CBAC
WJEC

MATHEMATEG

Mecaneg
Uned M1

W E Williams a S Y Barham

SAFON UG/UWCH

Cyhoeddwyd gan Uned Iaith Genedlaethol Cymru,
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru,
245 Rhodfa'r Gorllewin,
Caerdydd
CF5 2YX

Mae Uned Iaith Genedlaethol Cymru
yn rhan o WJEC CBAC Cyf.,
cwmni a gyfyngir gan warant
ac a reolir gan awdurdodau unedol Cymru.

Mathemateg Safon UG/Uwch CBAC
Mecaneg
Uned M1

Cyhoeddwyd dan nawdd Cynllun Cyhoeddiadau
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru

Cyhoeddwyd gyntaf 2001

Argraffwyd gan Wasg Gomer,
Llandysul, Ceredigion, SA44 4QL

ISBN: 1 86085 520 2

RHAGYMADRODD

Bu'r Athro Williams yn Brif Arholwr papur Mathemateg A2 a phapurau modylol Mathemateg Gymhwysol Cyd-bwyllgor Addysg Cymru, a bu hefyd yn Brif Arholwr nifer o fyrddau arholi eraill.

Dr Barham yw Prif Arholwr presennol y papur Mathemateg A2 a'r papurau modylol Mathemateg Gymhwysol, a hefyd bapurau modylol newydd Cyd-bwyllgor Addysg Cymru.

Mae'r gyfrol hon yn cwmpasu maes llafur M1 newydd Cyd-bwyllgor Addysg Cymru ac yn cymryd yn ganiataol yr wybodaeth o Fathemateg Bur a gynhwysir ym maes llafur P1 yn unig.

Ymdrechwyd i gyflwyno'r deunydd yn y fath fodd fel y gall myfyrwyr wneud cynnydd sylweddol cyn y bydd arnynt angen rhywfaint o'r cysyniadau Mathemateg Bur sydd ychydig yn fwy soffistigedig.

Ym Mhenodau 2 a 3, dim ond y priodweddau sylfaenol, a berthyn i driongl ongl sgwâr, o'r ffwythiannau trigonometrig sydd wedi eu cymryd yn ganiataol.

Dylai'r deunydd ym Mhennod 4, ac eithrio 4.4, fod o fewn cyrraedd y sawl sydd heb unrhyw wybodaeth o galcwlws. Yn yr un modd, nid yw unrhyw rannau o'r deunydd ym Mhenodau 6 a 7 yn ddibynnol ar galcwlws.

Rydym yn ddyledus i nifer o athrawon a gynigiodd amrywiol awgrymiadau. Yn arbennig, diolchwn i Kevin McGuire, John Langley ac Elwyn Davies am wirio ac anfon atom atebion cywir i ymarferion.

Gwnaed pob ymdrech i ddiddymu gwallau a oedd yn bresennol mewn fersiynau blaenorol o'r gyfrol hon. Serch hynny, cyfrifoldeb yr awduron yw unrhyw rai a allai fod yna o hyd.

Cynnwys

Pennod 1

Mecaneg a modelu

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon
- dylai bod gennych ryw syniad o egwyddorion modelu mewn Mecaneg,
- dylech fod yn ymwybodol o rai o gyfyngiadau'r model gronynnol.

1.1 Egwyddorion sylfaenol modelu

Yn y bôn, Mecaneg yw'r broses o astudio beth sy'n achosi i wrthrychau symud a sut maent yn symud. Mae Stateg yn ymwneud â gwrthrychau llonydd (disymud) tra bo Dynameg yn ymwneud â gwrthrychau sydd yn symud. Mae gwybodaeth o Fecaneg yn hanfodol ar gyfer cynllunio llawer o'r pethau cyfarwydd mewn bywyd bob dydd, e.e. ceir, awyrennau, pontydd, ffyrdd, tai. Mae'n bwysig, yn enwedig wrth gynllunio rhywbeth newydd a chymhleth fel pont neu gar, fod gennych ryw syniad a fydd y cynllun yn gweithio. Mae hi braidd yn rhy hwyr i ddarganfod bod diffyg ar ôl i'r bont gael ei hadeiladu!

Y ffordd hawsaf o ddarganfod a yw'r cynllun yn foddhaol yw ceisio diffinio'r broblem go iawn mewn termau mathemategol ac yna ddefnyddio dulliau mathemategol i ragfynegi beth fydd yn digwydd. Dyma beth a olygir wrth greu model mathemategol o sefyllfa go iawn ac, yn y bôn, pwrpas model mathemategol yw symleiddio problem yn y byd go iawn a'i chynrychioli'n fathemategol. Mae problemau go iawn yn aml yn gymhleth ac, fel rheol, cyn gellir gwneud unrhyw fathemateg o werth, rhaid llunio rhagdybiaethau sy'n symleiddio'r broblem. Wrth wneud hyn, rhaid cadw nodweddion sylfaenol y broblem. Unwaith bod y tybiaethau wedi eu gwneud, gellir gwneud cyfrifiadau a chymharu'r rhagfynegiadau ag unrhyw ddata arbrofol sydd ar gael.

Os bydd y rhagfynegiadau damcaniaethol a chanlyniadau'r arbrofion yn cytuno'n dda, yna mae'r model wedi cynrychioli'r broblem go iawn yn llwyddiannus ac mae datrysiad boddhaol wedi ei ddarganfod. Dyma'r ddolen allanol yn y diagram canlynol.

Adnabod y broblem → Creu model → Cael datrysiad mathemategol i'r broblem

↑

Gwella'r model

↑ ↓

Nac ydynt

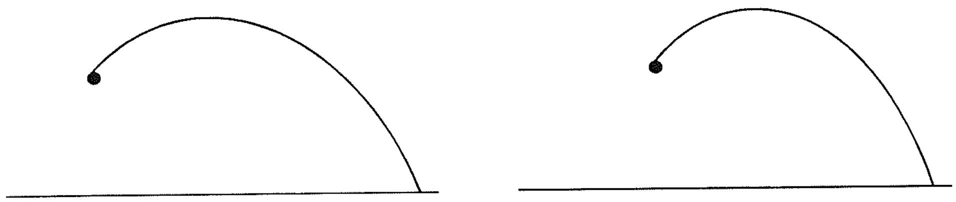
↑

Cyflwyno'r canlyniadau ← Ydynt ← A yw'r canlyniadau yn cytuno â'r arsylwadau? ← Dehongli'r datrysiad

Os nad yw'r model yn cytuno â'r arsylwadau, yna bydd rhaid newid y model (ei wella) ac ail-wneud y broses, efallai sawl gwaith. Dyma'r ddolen fewnol yn y diagram uchod. Mantais model mathemategol yw, unwaith y dangoswyd ei fod yn ddilys gydag amrediad o baramedrau, mae'n bosibl rhagfynegi beth fydd yn digwydd, heb arbrofion pellach, pan gaiff y paramedrau eu newid. Er enghraifft, gellir creu model mathemategol o symudiad bympar car mewn damwain. Byddai'r model hwn yn cynnwys paramedr sy'n disgrifio ymddygiad y sbring rhwng y bympar a chorff y car. Gellir cadarnhau'r model trwy drawiadau arbrofol gydag un neu ragor o fathau o sbring, darganfod sut mae'r bympar yn ymddwyn gyda'r mathau gwahanol o sbring ac yna ymgorffori'r cynllun mewn ceir newydd heb orfod cynnal profion dinistriol pellach.

Mewn sefyllfaoedd fel cynllunio pont neu awyren newydd, byddai modelau wrth raddfa yn cael eu hadeiladu er mwyn cymharu'r cyfrifiadau â chanlyniadau'r arbrofion. Mewn llawer o gymwysiadau safonol ym myd peirianneg fodd bynnag, deëllir y tybiaethau modelu yn dda fel rheol a chawsant eu profi dros amser maith; yn yr achosion hyn gellir defnyddio'r model mathemategol i gynhyrchu nodweddion arbennig o'r cynllun heb orfod cynnal profion pellach.

Yn eich cwrs Mecaneg bydd angen i chi fodelu sefyllfaoedd eithaf syml trwy wneud tybiaethau safonol ac yna fod yn ymwybodol o oblygiadau'r tybiaethau hyn. Er enghraifft, efallai mai'r broblem fydd hyrddiwr pwysau yn taflu pwysyn ar gyflymder penodol ac y gofynnir i chi ddarganfod lle mae'r pwysyn yn taro'r ddaear. Byddwch yn dysgu y gellir cael datrysiad eithaf syml os modelir y pwysyn fel gronyn a thybio bod cyflymiad disgyrchiant yn gyson. Bydd y model yn rhagfynegi'r llwybr ar y chwith yn y diagram a welwch ar frig y dudalen nesaf, a bydd y llwybr go iawn yn debyg i'r un ar y dde.



Efallai nad yw'n amlwg pa ragdybiaethau modelu y dylid eu newid er mwyn i ganlyniadau'r model gytuno â'r arsylwadau. Rydych yn gyffredinol yn ymwybodol, wrth gerdded a rhedeg, eich bod yn teimlo rhywfaint o wrthiant aer ac felly mae'n bosibl y byddai'n rhesymol gwella'r model er mwyn cymryd hyn i ystyriaeth. Nid yw hyn yn hawdd iawn gan fod rhaid ystyried mathau gwahanol o wrthiannau aer. Yn y pen draw mae'n bosibl cyrraedd model mwy manwl gywir ond mae'r cyfrifiadau yn gymhleth. Fodd bynnag, dylech fod yn ymwybodol, pan gymerir gwrthiant aer i ystyriaeth, fod y pellter llorwedd a deithir gan y pwysyn yn llai. Mae cyfrifiadau ar y model mwy cymhleth yn dangos bod y cyfeiliornad a geir wrth anwybyddu gwrthiant aer tua 3% o dan amodau nodweddiadol. Yn ymarferol ni fyddech yn gwybod cyflymder y tafliad nac ongl y tafliad mor fanwl gywir â hyn ac felly nid yw'n werth ceisio creu model cymhleth ar gyfer yr amgylchiadau hyn. Mae'n bwysig, wrth fodelu, peidio â chreu model cymhleth pan nad yw'r data yn y model yn ddigon manwl gywir.

Mae yna amgylchiadau lle mae'n rhaid bod yn hynod fanwl gywir a lle mae data manwl gywir ar gael. Enghraifft o hyn yw llwybr gwennol ofod yn hedfan yn rhydd wrth ddychwelyd i'r Ddaear. Yn yr achos hwn mae angen rhagdybio, er mwyn cael y manwl gywirdeb angenrheidiol, union ffurf cyflymiad y Ddaear, a chymryd i ystyriaeth hefyd gywiriadau oherwydd cylchdro a chrymedd y Ddaear. Yn y Rhestr Termau ym Mhennod 2, disgrifir y rhan fwyaf o'r tybiaethau safonol a wneir fel rheol, a rhoddir disgrifiad manylach o'r tybiaethau yn 2.4.

Mae un dybiaeth fodelu benodol yn cael ei gwneud trwy'r rhan fwyaf o'r llyfr hwn, sef modelu gwrthrych fel gronyn ac ystyrir tybiaethau a chyfyngiadau'r model hwn yn awr.

1.2 Goblygiadau'r model gronynnol

Bron yn ddieithriad yn y problemau a gewch yn eich cwrs, ac yn sicr ym mhob problem sy'n ymwneud â mudiant, bydd pob gwrthrych yn cael ei fodelu fel gronyn. I bob pwrpas, rhywbeth heb faint ond â màs neu bwysau yw gronyn. Cewch union ddiffiniadau o'r rhain mewn penodau diweddarach ond bydd gennych eisoes rhyw syniad beth yw pwysau. Yn fras, cynrychiolir gronyn gan bwynt. Mae dwy dybiaeth sylfaenol ynghlwm wrth ddefnyddio'r model gronynnol. Tybiaeth geometregol yw'r gyntaf yn y bôn, sef bod dimensiynau'r gwrthrych yn fach o'u cymharu â'r dimensiynau eraill yn y broblem. Felly, er enghraifft, wrth ddilyn trywydd awyren mae'n rhesymol i'w chynrychioli gan bwynt oherwydd byddai gwybod lle mae pwynt ar awyren yn rhoi i chi syniad da iawn o ble mae'r awyren gyfan. Dyma yn fras beth sy'n digwydd ar sgriniau radar sy'n dilyn llwybrau awyrennau a llongau. Yng nghyd-destun y gofod mae'r awyren yn llai o lawer na'i phellter o'r orsaf wylio. Yn yr un modd, wrth ddadansoddi mudiant y Ddaear o amgylch yr Haul, o ystyried y pellterau perthnasol gellir yn hawdd gynrychioli'r Ddaear fel gronyn.

Mae'n bwysig iawn sylweddoli, wrth fodelu, fod y model y bydd angen i chi ei ddewis ar achlysur penodol yn dibynnu ar yr achlysur ac ar beth rydych am ei ddarganfod. Er enghraifft mae model gronynnol o gar yn ddigonol i roi gwybodaeth am ei safle a'i gyflymder ond byddai'n hollol annigonol ar gyfer cynllunio ffordd. Yn yr achos hwnnw byddai angen cyfrifo'r pellter 'gweld i oddiweddyd', sef pa mor bell mae'r sawl sy'n gyrru'r car yn gallu gweld er mwyn goddiweddyd ceir arafach yn ddiogel ar y cyflymder y mae'r ffordd wedi'i chynllunio ar ei gyfer. Felly byddai angen i'r model gymryd i ystyriaeth hyd y cerbydau.

Tybiaeth arall wrth ddefnyddio'r model gronynnol yw bod mudiant un pwynt ar y gwrthrych yn cynrychioli mudiant y gwrthrych cyfan i bob pwrpas. Nid yw hyn yn wir bob tro, fel y gellir gweld, er enghraifft, os teflir plât papur i'r awyr. Bydd pob pwynt yn disgyn yn y pen draw ond bydd y plât yn siglo ac yn sicr ni fydd pob pwynt arno yn symud yn yr un ffordd. Gellir profi bod mudiant cyffredinol gwrthrych yn cynnwys mudiant uniongyrchol (trawsfudiad) a hefyd gylchdro. Gellir gweld hyn trwy daflu pêl tuag i fyny oherwydd, fel arfer, bydd hefyd yn cylchdroi neu sbinio.

Mae'r model gronynnol yn anwybyddu'n llwyr y ffaith nad yw pob pwynt yn symud yn yr un ffordd ac felly na ellir ei ddefnyddio i fodelu rhai sefyllfaoedd. I raddau helaeth mae gan bob pwynt ar gar yr un mudiant yn baralel i'r ffordd ac felly mae'r model gronynnol yn ddigonol. Bydd peth mudiant, fodd bynnag, yn berpendicwlar i'r ffordd, oherwydd effaith y crogiant, a byddai angen model sy'n fath ar flwch ynghlwm wrth bedwar sbring i ddadansoddi'r mudiant hwn.

Enghraifft syml o'r model gronynnol yn annigonol yw dodrefnyn tal ar lawr garw yn cael ei wthio ar bwynt yn agos i'r top. Mae'r model gronynnol yn rhagfynegi y bydd y dodrefnyn yn llithro fel un darn ond y gwir yw ei fod yn fwy tebygol o droi drosodd!

Enghraifft arall yw mudiant pêl snwcer. Byddai'r model gronynnol yn rhagfynegi bob amser y bydd y bêl yn symud mewn llinell syth tra mewn gwirionedd gellir achosi iddi symud mewn cromlin. Mae model sy'n cymryd sbin i ystyriaeth yn rhagfynegi'r mudiant crwm. Efallai eich bod wedi gweld pêl golff yn cyrraedd y twll ac yna'n troelli y tu mewn i'r twll a dod yn ôl allan; ni fyddai model gronynnol yn rhagfynegi hyn.

Yr hyn sydd o blaid y model gronynnol ar gyfer problemau mudiant yw bod gan bob gwrthrych bwynt sydd â'i fudiant yn union yr un fath â mudiant gronyn a fyddai â màs hafal i fàs y gwrthrych ac a fyddai'n teimlo effaith yr holl rymoedd allanol sy'n gweithredu ar y gwrthrych. Gyda'r rhan fwyaf o beli bydd y pwynt hwn yn eu canol geometregol. Felly bydd y model gronynnol yn rhoi amcangyfrif da iawn o ble bydd pêl yn glanio ond yn rhoi ychydig iawn o wybodaeth beth fydd yn digwydd ar ôl hynny oherwydd, fel y gwelsoch mewn gemau pêl, caiff y sbin ar y bêl effaith sylweddol ar ei llwybr ar ôl iddi gael ei tharo.

1.3 Gwella modelau

Er mwyn gwella model bydd yn rhaid i chi fod yn sicr iawn beth yw eich tybiaethau modelu cychwynnol ac yna weld pa rai ohonynt y gellir eu newid, neu y dylid eu newid. Y dybiaeth fodelu a wneir amlaf yw anwybyddu ffrithiant neu wrthiant aer ac, fel y cawn weld yn nes ymlaen, yn aml gellir gwella'r model yn eithaf rhwydd er mwyn cymryd y rhain i ystyriaeth. Hyd yn oed pan nad oes angen gwneud cyfrifiad manwl dylech fod yn ymwybodol o oblygiadau ansoddol y gwellhad. Er enghraifft, os teflir pêl yn syth i fyny, bydd ei huchder mwyaf yn llai na'r un a ragfynegir gan fodel sy'n anwybyddu gwrthiant aer. Mae model o'r fath yn goramcangyfrif felly yr uchder mwyaf y mae'r bêl yn ei gyrraedd. Eglurir hyn yn fwy manwl ym Mhennod 5.

Mae'r tybiaethau modelu a ddefnyddir wrth greu'r tabl o bellterau stopio yn Rheolau'r Ffordd Fawr yn tybio bod y ffordd yn wastad. Dylid gwella'r model er mwyn cymryd i ystyriaeth a oes goledd i fyny neu i lawr. Yn ôl y model gronynnol o gar, nid yw'r llethr mwyaf serth y gellir parcio car arno heb iddo lithro yn dibynnu ar y cyfeiriad mae'r olwynion blaen yn pwyntio – i fyny lawr neu i lawr y rhiw. Trwy ddefnyddio model mwy manwl gywir sy'n disgrifio'r car fel blwch ar olwynion, gwelir nad yw hyn yn wir bob amser.

Weithiau mae'n gymharol hawdd gwella'r model gronynnol er mwyn cymryd maint gwrthrych i ystyriaeth i ryw raddau. Er enghraifft, byddwch yn dysgu yn nes ymlaen sut i ddarganfod yr amser mae pêl (a fodelir fel gronyn) yn ei gymryd i gyrraedd wal fertigol ar ôl cychwyn o'r llawr, fel yn y diagram isod ar y chwith.

Os a yw radiws y bêl, gellir cymryd ei maint i ystyriaeth trwy ei chynrychioli gan ronyn sy'n cychwyn ar bwynt bellter a uwchben y llawr, fel yn y diagram ar y dde, ac yna ddarganfod yr amser nes ei bod ar bellter llorwedd a o'r wal.

Ar y llaw arall, mae'n anodd cymryd sbin gwrthrych i ystyriaeth mewn ffordd gymharol syml fel yr uchod.

Pennod 2

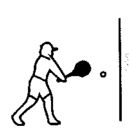
Grymoedd yn gweithredu ar bwynt

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon

- dylai fod gennych syniad clir o beth yw grym,
- dylech ddeall beth a olygir wrth gydeffaith nifer o rymoedd yn gweithredu yn yr un plân ar bwynt a dylech allu darganfod y cydeffaith a'i gydrannau mewn dau gyfeiriad perpendicwlar,
- dylech werthfawrogi rhai o'r syniadau a ddefnyddir wrth fodelu effeithiau grymoedd ar wrthrychau bychain,
- dylech allu datrys problemau yn ymwneud â chydbwysedd gwrthrych bach,
- dylech allu defnyddio'r deddfau ffrithiant ar gyfer achosion syml.

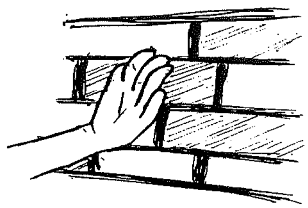
2.1 Grymoedd

Mae gan y rhan fwyaf o bobl syniad greddfol o rym fel "gwthiad" neu "dyniad". O gymryd y syniad hwn ymhellach, bydd gwthio neu dynnu llyfr ar fwrdd, er enghraifft, yn gwneud i'r llyfr symud. Felly, yn yr achos hwn, mae grym wedi achosi newid ym mudiant y llyfr. Mae llu o enghreifftiau eraill o'r hyn fyddai'n cael ei ystyried yn reddfol fel grym yn achosi newid mewn mudiant - er enghraifft, chwaraewr tennis yn taro pêl neu yrrwr yn arafu car.



