 2 Llyfr M1. Y prif wahaniaeth nawr yw bod defnyddio'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ yn ei gwneud yn haws nodi'r problemau ac yn gwneud i'r gwaith cyfrifo ymddangos yn symlach.

Enghraifft 6.1

Darganfyddwch gydeffaith

- (a) y grymoedd $(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\text{ N}$, $(5\mathbf{i} - 5\mathbf{j})\text{ N}$, $(2\mathbf{i} + 7\mathbf{j})\text{ N}$, yn gweithredu ar bwynt,
- (b) y grymoedd $(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})\text{ N}$, $(9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\text{ N}$, $(7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k})\text{ N}$, yn gweithredu ar bwynt.

- (a) Yn syml, y grym cydeffaith yw'r swm fector; h.y.

$$(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j})\text{ N} = (11\mathbf{i} + 5\mathbf{j})\text{ N}.$$

- (b) Eto yn syml, y grym cydeffaith yw'r swm fector; h.y.

$$(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + 9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} + 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k})\text{ N} = (18\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 21\mathbf{k})\text{ N}.$$

Enghraifft 6.2

Darganfyddwch werthoedd posibl ar gyfer p fel bod maint cydeffaith y tri grym $(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\text{ N}$, $(p\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k})\text{ N}$, $(3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k})\text{ N}$ yn gweithredu ar bwynt yn $\sqrt{389}\text{ N}$.

Y grym cydeffaith yw

$$(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + p\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k})\text{ N} = ((p + 5)\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 15\mathbf{k})\text{ N}.$$

Felly, mae sgwario ac adio'r cydrannau yn rhoi

$$(p + 5)^2 + 10^2 + 15^2 = 389.$$

Mae hyn yn rhoi $p + 5 = \pm 8$ ac felly $p = -13$ neu 3 .

Cydbwysedd grymoedd cymhlan yn gweithredu ar bwynt

Mae system o rymoedd sy'n gweithredu ar bwynt mewn cydbwysedd os yw'r swm fector yn sero, h.y. cydrannau'r grym cydeffaith mewn tri chyfeiriad perpendicwlar yn sero. Problemau cydbwysedd yn ymwneud â grymoedd cymhlan yw'r unig rai a gewch yn eich cwrs chi. Yn yr achos hwn mae cydrannau'r grym cydeffaith mewn dau gyfeiriad gwahanol yn sero a dyma'r amod a ddefnyddiwyd ym Mhennod 2 yn M1. Ni fydd defnyddio'r fectorau unedol $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ yn fawr o help i chi gyda'r math o broblemau cydbwysedd a geir yn adran 2.2 yn M1 ond rydych nawr yn gallu datrys problemau cydbwysedd a osodir gan ddefnyddio'r fectorau unedol, fel y rhai a ganlyn.

Enghraifft 6.3

Mae'r system o rymoedd $(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j})\text{ N}$, $(7\mathbf{i} + Q\mathbf{j})\text{ N}$, $(P\mathbf{i} + 4\mathbf{j})\text{ N}$, $(3\mathbf{i} + 8\mathbf{j})\text{ N}$, sy'n gweithredu ar bwynt, mewn cydbwysedd. Darganfyddwch P a Q .

Y cam cyntaf yw darganfod y grym cydeffaith, sef

$$(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + P\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j})\text{ N} = ((12 + P)\mathbf{i} + (17 + Q)\mathbf{j})\text{ N}.$$

Ar gyfer cydbwysedd, mae angen i'r grym hwn fod yn sero ac felly $P = -12$, $Q = -17$.

Enghraifft 6.4

Mae system o rymoedd sy'n cynnwys y tri grym canlynol

$$(4\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 13\mathbf{k})\text{ N}, (8\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k})\text{ N}, (4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 18\mathbf{k})\text{ N}$$
 yn gweithredu ar bwynt.

Darganfyddwch y grym ychwanegol y mae angen ei gynnwys er mwyn i'r pedwar grym fod mewn cydbwysedd.

Ar gyfer cydbwysedd, mae angen i swm y pedwar grym fod yn sero.

$$\text{Swm (h.y. cydeffaith) y tri grym a roddir yw } (16\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 28\mathbf{k})\text{ N}.$$

Er mwyn i gydeffaith y pedwar grym fod yn sero, mae'n rhaid i'r pedwerydd grym fod yn $-(16\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 28\mathbf{k})\text{ N}$.

Gwaith a wneir gan rym cyson

Rydych yn gwybod eisoes o Adran 2.1 bod y gwaith a wneir gan rym cyson F pan fydd y pwynt lle mae'n cael ei roi yn symud pellter d yn $Fd \cos \theta$, lle mae θ yn cynrychioli'r ongl rhwng F a'r cyfeiriad y mae'r grym yn symud iddo. Gellir defnyddio diffiniad y lluoswm sgalar er mwyn mynegi'r gwaith a wneir fel lluoswm sgalar. Os yw'r pwynt lle rhoddir y grym yn cael ei ddadleoli ar hyd y fector d , yna mae $Fd \cos \theta = F \cdot d$ ac felly

$$\text{gwaith a wneir} = F \cdot d.$$

Gellir defnyddio hyn i ddarganfod y gwaith a wneir gan rym mewn dau ac mewn tri dimensiwn.

Enghraifft 6.5

Darganfyddwch y gwaith a wneir gan (a) y grym $(3\mathbf{i} - 8\mathbf{j})$ N pan ddadleolir y pwynt lle mae'n cael ei roi gan $(2\mathbf{i} + 6\mathbf{j})$ m, (b) y grym $(7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ N pan ddadleolir y pwynt lle mae'n cael ei roi gan $(4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ m.

(a) Y gwaith a wneir yw $(3 \times 2 + (-8) \times 6) \text{ J} = -42 \text{ J}$.

(b) Y gwaith a wneir yw $(7 \times 4 + 6 \times 8 + (-3) \times (-3)) \text{ J} = 85 \text{ J}$.

Enghraifft 6.6

Mae'r grym $(4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$ N yn gweithredu ar ronyn P . Darganfyddwch y gwaith a wneir wrth i P symud o bwynt $(5, 2, 4)$ m i bwynt $(3, 4, 7)$ m.

Y cam cyntaf yw darganfod dadleoliad P . Ar y dechrau mae P ar y pwynt sydd â'r fector safle $(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$ m ac mae'n symud i'r pwynt sydd â'r fector safle $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$ m.

Y dadleoliad felly yw

$$((3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) - (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})) \text{ m} = (-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \text{ m}.$$

Y gwaith a wneir felly yw

$$(4 \times (-2) + 8 \times 2 + (-5) \times 3) \text{ J} = -7 \text{ J}.$$

Ymarferion 6.1

1 Mae grymoedd P N, Q N ac R N yn gweithredu ar ronyn. Darganfyddwch, yn nhermau'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$, gydeffaith y grymoedd hyn ar gyfer yr achosion canlynol.

(a) $P = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $Q = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $R = 11\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$.

(b) $P = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $Q = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $R = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

(c) $P = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $Q = 3\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $R = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

(d) $P = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $Q = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$, $R = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.

2 Mae'r grymoedd $(4\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$ N a $(5\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$ N yn gweithredu ar bwynt. Dangoswch fod maint eu cydeffaith yn 15 N a darganfyddwch yr ongl rhwng y grymoedd.

- 3 Dangoswch fod maint cydeffaith y grymoedd $(3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ N a $(5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$ N yn 12 N a darganfyddwch yr onglau rhwng y grymoedd a rhwng pob grym a'r grym cydeffaith.
- 4 Fectorau safle dau bwynt A a B yw $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$ m a $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ m. Mae grym â maint 65 N yn gweithredu ar hyd $\vec{OA}$ ac mae grym â maint 12 N yn gweithredu ar hyd $\vec{OB}$. Darganfyddwch gydeffaith y grymoedd hyn.
- 5 Mae grym â maint 15 N sy'n gweithredu i gyfeiriad y fector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ yn gydeffaith dau rym sy'n gweithredu i gyfeiriadau'r fectorau $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ a $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Cyfrifwch y grymoedd hyn.
- 6 Mae gronyn mewn cydbwysedd gyda'r tri grym $\mathbf{P}$ N, $\mathbf{Q}$ N ac $\mathbf{R}$ N yn gweithredu arno. Darganfyddwch $\mathbf{R}$, yn nhermau'r fectorau unedol $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ar gyfer yr achosion canlynol
 - (a) $\mathbf{P} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{Q} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
 - (b) $\mathbf{P} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, $\mathbf{Q} = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
 - (c) $\mathbf{P} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{Q} = 7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
 - (d) $\mathbf{P} = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$.
- 7 Dadleoliad gronyn y mae grym $\mathbf{F}$ N yn gweithredu arno yw d m. Darganfyddwch y gwaith a wneir gan y grym yn y dadleoliad hwn pan fydd
 - (a) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $d = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
 - (b) $\mathbf{F} = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $d = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
 - (c) $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $d = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 - (d) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $d = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.
- 8 Mae gronyn yn symud gyda grym $\mathbf{F}$ N yn gweithredu arno o'r pwynt sydd â fector safle $\mathbf{a}$ m i'r pwynt sydd â fector safle $\mathbf{b}$ m. Darganfyddwch y gwaith a wneir pan fydd
 - (a) $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
 - (b) $\mathbf{F} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 12\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
 - (c) $\mathbf{F} = \mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
 - (d) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.
- 9 Effaith grym sy'n gweithredu ar ronyn yw:
 - (a) pan fo dadleoliad y gronyn yn $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$ m, y gwaith a wneir gan y grym yw -5 J,
 - (b) pan fo dadleoliad y gronyn yn $(7\mathbf{i} - 8\mathbf{j})$ m, y gwaith a wneir gan y grym yw 75 J. Darganfyddwch y grym.

6.2 Cinemateg

Mae fectorau yn arbennig o ddefnyddiol ar gyfer disgrifio mudiant mewn mwy nag un dimensiwn ac mae defnyddio nodiant fector yn darparu ffordd uniongyrchol o gyffredinoli'r cinemateg un dimensiwn a wnaethoch yn M1, Pennod 4.

Cyflymder, buanedd a chyflymiad

Nodir safle gronyn gan ei fector safle $\mathbf{r}$ mewn perthynas â lleolbwynt sefydlog a chyda gronyn symudol bydd $\mathbf{r}$ yn amrywio gydag amser. Diffinnir cyflymder $\mathbf{v}$ pwynt sydd â fector safle $\mathbf{r}$ gan

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

h.y. ei gyflymder yw'r fector gyda'r cydrannau cartesaidd $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ a $\frac{dz}{dt}$. Ar gyfer mudiant mewn dau ddimensiwn (h.y. $z = \text{cysonyn}$) mae hyn yn symleiddio i'r diffiniad a welsoch yn Adran 4.1.

Yn yr un modd, diffinnir $\mathbf{a}$, sef cyflymiad pwynt sydd â fector safle $\mathbf{r}$, gan

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

a chydrannau cartesaidd cyflymiad yw $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ a $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Buanedd gronyn yw maint ei gyflymder h.y. buanedd = v (neu $|\mathbf{v}|$) a

$$\text{buanedd} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Os yw'r fector safle yn hysbys, yna gellir darganfod y cyflymder a'r cyflymiad trwy ddifferu fel a ddisgrifiwyd yn adran 5.8. Hefyd, gellir darganfod y cyflymder trwy integru'r cyflymiad. Bydd yr integriad yn cyflwyno cysonyn mympwyol y gellir ei darganfod os yw'r cyflymder yn hysbys ar gyfer un gwerth t . Yn yr un modd, gellir darganfod y fector safle trwy integru'r cyflymder. Unwaith eto bydd yr integriad yn cyflwyno cysonyn mympwyol y gellir ei ddarganfod os yw'r fector safle yn hysbys ar gyfer un gwerth t . Dim ond cyffredinolli ar gyfer dau a thri dimensiwn y dulliau a ddefnyddiwyd gennych yn adran 4.5 llyfr M1 yw hyn.

Enghraifft 6.7

Darganfyddwch gyflymder, buanedd a chyflymiad gronyn o wybod, ar amser t s, fod

(a) $\mathbf{r} = (4t^2 \mathbf{i} + 6t^3 \mathbf{j})$ m, (b) $\mathbf{r} = (3 \cos 2t \mathbf{i} + 3 \sin 2t \mathbf{j} - 2t \mathbf{k})$ m.

(a) Mae differu $\mathbf{r}$ yn rhoi $\mathbf{v} = (8t \mathbf{i} + 18t^2 \mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ ac mae sgwario ac adio'r cydrannau yn dangos bod y buanedd yn $\sqrt{64t^2 + 324t^4} \text{ ms}^{-1}$.

Mae differu $\mathbf{v}$ yn rhoi $\mathbf{a} = (8 \mathbf{i} + 36t \mathbf{j}) \text{ ms}^{-2}$.

(b) Mae differu $\mathbf{r}$ yn rhoi $\mathbf{v} = (-6 \sin 2t \mathbf{i} + 6 \cos 2t \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ ac mae sgwario ac adio'r cydrannau yn dangos bod y buanedd yn

$$\sqrt{36 \sin^2 2t + 36 \cos^2 2t + 4} \text{ ms}^{-1} = \sqrt{40} \text{ ms}^{-1}.$$

Mae differu $\mathbf{v}$ yn rhoi $\mathbf{a} = (-12 \sin 2t \mathbf{i} - 12 \cos 2t \mathbf{j}) \text{ ms}^{-2}$.

Enghraifft 6.8

Darganfyddwch y cyflymder a'r fector safle o wybod bod

- (a) $\mathbf{a} = (12t \mathbf{i} + 80t^3 \mathbf{j}) \text{ ms}^{-2}$, ac ar $t = 0$, bod $\mathbf{v} = (3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$, $\mathbf{r} = (2\mathbf{i} + 11\mathbf{j}) \text{ m}$,
 (b) $\mathbf{a} = (6\mathbf{i} + 7e^{-t} \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}) \text{ ms}^{-2}$, ac ar $t = 0$, bod $\mathbf{v} = (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$,
 $\mathbf{r} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \text{ m}$.

- (a) Mae integru'r cyflymiad yn rhoi $\mathbf{v} = (6t^2 \mathbf{i} + 20t^4 \mathbf{j} + \mathbf{b}) \text{ ms}^{-1}$, lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson. Mae amnewid y gwerthoedd ar $t = 0$ yn rhoi $3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} = \mathbf{b}$ ac felly
 $\mathbf{v} = ((6t^2 + 3)\mathbf{i} + (20t^4 + 7)\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$.

Mae integru eto yn rhoi

$$\mathbf{r} = ((3t^3 + 3t)\mathbf{i} + (4t^5 + 7t)\mathbf{j} + \mathbf{c}) \text{ m, lle mae } \mathbf{c} \text{ yn fector cyson.}$$

Mae amnewid y gwerthoedd ar $t = 0$ yn rhoi $2\mathbf{i} + 11\mathbf{j} = \mathbf{c}$ ac felly

$$\mathbf{r} = ((3t^3 + 3t + 2)\mathbf{i} + (4t^5 + 7t + 11)\mathbf{j}) \text{ m.}$$

- (b) Mae integru'r cyflymiad yn rhoi $\mathbf{v} = (6t \mathbf{i} - 7e^{-t} \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k} + \mathbf{b}) \text{ ms}^{-1}$, lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson. Mae amnewid y gwerthoedd ar $t = 0$ yn rhoi

$$\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = -7\mathbf{j} + \mathbf{b} \text{ ac felly } \mathbf{b} = \mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ a}$$

$$\mathbf{v} = ((6t + 1)\mathbf{i} + (11 - 7e^{-t})\mathbf{j} + (3 + \sin t)\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}.$$

Mae integru eto yn rhoi

$$\mathbf{r} = ((3t^2 + t)\mathbf{i} + (11t + 7e^{-t})\mathbf{j} + (3t - \cos t)\mathbf{k} + \mathbf{c}) \text{ m,}$$

lle mae $\mathbf{c}$ yn fector cyson. Mae amnewid y gwerthoedd ar $t = 0$ yn rhoi

$$3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} = 7\mathbf{j} - \mathbf{k} + \mathbf{c} \text{ ac felly } \mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ ac}$$

$$\mathbf{r} = ((3t^2 + t + 3)\mathbf{i} + (11t - 6 + 7e^{-t})\mathbf{j} + (3t - 1 - \cos t)\mathbf{k}) \text{ m.}$$

Yn lle cyflwyno'r fectorau cyson, gallech integru bob tro o $t = 0$ i $t = t$.

Dylech geisio ail-wneud yr enghraifft, gan wneud hynny.

Problemau yn ymwneud â rhyng-gyfarfyddiad a'r pellter byrraf

Mae llawer o broblemau ymarferol lle mae angen darganfod y pellter byrraf rhwng dau gorff symudol, (e.e. awyrennau) neu ddarganfod a ydynt yn rhyng-gyfarfod. Er mwyn gwneud hyn, gellir darganfod y dadleoliad rhwng y ddau gorff a maint lleiaf y dadleoliad hwn, neu gellir darganfod yr amod ar gyfer rhyng-gyfarfyddiad. Gellir cael y dadleoliad oddi wrth fectorau safle'r cyrff. Rhoddir y rhain i chi, neu rhoddir y cyflymder neu'r cyflymiad. Yna gellir darganfod y fector safle trwy integriad fel a wnaed uchod. Y problemau hawsaf yw'r rhai lle mae'r gwrthrychau yn symud gyda chyflymder cyson. Os oes gan ronyn gyflymder cyson $\mathbf{V}$, yna mae

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}$$

ac mae integru yn rhoi $\mathbf{r} = \mathbf{V}t + \mathbf{b}$ lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson. Os $\mathbf{a}$ yw fector safle'r gronyn pan fo $t = 0$, mae'n dilyn bod $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ ac felly bod $\mathbf{r} = \mathbf{V}t + \mathbf{a}$.