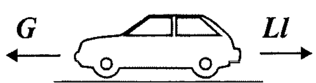
Mewn gwirionedd y syniad o rym fel rhywbeth yn newid mudiant gwrthrych sy'n diffinio grym. Ar sail y diffiniad hwn, mae'r rhan fwyaf o rymoedd, ond nid pob grym, yn cydymffurfio â'r syniad o "wthiad" neu "dyniad". Yn y bôn mae dau ddosbarth o rymoedd: grymoedd cyswllt lle'r achosir y newid mewn mudiant gan gyswllt uniongyrchol, a grymoedd di-gyswllt lle nad oes cyswllt corfforol uniongyrchol â'r gwrthrych. Yr enghraifft amlycaf o rym di-gyswllt yw'r un a achosir gan ddisgyrchiant. Mae hwn yn cyfateb i'r syniad syml o "dyniad", fodd bynnag, oherwydd petaech yn neidio o ben wal, byddech yn sicr o deimlo tyniad!

Er y diffinnir grym fel "yr hyn sy'n newid mudiant gwrthrych" nid yw'n wir bob amser y bydd rhoi grym ar rywbeth yn newid ei fudiant. Er enghraifft, ni fydd gwthio wal frics yn ei dymchwel.



Y rheswm am hyn yw bod grymoedd eraill yn dal y wal at ei gilydd ac ni allwch wthio'n ddigon cryf i oresgyn y rhain. Petai lori yn taro'r wal mae'n debyg y byddai'r wal yn symud. Pan fyddwch yn gwthio wal byddwch yn teimlo gwrthiant, h.y. mae'r wal yn gwthio'n ôl. Dyma enghraifft o drydedd ddeddf Newton, sy'n dweud "i bob arwaith mae adwaith hafal a dirgroes". Mae'r chwaraewr tennis hefyd yn teimlo'r adwaith hwn pan fo'n taro'r bêl.

Enghraifft arall lle efallai y byddech yn meddwl bod grymoedd yn gweithredu ond nad oes newid yn y mudiant yw car yn symud ar fuanedd cyson.

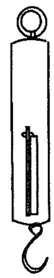


Mae grym gyrru *G* a roddir gan yr olwynion, ond mae grym llusgiad *Ll* hefyd oherwydd gwrthiant aer, a phan nad yw'r buanedd yn newid mae'r grymoedd yn gytbwys, h.y. mae'r grym cydeffaith yn sero.

Rhoddir yr union berthynas rhwng grym a mudiant gan ail ddeddf mudiant Newton (gweler Adran 5.1), sy'n nodi bod y grym sy'n gweithredu ar ronyn symudol mewn cyfrannedd â chyflymiad y gronyn.

Mesur grym

Un o'r ffyrdd symlaf o fesur rhai grymoedd cyswllt yw defnyddio clorian sbring. Teclyn yw hwn lle mae pen uchaf sbring yn sefydlog, bachyn ynghlwm wrth y pen isaf, a'r sbring yn hongian yn rhydd. Mae'r diagram yn dangos math hen-ffasiwn o glorian sbring a welir weithiau ac efallai a welsoch yn eich gwersi gwyddoniaeth neu mewn pecynnau Mecaneg.



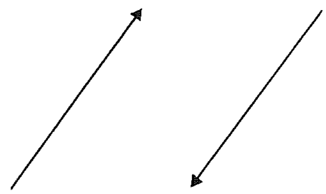
Os tynnwch i lawr ar y bachyn bydd y sbring yn ymestyn a bydd nodwydd fach sydd ynghlwm wrtho yn symud i lawr. Os tynnwch yn galetach bydd y nodwydd yn gostwng yn is. Dull da o fesur grym yw'r glorian sbring oherwydd, gyda grymoedd o faint rhesymol, mae estyniad y sbring mewn cyfrannedd uniongyrchol â'r grym. (Dyma ddeddf Hooke a gyflwynir yn Adran 2.2.) Gellir graddnodi'r glorian trwy gymryd grym penodol fel yr uned o rym ac yna gofnodi ar y raddfa estyniadau sy'n cyfateb i rymoedd gwahanol. Nid yw'r glorian sbring yn ddefnyddiol iawn ar gyfer mesur grymoedd mewn sefyllfaoedd ymarferol ond mae'n bwysig, am resymau damcaniaethol, gwybod y gellir diffinio uned o rym yn annibynnol ar fudiant.

Yr uned o rym a ddefnyddir amlaf yw'r newton, sy'n cael ei dalfyrru yn N, felly ysgrifennir grym o chwe newton fel 6 N. Rhoddir y diffiniad ffurfiol o'r newton yn (5.1). Dynodir mil newton gan 1 kN.

Cynrychioli grymoedd

Os clymir gwrthrych bach wrth roden denau a thynnu pen arall y rhoden, bydd y gwrthrych yn symud i gyfeiriad y rhoden. Mwyaf yr ymdrech a roddir ar y rhoden, mwyaf cyflym y mudiant. Os tynnir y rhoden i gyfeiriad arall bydd y gwrthrych yn symud i gyfeiriad arall. Os, yn y naill achos neu'r llall, caiff y rhoden ei gwthio yn lle ei thynnu, yna bydd y mudiant i'r cyfeiriad dirgroes.

Mae'r rhoden, gan ei bod yn achosi newid mewn mudiant, yn rhoi grym ar y gwrthrych ac mae gan y grym hwn faint (mae mwy o ymdrech yn creu mudiant cyflymach) a chyfeiriad (cyfeiriadau gwahanol y rhoden). Felly gellir cynrychioli grym â llinell mewn cyfeiriad penodol, gyda hyd y llinell yn cynrychioli maint y grym a chyfeiriad y llinell, ar ffurf saeth fel arfer, yn nodi cyfeiriad y grym. Gan fod gwthio a thynnu yn creu mudiannau gwahanol mae'n bwysig dangos y cyfeiriad ar hyd y llinell lle mae'r grym yn gweithredu. Mae'r ddau rym a ddangosir, er eu bod yn gweithredu ar hyd llinellau paralel a hafal eu maint, yn wahanol i'w gilydd gan fod eu cyfeiriadau yn ddirgroes.



Mae mesurau sydd â maint a chyfeiriad yn cael eu galw'n fectorau a byddwch yn dysgu rhagor am y rhain yn llyfr M2.

Er mwyn gwahaniaethu, mewn print, rhwng grym a'i faint, defnyddir teip trwm i gyfeirio at y grym a theip italig ar gyfer y maint. Felly mae $\boldsymbol{F}$ yn cyfeirio at rym ac F at ei faint. Gallech wneud hyn wrth ysgrifennu trwy danlinellu pan ydych yn cyfeirio at y grym a pheidio â gwneud hynny pan ydych yn cyfeirio at ei faint. Os yw grym $\boldsymbol{G}$ yn hafal ei faint i rym arall $\boldsymbol{F}$ ac yn gweithredu ar hyd yr un llinell, neu un baralel, ond i'r cyfeiriad dirgroes, yna gellir dynodi $\boldsymbol{G}$ fel $-\boldsymbol{F}$. Felly os $\boldsymbol{F}$ yw'r grym ar y chwith yn y diagram uchod, yna $-\boldsymbol{F}$ yw'r grym ar y dde.

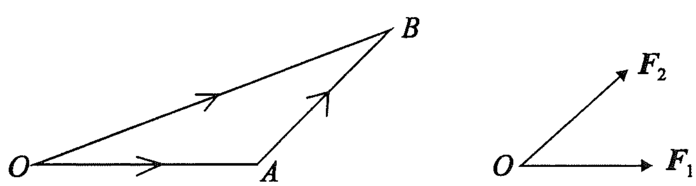
Cyfuno grymoedd

Petai gwrthrych wedi ei glymu wrth ddwy roden, a'r ddwy yn cael eu tynnu, yna, cyn belled nad yw'r tyniadau yn hafal a dirgroes, bydd y gwrthrych yn dal i symud. Fel arfer ni fyddai cyfeiriad y mudiant yn baralel i'r naill roden na'r llall, ond rhywle rhyngddynt. Felly mae grym yn gweithredu ar y gwrthrych. Gelwir hyn yn gydeffaith y ddau rym, sef grym unigol sydd â'r un effaith â'r ddau rym. Wrth gwrs, gallai rhagor na dwy roden fod yn gweithredu ar y gwrthrych ac felly:

Cydeffaith unrhyw nifer o rymoedd yn gweithredu ar bwynt yw'r grym unigol sydd â'r un effaith (h.y. yn creu'r un mudiant) ar wrthrych bach a osodir ar y pwynt hwnnw.

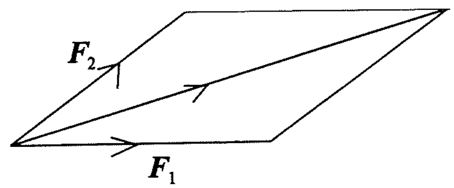
Cydeffaith dau rym yn gweithredu ar bwynt

Mae'r rheol ar gyfer darganfod cydeffaith dau rym yn un anarferol:



Os oes dau rym $\boldsymbol{F}_1$ ac $\boldsymbol{F}_2$ yn gweithredu ar y pwynt O fel a ddangosir, ac os yw'r llinell OA yn cynrychioli $\boldsymbol{F}_1$ a'r llinell AB yn cynrychioli $\boldsymbol{F}_2$, yna mae'r llinell OB yn cynrychioli cydeffaith y ddau rym. Gelwir hyn yn aml, am resymau amlwg, yn "rheol y triongl" ar gyfer cyfuno (neu adio) grymoedd.

Ffordd arall o fynegi'r rheol hon yw dweud bod y cydeffaith yn cael ei gynrychioli, fel a ddangosir isod, gan groeslin y paralelogram a ffurfir gan y llinellau sy'n cynrychioli'r ddau rym (sef " rheol y paralelogram ").



Gellir dangos bod y rheol hon yn ganlyniad i ddeddf mudiant Newton ond gellir hefyd ei phrofi trwy gynnal arbrawf. Efallai eich bod wedi gweld hyn yn un o'ch cyrsiau gwyddoniaeth. Disgrifir arbrawf posibl yn Ymarferion Amrywiol 2, cwestiwn 23.

Gyda dau rym paralel mae'r rheol yn symlach:

(a) gyda dau rym yn gweithredu i'r un cyfeiriad mae'r cydeffaith hefyd yn gweithredu i'r cyfeiriad hwnnw, a'i faint yw swm meintiau'r ddau rym;

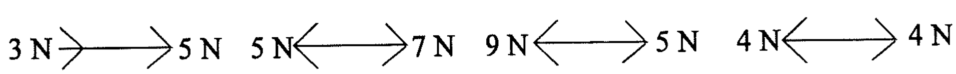
(b) gyda dau rym yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes mae'r cydeffaith yn gweithredu i gyfeiriad y grym sydd â'r maint mwyaf, a'i faint yw'r gwahaniaeth positif rhwng y ddau faint;

(c) gyda dau rym o'r un maint ond i gyfeiriadau dirgroes, sero yw'r grym cydeffaith.

(Gallwch wirio'r rheol hon trwy arbrofi gydag achosion penodol.)

<u>Enghraifft 2.1</u>

Darganfyddwch gydeffaith y systemau canlynol o rymoedd.



(a) (b) (c) (d)

(a) Mae'r ddau rym yn gweithredu i'r un cyfeiriad ac felly mae'r cydeffaith yn gweithredu i'r dde. Ei faint yw 8 N.

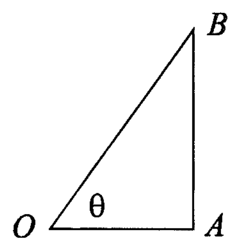
(b) Mae'r grymoedd yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes; gan y grym i gyfeiriad y dde y mae'r maint mwyaf ac felly mae'r cydeffaith yn gweithredu i'r dde. Ei faint yw 2 N.

(c) Mae'r grymoedd yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes; gan y grym sy'n gweithredu i'r chwith y mae'r maint mwyaf ac felly mae'r cydeffaith yn gweithredu i'r chwith. Ei faint yw 4 N.

(d) Mae'r grymoedd yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes; mae gan y ddau yr un maint ac felly sero yw'r cydeffaith.

Enghraifft 2. 2

Mae dau rym perpendicwlar o feintiau 3 N a 4 N yn gweithredu ar bwynt *O*. Darganfyddwch eu cydeffaith.



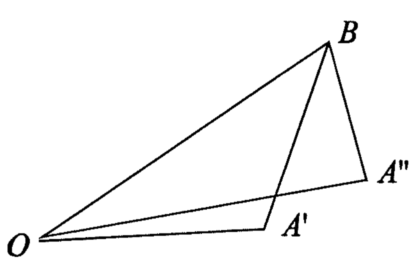
Yn y diagram uchod mae *OA* yn cynrychioli'r grym o faint 3 N ac mae *AB* yn cynrychioli'r grym o faint 4 N. Cynrychiolir eu cydeffaith gan *OB*. Trwy ddefnyddio theorem Pythagoras ei faint fydd $\sqrt{3^2 + 4^2}$ N = 5 N. Rhoddir yr ongl θ gan

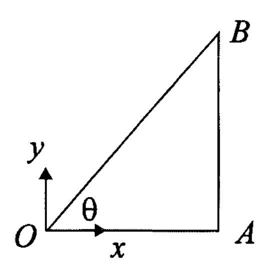
$$\tan\theta = \frac{4}{3}.$$

Mae defnyddio'r ffwythiant $\tan^{-1}$ ar eich cyfrifiannell yn rhoi gwerth θ tua 53.1°.

Mae enghraifft 2.2 yn dangos bod y grym a gynrychiolir gan *OB* (5 N yn gweithredu ar ongl o tua 53.1° i linell ar draws y dudalen o'r chwith i'r dde) yn gydeffaith dau rym perpendicwlar, y naill yn 3 N a'r llall yn 4 N. Cyfeirir at y ddau rym hyn fel cydrannau perpendicwlar y grym ar hyd *OB*.

Cydrannau grym





Yn y diagram uchod ar y chwith mae *OB* yn cynrychioli grym ***F*** a roddir. Gellir tynnu nifer anfeidraidd o drionglau o bwyntiau *A', A'', A'''* ac ati gydag *OB* yn sail pob un. Felly gellir ystyried ***F*** fel cydeffaith grymoedd a gynrychiolir gan *OA'* ac *A'B*, neu *OA''* ac *A''B* ac ati, ac mae nifer anfeidraidd o ffyrdd o fynegi ***F*** yn nhermau dau rym gwahanol neu ddwy gydran. Cyfeirir at y broses o gynrychioli grym yn nhermau dwy gydran fel cydrannu'r grym i'w gydrannau (neu i'w rannau cydrannol).

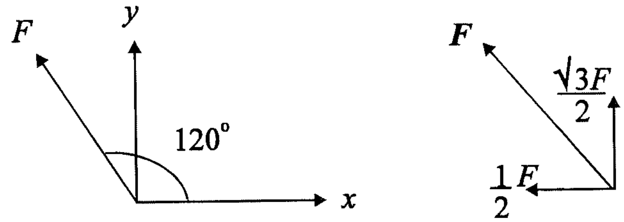
Y dull mwyaf arferol o gydrannu grym yn gydrannau yw ar hyd dwy linell berpendicwlar sy'n rhoi triongl ongl sgwâr, e.e. OAB yn y diagram uchod ar y dde. Er mwyn hwylustod cyfeirio, dewisir echelinau x ac y system gyfesurynnol i fynd i gyfeiriadau OA ac AB yn ôl eu trefn. Mae gan y grym $\boldsymbol{F}$, a gynrychiolir gan OB, gydran i gyfeiriad x (a elwir yn gydran x) ac a ddynodir gan X, ynghyd â chydran i gyfeiriad y (h.y. y gydran y) a ddynodir gan Y. Mae rheol y triongl ar gyfer cydeffeithiau yn nodi, os yw hyd OA mewn cyfrannedd ag X a hyd AB mewn cyfrannedd ag Y, yna mae OB i gyfeiriad F ac mae ei hyd mewn cyfrannedd ag F.

Dynodir yr ongl rhwng cyfeiriad x ac $\boldsymbol{F}$ gan θ. Triongl ongl sgwâr yw OAB a gwyddoch, o ddiffiniadau sin a chosin, fod

$$\frac{OA}{OB} = \cos\theta, \text{ ac felly fod } \frac{X}{F} = \cos\theta, \quad \text{h.y. } X = F\cos\theta\,.$$

Yn yr un modd, $\dfrac{AB}{OB} = \sin\theta$, ac felly mae $\dfrac{Y}{F} = \sin\theta$, h.y. $Y = F\sin\theta$.

Nawr gellir diffinio cydran grym F i gyfeiriad penodol fel $F\cos\alpha$, lle mae α yn cynrychioli'r ongl rhwng F a'r cyfeiriad a roddir. Mae hyn yn gyson â'r canlyniadau uchod gan mai θ yw'r ongl rhwng F a chyfeiriad positif x, a $\frac{\pi}{2} - \theta$ yw'r ongl rhwng F a chyfeiriad positif y. Mae hyn yn rhoi'r gydran y fel $F\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = F\sin\theta$, gan fod $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$. Mae'r diffiniad hwn o gydran yn dangos hefyd, pan fo'r ongl rhwng y grym a chyfeiriad y cyfeirnod yn ongl aflem, y gall y gydran fod yn negatif.



Mae hyn yn digwydd yn y diagram uchod lle mae $\theta = 120^\circ$

ac felly mae $X = F\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}F$ ac $Y = F\cos(30^\circ) = \frac{F\sqrt{3}}{2}$.

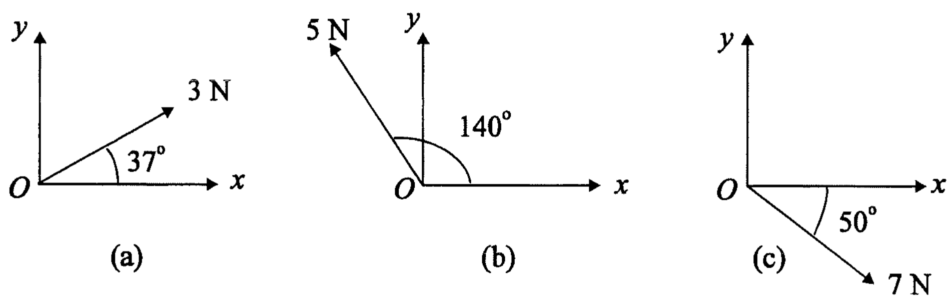
Y cyfan mae hyn yn ei olygu yw bod y grym yn gydeffaith i gyfuniad o rym $\frac{1}{2}F$ i'r chwith a grym $\frac{F\sqrt{3}}{2}$ i fyny'r dudalen.

Rhaid bod yn ofalus iawn gydag arwyddion y cydrannau. Un ffordd o sicrhau hyn yw gofalu dewis yr ongl gywir a chymryd ei chosin yn gywir. Ffordd arall yw cydrannu'r grym i ddwy gydran berpendicwlar bositif ar hyd y llinellau rydych yn mynd i ddarganfod cydrannau arnynt. Dangosir hyn yn y diagram blaenorol. Mae'n werth cofio, os θ yw'r ongl lem gydag un o'r llinellau, yna mai'r cydrannau positif ar hyd y llinellau fydd $F \cos \theta$ ac $F \sin \theta$. Os yw cyfeiriadau'r cydrannau hyn yn ddirgroes i'r cyfeiriad lle mae angen darganfod y gydran yna ceir y gydran yn y cyfeiriad angenrheidiol trwy newid yr arwydd.

Yn y diagram blaenorol, $\frac{1}{2}F$ yw'r gydran i'r chwith ac felly $-\frac{1}{2}F$ yw'r gydran i'r dde. Wrth ddechrau darganfod cydrannau mae'n syniad da dangos y grym a'i gydrannau positif yn y ffordd a ddisgrifiwyd uchod.