Enghraifft 6.9

Ar amser $t = 0$, fectorau safle dau ronyn A a B yw $(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ m ac $(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ m yn ôl eu trefn. Cyflymderau A a B yw $(6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ ac $(8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ yn ôl eu trefn.

Dangoswch y bydd y gronynnau yn gwrthdaro.

Y cam cyntaf yw darganfod fectorau safle $\mathbf{r}_A$ m ac $\mathbf{r}_B$ m y gronynnau ar amser t s.

O'r canlyniad uchod, sef bod $\mathbf{r} = \mathbf{V}t + \mathbf{a}$, y fectorau safle hyn yw

$$\mathbf{r}_A = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + t(6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}), \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t(8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}).$$

Mae tynnu $\mathbf{r}_A$ o $\mathbf{r}_B$ yn rhoi

$$\vec{\mathbf{AB}} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + t(2\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

Ar gyfer rhyng-gyfarfyddiad mae angen i'r ddwy gydran ddiflannu ac mae hyn yn digwydd ar $t = 2$.

Enghraifft 6.10

Ar amser $t = 0$, fectorau safle dau ronyn A a B yw $(3\mathbf{i} + 6\mathbf{k})$ m a $(2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ m yn ôl eu trefn. Cyflymderau A a B yw $(3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ a $(b\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ yn ôl eu trefn.

Darganfyddwch werthoedd a a b os yw'r gronynnau yn gwrthdaro.

Mae defnyddio $\mathbf{r} = \mathbf{V}t + \mathbf{a}$ yn rhoi fectorau safle'r gronynnau, sef $\mathbf{r}_A$ m ac $\mathbf{r}_B$ m, ar amser t eiliad fel

$$\mathbf{r}_A = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{k} + t(3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}), \quad \mathbf{r}_B = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(b\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 11\mathbf{k}).$$

Mae tynnu $\mathbf{r}_A$ o $\mathbf{r}_B$ yn rhoi

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{AB}} &= -\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 4\mathbf{k} + t(b\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}), \\ &= (bt - 1)\mathbf{i} + (a + 3t)\mathbf{j} + 4(t - 1)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ar gyfer rhyng-gyfarfyddiad mae angen i bob cydran ddiflannu. Mae cydran $\mathbf{k}$ yn diflannu pan fydd $t = 1$ a chydrannau $\mathbf{j}$ ac $\mathbf{i}$ bryd hynny yw $3 + a$ a $b - 1$.

Mae gwrthdrawiad felly yn digwydd os yw $b = 1$ ac $a = -3$.

Enghraifft 6.11

Ar amser $t = 0$, fectorau safle dau ronyn A a B yw $(11\mathbf{i} + 7\mathbf{j})$ m a $(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$ m yn ôl eu trefn. Cyflymderau A a B yw $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ a $(5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ yn ôl eu trefn.

Darganfyddwch pryd y bydd y gronynnau agosaf at ei gilydd a chanfyddwch y pellter byrraf rhyngddynt.

Fectorau safle'r gronynnau, sef $\mathbf{r}_A$ m ac $\mathbf{r}_B$ m, ar amser t eiliad yw

$$\mathbf{r}_A = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + t(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}), \quad \mathbf{r}_B = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + t(5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}).$$

Mae tynnu $\mathbf{r}_A$ o $\mathbf{r}_B$ yn rhoi

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{AB}} &= -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + t(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}), \\ &= (3t - 8)\mathbf{i} + (4t - 2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Felly rhoddir AB^2 , sgwâr y pellter rhyngddynt, gan

$$AB^2 = (3t - 8)^2 + (4t - 2)^2.$$

Nawr mae angen darganfod gwerth lleiaf AB^2 . Gellir gwneud hyn trwy ddefnyddio calcwlws neu drwy ehangu a chwblhau'r sgwâr. Mae defnyddio calcwlws yn golygu ychydig llai o algebra ac nid oes angen ehangu cyn differu.

$$\frac{dAB^2}{dt} = 6(3t - 8) + 8(4t - 2) = 50t - 64 = 0.$$

Felly $t = 1.28$ a'r pellter byrraf rhyngddynt yw 5.2 m.

Nid oes angen gwirio bod gennych werth lleiaf gan fod AB^2 yn tueddu at anfeidredd gyda t positif a negatif, ac felly wrth ei blotio yn erbyn t byddech yn cael parabola â'r fertig tuag i lawr ac felly isafbwynt yw'r pwynt sefydlog.

Enghraifft 6.12

Fectorau safle dau ronyn A a B ar amser $t = 0$ yw $(5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ m a $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ m yn ôl eu trefn. Cyflymderau A a B yw $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$ ms^{-1} a $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$ ms^{-1} yn ôl eu trefn. Darganfyddwch werth t pan fydd y gronynnau agosaf at ei gilydd a'r pellter byrraf rhyngddynt.

Rhoddir fectorau safle'r gronynnau, sef r_A m ac r_B m, ar amser t eiliad gan

$$r_A = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}),$$

$$r_B = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}).$$

Mae tynnu r_A o r_B yn rhoi

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= (2t - 2)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j} + (3t - 3)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Felly rhoddir AB^2 , sef y pellter rhyngddynt wedi'i sgwario, gan

$$AB^2 = (2t - 2)^2 + (2t - 5)^2 + (3t - 3)^2.$$

Mae differu yn rhoi

$$\frac{dAB^2}{dt} = 4(2t - 2) + 4(2t - 5) + 6(3t - 3) = 34t - 46 = 0.$$

Felly $t = 1.35$ a'r pellter byrraf rhyngddynt yw 2.62 m.

Cyflymder cydeffaith

Mewn rhai amgylchiadau, achosir mudiant gronyn gan ddau neu ragor o achosion annibynnol. Un enghraifft yw glaw yn disgyn. Yn yr achos hwn gellir ystyried mudiant y diferyn glaw fel cyfuniad mudiant a achosir gan ddisgyrchiant a mudiant a achosir gan y gwynt. Bydd y ddau achos yn achosi cyflymder unigol, a'r gwir gyflymder, h.y. y cyflymder cydeffaith, fydd swm fector y cyflymderau unigol hyn. Enghraifft arall yw awyren sy'n cychwyn ar gwrs penodol gyda chyflymder a roddir. Os oes gwynt, gwir gyflymder yr awyren yw cydeffaith y cyflymder ar y cwrs penodedig a chyflymder y gwynt. Bydd felly yn mynd gyda'r gwynt o'r llwybr a

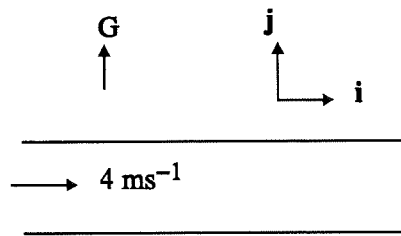
fwriadwyd ac fel rheol bydd y peilot yn addasu'r llwybr y mae'n ei osod er mwyn cymryd effaith y gwynt i ystyriaeth.

Enghraifft 6.13

Mae afon, lled 40 m, yn llifo o'r gorllewin i'r dwyrain ar fuanedd 4 ms^{-1} . Mae cwch modur, sy'n ceisio croesi'r afon o'r lan ddeheuol, yn symud ar fuanedd 6 ms^{-1} mewn dŵr llonydd.

Mae'r cwch yn cael ei lywio yn berpendicwlar i'r glannau fel bod ei wir gyflymder yn gydeffaith cyflymder yr afon a chyflymder o 6 ms^{-1} yn syth ar draws yr afon.

Darganfyddwch ba mor bell i lawr yr afon y mae'r cwch yn glanio.



Dangosir y sefyllfa yn y diagram, lle mae $\mathbf{i}$ yn dynodi'r fector unedol o'r gorllewin i'r dwyrain a $\mathbf{j}$ yn dynodi'r fector unedol o'r de i'r gogledd.

Y cyflymder o 6 ms^{-1} yn syth ar draws yr afon yw $6\mathbf{j} \text{ ms}^{-1}$.

Cyflymder y cwch felly yw cydeffaith $6\mathbf{j} \text{ ms}^{-1}$ a $4\mathbf{i} \text{ ms}^{-1}$, sef $(4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$.

Ar amser t s ar ôl gadael y pwynt dechreuol, dadleoliad y cwch o'r pwynt dechreuol yw $(4\mathbf{i} + 6\mathbf{j})t$ m.

Bydd y cwch wedi cyrraedd y lan gyferbyn pan fydd cydran $\mathbf{j}$ y dadleoliad yn 40 m ac felly yr amser a gymerir i groesi yw $\frac{40}{6} \text{ s} = 6.67 \text{ s}$.

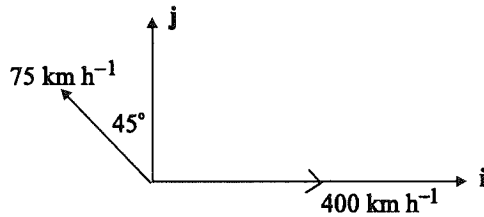
Pellter y pwynt glanio i lawr yr afon yw cydran $\mathbf{i}$ y dadleoliad, sef

$$4 \times 6.67 \text{ m} = 26.7 \text{ m}.$$

Enghraifft 6.14

Mae awyren yn cychwyn gan hedfan yn syth i'r dwyrain ar fuanedd 400 km awr^{-1} gyda'r bwriad o gyrraedd cyrchfan 1600 km i ffwrdd ymhen 4 awr. Mae gwynt yn chwythu ar 75 km awr^{-1} o'r de ddwyrain.

- Os nad yw'r peilot yn addasu'r cwrs, darganfyddwch ba mor bell y bydd yr awyren o'i chyrchfan ar ôl hedfan am 4 awr.
- Darganfyddwch y cwrs y byddai'n rhaid i'r peilot ei ddilyn er mwyn hedfan yn syth i'r cyrchfan a chyfrifwch amser y daith.



- (a) Yn y cwestiwn hwn, ni roddir fectorau unedol ac felly y cam cyntaf yw dewis rhai priodol. Mae'r diagram yn dangos fectorau unedol $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ i'r dwyrain a'r gogledd yn ôl eu trefn. Cyflymder yr awyrennau ar y cwrs a osodir i'r dwyrain yw $400 \mathbf{i}$ km awr⁻¹. Cyflymder y gwynt yw $75(-\cos 45^\circ \mathbf{i} + \sin 45^\circ \mathbf{j})$ km awr⁻¹. Cyflymder cydeffaith yr awyren felly yw $((400 - 75 \cos 45^\circ) \mathbf{i} + 75 \sin 45^\circ \mathbf{j})$ km awr⁻¹. Ymhen pedair awr felly ei dadleoliad o'i safle gwreiddiol fydd

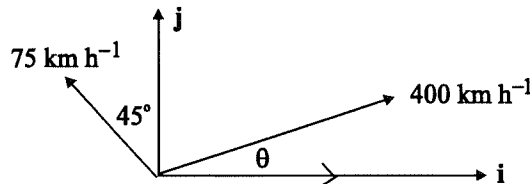
$$4 \times ((400 - 75 \cos 45^\circ) \mathbf{i} + 75 \sin 45^\circ \mathbf{j}) \text{ km.}$$

Dadleoliad y cyrchfan o'r pwynt cychwynnol yw $1600 \mathbf{i}$ km ac felly dadleoliad yr awyren o'i chyrchfan yw

$$\begin{aligned} & \{4 \times ((400 - 75 \cos 45^\circ) \mathbf{i} + 75 \sin 45^\circ \mathbf{j}) - 1600 \mathbf{i}\} \text{ km} \\ & = 300(-\cos 45^\circ \mathbf{i} + \sin 45^\circ \mathbf{j}) \text{ km.} \end{aligned}$$

Maint y dadleoliad hwn yw tua 424 km.

(b)



Yn yr achos hwn, mae'r cwrs a osodir ar gyfer yr awyren yn anhysbys a chymerir, fel yn y diagram, ei fod ar ongl θ i'r gogledd o'r dwyrain. Gan fod cydran y gwynt yn chwythu i'r gogledd, mae'n ymddangos y bydd yr awyren yn cael ei chwythu ymhellach fyth o'i chwr. Fodd bynnag, nid oes yn rhaid i θ fod yn bositif ac mewn gwirionedd mae'n gweithio allan yn negatiff. Felly gellid osgoi arwydd negatiff trwy ddefnyddio synnwyr cyffredin a chymryd bod y cwrs a osodir i'r de o'r dwyrain! Felly cyflymder yr awyren ar y cwrs a osodir yw

$$400(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \text{ km awr}^{-1}.$$

Y cyflymder cydeffaith felly yw

$$((400 \cos \theta - 75 \cos 45^\circ) \mathbf{i} + (400 \sin \theta + 75 \cos 45^\circ) \mathbf{j}) \text{ km awr}^{-1}.$$

Mae'n rhaid i'r cyflymder cydeffaith fod i gyfeiriad y dwyrain ac felly

$$400 \sin \theta + 75 \cos 45^\circ = 0,$$

sy'n rhoi $\theta = -7.6^\circ$, gyda'r arwydd negatiff a ragwelwyd. Mae amnewid am θ yn rhoi'r cyflymder cydeffaith yn 343 km awr^{-1} i'r dwyrain ac felly amser y daith yw 4.66 awr.

Ymarferion 6.2

- 1 Fector safle gronyn symudol ar amser t s yw $\mathbf{r}$ m. Darganfyddwch gyflymiad y gronyn yn yr achosion canlynol:
 (a) $\mathbf{r} = 7t^3 \mathbf{i} + 4t^2 \mathbf{j}$, (b) $\mathbf{r} = 4e^{-t} \mathbf{i} + 2e^{2t} \mathbf{j}$, (c) $\mathbf{r} = t \mathbf{i} - 8t^2 \mathbf{j} + 14t^3 \mathbf{k}$
 (d) $\mathbf{r} = e^{4t} \mathbf{i} - 8e^t \mathbf{j} + 14 \cos t \mathbf{k}$.
- 2 Cyflymder gronyn ar amser t s yw $(6t^2 \mathbf{i} + 10t \mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ ac mae ar bwynt O pan fydd $t = 0$. Darganfyddwch ei ddadleoliad o O pan fydd $t = 3$.
- 3 Cyflymiad gronyn ar amser t s yw $(5t^4 \mathbf{i} - 8t^3 \mathbf{j}) \text{ ms}^{-2}$ a'i gyflymder yw $(6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ pan fydd $t = 1$.
 Darganfyddwch gyflymder y gronyn pan fydd $t = 2$.
- 4 Ar $t = 0$ mae gronyn P yn ddisymud ar y pwynt gyda fector safle $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ m mewn perthynas â phwynt sefydlog O .
 Cyflymiad y gronyn yw $(2t \mathbf{i} + 12t^2 \mathbf{j} - 16t^3 \mathbf{k}) \text{ ms}^{-2}$. Darganfyddwch bellter y gronyn o O pan fydd $t = 1$.
- 5 Cyflymiad gronyn ar amser t s yw $(2\mathbf{i} + 4t \mathbf{j} - 6t^2 \mathbf{k}) \text{ ms}^{-2}$ a'i gyflymder yw $(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ pan fydd $t = 1$.
 Darganfyddwch fuanedd y gronyn pan fydd $t = 2$.
- 6 Ar amser t eiliad mae gronyn yn symud gyda chyflymder $(2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4t^3 \mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ ac ar amser $t = 0$ mae ar y pwynt gyda fector safle $(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ m. Darganfyddwch y pellter rhwng safleoedd y gronyn ar $t = 1$ a $t = 2$.
- 7 Am hanner dydd, fectorau safle dau gwch A a B , mewn perthynas â phwynt sefydlog, yw $(900\mathbf{i} + 600\mathbf{j})$ m a $(600\mathbf{i} + 810\mathbf{j})$ m yn ôl eu trefn, lle mae $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ yn fectorau unedol i'r gogledd a'r dwyrain yn ôl eu trefn.
 Cyflymder cwch A yw $(12\mathbf{i} + 16\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ a chyflymder cwch B yw $(15\mathbf{i} + 10\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch (a) fector $\vec{AB}$ ar amser t eiliad ar ôl hanner dydd, (b) yr amser pan fydd y ddau gwch agosaf at ei gilydd a'r pellter byrraf rhyngddynt.
- 8 Mae llong ryfel yn gweld llong arall ar bwynt gyda fector safle $600(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$ m mewn perthynas â hi ac yn symud gyda chyflymder $5\mathbf{j} \text{ ms}^{-1}$. Mae'r llong ryfel yn newid ei chwrs fel ei bod yn symud gyda buanedd $v \text{ ms}^{-1}$ i gyfeiriad y fector $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Darganfyddwch werth v a fydd yn sicrhau bod y llong ryfel yn rhyng-gyfarfod â'r llong arall, a'r amser cyn y rhyng-gyfarfyddiad.
- 9 Cyflymderau dau ronyn A a B yw $(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ a $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ yn ôl eu trefn. Ar ennyd penodol, fector safle B mewn perthynas ag A yw $(8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$ m. Dangoswch y bydd y gronynnau yn gwrthdaro.
- 10 Cyflymderau dwy awyren A a B yw $(210\mathbf{i} - 50\mathbf{j}) \text{ km awr}^{-1}$ a $(150\mathbf{i} + 250\mathbf{j} + 60\mathbf{k}) \text{ km awr}^{-1}$ yn ôl eu trefn. Ar ennyd penodol, fectorau safle A a B mewn perthynas â thŵr rheoli yw $(10\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \text{ km}$ a $(-20\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \text{ km}$. Darganfyddwch y fector $\vec{AB}$ ar amser t awr yn ddiweddarach a'r amser a gymerir nes i'r awyrennau fod fwyaf agos at ei gilydd.

- 11 Mae awyren yn hedfan yn syth i'r de ar 280 km awr⁻¹ mewn gwynt croes yn chwythu i'r gorllewin ar 25 km awr⁻¹. Darganfyddwch gyflymder cydeffaith yr awyren.
- 12 Mae cwch yn hwylio ar fuanedd 2 ms⁻¹ yn syth i'r gorllewin mewn cerrynt sy'n llifo i'r gogledd ddwyrain ar gyfradd 1 ms⁻¹. Darganfyddwch gyflymder cydeffaith y cwch.
- 13 Mae dyn, sy'n gallu nofio ar fuanedd 2 ms⁻¹ mewn dŵr llonydd, yn dymuno nofio yn syth ar draws afon i'r lan arall, sef pellter o 20 m. Mae'r afon yn llifo gyda buanedd 1.25 ms⁻¹. Darganfyddwch ar ba ongl i'r lan y dylai nofio a'r amser a gymer i groesi'r afon.

6.3 Dynameg

Gellir mynegi ail ddeddf Newton (h.y. grym = màs × cyflymiad) mewn ffordd gryno trwy ddefnyddio nodiant fector. Hafaliad mudiant gronyn, màs m , dan weithrediad grym F , yw

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F,$$

lle mae $\mathbf{r}$ yn dynodi fector safle'r gronyn. Ar gyfer gronyn symudol, os gellir darganfod $\mathbf{r}$ trwy arsylwi, yna gellir darganfod cyflymiad y gronyn trwy ddifferu $\mathbf{r}$ a byddai hyn yn ein galluogi i gyfrifo'r grym sy'n cynhyrchu'r mudiant o hafaliad y mudiant. Neu fel arall, os yw'r grym yn hysbys, yna gellir defnyddio hafaliad y mudiant i ganfod $\mathbf{r}$. Os rhoddir F yn nhermau t , yna gellir darganfod $\mathbf{r}$ trwy integriad fel yn adran 5.8. Pan fydd y grym (ac felly y cyflymiad) yn gyson, ceir achos arbennig o syml.

Mudiant dan rym cyson

Os yw F yn gyson, yna gellir integru'r hafaliad uchod yn uniongyrchol trwy ddefnyddio rheol (vii) yn adran 5.8 ac mae hyn yn rhoi

$$m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = F\mathbf{t} + \mathbf{c},$$

lle mae $\mathbf{c}$ yn fector cyson. Os yw'r cyflymder (h.y. $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$) yn hafal i $\mathbf{v}$ ar $t = 0$, yna mae amnewid yn rhoi $\mathbf{c} = m\mathbf{v}$. Mae integru eto yn rhoi

$$m\mathbf{r} = \frac{1}{2}Ft^2 + m\mathbf{v}t + \mathbf{b},$$

lle mae $\mathbf{b}$ yn fector cyson. Os yw'r gronyn ar y pwynt gyda fector safle $\mathbf{R}$ ar $t = 0$, yna mae amnewid $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ a $t = 0$ yn rhoi $\mathbf{b} = m\mathbf{R}$. Felly rhoddir $\mathbf{r}$ gan

$$\mathbf{r} = \frac{F}{2m}t^2 + \mathbf{v}t + \mathbf{R}.$$

Gellir cymhwyso'r canlyniad hwn i fudiant gronyn dan ddisgyrchiant lle mae $F = -mg\mathbf{j}$, lle mae $\mathbf{j}$ yn cynrychioli'r fector unedol yn fertigol ar i fyny. Os teflir gronyn gyda buanedd V ar ongl α i'r llorwedd, yna mae $\mathbf{v} = V \cos \alpha \mathbf{i} + V \sin \alpha \mathbf{j}$, lle

mae $\mathbf{i}$ yn fector unedol llorweddol. Felly ar gyfer gronyn a deflir o'r lleolbwynt (fel bod $\mathbf{R} = \mathbf{0}$),

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + V(\cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j})t.$$

Gan fod $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, dyma'r hafaliadau a gafwyd gynt yn Adran 5.2.

Gellir integru'r hafaliadau mudiant mewn modd tebyg pryd bynnag y bo'r grym yn ddibynnol ar t yn unig.

Enghraifft 6.15

Ar amser t s, fector safle gronyn symudol gyda màs 0.3 kg yw $(7t^2\mathbf{i} + 3t^4\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k})$ m. Darganfyddwch y grym sy'n gweithredu ar y gronyn.

I ddarganfod y grym mae angen darganfod y cyflymiad. Mae differu'r fector safle unwaith yn rhoi'r cyflymder fel $(14t\mathbf{i} + 12t^3\mathbf{j} + 6t^2\mathbf{k})$ ms⁻¹, ac mae differu'r cyflymder yn rhoi'r cyflymiad fel $(14\mathbf{i} + 36t^2\mathbf{j} + 12t\mathbf{k})$ ms⁻².

Mae lluosgi hyn â 0.3 yn rhoi'r grym fel $(4.2\mathbf{i} + 10.8t^2\mathbf{j} + 3.6t\mathbf{k})$ N.

Enghraifft 6.16

Mae gronyn sydd â'i fâs yn 0.25 kg yn symud dan effaith grym a roddir gan $(3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 10t^3\mathbf{k})$ N ar amser t s. Ar $t = 0$, mae'r gronyn ar y pwynt gyda fector safle $(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k})$ m ac mae'n symud gyda chyflymder $(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ ms⁻¹. Darganfyddwch y fector safle yn nhermau t .

Hafaliad y mudiant yw

$$0.25 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 10t^3\mathbf{k},$$

lle dynodir y fector safle gan $\mathbf{r}$ m, ac felly

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 12t\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 40t^3\mathbf{k}.$$

Mae integru hyn yn rhoi $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 6t^2\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + 10t^4\mathbf{k} + \mathbf{c}$, lle mae $\mathbf{c}$ yn fector cyson.

Mae amnewid $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ar gyfer $t = 0$ yn dangos bod

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Mae integru unwaith eto yn rhoi

$$\mathbf{r} = 2t^3\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + 2t^5\mathbf{k} + (\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k})t + \mathbf{b}, \text{ lle mae } \mathbf{b} \text{ yn fector cyson.}$$

Mae amnewid $t = 0$ yn y mynegiad ar gyfer $\mathbf{r}$ a defnyddio'r fector safle a roddir ar $t = 0$ yn dangos bod $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

Enghraifft 6.17

Y grym sy'n gweithredu ar ronyn ar amser t s yw $(36t^2\mathbf{i} + 120t^4\mathbf{j} + 24\mathbf{k})$ N. Mae'r gronyn yn ddisymud ar O ar amser $t = 0$ a phan fydd $t = 1$ mae'r gronyn ar bellter o 26 m oddi wrth O . Darganfyddwch fâs y gronyn.

Os dynodir màs y gronyn gan m kg ac os dynodir ei fector safle gan $\mathbf{r}$ m, yna mae deddf Newton yn rhoi

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = 36t^2 \mathbf{i} + 120t^4 \mathbf{j} + 24\mathbf{k}.$$

Mae integru'r hafaliad hwn yn rhoi

$$m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 12t^3 \mathbf{i} + 24t^5 \mathbf{j} + 24t \mathbf{k} + \mathbf{b}, \text{ lle mae } \mathbf{b} \text{ yn fector cyson.}$$

Gan fod y cyflymder yn sero ar $t = 0$, mae'n dilyn bod $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Mae integru eto yn rhoi

$$m\mathbf{r} = 3t^4 \mathbf{i} + 4t^6 \mathbf{j} + 12t^2 \mathbf{k} + \mathbf{c}, \text{ lle mae } \mathbf{c} \text{ yn fector cyson.}$$

Gan fod $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ar $t = 0$, mae'n dilyn bod $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Felly ar gyfer $t=1$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m} (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}).$$

Felly

$$r = \frac{1}{m} \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \frac{13}{m} = 26,$$

ac felly màs y gronyn yw 0.5 kg.

Mae nodiant fector hefyd yn ein galluogi i gyffredinolli'r syniadau o ergyd, momentwm, pŵer ac egni i fudiant mewn dau a thri dimensiwn.

Momentwm ac ergyd

Diffinnir momentwm gronyn gyda màs m fel lluoswm ei fâs a'i gyflymder, h.y.

$$\text{Momentwm} = m \mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Felly, mae momentwm yn fector.

Mae ergyd hefyd yn cael ei diffinio yn yr un modd yn y bôn ag mewn un dimensiwn, sef fel integryn grym. Diffinnir ergyd grym $\mathbf{F}$ yn gweithredu am amser T gan

$$\text{Ergyd} = \int_0^T \mathbf{F} dt.$$

Felly mae ergyd hefyd yn fector.

Os yw'r grym yn gyson, yna mae'r integryn yn dod yn $\mathbf{F}T$. H.y., ergyd grym cyson yw lluoswm y grym a'r amser y mae'n gweithredu.

Enghraifft 6.18

Darganfyddwch ergyd

- (a) y grym $(2t \mathbf{i} + 5t^4 \mathbf{j})$ N yn gweithredu am $0 \leq t \leq 1$,
 (b) y grym $(4\mathbf{i} - 3t^2 \mathbf{j} + 6t \mathbf{k})$ N yn gweithredu am $0 \leq t \leq 2$.

$$(a) \text{ Ergyd} = \int_0^1 (2t \mathbf{i} + 5t^4 \mathbf{j}) dt \text{ Ns} = (t^2 \mathbf{i} + t^5 \mathbf{j}) \Big|_{t=0}^{t=1} \text{ Ns} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ Ns}.$$

$$(b) \text{ Ergyd} = \int_0^2 (4\mathbf{i} - 3t^2 \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}) dt \text{ Ns} = (8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \text{ Ns}.$$

Egwyddor momentwm ergyd

Mae integru

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F},$$

o $t = 0$ i $t = T$ yn rhoi

$$\left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t=T} - \left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t=0} = \int_0^T \mathbf{F} dt.$$

Yr ochr chwith yw'r newid mewn momentwm o $t = 0$ i $t = T$ a'r ochr dde yw'r ergyd. Felly mae'r diffiniadau uchod yn sicrhau bod egwyddor momentwm ergyd yn dal yn wir ar gyfer mudiant mewn dau a thri dimensiwn.

Enghraifft 6.19

Mae gronyn gyda màs 0.3 kg yn symud gyda chyflymder $(2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ ac yn cael ei daro'n sydyn fel bod ei gyflymder yn newid i $(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch yr ergyd a roddir yn ystod y trawiad.

Mae'r ergyd yn hafal i'r newid mewn momentwm, sef

$$0.3(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}) \text{ Ns} = (0.6\mathbf{i} - 0.9\mathbf{j}) \text{ Ns}.$$

Enghraifft 6.20

Rhoddir ergyd $(6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 16\mathbf{k}) \text{ Ns}$ i ronyn gyda màs 0.25 kg sy'n symud gyda chyflymder $(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch gyflymder y gronyn ar ôl i'r ergyd gael ei rhoi.

Os dynodir y cyflymder sydd ei angen gan $\mathbf{v} \text{ ms}^{-1}$, yna mae egwyddor momentwm ergyd yn rhoi

$$0.25(\mathbf{v} - 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

ac felly

$$\mathbf{v} = 26\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 57\mathbf{k}.$$

Egni cinetig

Diffinnir egni cinetig, yn union fel mewn un dimensiwn, fel hanner lluoswm y màs a sgwâr y buanedd. Felly rhoddir egni cinetig gronyn, màs m , sy'n symud ar gyflymder v gan

$$\text{Egni cinetig} = \frac{1}{2}mv^2 \text{ (h.y. } \frac{1}{2}m|v|^2\text{)}.$$

Enghraifft 6.21

Darganfyddwch egni cinetig gronyn, màs 0.2 kg, sy'n symud gyda chyflymder $(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$.

Yr egni cinetig yw

$$\frac{1}{2} \times 0.2 \times (2^2 + 4^2 + 7^2) \text{ J} = 6.9 \text{ J}.$$

Enghraifft 6.22

Darganfyddwch egni cinetig gronyn, màs 0.4 kg, sy'n symud ar amser t s gyda chyflymder $(4t\mathbf{i} + 5t^2\mathbf{j} - 7t^3\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$.

Sgwâr y buanedd yw swm sgwariau'r cydrannau ac felly yr egni cinetig yw

$$\frac{1}{2} \times 0.4 (16t^2 + 25t^4 + 49t^6) \text{ J} = (3.2t^2 + 5t^4 + 9.8t^6) \text{ J}.$$

Enghraifft 6.23

Darganfyddwch egni cinetig gronyn, màs 0.8 kg, y mae ei fector safle ar amser t eiliad yn $(6t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} - 7\cos t\mathbf{k}) \text{ m}$.

Y cam cyntaf yw differu'r fector safle i ddarganfod y cyflymder; mae hyn yn rhoi'r cyflymder fel $(6\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + 7\sin t\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$.

Yr egni cinetig felly yw

$$\frac{1}{2} \times 0.8 (36 + 64t^2 + 49\sin^2 t) \text{ J} = (14.4 + 25.6t^2 + 19.6\sin^2 t) \text{ J}.$$

Pŵer

Cyffredinoliad diffiniad pŵer yw bod y pŵer a ddatblygir gan rym F wrth i'w bwynt gweithredu symud gyda chyflymder v yn cael ei fynegi gan

$$\text{Pŵer} = F \cdot v.$$

Cyfradd gwneud gwaith yw pŵer, o'i ddiffinio fel hyn hefyd. Mae angen mwy of fathemateg bur nag a gynhwysir yn eich cwrs i ddiffinio gwaith a wneir mewn mwy nag un dimensiwn, ac felly ni allwch brofi bod y diffiniad hwn yn dangos pŵer fel

cyfradd gweithio. Gan mai cyfradd gwneud gwaith yw pŵer, bydd integru'r pŵer rhwng dau werth ar gyfer t yn rhoi cyfanswm y gwaith a wneir yn y cyfwng amser hwnnw.

Enghraifft 6.24

Ar amser t s, fector safle gronyn sy'n symud yw $(4t \mathbf{i} + 0.6t^2 \mathbf{j} - 0.25(t^3 - 1)\mathbf{k})$ m. Darganfyddwch y pŵer a ddatblygir pan fydd $t = 4$ gan y grym $(10\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 20\mathbf{k})$ N yn gweithredu ar y gronyn.

Cyflymder y gronyn ac felly cyflymder pwynt gweithredu'r grym yw $(4\mathbf{i} + 1.2t \mathbf{j} - 0.75t^2 \mathbf{k})$ ms⁻¹.

Y pŵer yw lluoswm sgalar y cyflymder a'r grym, sef $(10 \times 4 - 20 \times 1.2t + 15t^2)$ W.

Mae hyn, ar $t = 4$, yn hafal i 184 W.

Enghraifft 6.25

Darganfyddwch y pŵer a ddatblygir gan y grym yn Enghraifft 5.22.

Y cam cyntaf yw cyfrifo'r grym ac mae hyn, yn ei dro, yn golygu darganfod y cyflymiad.

Mae differu'r cyflymder yn rhoi'r cyflymiad, sef $(4\mathbf{i} + 10 \mathbf{j} - 21t^2 \mathbf{k})$ ms⁻², ac felly y grym yw

$$0.4 \times (4\mathbf{i} + 10t \mathbf{j} - 21t^2 \mathbf{k}) \text{ N} = (1.6\mathbf{i} + 4t \mathbf{j} - 8.4t^2 \mathbf{k}) \text{ N}.$$

Felly, y pŵer yw

$$(1.6 \times 4t + 4t \times 5t^2 + (-8.4 t^2) \times (-7t^3)) \text{ W} = (6.4t + 20t^3 + 58.8t^5) \text{ W}.$$

Yr egwyddor gwaith-egni

Ail ddeddf Newton, ar gyfer gronyn â màs m sy'n symud ar gyflymder $\mathbf{v}$ dan weithrediad grym $\mathbf{F}$, yw

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Mae darganfod lluoswm sgalar dwy ochr yr hafaliad hwn gyda $\mathbf{v}$ yn rhoi

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Mae'r rheol ar gyfer differu'r lluoswm sgalar yn dangos bod

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt}.$$

Mae defnyddio'r unfathiant hwn yn yr hafaliad blaenorol yn rhoi

$$m \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Yr hafaliad hwn, mewn geiriau, yw

Cyfradd newid egni cinetig = pŵer.

Gellir gweld bod differu'r egni cinetig yn Enghraifft 5.22 yn rhoi'r pŵer a gafwyd yn Enghraifft 5.25. Gan mai pŵer yw'r gyfradd gwneud gwaith, W , gellir ysgrifennu'r hafaliad hefyd fel

$$\frac{d(\text{K.E.})}{dt} = \frac{dW}{dt}.$$

Mae integru'r hafaliad hwn rhwng unrhyw ddau werth ar gyfer t yn rhoi

Newid mewn egni cinetig = Newid mewn W = Gwaith a wneir.

Dyma un ffurf ar yr egwyddor gwaith-egni.

Cyfrifo'r gwaith a wneir

Gan nad yw'r fathemateg y mae ei hangen i gyfrifo'r gwaith a wneir yn uniongyrchol yn rhan o'r cwrs hwn, mae angen defnyddio dull anuniongyrchol. Mae dau ddull cyfatebol ar gael.