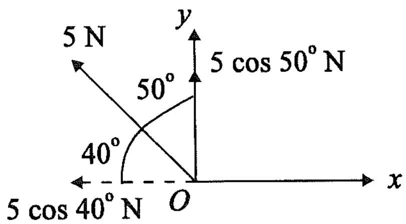
<u>Enghraifft 2.3</u>

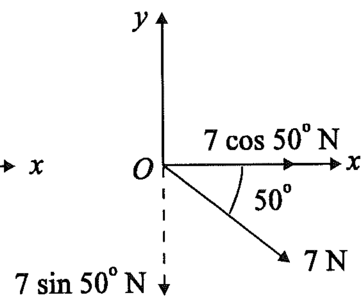
Darganfyddwch gydrannau x ac y ar gyfer y grymoedd canlynol.



(a) Yr onglau rhwng y grym ac echelinau x ac y yw 37° a 53° yn ôl eu trefn ac felly y cydrannau yw 3 cos (37°) N = 2.40 N a 3 cos (53°) N = 1.81 N.

(b) Yr onglau rhwng y grym a chyfeiriadau positif x ac y yw 140° a 50° yn ôl eu trefn ac felly y cydrannau yw 5 cos (140°) N = –3.83 N a 5 cos (50°) N = 3.21 N.
Neu, fel arall, dangosir y cydrannau positif ar hyd yr echelinau x ac y yn y diagram nesaf.





Y cydrannau i'r chwith ac i fyny yw:

5 cos (40°) = 3.83 N a 5 cos (50°) N {neu 5 sin 40° N} = 3.21 N.

Felly, y cydrannau x ac y yw −3.83 N a 3.21 N.

(c) Yr onglau rhwng y grym a chyfeiriadau positif x ac y yw 50° a 140° yn ôl eu trefn ac felly y cydrannau yw 7 cos (50°) N = 4.50 N a 7 cos (140°) N = −5.36 N.

Neu, fel arall, dangosir y cydrannau positif ar hyd yr echelinau x ac y yn y diagram ar y dde uchod.

Y cydrannau i'r dde ac i lawr yw 7 cos (50°) N = 4.50 N a 7 sin (50°) N = 5.36 N.

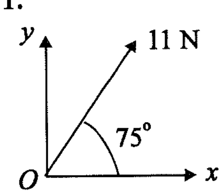
Felly y cydrannau x ac y yw 4.50 N a −5.36 N.

Ymarferion 2. 1

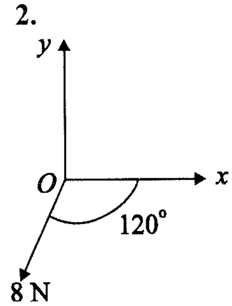
Ym mhob cwestiwn rhifiadol dylai'r atebion gael eu rhoi i dri ffigur ystyrlon.

Darganfyddwch gydrannau x ac y y grymoedd a ddangosir yng nghwestiynau 1 i 4.

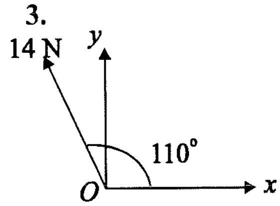
1.



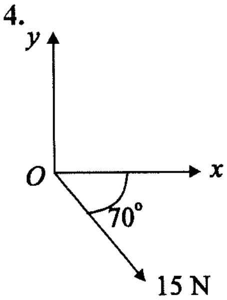
2.



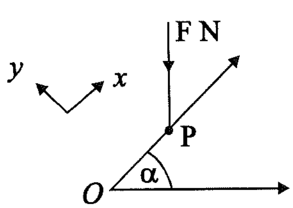
3.



4.



5.



Mae'r diagram yn cynrychioli toriad o blân sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd ac mae grym o faint F N yn gweithredu yn fertigol i lawr ar bwynt P yn y plân. Darganfyddwch gydrannau x ac y y grym hwn, gan gyfeirio at yr echelinau a ddangosir sy'n baralel a pherpendicwlar i'r plân, pan fo

(a) $F = 10$, $\alpha = 30°$, (b) $F = 6$, $\alpha = 50°$.

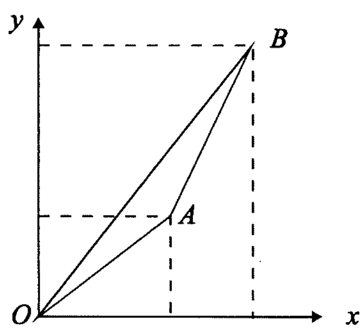
6 Gwnewch yr un cyfrifiadau ag yng nghwestiwn 5 ond â'r grym fertigol wedi ei newid am un llorweddol sy'n gweithredu i'r dde â'i faint yn Q N, pan fo

(a) $Q = 8$, $\alpha = 60°$, (b) $Q = 4$, $\alpha = 70°$.

Cydrannau y cydeffaith o rymoedd yn gweithredu ar bwynt

Gyda sawl grym yn gweithredu ar bwynt, cydran eu cydeffaith i gyfeiriad penodol yw swm cydrannau y grymoedd gwahanol i'r cyfeiriad hwnnw.

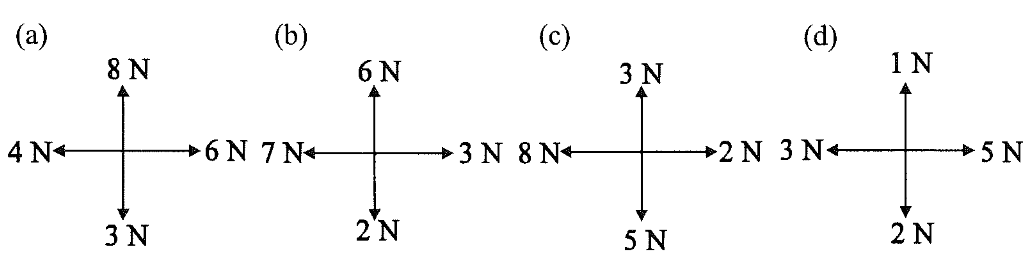
Ni cheisir profi'r canlyniad hwn yn gyffredinol ond gellir gweld yn y diagram isod ei fod yn amlwg yn wir am ddau rym yn yr achos syml a ddangosir.



Yn Enghreifftiau 2.4 i 2.6 cymerir bod cyfeiriad x i'r dde ar draws y dudalen a bod cyfeiriad y i fyny'r dudalen.

Enghraifft 2.4

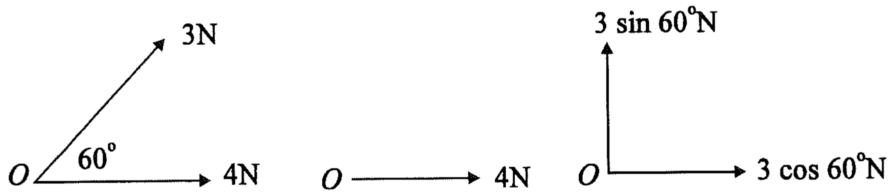
Darganfyddwch gydrannau x ac y cydeffaith y grymoedd canlynol yn gweithredu ar bwynt.



(a) Cyfanswm y gydran x yw 6 N – 4 N = 2 N, a'r gydran y yw 8 N – 3 N = 5 N.
(b) Cyfanswm y gydran x yw 3 N – 7 N = –4 N, a'r gydran y yw 6 N – 2 N = 4 N.
(c) Cyfanswm y gydran x yw 2 N – 8 N = –6 N, a'r gydran y yw 3 N – 5 N = –2 N.
(d) Cyfanswm y gydran x yw 5 N – 3 N = 2 N, a'r gydran y yw 1 N – 2 N = –1 N.

Enghraifft 2.5

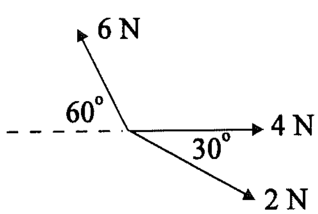
Darganfyddwch gydrannau x ac y cydeffaith y grymoedd 3 N a 4 N, sy'n gweithredu ar y pwynt O, fel a ddangosir yn y diagram ar y chwith isod.



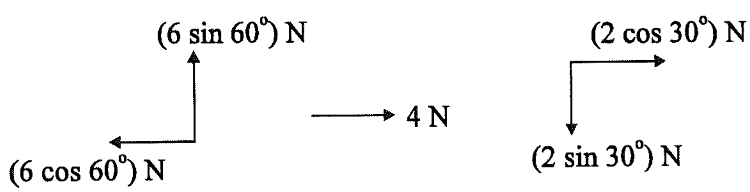
Mae'r ail a thrydydd diagram yn dangos y ddau rym wedi eu cydrannu i'w cydrannau positif ar draws ac i fyny'r dudalen. Cydrannau x ac y y cydeffaith, felly, yw $4 + 3\cos 60^\circ\text{ N} = 5.5\text{ N}$ a $3\sin 60^\circ\text{ N} = 2.60\text{ N}$.

Enghraifft 2.6

Darganfyddwch gydrannau x ac y cydeffaith y grymoedd canlynol sy'n gweithredu ar bwynt O.



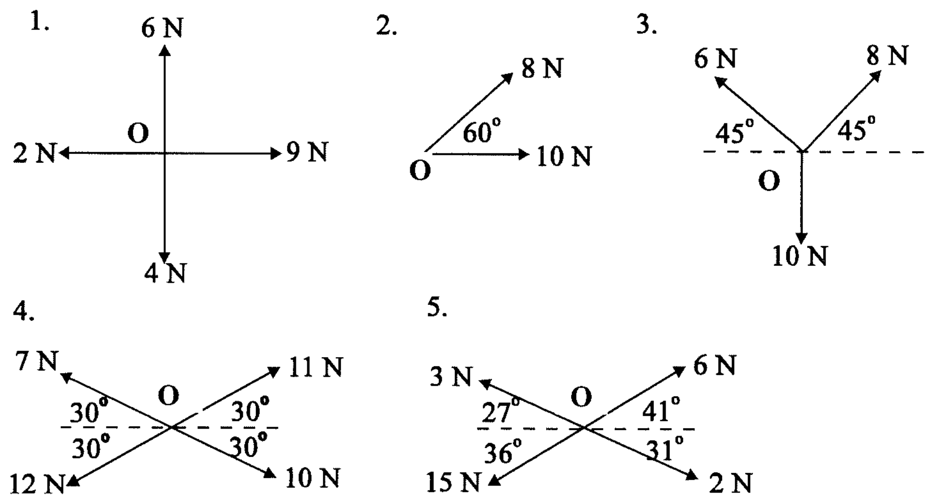
Gellir cydrannu pob grym yn gydrannau fel a ddangosir isod.



Mae gan y grym 6 N gydran negatif $-6 \cos 60^\circ$ N i gyfeiriad positif x, tra bo gan y grym 2 N gydran negatif $-2 \sin 30^\circ$ N i'r cyfeiriad y.
Felly cydrannau x ac y y cydeffaith yw:
$2 \cos 30^\circ + 4 - 6 \cos 60^\circ \text{ N} = 2.73$ N a $6 \sin 60^\circ - 2 \sin 30^\circ \text{ N} = 4.20$ N.

<u>Ymarferion 2.2</u>

Ym mhob un o'r problemau canlynol, darganfyddwch gydrannau x ac y cydeffaith y grymoedd a ddangosir yn gweithredu ar bwynt *O*.



Problemau ar gydbwysedd

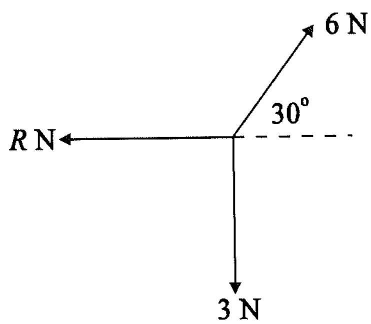
Pan fo gan nifer o rymoedd sy'n gweithredu ar bwynt gydeffaith sero, dywedir bod y grymoedd mewn cydbwysedd. Gan fod pwynt (gronyn) yn fodel ar gyfer gwrthrych bach, gellir dweud, os yw'r grym cydeffaith yn sero, fod y pwynt (gronyn, gwrthrych) mewn cydbwysedd. Mae gwrthrych mewn cydbwysedd yn llonydd - yn ddisymud.
Bydd grymoedd yn gweithredu ar ronyn mewn cydbwysedd os yw swm cydrannau, i ddau gyfeiriad nad ydynt yn baralel, yr holl rymoedd sy'n gweithredu yn sero.
(Mae hyn yn dilyn o reol y triongl oherwydd os oes gan driongl ddwy ochr sy'n sero, yna mae'n rhaid i'w drydedd ochr hefyd fod yn sero.)

Fel arfer, yr amod bod cydrannau i ddau gyfeiriad yn sero ar gyfer cael cydbwysedd yw'r un sydd hawsaf i'w ddefnyddio mewn problemau, ac fe'i defnyddir yn Enghreifftiau 2.7 i 2.9. Gyda phroblemau lle nad oes ond tri grym, mae dull geometregol arall a nodir yn fras ar ôl Enghraifft 2.9.

Er mwyn ymarfer y dechneg gyffredinol mae'n fuddiol edrych yn gyntaf ar ychydig o broblemau sy'n rhifiadol yn y bôn. Rhoddir yn Adran 2.2 broblemau ymarferol lle mae angen modelu a defnyddio'r amodau ffisegol.

Enghraifft 2.7

Darganfyddwch R fel bod y grymoedd a ddangosir isod mewn cydbwysedd.



Mae gan y grym 6 N gydrannau 6 cos 30° N i'r dde a 6 sin 30° N i fyny'r dudalen. Mae gan y grym anhysbys gydran o faint R N i'r chwith ac mae gan y trydydd grym gydran o faint 3 N i lawr y dudalen.

Gan gofio cyfeiriadau'r gwahanol rymoedd, cydrannau'r cydeffaith i'r dde ac i fyny'r dudalen yw $6 \cos 30° - R$ N a $6 \sin 30° - 3$ N = 0 N.

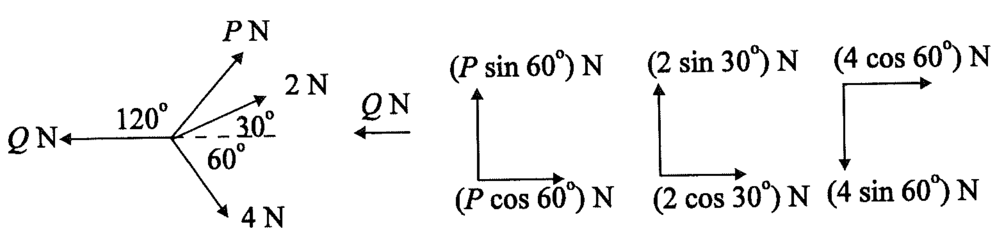
Mae'r gydran i fyny'r dudalen eisoes yn sero ac felly i gael cydbwysedd mae angen i'r llall hefyd fod yn sero.

Felly, $R = 6 \cos 30°\text{ N} = 3\sqrt{3}\text{ N}$.

Rhoddir datrysiad arall i'r enghraifft hon ar ôl Enghraifft 2.9.

Enghraifft 2.8

Darganfyddwch P a Q fel bod y system o rymoedd a ddangosir yn y diagram isod ar y chwith mewn cydbwysedd.



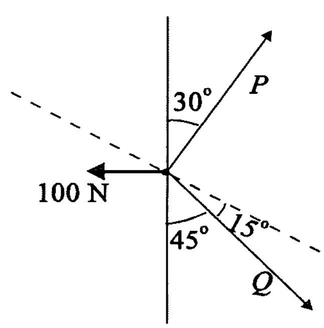
Mae gan y gwahanol rymoedd gydrannau a ddangosir yn y diagramau ar y dde. Gan gofio cyfeiriadau'r cydrannau, cydrannau x ac y y cydeffaith yw:
$(P \cos 60^\circ + 2 \cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ - Q)$ N a $(P \sin 60^\circ + 2 \sin 30^\circ - 4 \sin 60^\circ)$ N
yn ôl eu trefn.
Rhaid i'r ddwy gydran fod yn sero. Mae hafalu'r ail gydran i sero yn rhoi
$P \sin 60^\circ = 4 \sin 60^\circ - 2 \sin 30^\circ$ ac felly $P = 2.85$. Mae hafalu'r gydran gyntaf i sero yn rhoi $Q = P \cos 60^\circ + 2 \cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ$ ac, wrth amnewid P, $Q = 5.16$.

Wrth i chi ddod yn fwy cyfarwydd â chydrannau ni fydd arnoch angen defnyddio diagramau gwahanol i gyfrifo cydrannau'r grymoedd a dylech allu gwneud y cyfrifo yn eich pen. Mae hefyd i fyny i chi a ydych yn cyfrifo cyfanswm y gydran i gyfeiriad penodol a'i hafalu i sero neu, er enghraifft, hafalu'r cydrannau i'r chwith (neu i fyny) gyda'r rhai i'r dde (neu i lawr). Y "llaw-fer" dros ddweud beth rydych yn ei wneud yw cydrannu yn baralel ac yn berpendicwlar i gyfeiriad a roddir (dylech nodi'n eglur bob tro y cyfeiriad lle rydych yn cydrannu).

Chi piau'r dewis o'r cyfeiriadau lle byddwch yn cydrannu ac weithiau mae'n haws cydrannu yn berpendicwlar i rym anhysbys gan na fydd gan y grym hwn gydran sy'n berpendicwlar iddo ef ei hun gan fod $\cos 90^\circ = 0$.

Enghraifft 2.9

Darganfyddwch werthoedd P a Q fel bod y system a ddangosir isod mewn cydbwysedd.



Mae cydrannu yn berpendicwlar i'r grym 100 N yn rhoi $P \cos 30^\circ = Q \cos 45^\circ$,
ac mae cydrannu yn baralel i'r grym 100 N yn rhoi $P \cos 60^\circ + Q \cos 45^\circ = 100$ N.
Nawr mae angen datrys yr hafaliadau hyn ar gyfer P a Q a'r atebion terfynol yw

$$P = 73.2\text{ N},\ Q = 89.7\text{ N}.$$

Mewn gwirionedd gellir datrys y broblem hon heb gael dau hafaliad cydamserol trwy gydrannu ar hyd y perpendicwlarau i'r grymoedd anhysbys. Mae'r llinell doredig yn berpendicwlar i'r grym P ac mae'r grymoedd Q a 100 N yn ffurfio onglau 15° a 30° gyda'r llinell hon.

Mae cydrannu yn baralel i'r llinell doredig yn rhoi

$$Q \cos 15^\circ = 100 \cos 30^\circ \text{ N},$$

ac felly

$$Q = 89.7 \text{ N}.$$

Mae cydrannu ar hyd y perpendicwlar i'r grym Q yn rhoi

$$P \cos 15^\circ = 100 \cos 45^\circ \text{ N},$$

ac felly

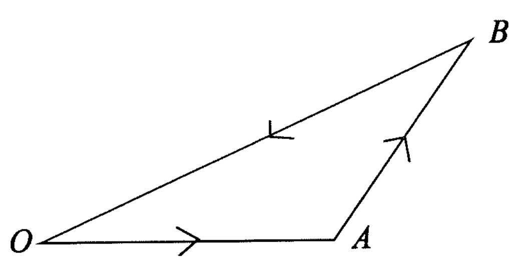
$$P = 73.2 \text{ N}.$$

Mae'r dull hwn yn osgoi'r algebra o ddatrys dau hafaliad ond mae angen gofal i gael yr onglau cywir. Efallai fod yn well gan rai ohonoch yr algebra na chyfrifo onglau!

Triongl grymoedd

Gyda phroblemau cydbwysedd lle nad oes ond un grym anhysbys, dull arall yw darganfod cydeffaith y grymoedd hysbys. Yna mae gan y grym anhysbys yr un maint â'r cydeffaith hwn ond i'r cyfeiriad dirgroes. Bydd y dull hwn yn cael ei ystyried yn fanylach yn Adran 2.3 ond, gyda thri grym yn gweithredu ar bwynt, mae'n lleihau i broblem geometregol.

Mae rheol y triongl yn nodi bod cydeffaith dau rym y cynrychiolir eu meintiau a'u cyfeiriadau gan OA ac AB yn cael ei gynrychioli gan OB. Felly cynrychiolir y trydydd grym y mae ei angen ar gyfer cydbwysedd gan BO. Felly os lluniadir OA i gynrychioli un grym, AB i gynrychioli'r ail rym a BO i gynrychioli'r trydydd, mae triongl caeëdig yn cael ei ffurfio fel a ddangosir isod.