Un dull yw darganfod y pŵer a'i integru. Y llall yw defnyddio'r ffurf ar yr egwyddor gwaith-egni uchod a chanfod y newid mewn egni cinetig. Gellir cymhwyso'r dull cyntaf bob tro; ni ellir cymhwyso'r ail ond i ganfod y gwaith a wneir gan gyfanswm y grym sy'n gweithredu ar y gronyn.

Enghraifft 6.26

Cyflymder ar amser t eiliad pwynt gweithrediad y grym $(7\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - 8t^2\mathbf{k})$ N yw $(2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 10t^2\mathbf{k})$ ms⁻¹.

Darganfyddwch y gwaith a wneir gan y grym yn y cyfwng amser $0 \leq t \leq 1$.

Y pŵer a ddatblygir gan y grym yw

$$(2t \times 7 + 4 \times 6t + (-10t^2) \times (-8t^2)) \text{ W} = (38t + 80t^4) \text{ W}.$$

Y gwaith a wneir yn y cyfwng amser felly yw

$$\int_0^1 (38t + 80t^4) dt \text{ J} = 35 \text{ J}.$$

Enghraifft 6.27

Mae gronyn, màs 0.6 kg, yn symud ar gyflymder $(5t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - 7\mathbf{k})$ ms⁻¹ ar amser t s.

Darganfyddwch y gwaith a wneir yn y cyfwng $0 \leq t \leq 1$ gan y grym sy'n gweithredu ar y gronyn.

Gan fod angen darganfod y gwaith a wneir gan gyfanswm y grym sy'n gweithredu ar y gronyn, gellir gwneud hyn trwy ddefnyddio'r newid mewn egni cinetig.

Yr egni cinetig yw $0.3(25t^4 + 36t^2 + 49)$ J. Y newid yn yr egni cinetig hwn o $t = 0$ i $t = 1$ yw 18.3 J.

Os ydych am ddefnyddio'r pŵer i ddarganfod y gwaith a wneir, mae angen i chi ddarganfod y cyflymiad ac yna'r grym gyntaf. Mae differu'r cyflymder yn dangos bod y cyflymiad yn $(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \text{ ms}^{-2}$ sy'n rhoi'r grym fel $(6\mathbf{i} + 3.6\mathbf{j})$ N. Felly y pŵer yw $(30t^3 + 21.6t)$ J. Mae integru hyn o $t = 0$ i $t = 1$ yn rhoi 18.3 J.

Cadwraeth egni

Mae'r syniad o egni potensial ar gyfer grymoedd mewn dau a thri dimensiwn yn gymhleth a thu hwnt i'r fathemateg a wnaed gennych. Serch hynny, gallwch ddiffinio'r egni potensial sy'n gysylltiedig â disgyrchiant ac â sbring syth.

Os diffinnir cyfanswm yr egni fel yr egni cinetig + yr egni potensial o ganlyniad i ddisgyrchiant a'r grym mewn sbring, gellir dangos bod

Newid yng nghyfanswm yr egni = Gwaith a wneir gan bob grym arall.

Ymarferion 6.3

- Ar amser t eiliad, y grym sy'n gweithredu ar ronyn gyda màs m kg yw F N ac ar amser $t = T$ mae'r gronyn yn symud gyda chyflymder $\mathbf{v}$ ms^{-1} ar bwynt gyda fector safle $\mathbf{R}$ m. Darganfyddwch fector safle'r gronyn ar amser t s ar gyfer
 - $m = 0.4$, $F = e^{-t} \mathbf{i} + 6t^3 \mathbf{j}$, $T = 0$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{R} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$,
 - $m = 0.2$, $F = 6t \mathbf{i} + 12t^2 \mathbf{j}$, $T = 1$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\mathbf{R} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j}$,
 - $m = 0.5$, $F = \mathbf{i} + 4t \mathbf{j} + 8e^{2t} \mathbf{k}$, $T = 0$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{R} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$,
 - $m = 1$, $F = 3\mathbf{i} - 6t \mathbf{j} + 20t^3 \mathbf{k}$, $T = 1$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{R} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
- Darganfyddwch faint yr ergyd y mae angen ei rhoi
 - i ronyn gyda màs 0.2 kg i newid ei gyflymder o $(5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ i $(9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$,
 - i ronyn gyda màs 0.3 kg i newid ei gyflymder o $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ i $(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$,
 - i ronyn gyda màs 0.4 kg er mwyn newid ei gyflymder o $(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ i $(5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$,
 - i ronyn gyda màs 0.5 kg er mwyn newid ei gyflymder o $(\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ i $(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$.
- Darganfyddwch gyflymder gronyn yn syth ar ôl derbyn ergyd yn yr achosion canlynol:
 - roedd gronyn, màs 0.5 kg, yn symud â chyflymder $(3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ yn syth cyn derbyn ergyd $(3\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$ Ns,
 - roedd gronyn, màs 0.25 kg, yn symud â chyflymder $(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$ yn syth cyn derbyn ergyd $(\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ Ns.

- 4 Mae pêl griced, màs 0.15 kg , sy'n symud yn llorweddol gyda buanedd 15 ms^{-1} , yn cael ei tharo gan fatiwr ac yna mae'n symud yn berpendicwlar i'w chyfeiriad gwreiddiol gyda buanedd 25 ms^{-1} . Darganfyddwch faint a chyfeiriad yr ergyd a roddir gan y batiwr.
- 5 Cyflymder gronyn gyda màs $m \text{ kg}$ ar amser $t \text{ s}$ yw $\mathbf{v} \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch egni cinetig y gronyn ar gyfer
- (a) $m = 0.2$, $\mathbf{v} = 2t^2 \mathbf{i} + 7t^4 \mathbf{j}$, (b) $m = 0.4$, $\mathbf{v} = 6t \mathbf{i} + 8t^3 \mathbf{j}$,
 (c) $m = 0.8$, $\mathbf{v} = 5 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}$, (d) $m = 1$, $\mathbf{v} = 3t \mathbf{i} + 4e^{-t} \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$.
- 6 Cyflymder gronyn gyda màs $m \text{ kg}$ ar amser $t \text{ s}$ yw $\mathbf{v} \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch y pŵer a ddatblygir gan y grym sy'n gweithredu ar y gronyn ar gyfer
- (a) $m = 0.4$, $\mathbf{v} = t^2 \mathbf{i} + 3t^4 \mathbf{j}$, (b) $m = 0.6$, $\mathbf{v} = 4t \mathbf{i} + 6t^4 \mathbf{j}$,
 (c) $m = 0.6$, $\mathbf{v} = 3 \cos 2t \mathbf{i} - 5 \sin 3t \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}$, (d) $m = 2$, $\mathbf{v} = 4t \mathbf{i} + 6e^{-2t} \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$.
- 7 Darganfyddwch :
- (a) y gwaith a wneir gan y grym yng nghwestiwn 5(a) yn y cyfwng $0 \leq t \leq 1$,
 (b) y gwaith a wneir gan y grym yng nghwestiwn 5 (c) yn y cyfwng $0 \leq t \leq \pi$.

Ymarferion Amrywiol 6

- 1 Mae gronyn P gyda màs $m \text{ kg}$ yn symud mewn plân yn y fath fodd fel y rhoddir ei fector safle $\mathbf{r} \text{ m}$ ar amser $t \text{ s}$ gan
- $$\mathbf{r} = (t^2 - t) \mathbf{i} + t \sin \pi t \mathbf{j}.$$
- Darganfyddwch
- (a) fomentwm P pan fydd $t = 0$,
 (b) egni cinetig P pan fydd $t = 1$,
 (c) y grym sy'n gweithredu ar P pan fydd $t = 1$,
 (d) cyfradd gwaith y grym sy'n gweithredu ar P pan fydd $t = 1$.
- 2 Mae sglefriwr A yn symud ar lawr sglefrio gwastad gyda chyflymder cyson $(10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$, gan fynd trwy'r pwynt $(9\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \text{ m}$ ar amser $t = 0$. Mae ail sglefriwr B sy'n teithio gyda chyflymder cyson $(p\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ ar y pwynt $(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) \text{ m}$ ar amser $t = 0$.
- (a) Os yw'r sglefriwyr yn gwrthdaro, darganfyddwch werth p .
 (b) Os yw $p = 11$, dangoswch y bydd y sglefriwyr agosaf at ei gilydd pan fydd $t = 7.5 \text{ s}$.
- 3 Mae gwrthrych, màs 2 kg , yn symud yn y fath fodd fel y rhoddir ei fector safle ar amser $t \text{ s}$ gan
- $$\mathbf{r} = (a \sin \pi t + bt^2) \mathbf{i} + (c \sin \pi t + dt^2) \mathbf{j},$$
- lle mae a , b , c a d yn gysonion a'r pellterau yn cael eu mesur mewn metrau. Darganfyddwch
- (a) y momentwm ar amser $t \text{ s}$,
 (b) yr egni cinetig ar amser $t \text{ s}$ (peidiwch â symleiddio),

(c) y grym sy'n gweithredu ar y gwrthrych ar amser t s.

Ar $t = 0$, buanedd y gwrthrych yw $4\pi \text{ ms}^{-1}$. Ar $t = \frac{1}{2}$, mae'r gwrthrych yn mynd trwy'r pwynt $(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ m ac mae'n teithio i'r cyfeiriad $\mathbf{i}$ positif. Darganfyddwch a , b , c a d . Beth yw'r pŵer a gynhyrchir gan y grym sy'n gweithredu ar y gwrthrych ar $t = \frac{1}{2}$?

- 4 Rhoddir grym cyson o $(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ N i fodrwy sydd ar roden lefn. Mae'r rhoden yn sefydlog mewn plân llorweddol ac mae'n cysylltu'r lleolbwynt â'r pwynt P gyda fector safle $(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$ m. Darganfyddwch y gwaith a wneir wrth symud y fodrwy o'r lleolbwynt i P .

O wybod bod màs y fodrwy yn 4 kg a'i bod yn ddisymud ar y lleolbwynt ar y dechrau, darganfyddwch ei buanedd ar P .

- 5 Mae gronyn gyda màs 3 kg yn symud mewn plân, a'i fector safle ar amser t s yw $\mathbf{r}$ m, lle mae

$$\mathbf{r} = (2 \cos t + \sin t) \mathbf{i} + \sin t - 2 \cos t \mathbf{j}.$$

Darganfyddwch y gwerthoedd ar gyfer t

- pan fydd buanedd y gronyn ar ei isaf,
 - pan fydd y grym sy'n gweithredu ar y gronyn yn berpendicwlar i'r fector cyflymder,
 - pan fydd y pŵer a gynhyrchir gan y grym ar ei uchaf.
- 6 Rhoddir cyflymder gronyn gyda màs 0.4 kg, sef $\mathbf{v} \text{ ms}^{-1}$, ar amser t s, gan

$$\mathbf{v} = 3 \sin 2t \mathbf{i} + 5e^{4t} \mathbf{j}.$$

Darganfyddwch y grym $\mathbf{F}$ sy'n gweithredu ar y gronyn ar amser t s. Trwy gymryd lluoswm sgalar $\mathbf{F}$ gyda fector priodol, darganfyddwch gyfradd gwaith y grym hwn ar amser t s.

- 7 Mewn perthynas â lleolbwynt sefydlog O , rhoddir fector safle gronyn P , sef $\mathbf{r}$ m, ar amser t s, gan $\mathbf{r} = \sin 4t \mathbf{i} + \cos 4t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$.

- Darganfyddwch, yn nhermau t , gyflymder a chyflymiad P ar amser t .
- O wybod hefyd bod màs P yn 0.2 kg, darganfyddwch, yn nhermau t , ar ba gyfradd y mae'r grym sy'n gweithredu ar P yn gweithio ar amser t s.

- 8 Mae dau bwynt A a B gyda fectorau safle $(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 14\mathbf{k})$ m ac $(11\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$ m, yn ôl eu trefn, yn gorwedd ar wifren lefn syth. Mae grym $(7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ N yn gweithredu ar lain sy'n rhydd i symud ar y wifren.

Darganfyddwch

- fector unedol ar hyd y wifren,
- faint cydran y grym yn baralel i'r wifren,
- y gwaith a wneir gan y grym wrth symud y glain o A i B .

- 9 Cyflymder pêl gyda màs 0.7 kg yn union cyn iddi daro llawr llorweddol yw $(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ lle mae $\mathbf{i}$ yn fector unedol llorweddol a $\mathbf{j}$ yn fector unedol yn fertigol ar i fyny. Yn syth ar ôl i'r bêl adael y llawr, ei chyflymder yw $(5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$. Gellir anwybyddu'r amser y mae'r bêl mewn cysylltiad â'r llawr.
- Darganfyddwch ergyd y llawr ar y bêl yn y ffurf $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})$.
 - Darganfyddwch y newid mewn egni cinetig o ganlyniad i'r ardrawiad.
- 10 Mae tri grym $(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \text{ N}$, $(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) \text{ N}$, $(8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \text{ N}$ yn gweithredu ar bwynt P . Darganfyddwch
- gydeffaith $\mathbf{R}$ y grymoedd yn y ffurf $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$,
 - maint $\mathbf{R}$,
 - lluoswm sgalar $\mathbf{R}$ gyda'r fector $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$,
 - cosin yr ongl rhwng $\mathbf{R}$ a'r fector $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$,
 - cyfanswm y gwaith a wneir gan y grymoedd sy'n gweithredu ar P wrth iddo symud o'r pwynt gyda fector safle $(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) \text{ m}$ i'r pwynt gyda fector safle $(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) \text{ m}$.
- 11 Rhoddir cyflymder gronyn P , sef $\mathbf{v} \text{ ms}^{-1}$, ar amser $t \text{ s}$, gan $\mathbf{v} = t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$.
- Darganfyddwch gyflymiad P ar amser $t \text{ s}$.
 - O wybod bod fector safle'r gronyn yn $(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ m}$ pan fydd $t = 0$, darganfyddwch fector safle P ar amser $t \text{ s}$.
- 12 Ar amser $t \text{ s}$, rhoddir fector safle gronyn symudol P , sef $\mathbf{r} \text{ m}$, gan
- $$\mathbf{r} = (2t - 1)\mathbf{i} + 4 \cos 3t\mathbf{j} + 4 \sin 3t\mathbf{k}.$$
- Darganfyddwch
- gyflymder $\mathbf{v} \text{ ms}^{-1}$ P ar amser t eiliad,
 - yr amser pan fydd $\mathbf{v}$ ac $\mathbf{r}$ yn berpendicwlar.
- 13 Ar amser t awr, fectorau safle dwy awyren A a B , mewn unedau o 100 km, mewn perthynas â lleolbwynt sefydlog, yw
- $$2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + t(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \text{ a } 13\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \text{ yn ôl eu trefn.}$$
- Eglurwch pam y gellir dweud bod y ddwy awyren yn symud â chyflymder cyson.
 - Darganfyddwch fuanedd awyren B , gan nodi ei unedau.
 - Darganfyddwch, yn nhermau t , fynegiad ar gyfer AB^2 ar amser t awr a thrwy hyn darganfyddwch yr amser pan fydd yr awyrennau agosaf at ei gilydd.
- 14 Mae dau ronyn P a Q yn symud â chyflymderau cyson $(5\mathbf{i} + k\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ a $(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ yn ôl eu trefn, lle mae k yn gysonyn. Ar amser $t = 0$, fectorau safle P a Q mewn metrau yw $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ a $7\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$ yn ôl eu trefn. Darganfyddwch fector safle Q mewn perthynas â P ar amser $t \text{ s}$.
- Darganfyddwch werth k yn gyfryw fel bod P a Q yn gwrthdaro, a gwerth t pan fyddai'r gwrthdrawiad hwn yn digwydd.

- (b) Yn yr achos arbennig pan fydd $k = 4$, dangoswch fod

$$PQ^2 = 2t^2 - 30t + 153$$

a chanfyddwch werth t pan fydd P a Q agosaf at ei gilydd a'r pellter rhyngddynt ar yr amser hwn.

Darganfyddwch hefyd hyd yr amser y mae'r pellter rhwng P a Q yn llai na 9 m neu yn hafal i hynny.

- 15 Mae gronyn gyda màs 0.2 kg yn symud ar blân llorweddol llyfn. Rhoddir ei fector safle $\mathbf{r}$, mewn metrau, ar amser t s gan

$$\mathbf{r} = 4t^3 \mathbf{i} + 4t^4 \mathbf{j}.$$

Darganfyddwch

(a) yr egni cinetig pan fydd $t = 0.5$,

(b) cosin yr ongl rhwng y cyflymder pan fydd $t = 0.5$ a'r fector $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

- 16 Pan roddir ergyd i ronyn â màs 0.3 kg sy'n symud gyda chyflymder cyson $(11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$ ar fwrdd llorweddol llyfn, newidir ei gyflymder i $(10\mathbf{i} + 14\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$. Darganfyddwch

(a) yr ergyd,

(b) y newid yn egni cinetig y gronyn.

- 17 Mewn perthynas â lleolbwynt sefydlog, rhoddir fector safle gronyn P , sef $\mathbf{r}$, gan

$$\mathbf{r} = 3 \sin t \mathbf{i} + 5 \cos t \mathbf{j},$$

lle mesurir $\mathbf{r}$ mewn metrau a lle mae t yn dynodi'r amser mewn eiliadau.

- (a) Darganfyddwch gyflymder P ar amser t s a dangoswch fod ei fuanedd yn $v \text{ ms}^{-1}$ lle mae

$$v^2 = 17 - 8 \cos 2t.$$

Trwy hyn darganfyddwch y gwerth mwyaf a'r gwerth lleiaf ar gyfer v .

- (b) Darganfyddwch gosin yr ongl rhwng cyflymder P a'i gyflymiad pan fydd $t = \frac{\pi}{4}$.