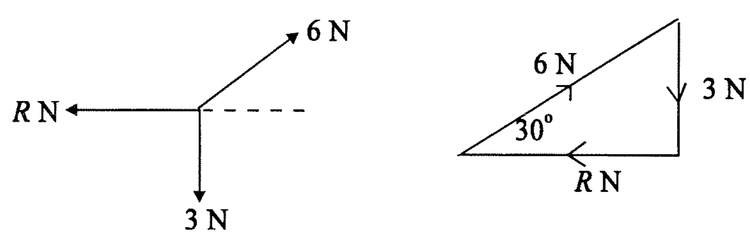
Ni fydd hyn yn wir oni bai bod y grymoedd mewn cydbwysedd, gan na fyddai triongl caeëdig yn cael ei ffurfio gan unrhyw dri grym a ddewisir ar hap. Enw'r triongl hwn yw'r "triongl grymoedd" ac wrth ei ffurfio mae angen tynnu'r llinellau sy'n cynrychioli'r grymoedd "yn eu trefn". Golyga hyn fod rhaid i'r saethau ddilyn ei gilydd a bod rhaid i bennau'r saethau beidio â phwyntio at ei gilydd.

Mae nifer o rymoedd yn gweithredu ar bwynt yn ffurfio polygon caeëdig, y "polygon grymoedd" pan fyddant mewn cydbwysedd ond gall cyfrifiadau ar gyfer polygonau o'r fath fod yn gymhleth.

Ni allwch ddatrys problemau sy'n galw am gyfrifo ochrau ac onglau triongl cyffredinol eto, ond gallwch ddefnyddio'r triongl grymoedd pan fo dau rym yn berpendicwlar i'w gilydd. (Gallwch ddatrys problemau gyda thrionglau trwy luniadu wrth raddfa ond ni ddylid gwneud hyn mewn arholiad Mathemateg oni ddywedir wrthych fod lluniadu wrth raddfa yn dderbyniol.)

Dangosir y dull hwn o ddatrys problemau trwy ail-wneud Enghraifft 2.7.

<u>Enghraifft 2.7</u> (datrysiad arall)

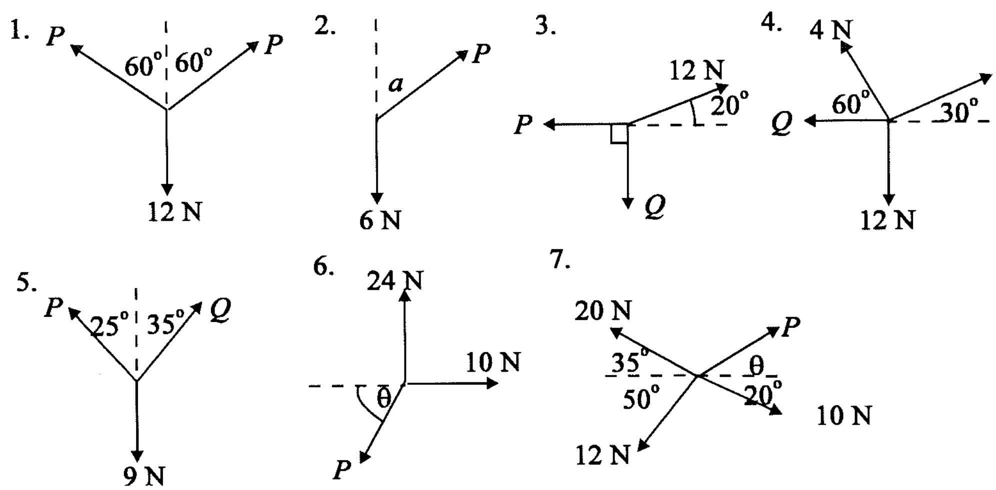


Dangosir y grymoedd sy'n gweithredu yn y diagram ar y chwith a dangosir y triongl grymoedd a ffurfir yn y diagram ar y dde.

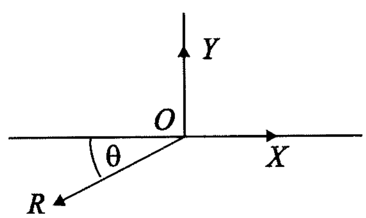
O'r triongl grymoedd, $\cos 30^\circ = \dfrac{R}{6}$. h.y. $R = 6\cos 30^\circ = 3\sqrt{3}$.

Ymarferion 2.3

Mae pob un o broblemau 1 i 7 yn dangos system o rymoedd mewn cydbwysedd. Darganfyddwch yr anhysbysion ym mhob achos, gan roi pob grym i dri ffigur ystyrlon a phob ongl i'r radd agosaf.



8 Dangosir tri grym, meintiau X, Y ac R, mewn cydbwysedd ar bwynt.



Darganfyddwch faint y grym R a gwerth tan θ pan fo

(i) $X = 4$ N, $Y = 3$ N

(ii) $X = 7$ N, $Y = 2$ N.

2.2 Problemau cydbwysedd sy'n cynnwys modelu ffisegol

Roedd y problemau i gyd yn Adran 2.1 yn rhwydd oherwydd bod y grymoedd oedd yn gweithredu wedi cael eu dynodi yn union ar eich cyfer. Ni fydd hyn yn wir mewn sefyllfaoedd ymarferol. Bydd rhaid i chi ddefnyddio'r data er mwyn gallu modelu'r broblem a phenderfynu pa rymoedd sy'n gweithredu, ac yna bydd gennych y math o broblemau rydych wedi bod yn eu datrys.

Modelu grymoedd yn y byd ffisegol

Wrth greu modelau o sefyllfaoedd ymarferol, fel arfer mae angen symleiddio trwy wneud tybiaethau am wahanol wrthrychau a'r grymoedd a achosir ganddynt, neu sy'n gweithredu arnynt. Yna bydd y tybiaethau hyn yn aml yn cael eu crynhoi mewn ymadrodd syml neu air (e.e. gronyn, llinyn ysgafn). Mae'n bwysig iawn eich bod yn sylweddoli pa dybiaethau yn union sydd dan sylw wrth ddefnyddio disgrifiad penodol. Mae'r tybiaethau â'r ymadroddion a ddefnyddir amlaf yn cael eu crynhoi isod ar ffurf Rhestr Termau. Bwriad y rhestr hon yw eich cynorthwyo wrth ddehongli cwestiynau. Ni ddylid ei dilyn heb ystyried yr amgylchiadau bob tro. Dylech hefyd ddarllen yr eglurhad manylach yn Adran 2.4 o'r tybiaethau modelu a grynhoir yn y Rhestr Termau.

Mae rhai o'r disgrifiadau yn rhai cyfleus iawn ond hefyd braidd yn ffug yn yr ystyr nad yw'r sefyllfaoedd a ddisgrifir yn bodoli mewn gwirionedd. Serch hynny, maent yn aml yn weddol agos at y gwir.

Un dybiaeth fodelu y bydd rhaid i chi ei gwneud, gan nad ydych eto wedi dysgu dulliau o drin problemau heblaw lle mae grymoedd yn gweithredu ar bwynt, yw bod rhaid trin unrhyw wrthrych dan sylw fel pwynt. Felly rhaid i wrthrychau bychain fel parseli a rhai mawr fel llongau gael eu modelu yn yr un ffordd.

Ar y darlleniad cyntaf, efallai na fyddwch yn dymuno ystyried rhesymeg y tybiaethau yn Adran 2.4, ond dylech edrych ar y Rhestr Termau lle mae'r tybiaethau sy'n cyfateb i'r gwahanol ymadroddion yn cael eu crynhoi.

Rhestr Termau:

Grym disgyrchiant Y dybiaeth arferol yw bod hwn yn gyson ac yn gweithredu mewn cyfeiriad fertigol i lawr, a'i faint yw pwysau'r gwrthrych.

Pwysau gwrthrych, màs m kg, yw mg N lle mae g yn cynrychioli maint cyflymiad disgyrchiant mewn ms^{-2}. Gwerth g yw tua 9.81 ms^{-2}. Yn y rhan fwyaf o'r cyfrifiadau yn y llyfr hwn defnyddir y brasamcan 9.8 ar gyfer maint g.

Yn gyffredinol yn achos gwrthrychau, mae grym disgyrchiant yn gweithredu trwy bwynt a elwir yn graidd disgyrchiant. Un o briodweddau geometregol gwrthrych yw lleoliad y pwynt hwn, ac ar roden unffurf syth mae i'w gael ar ei chanolbwynt.

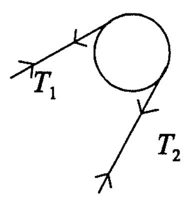
Ffordd syml o fesur pwysau gwrthrych yw defnyddio clorian ystafell ymolchi. Mewn gwirionedd, adwaith y glorian ar y gwrthrych yw'r darlleniad a geir. Pan fo'r glorian yn ddisymud mae hwn yn hafal i bwysau'r gwrthrych.

Ysgafn Gwrthrych ysgafn yw un â phwysau sero neu, i fod yn fwy realistig, un y mae ei bwysau yn ddibwys o'i gymharu â'r grymoedd eraill sy'n gweithredu.

Llinynnau Cynrychiolir llinynnau gan linellau tenau ac fe'u defnyddir i fodelu rhaffau a hyd yn oed gadwyni. Pan fyddant yn dynn maent yn rhoi grym, y tensiwn, tuag i mewn o'u dau ben, ar wrthrychau sydd ynghlwm wrth y naill ben a'r llall.

Yn y bôn y tensiwn mewn llinyn yw grym y tyniad a roddir gan un rhan o'r llinyn ar y rhan arall a gall hwn amrywio dros hyd y llinyn.

Os caiff llinyn ei roi o amgylch gwrthrych, er enghraifft dros beg neu olwyn pwli, fel a ddangosir yn y diagram,



T_1 a T_2 yw'r grymoedd a roddir ar y peg ac maent yn gweithredu ar y pwyntiau tangiad fel a ddangosir.

Nid yw llinynnau'n gallu gwthio oddi wrth eu pennau, na rhoi unrhyw rym yn berpendicwlar iddynt eu hunain. Nid oes tensiwn mewn llinyn llac.

Os bydd eich cyfrifiadau yn dangos tensiwn negatif neu sero, byddwch wedi gwneud camgymeriad.

Llinynnau ysgafn Mae'r tensiwn yn gyson ar hyd llinyn ysgafn ac, os bydd yn dynn, bydd y llinyn yn syth.

Llinynnau anestynadwy Golyga hyn nad yw'r hyd yn newid pan fo grym ar y ddau ben, ond safbwynt mwy realistig yw nad yw'r hyd yn newid ddigon i'r tensiwn newid.

Llinynnau estynadwy (elastig) Gall hyd llinynnau o'r fath amrywio a bydd y tensiwn yn dibynnu ar yr hyd.

Fel arfer, y dybiaeth fodelu a ddefnyddir yw bod y tensiwn (T) mewn cyfrannedd union â'r estyniad (x). Dyma **ddeddf Hooke**. Dyma ddeddf Hooke mewn symbolau:

$$T = \frac{\lambda x}{l},$$

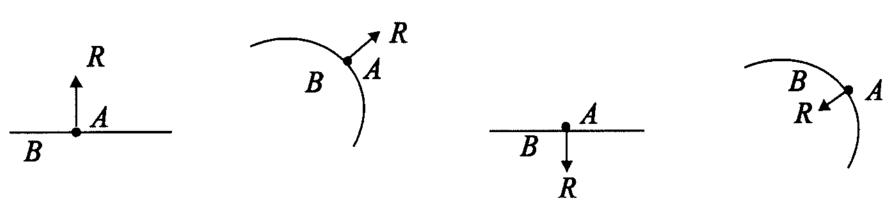
lle mae λ yn cynrychioli modwlws elastigedd y llinyn ac l ei hyd anestynedig (naturiol).

Y gymhareb $\frac{\lambda}{l}$ yw anystwythder y llinyn. Defnyddir y gymhareb hon yn amlach yng nghyd-destun sbringiau yn hytrach na llinynnau.

Sbringiau Mae gan sbringiau holl briodweddau llinynnau elastig ond gellir eu cywasgu yn ogystal â'u hestyn ac yn yr achos hwn maent yn rhoi grym (gwthiad) oddi wrth eu dau ben. Mae'r gwthiad hwn eto yn bodloni Deddf Hooke gydag x nawr yn dynodi'r cywasgiad.

Rhodenni tenau (neu drawstiau) Mae gan y rhain holl briodweddau llinyn ond gallant roi gwthiad neu densiwn ar eu dau ben. Cymerir eu bod yn anhyblyg ac, yn wahanol i linyn, gall rhoden ddal grym yn berpendicwlar i'w hyd.

Arwynebau llyfn Mae'r rhain yn rhoi adwaith perpendicwlar iddynt eu hunain, ac oddi arnynt eu hunain, fel a ddangosir yn y ddau ddiagram ar y chwith isod. Ni all adwaith arwyneb llyfn ar wrthrych fod yn negatif. Mae adwaith sero yn golygu bod y gwrthrychau ar fin colli cyffyrddiad â'i gilydd.

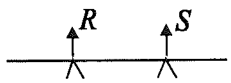


Os yw dau wrthrych llyfn A a B yn cyffwrdd, yna mae adwaith A ar B yn hafal a dirgroes i adwaith B ar A fel a ddangosir yn y ddau ddiagram ar y dde uchod. Dyma **drydedd ddeddf Newton.**

Peg llyfn Mae'r adwaith ar beg o'r fath yn normal i'r peg ac os rhoddir llinyn dros y peg, fel a ddangosir dan y pennawd Llinynnau, yna mae'r tensiynau T_1 a T_2 yn hafal.

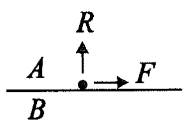
Olwynion pwli llyfn Mae gan y rhain, i bwrpas problemau ar Stateg, yr un priodweddau â pheg llyfn.

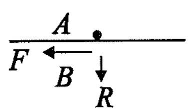
Rhodenni (trawstiau) a gynhelir yn syml (yn llyfn) Mae adweithiau'r cynheiliaid ar y rhoden neu'r trawst yn berpendicwlar iddi/iddo fel a ddangosir isod.



Arwynebau garw Fel arfer, nid yw'r adwaith ar wrthrych sy'n cyffwrdd ag arwyneb o'r fath yn berpendicwlar i'r arwyneb.

Yn ogystal â chydran berpendicwlar (neu normal) yr adwaith, sef R, mae grym ar hyd yr arwyneb, y grym ffrithiant F, fel a ddangosir yn y diagram ar y chwith isod.





Mae'r grym hwn yn gweithredu er mwyn gwrthwynebu tuedd y gwrthrych i symud ac felly yn y diagram uchod byddai mudiant A i'r chwith gydag $F \leq \mu R$, lle mae μ yn cynrychioli'r cyfernod ffrithiant.

Os yw gwrthrych ar fin llithro dros un arall, yna dywedir bod y ffrithiant yn derfannol a bod $F = \mu R$.

Mae trydedd ddeddf Newton yn wir hefyd ar gyfer arwynebau garw fel a ddangosir yn y diagram ar y dde uchod.

Wrth ddatrys problemau, y cam cyntaf yw defnyddio'r Rhestr Termau i ddehongli'r broblem a gwneud y tybiaethau modelu er mwyn penderfynu pa fath o rym sy'n gweithredu ar bob pwynt. Gyda llinynnau, mae'n arbennig o bwysig nodi'r tensiynau ar ddau ben pob rhan syth o bob llinyn. Dylid cofio, gyda llinyn ysgafn, fod y tensiwn yn gyson trwy linyn penodol ond nad oes rhaid i'r tensiynau mewn dau linyn sydd ynghlwm wrth yr un pwynt fod yn hafal.

Dylid nodi yn eglur ar **ddiagram grymoedd** yr holl rymoedd sy'n gweithredu ar bob gwrthrych. Mae llunio diagram grymoedd eglur yn gam cyntaf hanfodol wrth ddatrys unrhyw broblem. Ym mhob achos hyd yn hyn rhoddwyd diagramau grymoedd i chi ond bellach bydd yn rhaid i chi lunio rhai eich hun.

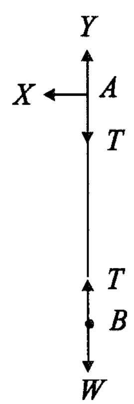
Os yw dau wrthrych A a B yn cyffwrdd, yna bydd diagram grymoedd ar gyfer y naill a'r llall ac wrth lunio diagram grymoedd bydd angen defnyddio trydedd ddeddf Newton sy'n nodi bod grym A ar B yn hafal a dirgroes i rym B ar A.
Yna gellir datrys y problemau fel o'r blaen trwy gydrannu i ddau gyfeiriad gwahanol. Dylid cofio y gallwch symleiddio eich cyfrifiadau trwy ddewis yn ddoeth y cyfeiriadau lle rydych yn cydrannu, fel a welwyd yn Enghraifft 2.9.

Y problemau y gallwch eu datrys yw'r rhai lle mae grymoedd yn gweithredu ar bwynt. Efallai fod nifer o bwyntiau a gysylltir â'i gilydd mewn rhyw ffordd a bydd rhaid i chi edrych ar bob pwynt ar wahân. Mae'n haws dechrau gyda phroblemau nad ydynt yn cynnwys ffrithiant.

Problemau nad ydynt yn cynnwys ffrithiant

Enghraifft 2.10

Mae gronyn â phwysau W yn hongian mewn cydbwysedd wrth ben B llinyn anestynadwy ysgafn AB. Darganfyddwch y tensiwn yn y llinyn a'r grym sydd ei angen i ddal y llinyn yn A.



Gan fod y llinyn yn ysgafn bydd y tensiwn yn gyson ar ei hyd ac, fel a ddangosir yn y diagram grymoedd, bydd yn gweithredu tuag i mewn o'r ddau ben. Bydd grym disgyrchiant W yn gweithredu yn fertigol i lawr yn B. Nid oes wybodaeth am y grym yn A ac felly er mwyn bod yn ddiogel dylid cymryd bod ganddo gydran fertigol Y a chydran lorwedd X. Dangosir yr holl rymoedd hyn yn y diagram grymoedd.

Mae'r grymoedd sy'n gweithredu ym mhob pwynt mewn cydbwysedd. Yr unig rymoedd sy'n gweithredu yn B yw'r tensiwn yn syth i fyny a'r pwysau yn syth i lawr, ac felly $T = W$.
Wrth edrych nawr ar A, yr unig gydran lorwedd yw X ac felly, i gael cydbwysedd,

$$X = 0.$$

Y gydran yn syth i fyny yw Y a'r un i lawr yw T. Felly, i gael cydbwysedd,

$$Y = T = W.$$

Enghraifft 2.11

Mae gronyn, màs m, yn hongian mewn cydbwysedd wrth ben isaf B llinyn elastig ysgafn AB, y mae ei ben uchaf yn sefydlog. Modwlws elastig y llinyn yw $10mg$ a'i hyd anestynedig yw a. Darganfyddwch, gan gymryd bod Deddf Hooke yn dal, hyd y llinyn yn y safle cydbwysedd.

Mae'r grymoedd sy'n gweithredu yr un rhai ag yn Enghraifft 2.10, ac felly gellir defnyddio'r un diagram er y dylid rhoi mg yn lle W, gan mai'r màs a roddir yn hytrach na'r pwysau. Mae cydbwysedd y gronyn yn rhoi

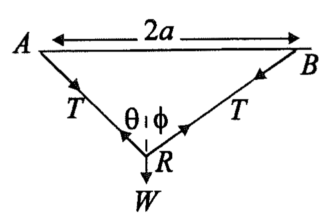
$$T = mg$$

Gan fod Deddf Hooke yn dal, $T = \dfrac{10mgx}{a}$, lle mae x yn cynrychioli'r estyniad.

Mae amnewid $T = mg$ yn rhoi $x = \dfrac{a}{10}$ ac felly cyfanswm hyd y llinyn yw $\dfrac{11a}{10}$.

Enghraifft 2.12

Mae gan fodrwy lefn fach R, pwysau W, linyn trwyddi sy'n anestynadwy ac ysgafn, hyd $8a$. Mae dau ben y llinyn ynghlwm wrth ddau bwynt A a B mewn llinell lorwedd ac ar bellter $2a$ oddi wrth ei gilydd. Mae'r system mewn cydbwysedd mewn plân fertigol. Darganfyddwch y tensiwn yn y llinyn.



Mae'r llinyn yn ysgafn ac felly mae'r tensiwn yn gyson ar ddwy ran syth y llinyn. Mae'r fodrwy yn llyfn ac felly mae'r tensiwn yr un fath ar ddwy ran y fodrwy.

Felly mae'r grymoedd sy'n gweithredu fel a ddangosir yn y diagram grymoedd uchod. Ni ddylid cymryd yn ganiataol bod y ddau linyn yn goleddu ar yr un ongl i'r llorwedd, er bod cymesuredd yn awgrymu hyn. Mae'n fwy diogel cymryd bod yr ongl rhwng y llinyn a'r fertigol yn θ i'r chwith i'r llinyn a ϕ i'r dde.

Mae cydrannu'r grymoedd ar y fodrwy yn llorwedd yn rhoi

$$T\sin\theta = T\sin\phi, \text{ ac felly } \theta = \phi.$$

Felly, $AR = BR = 4a$ ac mae R yn union o dan ganolbwynt AB.

Mae cydrannu cydrannau'r grymoedd ar y fodrwy yn fertigol yn rhoi

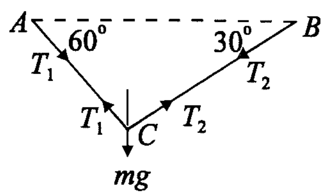
$$2T\cos\theta = W.$$

Trwy Theorem Pythagoras, dyfnder R o dan AB yw $\sqrt{15}a$ ac felly mae $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Felly, $$T = \frac{2W}{\sqrt{15}}.$$

<u>Enghraifft 2.13</u>

Mae dau linyn anestynadwy ysgafn wedi eu clymu wrth ronyn, màs m.
Mae'r pennau eraill ynghlwm wrth ddau bwynt ar linell lorwedd fel bod y gronyn mewn cydbwysedd a'r llinynnau yn goleddu ar onglau 30° a 60° i'r llorwedd. Darganfyddwch y tensiynau yn y llinynnau.



Dangosir y diagram grymoedd uchod. Gan fod y llinynnau wedi'u clymu wrth y gronyn gallai'r tensiynau ynddynt fod yn wahanol ac fe'u dynodir gan T_1 a T_2.
Rhoddir màs y gronyn yn hytrach na'i bwysau ac felly y grym disgyrchiant yw mg.

Mae dau anhysbysyn a gellir eu darganfod trwy hafalu cydrannau i ddau gyfeiriad gwahanol. Y dewis amlycaf yw hafalu cydrannau yn fertigol a llorwedd; byddai hyn yn rhoi dau hafaliad sy'n cynnwys T_1 a T_2 ac yna gellir eu datrys i gael gwerth T_1 a T_2.

Dull arall yw ystyried cydrannau ar hyd y ddau linyn; mae'r rhain yn berpendicwlar ac felly, er enghraifft, nid oes gan y tensiwn ar hyd AC gydran ar hyd BC. Mae'r broblem yn debyg iawn i'r un yn Enghraifft 2.9.

Cydran y grym disgyrchiant ar hyd AC yw $mg\cos 30^\circ$ ac felly

$$T_1 = mg\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}mg}{2}.$$

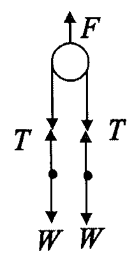
Cydran y grym disgyrchiant ar hyd BC yw mg sin 30° ac felly

$$T_2 = mg \sin 30^\circ = \frac{mg}{2}.$$

Enghraifft 2.14

Mae dau ronyn bach, y ddau â phwysau W, ynghlwm wrth bennau llinyn anestynadwy ysgafn. Mae'r llinyn yn mynd dros beg llyfn bach ac mae'r gronynnau mewn cydbwysedd mewn plân fertigol. Mae'r llinyn yn fertigol ar y pwyntiau lle mae'n colli cyffyrddiad â'r peg. Darganfyddwch y grym a roddir ar y peg.

Gan fod y peg yn llyfn mae'r tensiwn ar ddwy ochr y peg yn gyfartal ac yn gweithredu yn fertigol i lawr. Y diagram grymoedd yw:



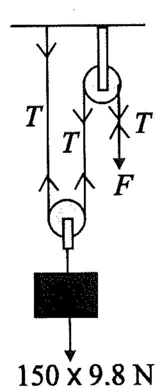
Felly nid yw'r llinynnau yn rhoi grym llorweddol ar y peg.
Wrth gydrannu'n fertigol ar gyfer y naill ronyn neu'r llall, cawn

$$T = W.$$

Yr unig rym a roddir ar y peg gan y llinyn yw $2T = 2W$, yn gweithredu tuag at i lawr.

Enghraifft 2.15

Defnyddir y system o olwynion pwli a ddangosir isod i ddal llwyth, màs 150 kg. Gan dybio bod yr olwynion yn llyfn ac ysgafn, a'r rhaff hefyd yn ysgafn, a thrwy fodelu'r llwyth fel gronyn, darganfyddwch y grym y mae angen ei roi ar ben y rhaff er mwyn cadw cydbwysedd.



Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu. Gan fod yr olwynion yn llyfn mae'r tensiynau ym mhob rhan o'r rhaff yn hafal. Mae cydbwysedd y llwyth yn rhoi

$$2T = 150 \times 9.8 \text{ N},$$

ac felly $\qquad T = 735$ N.

Mae cydbwysedd ar ben y rhaff yn rhoi $F = T$,
ac felly y grym sydd ei angen yw 735 N.

<u>Ymarferion 2.4</u>

Mewn enghreifftiau rhifiadol, dylid darganfod pob grym i dri ffigur ystyrlon a dylid cymryd gwerth g yn 9.8 ms^{-2}.

1 Mae gwrthrych bach yn hongian wrth linyn anestynadwy ysgafn mewn cydbwysedd o bwynt sefydlog. Darganfyddwch
(a) o wybod mai 0.4 kg yw màs y gwrthrych, ei bwysau a'r tensiwn yn y llinyn,
(b) o wybod mai 14.7 N yw pwysau'r gwrthrych, ei fàs a'r tensiwn yn y llinyn.

2 Mae pecyn bach wedi ei osod ar fwrdd llorwedd. Gan fodelu'r pecyn fel gronyn, darganfyddwch
(a) yr adwaith yn berpendicwlar i'r bwrdd pan fo màs y gronyn yn 3 kg,
(b) màs y pecyn o wybod bod yr adwaith normal yn 19.6 N.

Mae cwestiynau 3 i 5 yn cyfeirio at wrthrych, pwysau W N, yn hongian o bwynt sefydlog wrth linyn elastig ysgafn, hyd naturiol a m, a modwlws elastig λ N. Dynodir yr estyniad gan x m.

3 Darganfyddwch x, o wybod bod $W = 21$, $a = 2$, $\lambda = 105$.
4 Darganfyddwch λ, o wybod bod $W = 50$, $x = 0.2$, $a = 4$.
5 Darganfyddwch a, o wybod bod $W = 30$, $x = 0.2$, $\lambda = 210$.

Mae cwestiynau 6 a 7 yn cyfeirio at ronyn, màs 0.4 kg, yn hongian wrth linyn anestynadwy ysgafn sydd â'i ben arall ynghlwm wrth bwynt sefydlog.

6 Gweithredir ar ronyn gan rym llorwedd fel ei fod mewn cydbwysedd â'r llinyn gan oleddu ar ongl 40° i'r fertigol i lawr. Darganfyddwch y grym.

7 Mae'r gronyn yn cael ei ddal mewn cydbwysedd gan rym sy'n gweithredu arno yn berpendicwlar i'r llinyn. Mae'r llinyn yn goleddu ar ongl 30° i'r fertigol i lawr Darganfyddwch y grym a'r tensiwn yn y llinyn.

8 Mae gronyn, màs 0.3 kg, yn hongian wrth ddau linyn anestynadwy ysgafn oddi ar ddau bwynt sefydlog ar yr un lefel lorwedd. Mae'r llinynnau yn goleddu ar onglau 25° a 35°, yn ôl eu trefn, i'r llorwedd. Darganfyddwch y tensiynau yn y llinynnau.

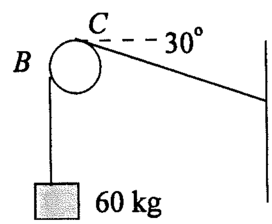
9 Mae modrwy lefn R, màs m, yn llithro ar linyn anestynadwy ysgafn sydd â'i ddau ben A a B yn sefydlog ar ddau bwynt ar yr un lefel. Rhoddir grym llorwedd P ar

R fel bod y fodrwy mewn cydbwysedd yn fertigol o dan A gyda BR yn goleddu ar ongl α i'r fertigol. Darganfyddwch P.

10 Mae dau linyn elastig ysgafn unfath AB a BC, y ddau â hyd naturiol 0.8 m a modwlws 3000 N, yn cael eu cysylltu yn B. Mae gronyn, pwysau 900 N, ynghlwm wrth C ac yn hongian mewn cydbwysedd wrth y llinyn cyfansawdd ABC gyda'r pen A yn sefydlog. Darganfyddwch hyd ABC.

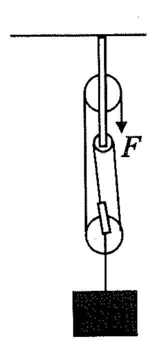
11 Tybiwch nawr yng nghwestiwn 10 nad yw'r llinynnau wedi eu cysylltu â'i gilydd yn B ond bod y ddau ynghlwm wrth ronyn, pwysau 20 N, gyda'r gronyn rhwng y llinynnau. Darganfyddwch hyd ABC pan gaiff y gronyn sy'n pwyso 900 N ei hongian mewn cydbwysedd.

12



Dengys y diagram flwch, màs 60 kg, yn hongian wrth raff sy'n mynd dros olwyn pwli bach. Mae pen arall y rhaff ynghlwm wrth bwynt sefydlog. Mae'r pwli yn grwn a'r union bwyntiau lle mae'r rhaff yn colli cyffyrddiad â'r pwli yw B ac C. Mae'r rhaff yn fertigol yn B ac ar ongl 30° i'r llorwedd yn C. Gan anwybyddu pwysau'r rhaff, modelwch y blwch fel gronyn gan gymryd bod y pwli yn llyfn. Darganfyddwch y tensiwn yn y rhaff a chydrannau llorwedd a fertigol y grym sy'n gweithredu ar y pwli.

13



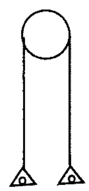
Darganfyddwch y grym, F, y mae angen ei roi i ben y rhaff er mwyn i'r system o bwlïau allu dal y blwch sy'n pwyso 80 kg. Mae'r pwlïau yn llyfn a gellir anwybyddu eu màs hwy a hefyd fàs y rhaffau. Gellir tybio hefyd fod pob rhan o'r rhaff yn fertigol.

14 Mae pen A llinyn elastig ysgafn AB, hyd naturiol 1.5 m a modwlws 200 N, yn sefydlog ac mae gronyn trwm ynghlwm wrth ben B. Yna rhoddir grym llorwedd

o faint F ar B fel bod y system mewn cydbwysedd gydag AB yn dynn ac yn goleddu ar ongl 30° i'r fertigol i lawr. Hyd AB nawr yw 1.8 m.
Darganfyddwch werth F a màs y gronyn.

15 Mae gronyn P, màs M, ynghlwm wrth dau linyn ysgafn sy'n mynd dros ddau beg llyfn ar yr un lefel ac yn hongian yn fertigol mewn cydbwysedd gyda masau $3m$ a $4m$ ar y naill ben a'r llall. O wybod bod y llinynnau ar P yn berpendicwlar i'w gilydd, darganfyddwch y gymhareb $\frac{m}{M}$.

16



Dengys y diagram linyn ysgafn, gyda phadell clorian ynghlwm wrth bob pen, yn mynd dros beg bach. Màs pob padell yw 0.1 kg ac i ddechrau mae'r system mewn cydbwysedd gyda 0.9 kg ym mhob padell ac mae'r llinyn ar yr union bwyntiau lle mae'n colli cyffyrddiad â'r peg yn fertigol. Darganfyddwch y tensiwn yn y llinyn.
Darganfuwyd y gellid rhoi 0.4 kg mewn un badell cyn torri'r cydbwysedd. Darganfyddwch y tensiynau yn y ddwy ran o'r llinyn pan fo cydbwysedd ar fin cael ei dorri.
Rhaid tybio na ddechreuodd y ddwy badell symud ar unwaith wrth gynyddu'r màs oherwydd bod y peg yn arw. Mae model sy'n cymryd i ystyriaeth fod y peg yn arw yn dangos, pan fo'r llinyn ar fin symud, fod y tensiwn yn cynyddu ar hyd y llinyn i'r cyfeiriad lle byddai'r mudiant yn digwydd fel bod cymhareb y tensiynau ar y ddau bwynt union lle mae'r llinyn yn colli cyffyrddiad â'r peg yn $e^{\mu\pi}$, lle mae μ yn cynrychioli'r cyfernod ffrithiant. Defnyddiwch y model hwn i amcangyfrif y cyfernod ffrithiant.

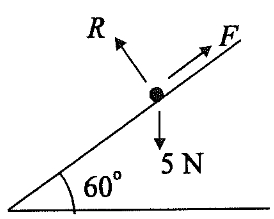
Problemau yn ymwneud â ffrithiant

Y mathau symlaf o broblemau ar ffrithiant yw'r rhai lle mae angen darganfod y grym ffrithiannol sydd ei angen i gael cydbwysedd. Yn y bôn mae'r rhain yr un fath a'r problemau rydych wedi'u datrys eisoes.
Math arall o broblemau, ychydig yn fwy anodd, yw'r rhai lle mae cydbwysedd ar fin ei dorri. Yn yr achosion hyn mae'r cydbwysedd yn derfannol. Felly, gan gymryd bod cyfeiriad y ffrithiant yn hysbys, gellir llunio diagram grymoedd sy'n cynnwys grymoedd ffrithiant ac yna ddatrys y broblem trwy gydrannu i ddau gyfeiriad gwahanol.

Ym mhob achos arall y dacteg orau yw llunio diagram grymoedd sy'n dangos gwerthoedd mympwyol ar gyfer y grym ffrithiannol F a'r adwaith normal R. Gellir cael mynegiadau am F ac R trwy gydrannu yn y ffordd arferol ac yna ddefnyddio'r amod $F \le \mu R$. Yr unig anhawster yw na fyddwch bob amser yn dewis y cyfeiriad cywir ar gyfer y ffrithiant ac yna ni fydd y gwerth F a gewch y maint iawn. Os digwydd hyn, mae'n debyg y byddwch yn cael naill ai rywbeth sy'n wir bob amser neu rywbeth nad yw'n gwneud synnwyr ac ni fyddwch ar y ffordd i ddatrys y broblem. Gellir osgoi hyn trwy ddefnyddio $-\mu R \le F \le \mu R$. Mae'n arbennig o bwysig, mewn cwestiynau lle mae angen anhafaledd, eich bod yn defnyddio $F \le \mu R$ (neu ddefnyddio $-\mu R \le F \le \mu R$) yn hytrach na chymryd bod ffrithiant yn derfannol ac yna roi anhafaledd i mewn yn y llinell olaf. Os na roddir yr anhafaledd, mae tebygolrwydd o 50% y byddwch yn cael yr anhafaledd y "ffordd anghywir"!

Enghraifft 2.16

Mae gronyn, pwysau 5 N, mewn cydbwysedd ar blân garw sy'n goleddu 60° i'r llorwedd. Darganfyddwch yr adwaith normal a'r grym ffrithiant sydd ar y gronyn.
Dyma'r diagram grymoedd:



Gyda phroblemau sy'n cynnwys plân ar oledd mae'n haws weithiau gydrannu ar hyd ac yn berpendicwlar i'r plân yn hytrach nag yn llorwedd a fertigol. Cydrannau'r pwysau yw $5 \sin 60^\circ$ N i lawr y plân a $5 \cos 60^\circ$ N yn berpendicwlar i'r plân (hwn i mewn i'r plân o'r gronyn).
Felly mae cydrannu ar hyd ac yn berpendicwlar i'r plân yn rhoi

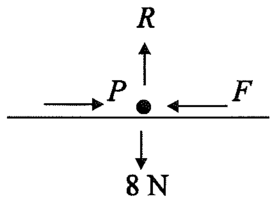
$$R = 5 \cos 60^\circ \text{ N} = 2.5 \text{ N} \qquad \text{ac} \qquad F = 5 \sin 60^\circ \text{ N} = 2.5\sqrt{3} \text{ N}.$$

Cymerwyd cyfeiriad F i fyny'r plân oherwydd byddai unrhyw fudiant i lawr y plân. Pe byddai'r cyfeiriad anghywir wedi ei ddewis, byddai hyn yn ymddangos mewn gwerth negatif ar gyfer F.

Enghraifft 2.17

Mae gronyn, pwysau 8 N, yn ddisymud ar fwrdd llorwedd garw, a 0.4 yw'r cyfernod ffrithiant rhwng y gronyn a'r bwrdd. Pan roddir grym llorwedd P i'r gronyn, mae ar fin llithro. Darganfyddwch werth P.

Dyma'r diagram grymoedd:

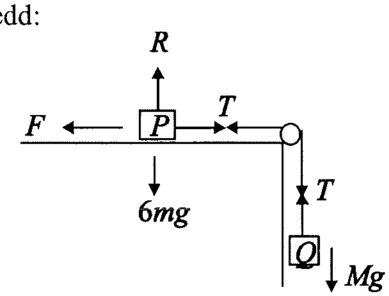


Mae cydrannu yn fertigol yn rhoi $R = 8$ N.
Yn yr achos hwn mae'r gronyn ar fin symud, felly mae'r ffrithiant yn derfannol, ac felly $F = \mu R = 3.2$ N.
Mae cydrannu yn llorwedd yn rhoi $P = F = 3.2$ N.

Enghraifft 2.18

Mae gronyn P, màs 6 mg, yn gorwedd ar fwrdd llorwedd garw, sydd â chyfernod ffrithiant $\frac{1}{4}$. Mae'r gronyn ynghlwm wrth ail ronyn Q trwy linyn anestynadwy ysgafn. Mae'r llinyn yn mynd dros bwli llyfn ar ymyl bwrdd ac mae Q yn hongian mewn cydbwysedd. Darganfyddwch y màs mwyaf sy'n bosibl i Q.

Dyma'r diagram grymoedd:



Tybir bod gan Q fàs M. Petai mudiant yn digwydd, byddai i'r dde ac felly mae grym ffrithiant i'r chwith. Mae'r unig rymoedd sy'n gweithredu ar Q yn fertigol ac mae cydrannu yn fertigol ar gyfer Q yn rhoi

$$T = Mg.$$

Mae cydrannu yn llorwedd ar gyfer P yn rhoi

$$F = T,$$

ac felly

$$F = Mg.$$

Mae cydrannu yn fertigol ar gyfer P yn rhoi

$$R = 6mg.$$

Felly

$$\frac{F}{R} = \frac{M}{6m}$$

Gwerth mwyaf y gymhareb hon yw $\frac{1}{4}$ ac felly $\frac{M}{6m} \leq \frac{1}{4}$.

Felly gwerth mwyaf posibl M yw $\frac{3m}{2}$.

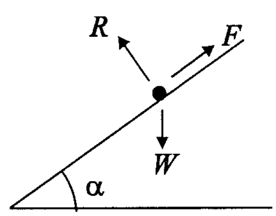
Hynny yw, màs mwyaf posibl Q yw $\frac{3m}{2}$.

Enghraifft 2.19

Rhoddir gronyn trwm, pwysau W, ar blân garw sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd. Y cyfernod ffrithiant rhwng y plân a'r gronyn yw μ. Dangoswch nad yw cydbwysedd yn bosibl oni bai fod $\tan\alpha \leq \mu$.

Darganfyddwch, pan fo $\tan\alpha > \mu$, werth lleiaf y grym i fyny llinell goledd mwyaf y plân a fydd yn cadw cydbwysedd.

Dyma'r diagram grymoedd ar gyfer y rhan gyntaf:



Gan fod y gronyn yn debygol o lithro i lawr y plân bydd F yn gweithredu i fyny'r plân ac mae cydrannu ar hyd ac yn berpendicwlar i'r plân fel yn Enghraifft 2.16 yn rhoi

$$F = W\sin\alpha,\ R = W\cos\alpha,$$

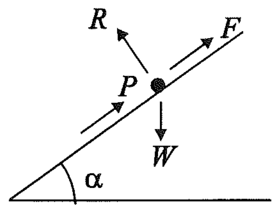
ac

$$\frac{F}{R} = \tan\alpha.$$

Felly $\tan\alpha \leq \mu$ ar gyfer cydbwysedd.