- (c) O wybod bod màs y gronyn yn 0.3 kg, darganfyddwch gyfradd gweithio'r grym sy'n gweithredu ar P ar amser t s a chyfradd gweithio fwyaf y grym hwn.

- 18 Rhoddir fector safle gronyn P , sy'n symud mewn plân llorweddol, mewn metrau ar amser t eiliad, mewn perthynas â lleolbwynt sefydlog O , gan

$$\mathbf{r} = \frac{2}{\pi} (\cos \pi t \mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j}).$$

O wybod bod màs P yn 0.2 kg, darganfyddwch y grym llorweddol sy'n gweithredu arno ar amser t eiliad.

Pan fydd $t = 0$, mae ail ronyn Q , sy'n symud â chyflymder cyson $(-6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$, ar y pwynt gyda fector safle $\mathbf{b}$ metr. Darganfyddwch fector safle Q ar

unrhyw amser yn nhermau $\mathbf{b}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a t . Darganfyddwch $\mathbf{b}$ o wybod y bydd y gronynnau yn gwrthdaro pan fydd $t = \frac{1}{2}$.

- 19 Am hanner dydd mae llong A yn mynd trwy'r lleolbwynt O ac mae'n symud gyda buanedd cyson u km awr⁻¹ i gyfeiriad y fector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Ar yr un pryd mae ail long B , sy'n symud gyda buanedd cyson 10 km awr⁻¹ i gyfeiriad $\mathbf{i}$, ar y pwynt gyda fector safle $10(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$ km.
- Darganfyddwch fectorau safle'r llongau ar amser t awr wedi hanner dydd.
 - Darganfyddwch u yn gyfryw fel bod y llongau ar lwybr gwrthdaro a'r amser pan fyddent yn gwrthdaro.
 - O wybod bod $u = 10$,
 - dangoswch, ar amser t awr wedi hanner dydd, fod

$$AB^2 = 80t^2 - 240t + 200,$$
 - darganfyddwch yr amser pan fo'r ddwy long agosaf at ei gilydd,
 - darganfyddwch yr amser pan fydd AB yn berpendicwlar i gyfeiriad cyflymder llong A .
- 20 Am hanner dydd, fectorau safle dwy awyren A a B , mewn perthynas â lleolbwynt sefydlog, yw $(30\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$ km a $(-10\mathbf{i} + 15\mathbf{k})$ km yn ôl eu trefn. Mae awyren A yn symud gyda chyflymder cyson $(-40\mathbf{i} + p\mathbf{j})$ km awr⁻¹ ac mae awyren B yn symud gyda chyflymder cyson $(120\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + q\mathbf{k})$ km awr⁻¹ lle mae p a q yn gysonion.
- Ysgrifennwch fectorau safle'r ddwy awyren ar amser t awr wedi hanner dydd.
 - Dangoswch fod y fector sy'n cynrychioli'r llinell AB yn cael ei roi gan

$$((-40 + 160t)\mathbf{i} + (-20 + (200 - p)t)\mathbf{j} + (5 + qt)\mathbf{k}) \text{ km.}$$
 - Darganfyddwch y gwerthoedd ar gyfer p a q yn gyfryw fel bod yr awyrennau yn gwrthdaro.

Pennod 7

Hafaliadau Differol Trefn Un

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon, dylech allu

- adnabod y gwahanol fathau o hafaliadau differol,
- datrys hafaliadau differol trefn un gyda newidynnau gwahanadwy,
- modelu problemau syml mewn “bywyd go iawn” fel hafaliadau differol a datrys yr hafaliadau a geir o ganlyniad.

7.1 Diffiniadau a nodiannau sylfaenol

Enghreifftiau syml o hafaliadau differol yw

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{dx}{dt} = t, & \text{(b)} \frac{dy}{dx} = xy, & \text{(c)} \frac{dy}{dx} = ye^x, \\ \text{(d)} \frac{d^2x}{dt^2} = x, & \text{(e)} \frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}, & \text{(f)} \frac{dr}{d\theta} = \cos \theta, \\ \text{(g)} \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = t, & \text{(h)} \frac{dv}{dt} + v = t. & \end{array}$$

Mae hafaliad differol yn berthynas rhwng deilliadau un newidyn (e.e. x) mewn perthynas â newidyn arall (e.e. t) a ffwythiannau'r ddau newidyn.

Gelwir y newidyn sy'n cael ei ddifferu yn **newidyn dibynnol** a gelwir y newidyn arall yn **newidyn annibynnol**. Yn (a), (d) ac (g) uchod, y newidyn dibynnol yw x a'r newidyn annibynnol yw t . Yn (b), (c) ac (e) uchod, y newidyn dibynnol yw y a'r newidyn annibynnol yw x . Yn (f) uchod, y newidyn dibynnol yw r a'r newidyn annibynnol yw θ , tra yn (h), y newidyn dibynnol yw v a'r newidyn annibynnol yw t . Gellir defnyddio unrhyw bâr o lythrennau ar gyfer newidynnau dibynnol a newidynnau annibynnol ac wrth ateb cwestiynau mae angen bod yn ofalus iawn eich bod yn defnyddio'r un newidynnau a'r rhai a roddir yn y cwestiwn. Yn y rhan fwyaf o'r enghreifftiau a weithir, y newidyn dibynnol fydd x a'r newidyn annibynnol fydd t ond bydd cyfuniadau eraill yn cael eu defnyddio yn yr ymarferion.

Trefn hafaliad differol

Trefn hafaliad differol yw trefn y deilliad uchaf sy'n ymddangos ynddo. Mae'r hafaliadau yn enghreifftiau (a), (b), (c), (e), (f) ac (h) i gyd yn drefn un tra bo'r rhai yn enghreifftiau (d) ac (g) yn drefn dau.

Ffeithiau sylfaenol

Er mwyn cael datrysiad unigryw (h.y. yr unig ddatrysiad) mae angen enwi mwy na dim ond yr hafaliad. Gyda'r enghraifft yn (a), h.y.

$$\frac{dx}{dt} = t,$$

mae integru'r ochr chwith mewn perthynas â t yn rhoi x ac mae integru'r ochr dde mewn perthynas â t yn rhoi $\frac{1}{2}t^2$ ynghyd â chysynyn mympwyol, dyweder A . Felly

$$x = \frac{1}{2}t^2 + A.$$

Golyga hyn gyda phob gwerth ar gyfer A y bydd ffwythiant gwahanol yn bodloni'r hafaliad differol ac felly bydd nifer anfeidraidd o wahanol ddatrysiadau ar gyfer yr hafaliad differol. Fodd bynnag, os rhoddir x ar gyfer un gwerth o t , yna gellir darganfod A ac yna gellir darganfod datrysiad unigryw ar gyfer x . Er enghraifft, os yw $x = 3$ pan fydd $t = 2$, yna mae $A = 1$ ac $x = \frac{1}{2}t^2 + 1$.

Yn gyffredinol mae'n wir:

- (a) y gellir darganfod datrysiad unigryw ar gyfer hafaliad differol trefn un os yw gwerth y newidyn dibynnol yn hysbys ar gyfer un gwerth ar gyfer y newidyn annibynnol. Golyga hyn yn enghraifft (c) uchod y gellir darganfod datrysiad unigryw ar gyfer y os rhoddir ei werth (e.e. 2) ar gyfer gwerth x a roddir (e.e. $x = 3$).
- (b) y gellir darganfod datrysiad unigryw ar gyfer hafaliad differol trefn dau os yw gwerth y newidyn dibynnol a gwerth y deilliad cyntaf yn hysbys ar gyfer un gwerth ar gyfer y newidyn annibynnol.
Golyga hyn yn enghraifft (d) uchod y gellir darganfod datrysiad unigryw ar gyfer x os rhoddir ei werth (e.e. $x = 3$) a gwerth $\frac{dx}{dt}$ (e.e. $\frac{dx}{dt} = 4$) ar gyfer gwerth t a roddir (e.e. $t = 0$).

Datrysiad cyffredinol

Datrysiad cyffredinol hafaliad trefn un yw datrysiad y gellir ei ddefnyddio i ganfod y datrysiad unigryw os yw gwerth y newidyn dibynnol yn hysbys ar gyfer un gwerth ar gyfer y newidyn annibynnol. Datrysiad cyffredinol hafaliad trefn dau yw datrysiad y gellir ei ddefnyddio i ganfod y datrysiad unigryw os yw gwerth y newidyn dibynnol a'i deilliad cyntaf yn hysbys ar gyfer un gwerth ar gyfer y newidyn annibynnol. Yn

ymarferol, golyga hyn y bydd datrysiad cyffredinol hafaliad trefn un yn cynnwys cysonyn mympwyol, fel yn enghraifft (a) uchod. Bydd datrysiad cyffredinol hafaliad trefn dau yn cynnwys dau gysonyn mympwyol.

Y dull cyffredinol o ddatrys hafaliadau differol yw darganfod y datrysiad cyffredinol ac yna darganfod y cysonion i fodloni unrhyw amodau a roddir.

7.2 Hafaliadau trefn un, newidynnau yn wahanadwy

Ymdrinnir â'r hafaliadau hyn yn P3 ond rhag ofn nad ydych wedi cyrraedd y rhan honno o'r cwrs eto, dyma grynoded o'r syniadau sylfaenol. Mae'r math hwn o hafaliadau yn digwydd yn aml mewn Mecaneg, yn arbennig mewn problemau sy'n cynnwys mudiant a wrthsefir. I ddechrau, byddwn yn dangos y dechneg gyda rhai enghreifftiau syml.

Enghraifft 7.1

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol $\frac{dx}{dt} = x^2$ a'r datrysiad unigryw lle mae $x = 1$ pan fydd $t = 3$.

Gellir integru'r ochr chwith mewn perthynas â t gan roi x ond ni ellir gwneud hyn ar yr ochr dde oherwydd bod x yn ffwythiant anhysbys o t ac nid oes modd ei integru. Fodd bynnag, gellir ad-drefnu'r hafaliad fel bod yr holl ddibyniaeth " x " ar yr un ochr o'r hafaliad â'r deilliad a bod yr holl ddibyniaeth " t " ar yr ochr arall. Mae hyn yn rhoi

$$\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} = 1.$$

Gellir integru'r hafaliad nawr mewn perthynas â t , h.y.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt.$$

Gellir integru'r ochr chwith mewn perthynas ag x a'r ochr dde mewn perthynas â t gan roi

$$-\frac{1}{x} = t + c,$$

lle mae c yn gysonyn mympwyol. Dyma ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad. Mae amnewid $x = 1$ a $t = 3$ yn rhoi $c = -4$, ac felly

$$-\frac{1}{x} = t - 4$$

yw'r datrysiad unigryw gyda'r gwerth 1 pan fydd $t = 3$.

Gellir ad-drefnu'r hafaliad gan roi

$$x = \frac{1}{4-t}.$$

Trwy amnewid hwn yn ôl i'r hafaliad differol gwreiddiol, gallwch wirio ei fod yn cael ei fodloni a hefyd y bodlonir yr amod ar gyfer $t = 3$. Mae hafaliadau differol yn un o'r

ychydig feysydd lle gellir gwirio yn weddol rwydd eich bod wedi cael yr ateb cywir ac mae'n talu i chi eu gwirio bob amser.

Mewn problemau fel hyn, lle rhoddir x ar gyfer gwerth o t , gellir osgoi cyflwyno cysonyn mympwyol trwy integru rhwng terfannau. Yn yr achos hwn, terfannau x fyddai rhwng 1 ac x a therfannau t fyddai rhwng 3 a t . Felly

$$\int_1^x \frac{dx}{x^2} = \int_3^t dt.$$

Wrth enrhifo'r integrynnau, mae hyn yn rhoi

$$1 - \frac{1}{x} = t - 3,$$

sy'n cyfateb i'r canlyniad a gafwyd uchod.

Enghraifft 7.2

Darganfyddwch ddatrysiad yr hafaliad differol

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{t-x}$$

gydag $x = 0$ pan fydd $t = \ln 2$.

Unwaith eto, ni ellir integru'r ochr dde yn uniongyrchol mewn perthynas â t oherwydd bod x yn anhysbys. Gellir ad-drefnu'r hafaliad fel o'r blaen, fodd bynnag, fel bod yr holl ddibyniaeth " x " ar yr un ochr o'r hafaliad â'r deilliad a bod yr holl ddibyniaeth " t " ar yr ochr arall. Mae cyflawni'r ad-drefniad yn rhoi

$$e^x \frac{dx}{dt} = 2e^t.$$

Mae integru mewn perthynas â t yn rhoi

$$\int e^x dx = 2 \int e^t dt.$$

Gellir integru'r hafaliad hwn yn uniongyrchol gan roi'r datrysiad cyffredinol (a fydd yn cynnwys cysonyn mympwyol) neu ei integru rhwng terfannau gan roi'r datrysiad cyflawn. Mae integru rhwng terfannau ychydig yn gyflymach ac felly mae integru'r ochr chwith o 0 i x a'r ochr dde o $\ln 2$ i t yn rhoi

$$\int_0^x e^x dx = 2 \int_{\ln 2}^t e^t dt.$$

Mae enrhifo'r integryn yn dangos bod

$$e^x - 1 = 2(e^t - 2),$$

h.y. $e^x = 2e^t - 3$.

Mae cymryd logarithmau'r ddwy ochr yn rhoi

$$x = \ln(2e^t - 3).$$

Unwaith eto, gallwch wirio bod y datrysiad hwn yn bodloni'r hafaliad differol a'r amod pan fydd $t = \ln 2$.

Enghraifft 7.3

Darganfyddwch ddatrysiad v yr hafaliad differol $\frac{dv}{dt} - v = 4$, gyda $v = 4$ pan fydd $t = 0$.

Gellir ad-drefnu'r hafaliad hwn fel bod y ddibyniaeth " v " ar yr un ochr o'r hafaliad â'r deilliad a bod unrhyw ddibyniaeth " t " ar yr ochr arall. Golyga hyn bod angen symud v i ochr dde'r hafaliad gyntaf ac yna rhannu'r ddwy ochr gyda $v + 4$, h.y.

$$\frac{1}{v+4} \frac{dv}{dt} = 4.$$

Nawr gellir integru'r ddwy ochr mewn perthynas â t ac felly

$$\int \frac{dv}{v+4} = 4 \int dt.$$

Er mwyn bodloni'r amod ar $t = 0$, mae angen integru'r ochr chwith o 4 i v a'r ochr dde o 0 i t gan roi

$$\int_4^v \frac{dv}{v+4} = 4 \int_0^t dt,$$

h.y.
$$\ln\left(\frac{v+4}{8}\right) = 4t.$$

Mae cymryd esbonydd y ddwy ochr yn rhoi

$$v = 8e^{4t} - 4.$$

Y dull cyffredinol

Enw'r dull a ddefnyddiwyd uchod, sef ad-drefnu'r hafaliad, yw'r dull gwahanu newidynnau ac mae'n gweithio gyda hafaliadau o'r math

$$\frac{dx}{dt} = f(x) g(t) \text{ neu, yn yr un modd, } \frac{dy}{dx} = f(x) g(y)$$

lle mae f a g yn ffwythiannau a roddir. Weithiau mae angen ad-drefnu'r hafaliad, fel yn Enghraifft 7.3, ei mwyn ei gael yn y ffurf gywir.

Camau'r datrysiad yw

- (i) ad-drefnu fel bod y termau sy'n cynnwys y newidyn dibynnol ar yr un ochr o'r hafaliad â'r deilliad a bod y termau sy'n ddibynnol ar y newidyn annibynnol ar yr ochr arall, e.e.

$$\frac{1}{f(x)} \frac{dx}{dt} = g(t),$$

- (ii) integru dwy ochr yr hafaliad mewn perthynas â'r newidyn annibynnol e.e.

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int g(t) dt;$$

os rhoddir amodau ar gyfer un set o werthoedd ar gyfer y newidynnau, dylid defnyddio'r rhain yn nherfannau'r integriad,

- (iii) gwrth-droi er mwyn cael y newidyn dibynnol yn nhermau'r newidyn annibynnol. Ni fydd yn bosibl gwneud hyn bob tro ac efallai mai dim ond perthynas gyffredinol y gallwch ei chael rhwng y newidynnau.

Ymarferion 7.1

Darganfyddwch ddatrysiadau cyffredinol yr hafaliadau differol canlynol.

1 $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}.$

2 $\frac{dx}{dt} = x^3.$

3 $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{v^2}.$

4 $\frac{dr}{d\theta} = r \tan \theta.$

Darganfyddwch ddatrysiadau yr hafaliadau differol canlynol sy'n bodloni'r amodau a nodir.

5 $\frac{dx}{dt} = x, x = 4$ pan fydd $t = 0.$

6 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x}, x = 5$ pan fydd $t = 1.$

7 $\frac{dx}{dt} = t^3x^2, x = 1$ pan fydd $t = 1.$

8 $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, y = 0$ pan fydd $x = 0.$

9 $\frac{dv}{dt} + 3v = 4, v = 1$ pan fydd $t = 0.$

10 $\frac{dv}{dt} + 3v = 4, v = 5$ pan fydd $t = 0.$

11 $(xy + 2y) \frac{dy}{dx} = y^2 - 1, y = \sqrt{10}$ pan fydd $x = 1.$

7.3 Modelu yn cynnwys hafaliadau differol

Yn eich cwrs, ac mewn arholiadau, efallai y gofynnir i chi ddarganfod yr hafaliad differol sy'n modelu problem mewn maes lle nad oes gennych wybodaeth eisoes (e.e. twf poblogaeth, dadfeiliad ymbelydrol). Nid yw hyn mor anodd ag y mae'n edrych gan y bydd y problemau yn cael eu nodi mewn ffurf lle bydd digon o wybodaeth yn cael ei rhoi i drosi'r broblem yn un lle byddwch yn datrys hafaliad differol, heb wybod unrhyw fanylion cefndir ychwanegol.