Yn yr ail ran mae'r grym P yn gweithredu i fyny'r plân. Mae'r datrysiad i'r rhan gyntaf yn dangos ar gyfer $\tan\alpha > \mu$ y byddai'r gronyn yn llithro i lawr y plân, ac felly y grym lleiaf i gael cydbwysedd yw'r un sydd prin yn atal y gronyn rhag llithro i lawr. Bydd grym ffrithiant yn dal i weithredu i fyny'r plân.

Dyma'r diagram grymoedd felly:



Mae cydrannu ar hyd ac yn berpendicwlar i'r plân yn rhoi

$$F + P = W \sin\alpha, R = W \cos\alpha.$$

Mae'r amod $F \le \mu R$ yn rhoi

$$W \sin\alpha - P \le \mu W \cos\alpha$$

ac felly

$$W \sin\alpha - \mu W \cos\alpha \le P.$$

Felly gwerth lleiaf P yw $W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Mewn enghreifftiau fel hon ar ffrithiant, mae'n syniad da gwirio bod yr ateb yn un synhwyrol. Gellir dweud i ryw raddau bod yr ateb yn synhwyrol yn yr enghraifft hon oherwydd, gan fod $\tan\alpha > \mu$, mae P o leiaf yn bositif!

Enghraifft 2.20

Darganfyddwch ar gyfer y broblem yn Enghraifft 2.19, pan fo $\tan\alpha > \mu$, werth mwyaf y grym i fyny llinell goledd mwyaf y plân a fydd yn cadw cydbwysedd.

Ceir gwerth mwyaf P pan fo'r gronyn ar fin llithro i fyny'r plân ac mae F yn gweithredu tuag i lawr. Os cymerir bod P yn dal i weithredu i'r un cyfeiriad, yna ceir yr un hafaliadau ag o'r blaen. Mae cymhwyso'r amod $-\mu R \le F \le \mu R$ yn rhoi

$$\mu W \cos\alpha \le W \sin\alpha - P \le \mu W \cos\alpha,$$

ac felly

$$W \sin\alpha - \mu W \cos\alpha \le P \le W \sin\alpha + \mu W \cos\alpha.$$

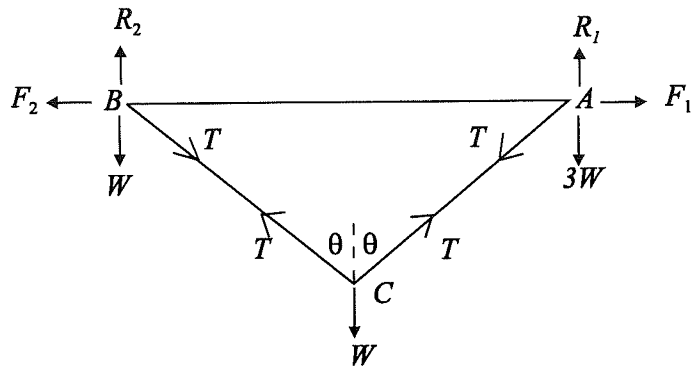
Mae'r anhafaledd ar y chwith yn rhoi gwerth lleiaf P ac mae'r un ar y dde yn rhoi'r gwerth mwyaf. Mae'r gwerth mwyaf yn digwydd pan fo'r gronyn ar fin symud i fyny'r plân fel bod ffrithiant yn gweithredu tuag i lawr ac mae'n rhaid i'r grym oresgyn ffrithiant a grym disgyrchiant.

Enghraifft 2.21

Mae dwy fodrwy fach arw A a B, pwysau $3W$ ac W yn ôl eu trefn, yn llithro ar roden lorwedd arw sefydlog. Y cyfernod ffrithiant rhwng y rhoden a'r naill fodrwy a'r llall yw 0.5. Mae llinyn anestynadwy ysgafn trwy'r fodrwy lefn â phwysau W ac mae ei ddau ben ynghlwm wrth A a B. Mae'r cyfan mewn cydbwysedd mewn plân fertigol.

Eglurwch pam mae dwy ran y llinyn yn goleddu ar yr un ongl θ i'r fertigol a darganfyddwch werth mwyaf θ lle mae cydbwysedd yn bosibl.

Dyma'r diagram grymoedd:



Petai'r llinynnau yn goleddu ar onglau gwahanol θ a ϕ yna byddai cydrannu'n llorwedd ar C yn rhoi $\quad T\sin\theta = T\sin\phi,$

ac felly $\quad \theta = \phi.$

Mae hon yn broblem eithaf cymhleth gan fod angen cydrannu ar A, B ac C.

Mae cydrannu'n fertigol ar C yn rhoi

$$2T\cos\theta = W.$$

Mae cydrannu'n llorwedd ac yn fertigol ar A yn rhoi

$$T\sin\theta = F_1\,,\; R_1 = 3W + T\cos\theta.$$

Mae cydrannu'n llorwedd ac yn fertigol ar B yn rhoi

$$T\sin\theta = F_2\,,\; R_2 = W + T\cos\theta.$$

Mae amnewid $T\cos\theta$ yn rhoi

$$R_1 = \frac{7W}{2},\; R_2 = \frac{3W}{2} \text{ ac } F_1 = F_2 = \frac{W\tan\theta}{2}.$$

Mae'r grymoedd ffrithiant yn hafal ar A a B, ac am fod $R_2 < R_1$ mae'n dilyn y bydd y llithro cyntaf yn digwydd yn B pan fo

$$\frac{F_2}{R_2} = \frac{1}{3}\tan\theta \le 0.5.$$

Gwerth mwyaf $\tan\theta$ yw 1.5, ac felly gwerth mwyaf θ yw 56.3° yn fras.

<u>Ymarferion 2.5</u>

Mewn enghreifftiau rhifiadol, dylid cymryd g fel 9.8 ms^{-2} a rhoi atebion yn gywir i dri ffigur ystyrlon.

1 Mae gronyn mewn cydbwysedd ar fwrdd llorwedd garw. Mae llinyn ynghlwm wrth y gronyn ac mae'n goleddu ar ongl 40° i'r llorwedd. Mae T yn dynodi'r tensiwn yn y llinyn ac mae F yn dynodi'r grym ffrithiant. Darganfyddwch
(a) F o wybod bod $T = 40$ N, (b) T o wybod bod $F = 60$ N.

2 Mae gronyn, màs 1.5 kg, sy'n ddisymud ar blân llorwedd garw ar fin symud pan fo grym llorwedd 5 N yn gweithredu arno. Darganfyddwch y cyfernod ffrithiant.

3 Mae gronyn, màs 2 kg, mewn cydbwysedd ar blân llorwedd garw, a'r cyfernod ffrithiant yw 0.4. Darganfyddwch y grym lleiaf a fyddai prin yn symud y gwrthrych ar hyd y plân, wrth weithredu (i) yn llorwedd, (ii) ar ongl 30° i'r fertigol i fyny.

4 Rhoddir gronyn, màs 3 kg, ar blân garw sy'n goleddu 50° i'r llorwedd. Y cyfernod ffrithiant rhwng y plân a'r gronyn yw 0.25. Darganfyddwch y grym lleiaf sydd ei angen ar hyd llinell goledd mwyaf y plân er mwyn (i) atal y gronyn rhag llithro i lawr, (ii) ei symud i fyny'r plân.

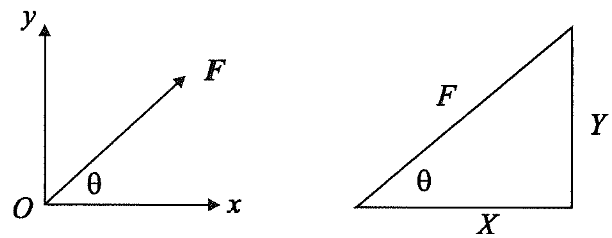
5 Mae gronyn, pwysau 80 N, yn cael ei ddal mewn cydbwysedd terfannol gan rym llorwedd ar blân sy'n goleddu 30° i'r llorwedd. O wybod bod y cyfernod ffrithiant yn 0.4, darganfyddwch faint y grym
(i) pan fo'r gronyn ar fin llithro i fyny'r plân,
(ii) pan fo'r gronyn ar fin llithro i lawr y plân.

6 Mae gronyn, màs 3kg, ar fin llithro i lawr plân garw sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd pan roddir grym 5 N i fyny'r plân ar hyd llinell y goledd mwyaf. Pan gynyddir y grym i 10 N mae'r gronyn ar fin symud i fyny'r plân. Darganfyddwch werth sin α.

2.3 Cyfrifo cydeffaith grymoedd sy'n gweithredu ar bwynt

Prif bwrpas cyfrifo'r cydeffaith yw ei ddefnyddio mewn problemau ar fudiant ond mae'r syniad o gydeffaith hefyd yn ddefnyddiol mewn problemau ar gydbwysedd. Er enghraifft, petai dau rym yn gweithredu a phetai angen cynnwys trydydd grym i gael cydbwysedd yna byddai maint y trydydd grym yn hafal i gydeffaith y ddau rym arall ond yn gweithredu i'r cyfeiriad dirgroes. Gallai hyn digwydd gyda gwifrau ar ben polyn telegraff lle byddai dwy wifren ynghlwm wrth ei gilydd a bod angen gosod trydedd wifren er mwyn cael cydbwysedd.

Cydrannau cydeffaith nifer o rymoedd sy'n gweithredu ar bwynt yw swm cydrannau'r grymoedd unigol. Felly, os gellir cyfrifo cydeffaith grym o'i gydrannau, yna gellir darganfod cydeffaith unrhyw nifer o rymoedd.



Cydrannau grym $\boldsymbol{F}$ ar ongl θ i gyfeiriad x fel yn y diagram yw

$$X = F\cos\theta,\quad Y = F\sin\theta.$$

Os yw θ yn ongl lem, yna F yw hypotenws triongl ongl sgwâr gydag ochrau eraill X ac Y. Felly trwy theorem Pythagoras mae $F = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

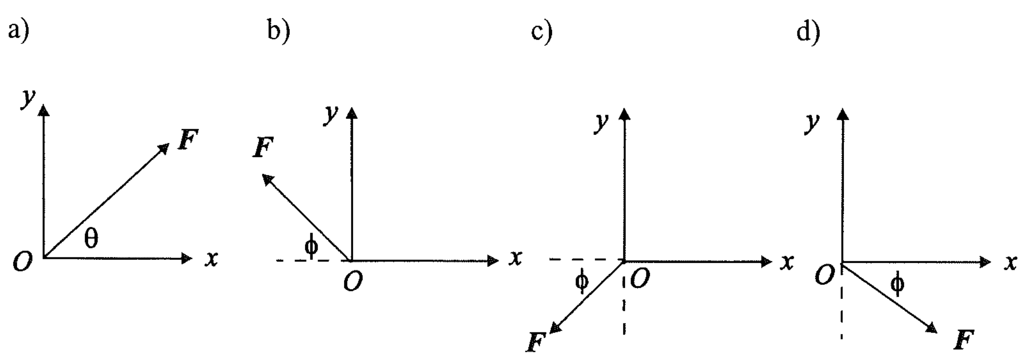
Mewn gwirionedd gellir profi bod hyn yn wir hyd yn oed os nad yw θ yn ongl lem (fel y gall X, neu Y, neu'r ddau, fod yn negatif) ac o hyn ymlaen cymerir ei fod yn wir ar gyfer pob X ac Y.

Felly gellir yn rhwydd gyfrifo maint y cydeffaith.

Mae darganfod y cyfeiriad ychydig yn fwy anodd. Mae rhannu'r cydrannau yn rhoi

$$\tan\theta = \frac{Y}{X}.$$

Rydych wedi dod ar draws y math hwn o hafaliad o'r blaen wrth weithio gyda thrionglau sgwâr. Pan fo X ac Y ill dau yn bositif, mae $\cos\theta$ a $\sin\theta$ hefyd yn bositif ac felly mae θ yn ongl lem a gellir ei darganfod trwy ddefnyddio'r ffwythiant $\tan^{-1}$ ar eich cyfrifiannell. Pan fo X neu Y yn negatif mae angen bod yn fwy gofalus, a'r cam cyntaf yw darganfod ym mha bedrant y mae'r llinell sy'n cynrychioli'r cydeffaith. Dangosir isod y pedwar posibilrwydd.



Gellir darganfod yr ongl lem ϕ rhwng y cydeffaith ac echelin x o'r mynegiad

$$\tan\phi = \frac{|Y|}{|X|},$$

h.y. rydych yn gadael allan arwyddion minws y cydrannau. Mae hyn yn gadael i chi gyfrifo union safle'r cydeffaith ac yna gallwch gyfrifo yr ongl a ffurfir ganddo â chyfeiriad positif x neu ag unrhyw linell arall.

Mae'n bosibl gwneud y cyfrifo'n fwy uniongyrchol trwy ddarganfod F yn gyntaf a defnyddio ffwythiannau $\cos^{-1}$ neu $\sin^{-1}$ i ddarganfod θ. Mae angen o hyd i chi ddarganfod ym mha bedrant y mae θ a defnyddio cymesuredd y ffwythiannau trigonometrig. Ar gyfer θ mewn graddau, dyma nhw: $\sin(180-\theta)=\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\tan(180+\theta)=\tan\theta$. Efallai y cewch beth anhawster â'r ail ddull hwn nes i chi gael rhagor o ymarfer mewn trigonometreg.
Wrth gyfrifo cydeffeithiau gallwch ddewis unrhyw ddau gyfeiriad perpendicwlar i'w gilydd ond gyda dau rym gallech symleiddio pethau trwy ddewis un cyfeiriad yn baralel i un o'r grymoedd.

Enghraifft 2.22

Darganfyddwch y cydeffaith pan fo (a) $X=5$ N, $Y=2$ N (b) $X=-4$ N, $Y=4$ N (c) $X=-6$ N, $Y=-3$ N (d) $X=3$ N, $Y=-1$ N.

(a) Dyma'r achos symlaf, sy'n cyfateb i ddiagram (a) uchod, ac felly

$$R=\sqrt{5^2+2^2}\text{ N}=5.39\text{ N, a hefyd }\tan\theta=\frac{2}{5}.\text{ Felly }\theta=21.8^\circ.$$

(b) Mae hyn yn cyfateb i ddiagram (b) uchod lle mae'r llinell sy'n cynrychioli'r cydeffaith i'w chael yn yr ail bedrant.
Y cydeffaith felly yw $\sqrt{4^2+4^2}$ N $=5.67$ N. Tan $\phi=\frac{4}{4}$ ac felly $\phi=45^\circ$.

Felly mae'r cydeffaith ar ongl 135° i gyfeiriad positif x.

(c) Mae hyn yn cyfateb i ddiagram (c) uchod gyda'r llinell sy'n cynrychioli'r cydeffaith yn y trydydd pedrant.
Y cydeffaith felly yw $\sqrt{6^2+3^2}$ N $=6.71$ N. Tan $\phi=\frac{1}{2}$ ac felly $\phi=26.6^\circ$.

Felly mae'r cydeffaith ar ongl 206.6° i gyfeiriad positif x.

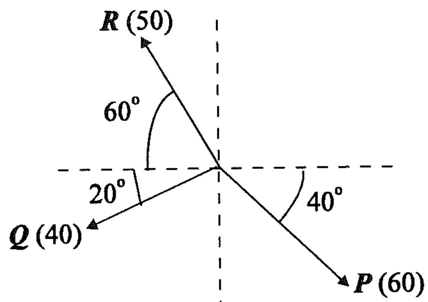
(d) Mae hyn yn cyfateb i ddiagram (d) gyda'r llinell sy'n cynrychioli'r cydeffaith yn y pedwerydd pedrant.
Y cydeffaith felly yw $\sqrt{3^2+1^2}$ N $=3.16$ N. Tan $\phi=\frac{1}{3}$ ac felly $\phi=18.4^\circ$.

Felly mae'r cydeffaith ar ongl -18.4° (neu 341.6 °) i'r cyfeiriad x.

Wrth ddarganfod y cydeffaith pan fo nifer o rymoedd yn gweithredu, bydd cam ychwanegol sef adio'r cydrannau gwahanol i gael cydrannau'r grym cydeffaith.

Enghraifft 2.23

Yn y diagram mae tri grym ***P***, ***Q*** ac ***R*** yn gweithredu ar bwynt. Dangosir eu meintiau (mewn newtonau) mewn cromfachau. Darganfyddwch faint a chyfeiriad eu cydeffaith.



Cydrannau ***P***, ***Q*** ac ***R***, yn ôl eu trefn, i'r dde ar draws y dudalen (mewn newtonau) yw $60 \cos 40^\circ$, $-40 \cos 20^\circ$ a $-50 \cos 60^\circ$.

Cydran y cydeffaith yw swm y rhain, sef -16.6 N.

Cydrannau ***P***, ***Q*** ac ***R***, yn ôl eu trefn, i fyny'r dudalen (mewn newtonau) yw $-60 \sin 40^\circ$, $-40 \sin 20^\circ$ a $50 \sin 60^\circ$.

Cydran y cydeffaith yw swm y rhain, sef -8.95 N.

Maint y cydeffaith yw $\sqrt{16.6^2 + 8.95^2}$ N = 18.9 N, ac mae'r llinell sy'n cynrychioli'r cydeffaith yn y trydydd pedrant. Tangiad yr ongl lem rhwng cyfeiriad y cydeffaith a chyfeiriad y llinell doredig yw $\dfrac{8.95}{16.6} = 0.539$, ac felly mae'r ongl hon yn 28.3°.

Felly mae'r cydeffaith ar ongl o 208.3° i'r llinell i'r dde ac ar draws y dudalen.

Enghraifft 2.24

Mae'r tri grym yn yr enghraifft flaenorol yn modelu'r grymoedd mewn tair gwifren lorwedd ar ben polyn telegraff. Darganfyddwch safle pedwaredd wifren lorwedd i'w gosod fel bod y pedwar grym mewn cydbwysedd, a chyfrifwch y tensiwn fydd ynddi.

Bydd y bedwaredd wifren yn y cyfeiriad dirgroes i gydeffaith y tair arall, h.y. bydd yn gweithredu ar ongl 28.3° i'r llinell i'r dde ac ar draws y dudalen, a'r tensiwn yn y wifren hon fydd 18.9 N.

Ymarferion 2.6

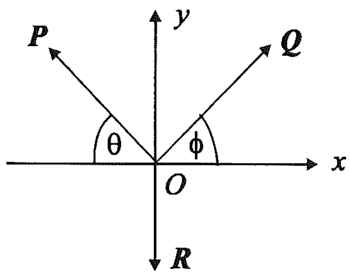
Mewn enghreifftiau rhifiadol dylid rhoi yr atebion yn gywir i dri ffigur ystyrlon.

1 Dynodir cydrannau x ac y grym gan X ac Y. Darganfyddwch faint a chyfeiriad y cydeffaith, mewn perthynas â chyfeiriad positif x, pan fo

(a) $X = 7$ N, $Y = 3$ N, (b) $X = 4$ N, $Y = -8$ N, (c) $X = -3$N, $Y = 11$ N,

(d) $X = -5$ N, $Y = -1\ 3$ N, (e) $X = -7$ N, $Y = 4$ N, (f) $X = -3$ N, $Y = -3$ N.

2 Mae'r diagram yn dangos tri grym ***P***, ***Q*** ac ***R*** yn gweithredu ar bwynt *O*.



Darganfyddwch faint eu cydeffaith, a'i gyfeiriad mewn perthynas â chyfeiriad positif x, pan fo

(a) $P = 1$ N, $Q = 2$ N, $R = 5$ N, $\theta = 20°$, $\phi = 30°$,

(b) $P = 8$ N, $Q = 3$ N, $R = 4$ N, $\theta = 40°$, $\phi = 60°$,

(c) $P = 6$ N, $Q = 6$ N, $R = 1$ N, $\theta = 50°$, $\phi = 20°$.

3 Darganfyddwch y grym ychwanegol y bydd angen ei gyflwyno ym mhob un o'r achosion yn yr ymarfer blaenorol er mwyn i'r system o bedwar grym fod mewn cydbwysedd.

2.4 Tybiaethau modelu

Grym disgyrchiant

Os gollyngir unrhyw beth ychydig uwchben wyneb y Ddaear, gwyddom y bydd yn disgyn. Felly mae grym yn gweithredu arno. Dyma'r grym disgyrchiant ar y gwrthrych. Mae'n gweithredu tuag at ganol y Ddaear a'i faint yw pwysau'r gwrthrych.