Cychwynnwn drwy edrych ar broblemau nad ydynt yn cynnwys Mecaneg gan eich bod yn gwybod yr egwyddorion mecanyddol sylfaenol ac wedi cael peth ymarfer ar foddelu problemau mecanyddol fel hafaliadau differol syml. Byddwch hefyd yn ymdrin â modelu problemau mecanyddol fel hafaliadau differol yn Llyfr M3 ac, yn fras iawn, ar ddiwedd yr adran hon.

Modelu mewn meysydd ar wahân i Fecaneg

Un o'r pethau cyntaf i'w benderfynu wrth osod model yw beth yw'r anhysbysyn (h.y. y newidyn dibynnol). Mewn cwestiynau arholiad, mae hyn yn glir fel rheol. Mae angen dewis y newidyn annibynnol hefyd. Fel rheol mae hwn yn amlwg a'r amser ydyw yn aml iawn. Er enghraifft, efallai y dywedir wrthyh fod y boblogaeth yn amrywio gydag amser mewn ffordd arbennig. Mae hyn yn dweud wrthyh yn syth mai'r boblogaeth ddylai fod y newidyn dibynnol a'r amser ddylai fod y newidyn annibynnol. Bydd angen i chi chwilio am eiriau allweddol arbennig a fydd yn eich helpu i "drosi" eich problem yn un sy'n cynnwys hafaliad differol. Yr ymadrodd mwyaf cyffredin sy'n dweud wrthyh beth i'w wneud yw "cyfradd newid" ac ymadroddion tebyg a roddir isod. Mae llawer o broblemau yn symleiddio i ddatrysiad hafaliad differol trefn un a chychwynnwn trwy edrych ar broblemau o'r math hwn.

Problemau yn cynnwys cyfraddau newid ac sy'n arwain at hafaliadau trefn un

Mae'r rhan fwyaf o'r problemau y gellir eu modelu fel hafaliadau differol yn cynnwys gwybodaeth am gyfradd newid newidyn x (dyweder) fel rheol gydag amser t , h.y. gwybodaeth am $\frac{dx}{dt}$. Ymadroddion eraill sy'n awgrymu cyfradd newid yw cyfradd twf neu ddadfeiliad. Yn aml iawn rhoddir yr wybodaeth mewn ffordd sydd hefyd yn awgrymu pa newidyn dibynnol a pha newidyn annibynnol y byddai'n briodol eu dewis. Er enghraifft, efallai y dywedir wrthyh fod maint yr arian mewn cyfrif banc yn tyfu gydag amser mewn ffordd arbennig. Dywed hyn wrthyh y dylai'r swm yn y cyfrif fod y newidyn dibynnol ac y dylai amser fod y newidyn annibynnol.

Y math symlaf o sefyllfa a all ddigwydd yw'r un lle rhoddir cyfradd newid maint, er enghraifft y boblogaeth, yn eglur naill ai fel cysonyn c neu fel ffwythiant $f(t)$ amser. Mae'r data a roddir yn awgrymu, yn yr achos hwn, y dylid cymryd y boblogaeth ar amser t fel y newidyn dibynnol. Os dynodir hwn gan x , yna cyfradd newid x yw $\frac{dx}{dt}$ a gellir ailysgrifennu'r wybodaeth fel

$$\frac{dx}{dt} = c \text{ neu } \frac{dx}{dt} = f(t),$$

ac mae'r broblem wreiddiol wedi'i thrawsnewid bellach yn broblem o ddatrys hafaliad differol eithaf hawdd.

Yn y rhan fwyaf o achosion, yr unig beth sy'n hysbys am gyfradd newid x yw ei bod yn dibynnu mewn rhyw ffordd ar x . Er enghraifft, efallai ei bod yn hysbys ei bod mewn cyfrannedd ag x^n , lle mae n yn gysonyn hysbys (cyfanrif yn aml). Mae'r ymadrodd mewn cyfrannedd (neu mewn cyfrannedd union) â newidyn yn golygu yn hafal i gysonyn gwaith y newidyn ac yn aml iawn mewn cwestiynau modelu mae

angen cyflwyno cysonyn cyfranoldeb. Felly mae'r wybodaeth uchod yn trosi i'r hafaliad differol

$$\frac{dx}{dt} = kx^n,$$

lle mae k yn gysonyn.

Pe dywedid bod y gyfradd newid mewn cyfrannedd gwrthdro ag x^n byddai hyn yn golygu ei bod yn hafal i $\frac{k}{x^n}$ ac felly y rhoddid $-n$ yn lle n yn yr hafaliad differol.

Mewn llawer o achosion, ni roddir y cysonyn k yn eglur ond fe roddir gwerthoedd ar gyfer x yn cyfateb i ddau werth ar gyfer t a gellir defnyddio'r gwerthoedd hyn i ganfod k ac efallai y gofynnir i chi ragfynegi gwerth x ar ryw amser wedyn.

Enghraifft 7.4

Cymerir bod cyfradd twf poblogaeth yr Unol Daleithiau ar ddechrau'r ganrif ddiwethaf mewn cyfrannedd union â nifer y boblogaeth. Y boblogaeth, mewn miliynau, oedd 7.2 ym 1810 a 9 ym 1820. Amcangyfrifwch y boblogaeth ym 1840.

Yn yr achos hwn, yr anhysbysyn yw nifer y boblogaeth; dynodir hwn gan x .

Y newidyn annibynnol yw'r amser t mewn blynnyddoedd, ac i symleiddio'r algebra cymerir mai 1810 yw $t = 0$.

Y dybiaeth yw bod

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

lle mae k yn gysonyn.

Trwy wahanu'r newidynnau ac integru

$$\int \frac{dx}{x} = k \int dt$$

$$\ln x = kt + c.$$

Gan fod $x = 7.2$ pan fydd $t = 0$, mae'n dilyn bod $c = \ln 7.2$

ac
$$x = 7.2e^{kt}$$

Rhoddid y boblogaeth pan fydd $t = 10$ fel 9 ac mae hyn yn rhoi hafaliad i ganfod t , sef

$$9 = 7.2 e^{k \cdot 10}.$$

Mae datrys hyn yn rhoi $k = 0.022$ ac felly fe ragfynegir bod y boblogaeth ym 1840 yn 13.93 miliwn.

Un peth pwysig y dylid sylwi arno ynglŷn â'r datrysiad yw ei fod yn rhagfynegi twf anfeidraidd, sy'n afrealistig ac yn anghyson â beth rydym yn ei weld. Golyga hyn fod angen darganfod model mwy boddhaol nad yw'n rhagfynegi twf anfeidraidd.

Mae un model sy'n gwneud hyn yn seiliedig ar yr hafaliad differol

$$\frac{dx}{dt} = kx(n - x),$$

a datrysir hafaliad o'r math hwn yn Enghraifft 7.7 (gweler hefyd gwestiwn 1, Ymarferion Amrywiol 7).

Enghraifft 7.5

Mae cyfaint diferyn glaw yn lleihau, oherwydd anweddiad, ar gyfradd k gwaith arwynebedd ei arwyneb. O wybod bod ei gyfaint yn V_0 ar amser $t = 0$, darganfyddwch ei gyfaint ar unrhyw amser t wedi hynny.

Yn y cwestiwn hwn, y newidyn dibynnol yw cyfaint y sffêr, sef V , a'r cam cyntaf yw mynegi arwynebedd yr arwyneb yn nhermau'r cyfaint. Os r yw'r radiws, yna y cyfaint yw $\frac{4\pi}{3}r^3$ ac arwynebedd yr arwyneb yw $4\pi r^2$. Mae amnewid am r yn nhermau

V yn rhoi arwynebedd yr arwyneb fel $cV^{\frac{2}{3}}$ lle mae $c = 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}$.

Felly

$$\frac{dV}{dt} = -kcV^{\frac{2}{3}}.$$

Ceir yr arwydd minws oherwydd bod y cyfaint yn lleihau. Gellir gwahanu'r newidynnau, gan roi

$$\frac{dV}{V^{\frac{2}{3}}} = -kc dt.$$

Mae integru yn rhoi

$$3V^{\frac{1}{3}} = -kct + A,$$

lle mae A yn gysonyn.

Mae'r amod $V = V_0$ ar $t = 0$ yn dangos bod $A = 3V_0^{\frac{1}{3}}$ ac felly

$$V = \left(V_0^{\frac{1}{3}} - \frac{kct}{3} \right)^3.$$

Enghraifft 7.6

Mae deddf oeri Newton yn nodi pan fydd tymheredd gwrthrych yn fwy na thymheredd ei amgylchoedd y bydd tymheredd y gwrthrych yn gostwng ar gyfradd sydd mewn cyfrannedd union â'r gwahaniaeth rhwng ei dymheredd a'r tymheredd o'i amgylch.

Trochir gwrthrych ar dymheredd 190°C mewn hylif a gedwir ar dymheredd cyson 50°C . Mewn un munud, mae tymheredd y gwrthrych yn gostwng i 120°C ; darganfyddwch faint o amser a gymer y tymheredd i ostwng i 85°C .

Os yw T° yn dynodi tymheredd y corff, mae deddf Newton yn rhoi

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 50),$$

lle mae t yn cynrychioli'r amser a fesurir mewn munudau a lle mae cyflwyno'r arwydd minws yn golygu bod y cysonyn k yn bositif.

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru yn rhoi

$$\int \frac{dT}{(T - 50)} = -k \int dt$$

ac felly

$$\ln(T - 50) = -kt + C.$$

Mae amnewid $T = 190$ pan fydd $t = 0$ yn rhoi $C = \ln 140$.

Mae amnewid $T = 120$ pan fydd $t = 1$ yn rhoi $k = \ln 2$, fel bod

$$t \ln 2 = \ln \left(\frac{140}{T - 50} \right).$$

Mae'r amser a gymer i gyrraedd tymheredd 85°C yn bodloni'r hafaliad

$$t \ln 2 = \ln 4 = 2 \ln 2$$

sy'n rhoi $t = 2$.

Enghraifft 7.7

Mewn model syml o epidemig, tybir y gellir rhannu'r boblogaeth i'r rhai sy'n heintiedig a'r rhai sy'n dueddol. (Mae hyn yn cymryd nad oes neb yn marw nac yn gwellu.) At hynny, tybir bod y gyfradd y mae'r clefyd yn ymledu yn k gwaith lluoswm y nifer sy'n dueddol a'r nifer sy'n heintiedig. Ar amser $t = 0$, mae un person yn heintiedig ac mae $n + 1$ o bobl yn y boblogaeth. Darganfyddwch y nifer sy'n heintiedig ar amser t wedi hynny.

Os dynodir y nifer sy'n heintiedig gan x , yna y nifer sy'n dueddol yw $n + 1 - x$ ac felly, gan fod y nifer sy'n heintiedig yn cynyddu,

$$\frac{dx}{dt} = kx(n+1-x).$$

Mae hwn yn hafaliad o'r math lle gellir gwahanu'r newidynnau ac mae

$$\int \frac{dx}{x(n+1-x)} = k \int dt.$$

Mae defnyddio ffractsiynau rhannol yn dangos y gellir ailysgrifennu'r hafaliad fel

$$\frac{1}{n+1} \int \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{n+1-x} \right) = k \int dt.$$

Mae integru'r hafaliad yn rhoi

$$\ln \frac{x}{n+1-x} = k(n+1)t + c,$$

lle mae c yn gysonyn. Mae'r amod $x = 1$ ar $t = 0$ yn rhoi $c = -\ln(n)$ ac felly

$$k(n+1)t = \ln \frac{nx}{n+1-x}.$$

Mae cymryd esbonydd dwy ochr yr hafaliad hwn ac ad-drefnu'r hafaliad a geir o ganlyniad yn rhoi

$$x = \frac{(n+1)e^{k(n+1)t}}{n + e^{k(n+1)t}}.$$

Wrth i t fynd yn anfeidraidd mae hwn yn tueddu at $n + 1$, sy'n dangos y bydd y boblogaeth gyfan yn mynd yn heintiedig yn y pen draw.

Enghraifft 7.8

Mewn proses gemegol arbennig, defnyddir 2 uned o gemegyn A a 3 uned o gemegyn B i gynhyrchu un uned o gemegyn X . Ar y dechrau, mae 10 uned o A ac 8 uned o B yn bresennol. Mae cyfradd cynhyrchu X mewn cyfrannedd union â lluoswm y meintiau o A a B sy'n weddill. Darganfyddwch ffurf yr hafaliad differol a fodlonir gan x , sef maint yr X a gynhyrchwyd erbyn amser t .

I gynhyrchu x uned, bydd $2x$ uned o A a $3x$ uned o B wedi cael eu defnyddio. Felly y meintiau o'r sylweddau hyn sy'n weddill yw $10 - 2x$ uned o A ac $8 - 3x$ uned o B . Felly yr hafaliad differol sydd ei angen yw

$$\frac{dx}{dt} = k(10-2x)(8-3x),$$

lle mae k yn gysonyn.

Cyfradd newid net

Mewn llawer o sefyllfaoedd ymarferol mae nifer o achosion yn effeithio ar gyfradd newid maint ac mae angen cyfuno'r newidiadau hyn i gyrraedd cyfanswm y gyfradd newid (neu'r gyfradd newid net). Enghraifft syml yw'r twf mewn poblogaeth lle mae genedigaethau a marwolaethau yn effeithio ar y gyfradd twf ac fel arfer mae'r gyfradd genedigaethau a'r gyfradd marwolaethau yn hysbys. Os tybir bod y gyfradd genedigaethau a'r gyfradd marwolaethau ill dwy mewn cyfrannedd union â nifer y boblogaeth, sef x , yna mae cyfraniad genedigaethau at y gyfradd twf ar ffurf px ac mae cyfraniad y marwolaethau ar ffurf $-qx$ (lle cymerir bod p a q yn bositif ac felly bod yr arwydd minws yn dangos lleihad). Y gyfradd net felly yw $(p - q)x$ ac felly

$$\frac{dx}{dt} = (p - q)x.$$

Mae llawer o broblemau o'r math uchod lle rhoddir cyfraddau mewnbwn (e.e. genedigaeth) ac allbwn (e.e. marwolaeth), neu lle mae dau beth yn peri cyfradd twf; er enghraifft mewn poblogaeth gellir cael cyfraddau genedigaeth a marwolaeth a hefyd termau a berir gan allfudiad a mewnfudiad. Yn y sefyllfa hon, mae angen darganfod y gyfradd newid net oddi wrth yr hafaliad

$$\text{cyfradd newid net} = \text{cyfradd mewnbwn} - \text{cyfradd allbwn}.$$

Enghraifft 7.9

Ar unrhyw amser, cyfradd twf cytref o facteria, mewn unedau y dydd, yw $\frac{1}{4}$ nifer y bacteria sy'n bresennol. Echdynnir y bacteria o'r gytref ar gyfradd gyson o R uned y dydd. Ar amser $t = 0$, y nifer yn y gytref yw N . Darganfyddwch y nifer sy'n bresennol ar amser t diwrnod yn ddiweddarach.

Os yw x yn dynodi nifer y bacteria ar amser t diwrnod, yna y "mewnbwn" bob dydd yw $\frac{1}{4}x$ a'r allbwn bob dydd yw R . Felly

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}x - R.$$

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru yn rhoi

$$4 \int \frac{dx}{x - 4R} = \int dt$$

ac felly
$$x - 4R = ae^{\frac{t}{4}}.$$

Ar $t = 0$, $x = N$ ac felly
$$a = N - 4R$$

ac felly
$$x = (N - 4R)e^{\frac{t}{4}} + 4R.$$

Ymarferion 7.2

- 1 Mae cyfradd twf cytref o facteria mewn cyfrannedd union â nifer y boblogaeth. Tyfodd nifer y bacteria o 100 i 400 mewn 24 awr. Darganfyddwch nifer y bacteria ar ôl 12 awr.
- 2 Mewn model o ymateb y glust i ergyd, tybir bod cyfradd newid yr ymateb mewn perthynas â'r ergyd mewn cyfrannedd gwrthdro â'r ergyd. Darganfyddwch ffurf gyffredinol yr ymateb yn nhermau'r ergyd.
- 3 Mae maint y radiwm mewn darn o blwm yn lleihau ar gyfradd sydd mewn cyfrannedd union â'r maint sy'n bresennol. Mewn 1500 mlynedd mae maint y radiwm yn lleihau i hanner ei werth gwreiddiol. Darganfyddwch y ffraksiwn a fydd yn weddill ar ôl 2500 mlynedd.
- 4 Mae cyfraddau genedigaethau a marwolaethau mewn nythfa o forgrug mewn cyfrannedd union â'r nifer yn y nythfa. Mae'r gyfradd marwolaethau yn gyfryw fel pe na cheid unrhyw enedigaethau y byddai'r boblogaeth yn lleihau i hanner ei gwerth mewn 1 wythnos. Fodd bynnag, mewn gwirionedd mae'r boblogaeth yn dyblu mewn 2 wythnos. Darganfyddwch y gyfradd genedigaethau.
- 5 Tybir bod poblogaeth dinas yn tyfu ar gyfradd sydd mewn cyfrannedd union â nifer y boblogaeth ac mae'r gyfradd twf yn gyfryw fel bod poblogaeth o 40 000 yn cynyddu i 80 000 mewn 50 mlynedd. Mae mewnfudiad, y tybir ei fod yn digwydd ar gyfradd unffurf, yn egluro cyfradd twf unffurf o 400 o bobl y flwyddyn. Darganfyddwch y boblogaeth ar ôl 10 mlynedd.
- 6 Mewn model a ddefnyddir gan gwmnïau yswiriant, tybir bod arian a adneuir yn tyfu ar gyfradd gyson y flwyddyn yn hafal i 0.06 gwaith y maint sydd mewn cyfrif ar unrhyw ennyd penodol. Darganfyddwch faint sydd mewn cyfrif 3 blynedd ar ôl i £500 gael eu hadneuo.
- 7 Rhoddir gwrthrych ar dymheredd 100°C mewn cyfrwng a gedwir ar dymheredd cyson 20°C. Ar ôl 10 munud, tymheredd y gwrthrych yw 60°C. Darganfyddwch ei dymheredd ar ôl 40 munud.
- 8 Ffurfir un uned o sylwedd newydd X trwy gyfuno un uned o A ag un uned o B . Ar y dechrau mae 10 uned o A ac 8 uned o B yn y cymysgedd. Mae cyfradd ffurfiant X mewn cyfrannedd union â lluoswm y meintiau o A a B sy'n weddill. Mae un uned o X yn cael ei ffurfio mewn 5 munud. Darganfyddwch nifer yr unedau a ffurfir mewn 10 munud.
- 9 Mewn model syml o dwf poblogaeth o brotozoa, tybir bod y boblogaeth yn tyfu ar gyfradd ar unrhyw amser sy'n hafal i ddwywaith y boblogaeth ar yr amser hwnnw. Yn ogystal â'r ffactor twf, bydd cystadleuaeth rhwng y protozoa yn peri lleihad yn y gyfradd twf sy'n hafal i 0.01 gwaith sgwâr y nifer sy'n bresennol. Ffurfiwch yr hafaliad differol a fodlonir gan nifer y boblogaeth a chanfyddwch nifer y boblogaeth ar amser t o wybod bod yna 5 ar amser $t = 0$.