Gellir mynegi pwysau'r gwrthrych hefyd yn nhermau ei fàs, m, a g, y cyflymiad a achosir gan ddisgyrchiant. Cewch ddiffiniad manwl o'r meintiau hyn yn nes ymlaen, ond ar hyn o bryd y cyfan sydd angen ei wybod, am unrhyw wrthrych, yw fod ganddo fàs penodol a bod g tua 9.81 ms^{-2}. Yr uned i fesur màs yw'r kilogram (talfyriad kg). Pwysau, mewn newtonau, gwrthrych màs m kg yw mg lle mesurir g mewn ms^{-2}.

Mae maint y grym gwirioneddol a roddir gan ddisgyrchiant yn amrywio gyda'r pellter o ganol y ddaear a hefyd gyda'r lledred. Yn y rhan fwyaf o achosion, gellir anwybyddu'r amrywiaethau hyn, a'r dybiaeth fodelu arferol yw bod pwysau gronyn yn gyson a bod grym disgyrchiant yn gweithredu ar hyd y fertigol.

Gyda'r model syml o wrthrych fel gronyn mae grym disgyrchiant yn gweithredu ar y pwynt lle mae'r gronyn ond, gyda gwrthrych cyffredinol, sy'n gasgliad o ronynnau, nid yw'r sefyllfa mor glir. Fodd bynnag, mae gan bob gwrthrych bwynt unigryw y mae grym disgyrchiant yn gweithredu trwyddo, a gelwir y pwynt hwn yn graidd disgyrchiant y gwrthrych. Ni ddisgwylir i chi wybod ble mae safle craidd disgyrchiant unrhyw wrthrych 3 dimensiwn penodol. Yn yr achos o 1 dimensiwn, mae craidd disgyrchiant rhoden unffurf denau yn gorwedd yn ei chanolbwynt. Ar gyfer problemau 2 ddimensiwn, cyfyngir ein sylw i ffigurau plân unffurf. Eglurir hyn yn fwy manwl ym Mhennod 7.2.

Mae'r glorian sbring yn un offeryn i fesur pwysau; un arall yw clorian gyffredin ystafell ymolchi. Gwir ddarlleniad y glorian yw maint adwaith y glorian ar y gwrthrych, a phan nad yw'r glorian yn symud, mae hyn yn hafal i bwysau'r gwrthrych.

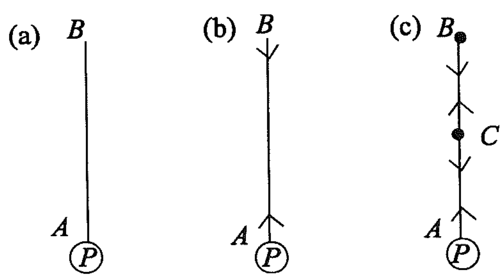
Mewn gwirionedd, nid yw'r offerynnau hyn yn mesur y pwysau go iawn (h.y. maint grym disgyrchiant) gan y dylai fod cywiriad bach oherwydd cylchdro'r Ddaear. Anwybyddir hyn fel arfer ond mae hynny ynddo'i hun yn dybiaeth fodelu.

Caiff gwrthrych heb bwysau (neu, yn fanylach, gwrthrych lle gellir anwybyddu grym disgyrchiant arno o'i gymharu â grymoedd eraill) ei ddisgrifio fel gwrthrych ysgafn.

Dylech nodi'n ofalus bod gwahaniaeth rhwng bod heb bwysau a bod yn ddibwysau, rhywbeth mae'n bosibl y clywsoch amdano. Mae diffyg pwysau yn gysylltiedig â mudiant fel arfer a dywedir bod gwrthrych yn ddibwysau os nad oes adwaith rhyngddo ac arwyneb y mae'n cyffwrdd ag ef. Er enghraifft, petai rhywun yn ddigon anffodus i sefyll ar glorian ystafell ymolchi mewn lifft a oedd yn disgyn yn rhydd o dan effaith disgyrchiant, yna ni fyddai'r glorian yn dangos darlleniad. Yn yr un modd, petaech yn disgyn yn rhydd gan ddal parsel, ni fyddech yn teimlo pwysau'r parsel ac felly byddai'n ymddangos yn ddibwysau i chi (gweler Enghraifft 5.3). Nid yw hyd yn oed y datganiadau hyn yn hollol gywir gan eu bod yn tybio nad oes grymoedd eraill heblaw disgyrchiant yn gweithredu, h.y. nad oes gwrthiannau. Golyga hyn na fyddai'r datganiadau hyn yn ddilys ond mewn gwactod.

Llinynnau

Mae gwrthrych bach P ynghlwm wrth un pen A i linyn AB, ac mae'r pen arall B yn cael ei ddal yn sefydlog. Felly mae'r gwrthrych yn hongian yn ddisymud fel yn (a) isod.



I symleiddio pethau, tybir bod P yn cael ei fodelu fel gronyn. Mae grym disgyrchiant yn gweithredu yn fertigol i lawr ar P ac felly, gan ei fod yn ddisymud (h.y. mewn cydbwysedd) mae grym hafal a dirgroes yn gweithredu yn y llinyn o A i B.

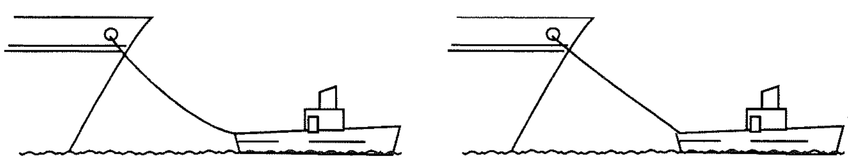
Dyma'r tensiwn ac mae wedi'i gyfeirio o'r naill ben i'r llall. Byddai'r person sy'n dal y llinyn ar B yn profi grym i'r cyfeiriad o B i A. Felly, mae llinyn yn rhoi tyniad (tensiwn) ar ei ddau ben fel a ddangosir yn (b) uchod. Ar unrhyw bwynt C rhwng A a B, bydd y rhan AC yn rhoi peth grym ar y rhan BC a bydd y grym hwn i gyfeiriad CA a bydd y rhan BC yn rhoi grym ar AC i gyfeiriad CB. Dangosir y sefyllfa yn niagram (c).

Felly, mae llinyn yn dal tensiwn ar bob pwynt ar ei hyd ac mewn gwirionedd y tensiwn yw grym y rhyngweithiad rhwng dwy ran o'r llinyn.

Mae'r gair llinyn mewn Mecaneg yn awgrymu rhywbeth sydd â hyd ond dim croestoriad ac felly gellir ei fodelu fel llinell denau neu gromlin. Gall llinyn dynnu o'i ddau ben ond ni all wthio. Tybir hefyd ei fod yn berffaith hyblyg, h.y. ni all roi grym yn berpendicwlar i'w hyd.

Os tybir bod y llinyn yn y diagramau gyferbyn yn ysgafn, yna ni fydd grym disgyrchiant yn gweithredu ar unrhyw bwynt ar y llinyn ac felly bydd y grym a roddir gan y rhan BC yn hafal i'r grym a roddir gan y rhan AC. Felly bydd y tensiwn yn gyson. Gellir profi bod tybio bod llinyn yn ysgafn yn golygu y bydd y tensiwn yn gyson ar ei hyd ac, os bydd unrhyw ddau bwynt ar linyn ysgafn yn cael eu dal yn sefydlog, y bydd y llinyn yn y rhan rhyngddynt yn syth.

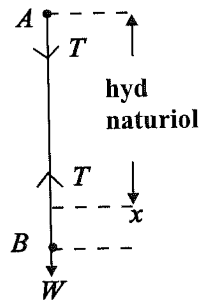
Modelir pob math o geblau a rhaffau fel llinynnau ysgafn ond nid yw'r model hwn bob amser yn ddigonol. Er enghraifft mae'r diagram ar y chwith isod yn dangos rhaff lac yn clymu tynfad wrth long, ac ar y dde dangosir y tynfad ar fin symud y llong.



Mae'n amlwg nad yw llinyn ysgafn yn fodel da yn yr achos ar y chwith gan fod y rhaff yn pantio ond efallai y byddai'n rhesymol yn yr ail achos. Y gwahaniaeth yw bod cryn dipyn o densiwn yn y rhaff yn yr ail achos a bod y tensiwn hwnnw yn fwy o lawer na phwysau'r rhaff. Felly mae modelu rhaff fel llinyn ysgafn yn y bôn yn anwybyddu pwysau'r rhaff o'i gymharu â'r tensiwn sy'n gweithredu arni.

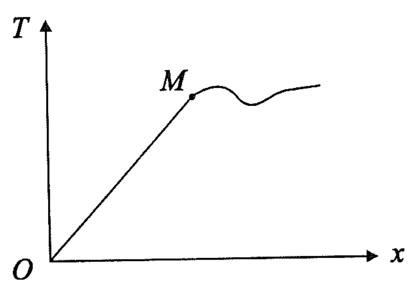
Llinynnau elastig

Pe baech yn tynnu dau ben darn o linyn o'r math a ddefnyddir i glymu parseli, byddech yn disgwyl i'r pellter rhwng y ddau ben aros yr un fath. Os, ar y llaw arall, y tynnwch ddau ben darn tenau o elastig, yna bydd y pellter rhwng y ddau ben yn cynyddu. Un ffordd o wahaniaethu rhwng y ddau achos yw dweud bod y llinyn parsel yn anestynadwy a bod y darn elastig yn estynadwy. Mae mwy na hyn o wahaniaeth, fodd bynnag, ac nid yw modelu llinynnau elastig bob amser yn rhwydd.



Mae'r diagram yn dangos llinyn elastig AB yn hongian wrth bwynt sefydlog A ac mae pwysau W ynghlwm wrth ben B. Gellir darganfod hyd AB a chyfrifo estyniad y llinyn. (Er mwyn darganfod yr estyniad mae angen gwybod hyd anestynedig, neu hyd naturiol, y llinyn. Gellir gwneud hyn trwy osod y llinyn yn syth ar fwrdd a mesur ei hyd).

Trwy roi pwysau gwahanol ar B gellir darganfod yr estyniadau sy'n cyfateb i bwysau gwahanol. Gan fod y pwysau mewn cydbwysedd, mae'r tensiwn yn y llinyn yn hafal i'r pwysau. Felly gellir darganfod y tensiynau sy'n cyfateb i estyniadau gwahanol. Mae arbrofion o'r fath wedi cael eu cynnal ar gyfer llawer o ddefnyddiau ac mae graff y tensiwn T yn erbyn estyniad x yn fras fel a ddangosir isod.



Ar y dechrau, cyn cyrraedd gwerth penodol o T, bydd y graff yn llinell syth OM, ond wedyn gall gymryd ffurf mwy cymhleth, a dangosir un posibilrwydd yn y diagram uchod. Gyda thensiynau sy'n ddigon mawr bydd y llinyn yn torri yn y pen draw.

Gyda thensiynau sy'n cyfateb i ran OM o'r graff, os bydd y pwysau yn cael ei dynnu oddi ar y llinyn, bydd y llinyn yn mynd yn ôl i'w hyd naturiol ac os ail-wneir yr arbrawf yna ceir y llinell OM unwaith eto. Os bydd y pwysau yn cael eu tynnu oddi ar y llinyn gyda thensiynau mwy na'r rhai sy'n cyfateb i ran OM, yna ni fydd y llinyn yn mynd yn ôl i'w hyd naturiol ac os ail-wneir yr arbrawf ni cheir yr un graff eto. Mae'r tensiwn sy'n cyfateb i bwynt M yn cynrychioli terfan elastig y llinyn.

Mae gan linyn estynadwy (elastig) ysgafn rai o briodweddau llinyn anestynadwy ysgafn yn yr ystyr na all ond cynnal tensiwn (hynny yw, na all wthio) a bod y tensiwn yn gyson ar ei hyd. Mae'n wahanol yn yr ystyr, fel y mae'r ansoddair estynadwy yn awgrymu, nad yw hyd y llinyn yn gyson.

Y model arferol ar gyfer elastig (llinyn estynadwy) yw bod ganddo holl briodweddau llinyn ond fod y tensiwn yn cael ei ddisgrifio gan y llinell *OM,* h.y. bod y tensiwn mewn cyfrannedd union â'r estyniad. Dyma ddeddf Hooke sy'n nodi pan gaiff llinyn elastig â hyd naturiol l ei estyn x, yna rhoddir maint y tensiwn T yn y llinyn gan

$$T = \frac{\lambda x}{l}$$

lle mae λ yn gysonyn a elwir yn fodwlws elastigedd y llinyn (ac y gellir ei ddarganfod trwy arbrawf), tra gelwir λ/l yn aml yn anystwythder a hefyd weithiau yn gysonyn y llinyn.

Sbringiau

Yn y bôn, sbiral o wifren denau yw sbring ac fel arfer tybir y gellir ei fodelu fel llinyn elastig er bod ganddo un briodwedd ychwanegol, sef y gallu i roi gwthiad yn ogystal â thensiwn. Golyga hyn y gellir cywasgu sbring, a phan fo wedi ei gywasgu mae gwthiad yn gweithredu tuag allan ar y ddau ben.

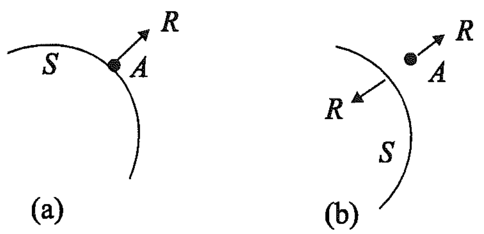
Mae deddf Hooke yn dal gyda sbring hefyd ond, yn achos cywasgiad, mae'r tensiwn yn newid yn wthiad.

Rhodenni

Modelir rhoden, fel llinyn, ar ffurf llinell. Tybir bod rhodenni yn anhyblyg ac felly fe'u modelir fel llinellau syth. Wrth fodelu rhoden, gwneir dwy dybiaeth nad ydynt yn ddilys wrth fodelu llinynnau. Y gyntaf yw y gall rhoden roi gwthiadau yn ogystal â thensiynau, a'r ail yw y gall rhoden gynnal grymoedd sy'n berpendicwlar iddi ei hun. Golyga hyn y gellir cynnal rhoden gan rymoedd a roddir ar ddau bwynt arni fel a ddangosir yn y diagram, ac felly gellir defnyddio rhoden, er enghraifft, i roi model syml o drawst dros afon neu hyd yn oed bont. Mewn gwirionedd bydd y rhan fwyaf o drawstiau, os na ellir anwybyddu eu pwysau, yn plygu ychydig os cânt eu cynnal fel uchod ac maent ychydig yn elastig. Mae'r model rhodenni yn anwybyddu'r posibilrwydd hwn.

Arwynebau llyfn

Os yw gwrthrych bach A yn cyffwrdd ag arwyneb S fel a ddangosir yn (a) isod,

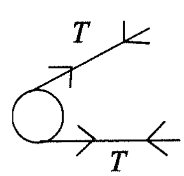


rhoddir peth grym gan S ar A. Diffinnir arwyneb llyfn fel un y mae ei adwaith ar A yn normal i S ar bwynt y cyffyrddiad ac yn y cyfeiriad o S i A. Hefyd, trwy drydedd ddeddf Newton, bydd grym hafal a dirgroes yn gweithredu ar S oherwydd A. Mewn rhai problemau mae angen dangos y gwrthrychau ychydig ar wahân fel yn (b) uchod a dangos y grymoedd rhyngweithiol ar bob gwrthrych yn eglur. Mae adwaith yr arwyneb bob amser oddi wrtho ac os daw yn sero (neu yn gweithredu tuag i mewn) yn eich cyfrifiadau mae hyn yn golygu bod y cyffyrddiad wedi cael (neu ar fin cael) ei golli.

Petai rhywbeth fel llyfr yn cael ei wthio ar hyd bwrdd sy'n berffaith llyfn, yna ni fyddai angen ond y gwthiad lleiaf i'w symud ac yna byddai'n parhau i symud heb angen ymdrech bellach. Mae hyn oherwydd na fyddai arwyneb llyfn yn rhoi grym yn dangiadol iddo ei hun. Mewn gwirionedd nid yw unrhyw arwyneb yn berffaith llyfn. Petai un yn bodoli, ni fyddai'n bosibl cerdded na gyrru arno. Mae hyn oherwydd bod y weithred o gerdded neu yrru yn rhoi grym tangiadol ar y ffordd ac, yn ôl trydedd ddeddf Newton, mae'r ffordd yn rhoi grym hafal a dirgroes ar y droed neu'r olwyn, a dyma beth sy'n gwneud mudiant yn bosibl.

Peg llyfn (neu olwyn pwli llyfn)

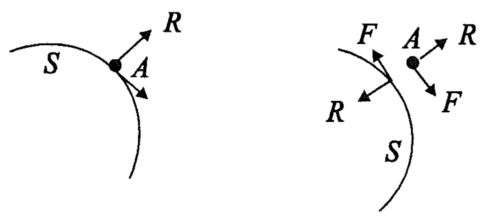
Defnyddir peg neu olwyn pwli fel a ddangosir isod



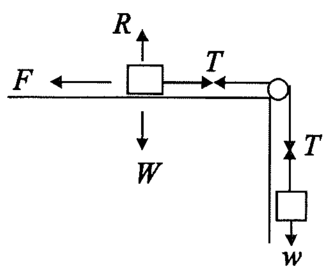
er mwyn newid cyfeiriad rhaff (a fodelir fel arfer ar ffurf llinyn). Peg llyfn yw un sy'n rhoi grym yn berpendicwlar i'w arwyneb yn unig. Hefyd, os rhoddir llinyn o amgylch peg llyfn fel a ddangosir uchod, yna mae'r tensiwn ar bob ochr y llinyn yr un fath. Mewn Stateg modelir pwli llyfn yn yr un modd â pheg llyfn. Os yw pwli'n symud, mae'n fwy cymhleth i'w fodelu a thrafodir hyn yn Adran 5.3.

Arwynebau garw

Fel a nodwyd uchod, mae arwynebau, mewn gwirionedd, yn rhoi grym tangiadol ar unrhyw beth sy'n cyffwrdd â hwy. Os byddwch yn gwthio llyfr ar hyd bwrdd byddwch yn profi peth gwrthiant i ddechrau, yna bydd y llyfr yn sydyn yn llithro ac, os sylwch yn ddigon manwl, efallai y gwelwch fod angen llai o ymdrech i gadw'r llyfr i symud nag yr oedd ei angen i'w gychwyn. Gelwir unrhyw arwyneb sy'n rhoi grym tangiadol (h.y. i'r ochr) yn arwyneb garw. Mae gan y grym ar bwynt y cyffyrddiad ag arwyneb garw ddwy gydran, yr adwaith R yn berpendicwlar i'r arwyneb, a chydran F, grym ffrithiant. Dangosir isod y grymoedd ar ddau wrthrych sy'n cyffwrdd â'i gilydd, gan ddefnyddio trydedd ddeddf Newton.



Dengys y diagram canlynol arbrawf y gellir ei ddefnyddio i ddarganfod yr ymddygiad ar bwynt cyffyrddiad ag arwyneb garw.



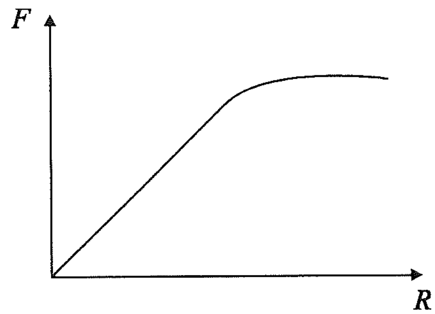
Rhoddir bloc bach, pwysau W, ar fwrdd ac mae llinyn sydd ynghlwm wrth y bloc yn mynd dros bwli llyfn ar ymyl y bwrdd. Clymir pwysau w wrth ben rhydd y llinyn fel bod y system mewn cydbwysedd. Modelir y bloc fel gronyn, a'r unig rymoedd sy'n gweithredu arno yw ei bwysau W yn fertigol i lawr, yr adwaith normal R yn gweithredu yn syth i fyny, y tensiwn T yn y llinyn a grym ffrithiant F a ddangosir yn gweithredu i'r chwith. Mae cydrannu yn llorwedd a fertigol ar gyfer y bloc yn rhoi

$$R = W \quad \text{ac} \quad F = T.$$

Mae cydrannu yn fertigol ar gyfer y pwysau sy'n hongian yn rhoi

$$T = w.$$

Mae'r hafaliad diwethaf yn tybio bod y pwli'n llyfn a bod y llinyn yn ysgafn, ac mae hefyd yn dangos, gan fod y tensiwn yn bositif, fod y cyfeiriad cywir wedi ei ddewis ar gyfer y grym ffrithiant. Ar y dechrau, ar gyfer W penodol, gellir cynyddu gwerthoedd w heb aflonyddu ar y cydbwysedd. Ar werth arbennig i w mae'r bloc yn dechrau llithro, a chofnodir gwerthoedd R $(= W)$ ac F $(= w)$ pan fydd y bloc yn llithro. Gellir ail-wneud y broses gyda gwerthoedd W gwahanol a phlotio graff o R yn erbyn F (ar y pwynt lle mae'r bloc yn llithro). Gwelir bod y graff ar ffurf llinell syth i ddechrau ac yna gromlin.