Ymarferion Amrywiol 7

- 1 Dynodir nifer y boblogaeth ar amser t gan x . Mewn model arbennig mae'r newidyn x yn bodloni'r hafaliad differol

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n-x}\right) \frac{dx}{dt} = k,$$

lle mae k yn gysonyn. Ar amser $t = 0$, mae $\frac{1}{4}n$ o unigolion yn y boblogaeth. Gan gymryd na fydd x byth yn cyrraedd y gwerth n , dangoswch mai ar amser t

$$\frac{3x}{n-x} = e^{kt}.$$

O wybod bod $\frac{1}{2}n$ o unigolion yn y boblogaeth ar amser T , darganfyddwch nifer y boblogaeth ar amser $2T$.

- 2 Mewn model arbennig o gyfrif banc dynodir y swm yn y cyfrif ar amser t mlynedd gan $\text{£}x$, lle tybir bod x a t yn amrywio'n ddi-dor. Tybir, ar unrhyw amser, bod llif di-dor o arian i mewn i'r cyfrif (oherwydd llog) ar gyfradd y flwyddyn sy'n hafal i θ gwaith y swm yn y cyfrif ar yr amser hwnnw; gelwir θ yn rym llog a gall amrywio gyda t . Mae llif arian allan o'r cyfrif hefyd ar gyfradd gyson o $\text{£}r$ y flwyddyn. Eglurwch pam mae x yn bodloni'r hafaliad differol

$$\frac{dx}{dt} = \theta x - r.$$

- (a) Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad hwn gyda $\theta = 0.1$ ac $r = 100$ a darganfyddwch y datrysiadau penodol yn gyfryw fel bod

(i) $x = 900$ pan fydd $t = 0$,

(ii) $x = 1100$ pan fydd $t = 0$.

Brasluniwch graff x yn erbyn t yn y ddau achos.

- (b) Mewn model penodol pan fydd $r = 0$, grym y llog yw $a + bt$, lle mae a a b yn gysonion ac, ar amser $t = 0$, lle mae $x = 10\,000$. Darganfyddwch x ar unrhyw amser t wedyn ac o wybod bod $x = 16\,000$ ar amser $t = 2$, darganfyddwch θ pan fydd $t = 1$.

- 3 Darganfyddwch ddatrysiad neilltuol yr hafaliad differol

$$\frac{dy}{dx} = (y^2 + 1)(x^4 + 1)$$

lle mae $y = 1$ pan fydd $x = 5$.

- 4 Troschwch i eiriau y ddeddf oeri a fynegir gan yr hafaliad differol

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - A)$$

lle mae t yn cynrychioli'r amser, T yw tymheredd gwrthrych poeth, A yw tymheredd ei amgylchiadau ac mae λ yn gysonyn positif.

Os yw A yn gyson, dangoswch fod

$$T_0 - T = (T_0 - A)(1 - e^{-\lambda t})$$

lle mae T_0 yn cynrychioli gwerth tymheredd y gwrthrych ar amser $t = 0$.

Os yw'r corff, gan ddechrau ar amser $t = 0$, yn oeri o 80°C i 60°C mewn 15 munud ac o 60°C i 50°C mewn 15 munud arall, darganfyddwch λ .

- 5 Mae'n hysbys oddi wrth arbrogion bod dŵr yn dianc o danc gyda gwaelod gwastad trwy dwll yn y gwaelod ar gyfradd o tua $2.66 A\sqrt{h} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, lle mae A yn cynrychioli arwynebedd y twll mewn metrau sgwâr ac h yw uchder arwynebedd y dŵr uwchben y twll, mewn metrau.

Mae gan danc 1 m o ddyfnder drawstoriad petryal 2 m wrth 3 m. Mae'r tanc yn llawn o ddŵr ar y dechrau. Ar amser $t = 0$, mae'r dŵr yn dechrau dianc trwy dwll crwn, gyda radiws 0.01 m, yng ngwaelod y tanc.

Gan gymryd π fel 3.14 a chyfrifo yn gywir i ddau ffigur ystyrion, dangoswch ar amser t s fod

$$\frac{dh}{dt} = -0.00014\sqrt{h}.$$

Faint o amser a gymer i wacáu'r tanc?

- 6 Gellir astudio'n ddamcaniaethol sut mae clefyd nad yw'n angheuol yn ymledu trwy boblogaeth fawr o M o bobl, fel a ganlyn. Mae'r gyfradd o bobl sydd yn awr yn iach ac yn cael eu heintio yn 0.01 gwaith lluoswm y nifer sy'n iach a'r gyfran P o'r holl boblogaeth sy'n heintiedig. Y gyfradd y mae pobl heintiedig yn gwella yw 0.009 gwaith nifer y bobl sy'n heintiedig. Gan nodi bod nifer y bobl sy'n heintiedig ar amser t yn MP , dangoswch y gellir modelu'r broses yn fras gan yr hafaliad differol

$$\frac{dP}{dt} = 0.001(1 - 10P)P$$

gan egluro unrhyw dybiaethau angenrheidiol.

Darganfyddwch P yn nhermau t , o wybod bod $P = 0.01$ pan fydd $t = 0$.

Amcangyfrifwch y boblogaeth sy'n heintiedig pan fydd t yn fawr iawn.

- 7 Mae damcaniaeth economaidd yn awgrymu y gellir cynrychioli'r berthynas rhwng y ddyled wladol $\pounds D$ a'r incwm gwladol $\pounds I$ gan yr hafaliadau differol canlynol:

$$\frac{dD}{dt} = aI, \quad \frac{dI}{dt} = bI,$$

lle mae a a b yn gysonion positif.

Os I_0 a D_0 yw gwerthoedd dechreuol I a D , yn ôl eu trefn, dangoswch fod

$$D = \frac{aI_0}{b} (e^{bt} - 1) + D_0.$$

ATEBION

Ymarferion 1.1

1. $84t^2 + 12t$
2. $9t^2 + 8t$
3. $2t^4 + 3t^3 + t^2 + 2t$
4. $t^5 + t^4 - 3t + 1$
5. $1 + 5t + e^{-t}$
6. 2, 9
7. $5t^3 + t + 2$

Ymarferion 1.2

1. 4 ms^{-1}
2. 9 ms^{-1}
3. 40.24 ms^{-1} , 2.48m
4. (i) 6.24 ms^{-1} (ii) $6.12t - 1.5t^2$ (iii) 14.04

Ymarferion Amrywiol 1

1. (a) 2m (b) 14 ms^{-2}
2. $\frac{32}{27}$, 2, $\frac{4}{3} \text{ ms}^{-1}$
3. $4 \ln \frac{4}{3}$
5. $2 < t < 5$, 8.4
6. $p = 4$, $q = -\frac{8}{3}$, $r = \frac{4}{9}$, $a = 4$, $b = -\frac{4}{3}$, pellter = 4 m
7. $\frac{128}{3} \text{ m}$, $-0.4t \text{ N}$
8. (a) 5 ms^{-1} , 20 ms^{-1} (b) 2 m, 9 m, 11 m
9. $\left(\frac{P-R}{M}\right)\frac{T}{2}$, $\left(\frac{P-R}{M}\right)\frac{T^2}{3}$, $\frac{3(P^2 - R^2)}{16M}T$, $\frac{R(P-R)}{2M}T$
10. 13.3 kW

Ymarferion 2.1

1. 1.6 J
2. 1.86 m
3. 245 J
4. 11.76 J
5. 3.02 J
6. 26.1 N

7. (i) 804.4 J (ii) 1326 J (a) 177.5 N (b) 251 N
9. 69 kJ
10. 9.125 N

Ymarferion 2.2

1. (i) 6 J (ii) -14 J
2. (i) 22 J (ii) 5.5 J (iii) 1 J

Ymarferion 2.3

1. 1 J
2. 8 J
3. 39.1 J
4. 9 J
5. 33 J
6. 0.15 J, 2.25 J
7. 0.25 J

Ymarferion 2.4

1. (i) 6.4 J (ii) 193.6 kJ (iii) 440 J
2. 67.5 kJ
3. 18.7 ms^{-1}
4. (i) 2 kN
(ii) $80000x$ lle mae x m yn cynrychioli'r pellter a dreiddiwyd
5. 68400 J
6. (i) 1132 J (ii) 1.5 ms^{-1}
7. 9.9 ms^{-1}
8. 73.2 J, 2.05 ms^{-1}
9. 2.36 J, 8.74 ms^{-1}
10. (i) 2.48 J (ii) 0.28
11. 13.2 m
12. 9.22 ms^{-1}
13. $u > 6.32$

Ymarferion 2.5

1. 4.41 J, 20.8 kJ, 98 J
2. -20.58 kJ
3. 14 ms^{-1}
4. 1.98 m
5. 1.60 m

6. $\sqrt{3gh/2}$
7. 0.75 ms^{-1}
8. 10 ms^{-1}
9. $.85(ga)^{\frac{1}{2}}$
10. 2.73 m
11. 3 m
12. 1.73 m
13. 3 m
14. 1.805 m

Ymarferion 2.6

1. $24 \exp(6t)$
2. (i) 30 kJ (ii) 11.04 kJ
3. 50.8 ms^{-1}
4. (i) 72.3 kW (ii) 96.4 kW
5. 4.71 kW

Ymarferion 2.7

1. 9 kW
2. 9 kW
3. 500 N
4. 8 ms^{-1}
5. 0.2 ms^{-1}
6. $12.5 \text{ kW}, 9.3 \text{ ms}^{-1}$
7. $48 \text{ kN}, 480 \text{ kW}, 20 \text{ ms}^{-1}$
8. $20.5 \text{ ms}^{-1}, 0.24$
9. $32.1 \text{ ms}^{-1}, 0.96 \text{ ms}^{-2}$
10. $50 \text{ kW}, 0.02 \text{ ms}^{-2}, 0.036$
11. $18.24 \text{ kW}, 0.1$
12. 0.75 ms^{-2}
13. 20 ms^{-1}

Ymarferion Amrywiol 2

1. (a) 1.28 m (b) 8.01 ms^{-1}
2. (b) 5.1 m (c) 1.18 J
3. $540 \text{ N}, 27 \text{ N}$
4. (a) 59150 J (b) $172323, 93.3 \text{ N}$
5. $64 \text{ kJ}, 29.4 \text{ J}, 126.6 \text{ kJ}$
6. 15 J

7. $\frac{mgR}{6}, \frac{\sqrt{gR}}{6}$
8. 8 ms^{-1}
9. $313.6 \text{ N}, 0.245 \text{ m}$
10. (i) 3.16 ms^{-1} (ii) 2.9 ms^{-1}
11. $-3.19 \text{ ms}^{-2}, 3.078 \text{ ms}^{-1}$
12. $2a$
14. $4.5l$
15. $\sqrt{2gx}$
16. $\sqrt{\frac{18ga}{5}}$
17. (i) $\frac{7a}{9}$ o dan 0 (ii) $\frac{2}{3}(ag)^{\frac{1}{2}}$
18. $40500 \text{ J}, 7840 \text{ J}, 48.34 \text{ kW}$
19. $\frac{P}{20}, 14000, 0.6 \text{ ms}^{-2}$
20. $100(700 + R), 300$
21. $\frac{1000R}{V} - Mgsin\alpha - Ma$ newton
22. (i) 20 ms^{-1} (ii) 0.75 ms^{-2}
23. 38 kW (i) 0.475 ms^{-2} (ii) 1382.5 N ; Nid yw'n gallu; $m \leq 2000$
24. $20 \text{ kW}, 19.44 \text{ ms}^{-1}, 800 \text{ N}, 0.39 \text{ ms}^{-2}$
25. $500 \text{ N}, 36.9 \text{ kW}$
26. $35 \text{ kW}, 0.73^\circ, -0.59$
27. 300 N (i) 0.2 ms^{-2} (ii) 255 N

Ymarferion 3.1

1. (i) 36 N (ii) $c = 1800$
2. $k = 2.74 \times 10^5$
3. 21 Ns

Ymarferion 3.2

1. $4.75 \text{ ms}^{-1}, 13.7 \text{ Ns}$
2. $2.09 \text{ ms}^{-1}, 0.42 \text{ Ns}$
3. 0.32 m
4. $1.01 \text{ s}, 1.86 \text{ ms}^{-1},$
5. 2.86 s
6. 0.36 m

Ymarferion 3.3

- (a) 2 ms^{-1} , 10 Ns (b) $\frac{\sqrt{13}}{2} \text{ ms}^{-1}$, $\frac{5\sqrt{13}}{2} \text{ Ns}$ (c) $\sqrt{\frac{7}{2}} \text{ ms}^{-1}$, $5\sqrt{\frac{7}{2}} \text{ Ns}$
(d) $\sqrt{3} \text{ ms}^{-1}$, $5\sqrt{3} \text{ Ns}$
- 42 Ns , $\frac{28}{\sqrt{2}} \text{ Ns}$
- 12 ms^{-1} , 378 J , 1.4 kg
- $\frac{17}{60} \text{ s}$, 1.8 ms^{-1} , 3.645 J

Ymarferion Amrywiol 3

- (i) 3 ms^{-1} (ii) 3600 Ns (iii) $1333\frac{1}{3} \text{ kN}$, $533\frac{1}{3} \text{ N}$
- $\frac{3g}{10}$, 2.6 mg , $\frac{2d}{5}$, $\frac{2}{5}\frac{\sqrt{gd}}{5}$
- (i) $\frac{1}{2}mu\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{4}mu\sqrt{3}$, $\frac{1}{4}u\sqrt{7}$
- (a) $\frac{m}{2}\sqrt{u^2 - ga}$ (b) $\frac{mg}{4}$ (c) $\sqrt{7ga}$
- (i) 1.4 ms^{-1} (ii) 11.76 J (iii) 0.49 s

Ymarferion 4.1

- (i) 6.36 , 6.36 (ii) -7.5 , 13 (iii) 6.58 , -2.39 (iv) -4.1 , -11.28
(v) 1.74 , -9.85
- (i) 6.32 ms^{-1} ar 71.6° i Ox (ii) 8.54 ms^{-1} ar 111° i Ox
(iii) 12.6 ms^{-1} o dan Ox ar 71.6° (iv) 9.85 ms^{-1} ar 204° i Ox
(v) 19.21 ms^{-1} ar 51.3° o dan Ox
- (i) 5 , $2 + 8t$ (ii) 3 , $4 - 6t$ (iii) $16t$, $10t + 12t^2$ (iv) $-e^{-t}$, $-e^{-t} - 2e^{-2t}$
- 18.68 ms^{-1} ar 74.5° i Ox 8.54 ms^{-1} ar 69.4° o dan Ox

Ymarferion 4.2

- $4t$, $5t - 4.9t^2$, $t = 1.02$, 4.08 m
- $6t$, $11t - 4.9t^2$, 6.17 m
- $4t$, $12t - 4.9t^2$, 4.57 ms^{-1} ar 28.8° uwchben y llorwedd,
 66.5 ms^{-1} ar 86.6° o dan y llorwedd
- $21.65t$, $12.5t - 4.9t^2$, $t = 2.55$, 55.2 m
- $24t$, $18t - 4.9t^2$, $t = 1.84$, 16.5 m
- $37.59t$, $13.68t - 4.9t^2$, 37.8 ms^{-1} ar 5.9° uwchben y llorwedd
 74.8 ms^{-1} ar 59.9° o dan y llorwedd
- 61.8 m
- 2.06 m

9. 96.8 m
10. 5 ms^{-1} , 12.3 ms^{-1}
11. 19.6 ms^{-1}
12. Ydy, 35.8 ms^{-1}

Ymarferion Amrywiol 4

1. $20t$, $15t - 4.9t^2$, 1.53 s, 61.2 m
2. (a) (i) 4.9 s, 34.3 m (b) 83.3 m
3. (a) (i) $24t$, $32t - 4.9t^2$ (ii) -0.3 (b) 60.7 m (c) 19.6 m
4. Fel yn 8.3, $\tan \beta = (1 - 2p) \tan \alpha$, $x_B = r(1 - p)$, $a = 4hp(1 - p)$
5. -2
6. 3
7. $\frac{gT^2}{8}$, 2
8. $\frac{2a}{T}$, $\frac{gT}{2}$
9. 9.7 ms^{-1}
10. $4g$, g
11. 27.3 ms^{-1} ar 28.2° o dan y llorwedd
12. $3nut$, $5nut - \frac{1}{2}gt^2$, $16a - 4ut$, $17a + 3ut - \frac{1}{2}gt^2$, 4
13. (b) $\frac{3}{4}$, (c) $10.4a$
14. (a) $\tan \alpha$ $\frac{g}{2V^2 \cos^2 \alpha}$ (b) 0.2 m
15. (a) 5 s (b) 122.5 m (c) 17.5 m
16. 0.5, 3
17. $\frac{24v^2}{g}$, $W\sqrt{28}$
18. (b) (i) 2 (ii) 4 m (iii) 8 m (iv) 4 m

Ymarferion 5.1

1. (a) $\frac{1}{2}a$ (b) $-\frac{1}{2}b$, (c) $b - a$, (d) b , (e) $a - b$
(f) $\frac{1}{2}(b - a)$
2. (a) $\frac{1}{3}a$, (b) $a + b$ (c) $b + \frac{1}{3}a$ (d) $-\frac{2}{3}a$, (e) $\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a$
3. (a) $-a$, (b) $-b$ (c) $a - b$ (d) $\frac{19}{20}b - 2a$
4. $16a - 8b$ (b) $4a + 38b$ (c) $-16a + 18b$
5. (a) 6.9 ar ongl 11.44° i a (b) 24.65 ar ongl 12.8° i a

Ymarferion 5.2

1. (a) $x = -4, y = 1$, (b) $x = -1, y = 5$, (c) $x = 5, y = 2$
2. (a) $-5\mathbf{i} + 31\mathbf{j}$ (b) $-19\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ (c) $-3\mathbf{i} + 33\mathbf{j}$ (d) $21\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$
3. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$
4. $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}, 2\mathbf{i} - 9\mathbf{j}, -3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}, -7\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, -5\mathbf{i} - \mathbf{j}$
5. (a) $13, \frac{5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}}{13}$, (b) $\sqrt{53}, \frac{2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}}{\sqrt{53}}$
(c) $\sqrt{45}, \frac{-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}}{\sqrt{45}}$ (d) $\sqrt{52}, \frac{-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}}{\sqrt{52}}$
6. (a) $2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}$, (b) $-3\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, (c) $-9.4\mathbf{i} - 3.42\mathbf{j}$, (d) $2.3\mathbf{i} - 1.93\mathbf{j}$
7. (a) $\sqrt{58}$ ar ongl 66.8° i $\mathbf{i}$ yn y pedrant cyntaf
(b) $\sqrt{52}$ ar ongl 56.3° i $\mathbf{i}$ yn y pedwerydd pedrant
(c) $\sqrt{29}$ ar ongl 68.2° i $\mathbf{i}$ yn yr ail bedrant
(d) $\sqrt{80}$ ar ongl 26.6° i $\mathbf{i}$ yn y trydydd pedrant
8. (a) $25(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$ km, (b) $40(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j})$ km, (c) $-55\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ km
(d) $37.5(-\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j})$ km

Ymarferion 5.3

1. (a) $x = -2, y = 0, z = -1$, (b) $x = 2, y = 2.5, z = 2.25$, (c) $x = -3, y = 15, z = \frac{4}{3}$
2. (a) $30\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$, (b) $21\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (c) $-5\mathbf{i} + 29\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$
(d) $21\mathbf{i} - 23\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$
3. $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}, -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
4. $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 13\mathbf{k}, -7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
5. (a) $6, \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}$, (b) $\sqrt{65}, \frac{5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{65}}$ (c) $\sqrt{61}, \frac{4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{61}}$

Ymarferion 5.4

1. (a) 33, (b) 46, (c) -11, (d) 7
2. (a) 12.3° , (b) 1.22° (c) 169.5° (d) 155.7°
3. (a) $7\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (b) $11\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$
4. 166°
5. (a) 68° (b) 120°
6. 5.2, 6.86
7. (a) $\frac{17}{5}, \frac{17}{25}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}), \frac{56}{25}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$, (b) $\frac{69}{13}, \frac{69}{169}(12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}), \frac{240}{169}(5\mathbf{i} - 12\mathbf{j})$

Ymarferion 5.5

- (a) 38, (b) -13, (c) 16, (d) -6
- (a) perpendicwlar, (b) 66.6° , (c) 4.72° , (d) perpendicwlar
- 108.9°
- $\sqrt{66}$, $\sqrt{20}$
- $p = -\frac{7}{50}$
- (a) $\frac{22}{3}$, $\frac{22}{9}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$, $\frac{\mathbf{i} + 32\mathbf{j} - 17\mathbf{k}}{9}$
(b) 1, $\frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}}{13}$, $\frac{36\mathbf{i} + 87\mathbf{j} + 38\mathbf{k}}{13}$

Ymarferion 5.6

- (a) $2\mathbf{i} + 20t^3\mathbf{j}$, $60t^2\mathbf{j}$ (b) $e^t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$, $e^t\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$
(c) $-\sin t\mathbf{i} + 2\cos 2t\mathbf{j}$, $-\cos t\mathbf{i} - 4\sin 2t\mathbf{j}$ (d) $2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + 6t\mathbf{k}$
(e) $-\sin t\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 3\cos 3t\mathbf{k}$, $-\cos t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} - 9\sin 3t\mathbf{k}$
(f) $2e^{2t}\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$, $4e^{2t}\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j} - \frac{1}{t^2}\mathbf{k}$
- (a) $-\frac{a}{t^2}$, (b) $-a\sin t + 2tb$, (c) $e^t a - 2e^{-tb}$
- $\frac{d^2 r}{dt^2} = -n^2 r$
- (a) $t^4\mathbf{i} + t^6\mathbf{j} + \mathbf{b}$, (b) $e^{2t}\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \mathbf{b}$, (c) $\sin 2t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j} + \mathbf{b}$,
(d) $t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k} + \mathbf{b}$, (e) $2\sin t\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} - 4\cos t\mathbf{k} + \mathbf{b}$,
(f) $e^{2t}\mathbf{i} + \sin 4t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{b}$.
- (a) $45\mathbf{i} + 99\mathbf{j}$, (b) $63\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$
- (a) $\mathbf{r} = t^7\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k} + 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
- $\mathbf{r} = \frac{1}{2}t^2\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c}$, lle mae $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ yn fectorau cyson

Ymarferion Amrywiol 5

- (a) $(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})m$, (b) $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, 31°
- $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$
- $-6\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $-\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$
- $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$
- $6\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$, 13, 10, 114
- $(10 - 2\mu)\mathbf{i} + (1 + 3\mu)\mathbf{j} + (2 + 3\mu)\mathbf{k}$ $\lambda = \frac{3}{5}$, $\mu = \frac{2}{3}$
- $\frac{p}{q} = \frac{1}{6}$

8. $\frac{1}{17}(-6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}), \quad \frac{1}{17}(40\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 47\mathbf{k})$
9. (a) -3 , (b) $\frac{4}{3}$, (c) $10, -0.4$
10. $6, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$
11. $\frac{(\mathbf{i} - \mathbf{j})}{\sqrt{2}}$

Ymarferion 6.1

1. (a) $(16\mathbf{i} - 15\mathbf{j}) \text{ N}$, (b) $15\mathbf{i} \text{ N}$, (c) $(9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) \text{ N}$, (d) $(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \text{ N}$
2. 24.8°
3. $70.5^\circ, 35.3^\circ$
4. $23\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 68\mathbf{k}$
5. $(5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}) \text{ N}, (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ N}$
6. (a) $(-9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) \text{ N}$, (b) $(-10\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ N}$, (c) $(-9\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \text{ N}$, (d) $(3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \text{ N}$
7. (a) -2 J , (b) 66 J , (c) -15 J , (d) 16 J
8. (a) 4 J , (b) 38 J , (c) 124 J , (d) -56 J
9. $5(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \text{ N}$

Ymarferion 6.2

1. (a) $(42t\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) \text{ ms}^{-2}$, (b) $(4e^{-t}\mathbf{i} + 8e^{2t}\mathbf{j}) \text{ ms}^{-2}$, (c) $(-16\mathbf{j} + 84t\mathbf{k}) \text{ ms}^{-2}$,
(d) $(16e^{4t}\mathbf{i} - 8e^t\mathbf{j} - 14\cos t\mathbf{k}) \text{ ms}^{-2}$
2. $(54\mathbf{i} + 45\mathbf{j}) \text{ m}$
3. $(37\mathbf{i} - 35\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$.
4. 7.11 m
5. 17.03 ms^{-1}
6. 16.28 m
7. (a) $(3t - 300)\mathbf{i} + (210 - 6t)\mathbf{j}$, (b) $t = 48, 174.4 \text{ m}$
8. $15, 150$
10. $-30(1 + 2t)\mathbf{i} + 30(10t - 1)\mathbf{j} + (60t - 2)\mathbf{k}$, $t = 4.52 \text{ munud}$
11. $281.1 \text{ km awr}^{-1}$ ar $84.9^\circ \text{ D o'r Gn}$
12. 1.47 ms^{-1} ar $28.7^\circ \text{ G o'r Gn}$
13. $51.3^\circ, 12.8 \text{ s}$

Ymarferion 6.3

1. (a) $(2.5e^{-t} + 5.5t - 0.5)\mathbf{i} + (0.75t^5 + 5t + 1)\mathbf{j}$,
(b) $(5t^3 - 10t + 6)\mathbf{i} + (5t^4 - 26t + 14)\mathbf{j}$,
(c) $(t^2 + 3t + 5)\mathbf{i} + \left(\frac{4}{3}t^3 - 2t - 4\right)\mathbf{j} + (4e^{2t} - 4t + 1)\mathbf{k}$,

- (d) $\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + (-t^3 + t + 6)\mathbf{j} + (t^5 - t - 2)\mathbf{k}$
2. (a) 0.82 Ns, (b) 0.85 Ns, (c) 2.47 Ns, (d) 3.93 Ns
 3. (a) $(9\mathbf{i} + 24\mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$, (b) $(6\mathbf{i} + 25\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$
 4. 4.37 Ns ar 59° i'r cyfeiriad ar ôl y gwrthdrawiad
 5. (a) $t^4 (0.4 + 4.9t^4) \text{ J}$, (b) $t^2 (7.2 + 12.8 t^4) \text{ J}$,
(c) $(10 \cos^2 t + 3.6 \sin^2 t + 14.4 t^2) \text{ J}$, (d) $(9t^2 + 8e^{-2t}) \text{ J}$
 6. (a) $(0.8t^3 + 14.4t^7) \text{ W}$, (b) $(9.6t + 86.4t^7) \text{ W}$,
(c) $(-10.8 \cos 2t \sin 2t + 45 \sin 3t \cos 3t + 21.6t) \text{ W}$, (d) $(50t - 144e^{-4t}) \text{ W}$
 7. (a) 5.3 J, (b) $14.4\pi^2 \text{ J}$

Ymarferion Amrywiol 6

1. (a) $-m \mathbf{i} \text{ Ns}$, (b) $\frac{1}{2} m(1 + \pi^2) \text{ J}$, (c) $2m(\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}) \text{ N}$, (d) $2m(1 + \pi^2) \text{ W}$
2. (a) $10 \frac{2}{3}$
3. (a) $[2(\pi a \cos \pi t + 2bt)\mathbf{i} + (-\pi c \sin \pi t + 2dt)\mathbf{j}] \text{ Ns}$,
(b) $[(\pi a \cos \pi t + 2bt)^2 + (-\pi c \sin \pi t + 2dt)^2] \text{ J}$,
(c) $[2(-\pi^2 a \sin \pi t + 2b)\mathbf{i} + (-\pi^2 c \cos \pi t + 2d)\mathbf{j}] \text{ N}$
 $a = -4, b = 20, c = \frac{4}{\pi}, d = 4, \text{ pŵer} = 160(\pi^2 + 10) \text{ W}$
4. 18 J, 3 ms^{-1}
5. (a) $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ (b) $t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ (c) $t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$
6. $(2.4 \cos 2t \mathbf{i} + 8e^{4t} \mathbf{j}) \text{ N}$, $(7.2 \sin 2t \cos 2t + 40e^{8t}) \text{ W}$
7. (a) $(4 \cos 4t \mathbf{i} - 4 \sin 4t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$, $(-16 \sin 4t \mathbf{i} - 16 \cos 4t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \text{ ms}^{-2}$,
(b) $0.8t \text{ W}$
8. (a) $\frac{2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3}$, (b) 4 N, (c) 36 J
9. (a) $(0.7\mathbf{i} + 6.3\mathbf{j}) \text{ Ns}$, (b) 12.6 J
10. (a) $(14\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \text{ N}$, (b) $\sqrt{349} \text{ N}$, (c) 71, (d) 0.75, (e) 87 J
11. (a) $(\mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) \text{ ms}^{-2}$, (b) $\left(\frac{t^2}{2}\mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\right) \text{ m}$
12. (a) $(2\mathbf{i} - 12 \sin 3t \mathbf{j} + 12 \cos 3t \mathbf{k}) \text{ ms}^{-1}$, (b) $t = \frac{1}{2}$
13. (b) 300 km awr^{-1} , (c) $(11 - 2t)^2 + (1 + t)^2 + 9t^2, t = 1.5$
14. $[(3 - t)\mathbf{i} + (12 + 3t - kt) \mathbf{j}] \text{ m}$, (a) $k = 7, t = 3$, (b) $\frac{15}{2}, \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ m}, 3 \leq t \leq 12$
15. (a) 1.3 J, (b) 0.33
16. (a) $(-0.3\mathbf{i} + 2.1\mathbf{j}) \text{ Ns}$, (b) 18.9 J
17. (a) $(3 \cos t \mathbf{i} - 5 \sin t \mathbf{j}) \text{ ms}^{-1}$, 5, 3, (b) $\frac{8}{17}$, (c) $4.8 \sin t \cos t \text{ W}$, 2.4 W

18. $-0.4\pi (\cos \pi t \mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j}) \text{ N}$, $[b + t(-6\mathbf{i} + 8\mathbf{j})] \text{ m}$, $3\mathbf{i} + \left(\frac{2}{\pi} - 4\right)\mathbf{j}$
19. (a) $\frac{u}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})t \text{ km}$, $[10(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 10t\mathbf{i}] \text{ km}$,
 (b) $u = \frac{50}{7}$, 1.45 p.m. (c) (ii) 1.30 p.m. (iii) 12.30 p.m.
20. (a) $[(30 - 40t)\mathbf{i} + (20 + pt)\mathbf{j} + 10\mathbf{k}] \text{ km}$,
 $[(-10 + 120t)\mathbf{i} + 200t\mathbf{j} + (15 + qt)\mathbf{k}] \text{ km}$,
 (b) $p = 120, q = -20$

Ymarferion 7.1

1. $x = kt$
2. $x = [2(k - t)]^{\frac{1}{2}}$
3. $v = (k - 3t)^{\frac{1}{3}}$
4. $r = \frac{k}{\cos \theta}$
5. $x = 4e^t$
6. $x = (27 - 2t)^{\frac{1}{2}}$
7. $x = \frac{4}{5 - t^4}$
8. $y = \ln(2 - e^x)$
9. $v = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$
10. $v = \frac{4}{3} - \frac{11}{3}e^{-3t}$
11. $y = \sqrt{1 + (x + 2)^2}$

Ymarferion 7.2

1. 200
2. $r = k \ln s + c$
3. 0.31
4. $1.04 \times$ nifer yn y boblogaeth
5. 50238
6. £598.61
7. 25°
8. 1.8 uned
9. $\frac{dx}{dt} = 2x - 0.01x^2$, $x = \frac{200}{1 + 39e^{-2t}}$

Ymarferion Amrywiol 7

1. $\frac{3n}{4}$

2. (a) $x = 1000 + ae^{0.1t}$, (i) $x = 1000 - 100e^{0.1t}$, (ii) $x = 1000 + 100e^{0.1t}$

(b) $x = 10000e^{at + \frac{1}{2}bt^2}$ 0.235

3. $y = \tan \left(\frac{x^5}{5} + x\frac{\pi}{4} - 630 \right)$

4. $\frac{1}{15} \ln 2$

5. 238 munud

6. $p = \frac{1}{10 + 90e^{-0.001t}}$, 0.1

MYNEGAI

Cadwraeth Egni	21, 66	Gronynnau Cysylltiedig	48
Cydrannau	90	Grym Cydeffaith	85
Cydrannu Rhannau	103	Gwaith a Wnaed,	8, 130
Cyflymiad,		grym cyson	8, 115
sy'n dibynnu ar amser	1	grym yn dibynnu ar safle	11
Cyflymder	59	tyniant mewn llinyn elastig	13
Egni,		Hafaliad Differol	137
cadwraeth	21, 66		
cinetig	14, 128	Momentwm Ergyd,	
disgyrchiant	20	egwyddor	44, 127
elastig	20		
potensial	20	Pŵer	30, 128
Egwyddor Gwaith Egni	14, 32, 129		
Elastig,		Sgalar	82
egni	20		
Fectorau,	82	Taflegrau	65
adio	85, 92	Tyniannau Ergydiol,	
differu	107	llinynnau	46
integru	107	pwliau	50
lluoswm sgalar	101, 104		
maint	83, 93		
modwlws	83		
perpendicwlar	102		
safle	84		
uned	85, 93		