Yn y rhan sy'n llinell syth,

$$F = \mu R,$$

a gelwir μ yn gyfernod ffrithiant neu, yn gywirach, yn gyfernod ffrithiant disymud, ac mae'n briodwedd o'r ddau arwyneb sy'n cyffwrdd â'i gilydd. Mae'r model arferol yn anwybyddu y rhan o'r gromlin sy'n crymu a thybir bob amser fod y berthynas rhwng yr adwaith normal a'r grym ffrithiant ar bwynt y llithriad yn berthynas llinol.

Trwy arbrofion cafwyd y rheolau canlynol sy'n crynhoi priodweddau grym ffrithiant ar arwyneb garw.

(a) Mae grym ffrithiant yn gweithredu i'r cyfeiriad fyddai'n atal mudiant gwrthrych.
(b) Nes bod maint grym ffrithiant yn cyrraedd gwerth terfannol mae'n union y maint sydd ei angen i atal llithriad.
(c) Ar y gwerth terfannol, mae $F = \mu R$, lle gelwir μ yn gyfernod ffrithiant.
(d) Nes bod llithriad yn digwydd, mae $F \leq \mu R$.

Mewn llawer o broblemau defnyddir F i ddynodi'r gydran i gyfeiriad penodol ac ni fydd hyn bob amser i'r cyfeiriad lle mae grym ffrithiant yn gweithredu. Felly gall F fod yn negatif ac o ganlyniad yr amod cywir ar gyfer cydran grym ffrithiant yw

$$-\mu R \leq F \leq \mu R.$$

Yn achos $F = \mu R$ dywedir bod y ffrithiant yn derfannol a dywedir bod y gwrthrych mewn cydbwysedd terfannol ac ar fin llithro.

Unwaith bod gwrthrych wedi dechrau llithro mae arbrofion yn dangos bod y grym ffrithiant yn parhau i fod mewn cyfrannedd union â'r adwaith normal ond nid yw'r cyfernod cyfrannedd bob amser yn hafal i μ ac weithiau fe'i dynodir gan μ' a chyfeirir ato fel y cyfernod ffrithiant llithro. Ceir yn aml bod $\mu' < \mu$, ac mae hyn yn egluro pam mae'n fwy anodd gwneud i'r llyfr ddechrau llithro na'i gadw i lithro, a pham mae drôr yn tueddu i agor yn sydyn wrth i chi dynnu arni.

Mewn llawer o achosion, y dybiaeth fodelu yw bod y ddau gyfernod ffrithiant yn hafal, ac os na ddywedir wrthych pa gyfernod ffrithiant a roddir, dylech gymryd yn ganiataol y gallwch ddefnyddio'r un gwerth ar gyfer cydbwysedd terfannol neu ar gyfer llithro. Yn achos dur yn gorwedd ar ddur, mae $\mu = 0.6$ tra bo $\mu' = 0.4$, ac yn achos teiars ar ffordd sych mae $\mu = 0.9$ tra bo $\mu' = 0.8$.

Ymarferion Amrywiol 2

1 Mae gan dri grym sy'n gweithredu ar bwynt y cydrannau canlynol yn baralel i gyfeiriad x: 5 N, 7 N ac 8 N. Eu cydrannau yn baralel i gyfeiriad y yw 4 N, 11 N a 6 N. Darganfyddwch

(a) gydrannau cydeffaith y grymoedd hyn i gyfeiriadau x ac y,

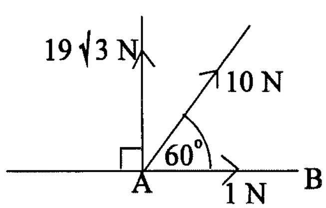
(b) faint y cydeffaith,

(c) yr ongl a wneir gan y cydeffaith gyda chyfeiriad x,

(d) faint a chyfeiriad y grym unigol ychwanegol a fydd mewn cydbwysedd gyda'r tri grym arall.

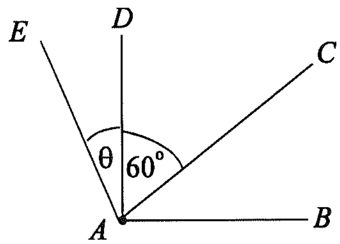
2 Mae gan dri grym sy'n gweithredu ar bwynt y cydrannau canlynol yn baralel i gyfeiriad x: 1 N, −5 N a p N. Cydrannau dau o'r grymoedd yn baralel i gyfeiriad y yw 1 N a 3 N. Nid oes gan y trydydd grym gydran yng nghyfeiriad y. Os maint cydeffaith y grymoedd yw 5 N, darganfyddwch y ddau werth sy'n bosibl ar gyfer p.

3



Mae tri grym â meintiau $19\sqrt{3}$ N, 10 N ac 1 N yn gweithredu ar bwynt A i'r cyfeiriadau a ddangosir yn y diagram. Darganfyddwch faint y grym unigol ychwanegol yn gweithredu ar A a fydd yn creu cydbwysedd a darganfyddwch yr ongl rhwng y grym hwn a'r llinell AB.

4



Mae gronyn, pwysau 18 N, yn hongian mewn cydbwysedd ar bwynt A trwy gael ei gynnal gan bedwar llinyn AB, AC, AD, AE, sydd i gyd yn yr un plân fertigol. Mae'r llinyn AB yn llorwedd a'r tensiwn yn AB yw $7\sqrt{3}$ N; mae'r llinyn AC yn goleddu ar ongl 60° i'r fertigol a'r tensiwn yn AC yw 8 N; mae'r llinyn AD yn fertigol a'r tensiwn yn AD yw 3 N; mae'r llinyn AE ar ongl $\theta°$ i'r fertigol a'r tensiwn yn AE yw T. Darganfyddwch werthoedd T a θ.

5 Mae gronyn P, màs 0.2 kg, yn hongian mewn cydbwysedd o bwynt sefydlog O wrth linyn estynadwy ysgafn o hyd naturiol 0.4 m. Nodwch pa un o'r geiriau a danlinellwyd sy'n eich galluogi i dybio bod y tensiwn yr un fath ym mhob pwynt ar y llinyn.
O wybod bod modwlws elastigedd y llinyn yn 10 N Darganfyddwch y pellter OP.

6 Mae gronyn, pwysau 60 N, ynghlwm wrth ddau linyn anestynadwy, y ddau yn 13 cm o hyd. Mae pennau eraill y llinynnau ynghlwm wrth ddau bwynt A a B ar yr un lefel lorwedd gyda phellter o 24 cm rhyngddynt. Darganfyddwch y tensiwn yn y llinynnau pan fo'r gronyn yn hongian mewn cydbwysedd.
Yna rhoddir llinynnau elastig, y ddau â hyd naturiol 13 cm a'r un modwlws elastigedd, yn lle'r llinynnau anestynadwy. Y tro hwn mae'r gronyn yn hongian mewn cydbwysedd 9 cm o dan y llinell AB. Darganfyddwch fodwlws elastigedd y llinynnau.

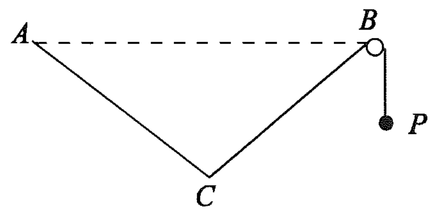
7 Mae grymoedd â meintiau P a Q yn gweithredu ar hyd llinellau OA ac OB yn ôl eu trefn, a'u cydeffaith yw grym o faint P; os newidir maint y grym ar hyd OA i $2P$ y cydeffaith eto yw grym o faint P. Darganfyddwch

(i) Q yn nhermau P,

(ii) yr ongl rhwng OA ac OB,

(iii) yr onglau rhwng y ddau gydeffaith ac OA.

8



Mae'r diagram yn dangos llinyn anestynadwy ysgafn ynghlwm wrth bwynt A ac yn mynd dros beg llyfn bach B sydd ynghlwm ar yr un lefel ag A. Mae gronyn P, màs m, yn hongian yn rhydd oddi ar ben arall y llinyn. Mae modrwy lefn C, hefyd â màs m, yn rhydd i lithro ar y llinyn rhwng A a B ac mae'r system mewn cydbwysedd. Dangoswch fod AC a BC yn goleddu ar ongl $\pi/3$ i'r fertigol.

9 Mae llyfr, màs 1.5 kg, yn gorwedd ar blân garw sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd. O wybod bod y cyfernod ffrithiant rhwng y plân a'r llyfr yn 0.3 a bod y llyfr ar fin llithro i lawr y plân, darganfyddwch yr ongl α.

10 Mae car wedi'i barcio ar riw gyda'i frêc yn ei ddal. Màs y car yw 1200 kg ac mae'r bryn yn goleddu 20° i'r llorwedd. Darganfyddwch gyfanswm y grym ffrithiant ac adwaith normal y ffordd ar y car.
Pa dybiaeth fodelu a wnewch yn eich cyfrifiadau?

11 Yna caiff y car yng nghwestiwn 10 ei barcio ar riw arall. Mae'r arwyneb yn peri bod y cyfernod ffrithiant rhwng y teiars a'r ffordd yn 0.6. Darganfyddwch y goledd mwyaf lle na fydd y car yn llithro i lawr y rhiw.

12 Mae bloc, màs 3 kg, yn gorwedd ar fwrdd llorwedd garw. Pan fydd grym 10 N yn gweithredu ar y bloc ar ongl 60° i fyny o'r llorwedd mae'r bloc ar fin llithro. Darganfyddwch y cyfernod ffrithiant rhwng y bloc a'r bwrdd.

13 Rhoddir llyfr ar gaead desg a gaiff ei ogwyddo yn raddol. O wybod bod y llyfr yn dechrau llithro pan fydd y caead ar oledd 30° i'r llorwedd, darganfyddwch y cyfernod ffrithiant.

14 Rhoddir gronyn ar blân llyfn sy'n goleddu 35° i'r llorwedd. Cedwir y gronyn mewn cydbwysedd gan rym llorwedd 8 N yn gweithredu yn y plân fertigol sy'n cynnwys llinell goledd mwyaf y plân trwy'r gronyn.

Darganfyddwch
(a) bwysau'r gronyn,
(b) faint y grym a roddir gan y plân ar y gronyn.

15 Mae gronyn yn hongian mewn cydbwysedd wrth ddau linyn anestynadwy ysgafn ac mae mewn cydbwysedd. Mae un llinyn yn goleddu 30° i'r llorwedd a'r tensiwn yn y llinyn hwn yw 40 N. Mae'r ail linyn ar oledd 60° i'r llorwedd. Cyfrifwch, mewn newtonau,

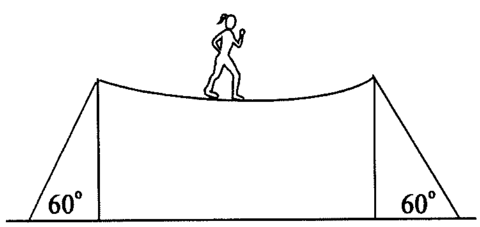
(a) bwysau'r gronyn,

(b) faint y tensiwn yn yr ail linyn.

16 Rhoddir gronyn P ar arwyneb mewnol sffêr gwag gyda chanol O. Os yw'r cyfernod ffrithiant yn 0.5 a'r gronyn yn aros mewn cydbwysedd terfannol, darganfyddwch dangiad yr ongl rhwng y fertigol i lawr ac OP.

17 Mae gronyn, màs m, mewn cydbwysedd ar blân garw sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd. Pan roddir grym mg i'r gronyn, i'r cyfeiriad i fyny llinell y goledd mwyaf, mae ar fin symud i fyny'r plân. Pan roddir grym $\frac{mg}{2}$ i'r gronyn i'r cyfeiriad i lawr llinell y goledd mwyaf, mae ar fin symud i lawr y plân. Darganfyddwch sin α a'r cyfernod ffrithiant.

18



Mae'r diagram yn dangos perfformiwr mewn syrcas yn cerdded ar hyd rhaff dynn. Clymwyd dau ben y rhaff wrth bolion fertigol a chaiff y polion hyn eu cynnal gan wifrau sydd ynghlwm wrth eu pennau uchaf. Gosodwyd pennau eraill y gwifrau yn y ddaear ac mae'r ddwy wifren ar oledd 60° i'r llorwedd. Pan fydd y perfformiwr, sydd â màs 70 kg, hanner ffordd ar draws y rhaff dynn mae'r rhaff yn goleddu ar 80° i'r ddau bolyn. Darganfyddwch

(i) y tensiwn yn y rhaff dynn,

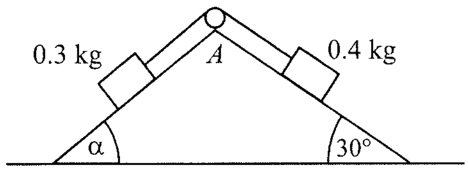
(ii) y tensiynau yn y gwifrau sy'n ei chynnal,

(iii) y gwthiad a roddir ar ben uchaf pob polyn.

19 Mae gan ddau ronyn yr un màs ac fe'u cysylltir â'i gilydd gan linyn anestynadwy. Mae un gronyn yn gorwedd ar blân garw ar ongl θ i'r llorwedd ac mae'r ail yn hongian yn rhydd. Mae'r llinyn sy'n eu cysylltu yn mynd dros bwli llyfn sydd uwchben y gronynnau ac sy'n gwahanu'r llinyn yn un rhan sy'n baralel i'r plân goleddol a rhan arall sy'n fertigol.

Dangoswch y bydd y system yn symud pan gaiff ei rhyddhau o ddisymudedd os yw'r cyfernod ffrithiant rhwng y plân a'r gronyn yn llai na sec θ – tan θ.

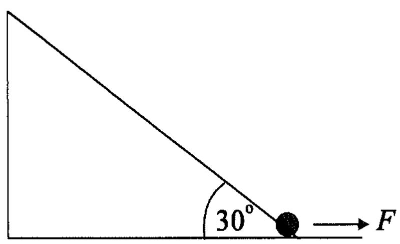
20



Mae'r diagram yn dangos dau ronyn, màs 0.3 kg a 0.4 kg, mewn cydbwysedd ar ddau blân goleddol llyfn sy'n croestorri ar bwynt A. Cysylltir hwy gan linyn ysgafn dros bwli llyfn bach yn A. *M*ae'r gronynnau ac A yn yr un plân fertigol. Darganfyddwch

(i) y tensiwn yn y llinyn, (ii) ongl α.

21



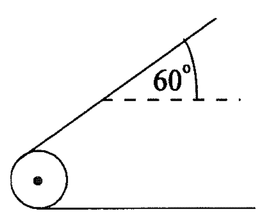
Mae'r diagram yn dangos gronyn trwm, màs 0.3 kg, mewn cydbwysedd ar blân llorwedd llyfn. Mae ynghlwm wrth linyn ysgafn o bwynt sefydlog ac mae'r llinyn yn goleddu ar 30° i'r llorwedd. Mae grym llorwedd F yn gweithredu fel a ddangosir.

O wybod bod $F = 4$ N darganfyddwch

(i) y tensiwn yn y llinyn, (ii) adwaith normal y plân ar y gronyn.

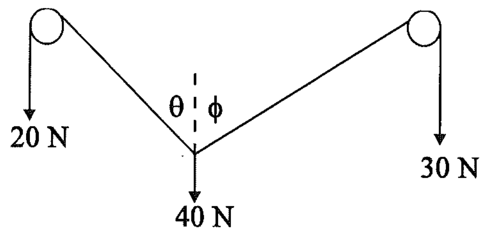
Trafodwch ymddygiad yr adwaith wrth i F gynyddu.

22



Mae'r diagram yn dangos rhaff dros olwyn pwli sefydlog; mae'r cyfeiriadau lle mae'r rhaff yn gadael y pwli fel a ddangosir. Gan dybio bod y tensiynau yn y ddwy ran o'r rhaff yn hafal, a bod cyfanswm y grym ar y pwli yn 3 kN, darganfyddwch y tensiwn yn y rhaff.

23



Mae'r diagram yn dangos dau linyn ynghlwm wrth ronyn sydd â'i bwysau'n 40 N; mae'r llinynnau yn mynd dros olwynion dau bwli llyfn ar yr un lefel lorwedd ac yn dal ar y naill ben a'r llall ronynnau sy'n pwyso 20 N a 30 N yn ôl eu trefn. O wybod bod y gronynnau mewn cydbwysedd, profwch fod $\theta = 46.6^\circ$, $\phi = 29^\circ$.
Mae cyfarpar fel hwn yn addas ar gyfer gwireddu "rheol y triongl".
Gellir cyfrifo gwerthoedd yr onglau sy'n cyfateb i unrhyw set o bwysau ond i wneud hyn mae angen mwy o drigonometreg nag sydd gennych ar hyn o bryd. Gallwch oresgyn y broblem fodd bynnag naill ai trwy luniadu wrth raddfa neu trwy ddefnyddio pwysau fel bod y llinynnau ar safle'r croestoriad yn berpendicwlar i'w gilydd. (Bydd hyn yn wir os yw sgwâr y pwysau ar y croestoriad yn hafal i swm sgwariau'r pwysau eraill.) Yna gallwch ddarganfod yr onglau trwy gydrannu ar hyd y llinynnau. Trwy gynnal arbrofion â'r pwysau hyn, gallwch gymharu gwerthoedd yr onglau a gyfrifwyd gennych â'r atebion a gewch wrth eu mesur.

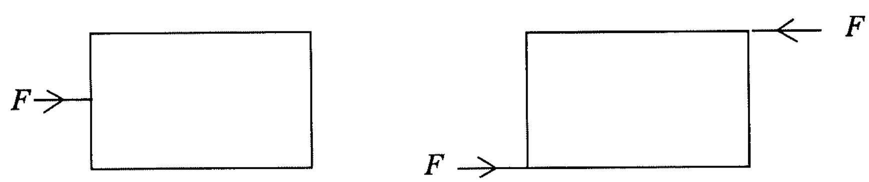
Pennod 3

Grymoedd paralel yn gweithredu ar wrthrychau

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon dylech allu

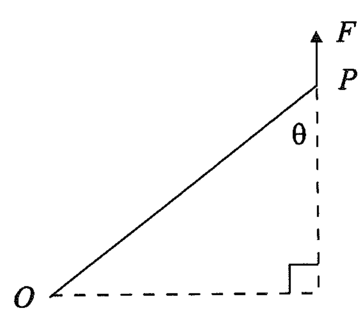
- darganfod moment grym o amgylch pwynt,
- datrys problemau sy'n ymwneud â chydbwysedd gwrthrychau y mae grymoedd paralel yn gweithredu arnynt.

3.1 Moment grym



(a) (b)

Os bydd llyfr yn cael ei wthio ar hyd bwrdd trwy roi grym yn berpendicwlar i un ochr ac yn ei ganolbwynt, fel a ddangosir yn niagram (a) uchod, bydd yn symud yn fras mewn llinell syth. Ar y llaw arall os bydd y llyfr yn cael ei wthio trwy roi grymoedd o'r un maint, ond mewn cyfeiriadau dirgroes, ar hyd dwy ochr baralel fel yn niagram (b) uchod, bydd yn tueddu i gylchdroi o amgylch ei ganol. Petai'r llyfr yn cael ei wthio trwy roi grym ar unrhyw bwynt ar ei ochr, yna byddai'r mudiant yn gymysgedd o gylchdro a thrawsfudiad. Felly, wrth newid y pwynt lle mae'r grym yn gweithredu, mae effaith y grym yn amrywio ac mewn rhai amgylchiadau ceir yr effaith o droi. Mae moment grym yn mesur tuedd y grym i achosi cylchdro.



Diffiniad

Maint moment grym F, sy'n gweithredu trwy bwynt P, o amgylch pwynt O yw lluoswm maint y grym a'r pellter perpendicwlar o O i linell weithrediad y grym (dyma'r llinell trwy P i gyfeiriad y grym).

Os mesurir y grym mewn newtonau a'r pellter mewn metrau, yna yr uned sy'n mesur moment yw'r newton metr, sy'n cael ei dalfyrru i Nm.

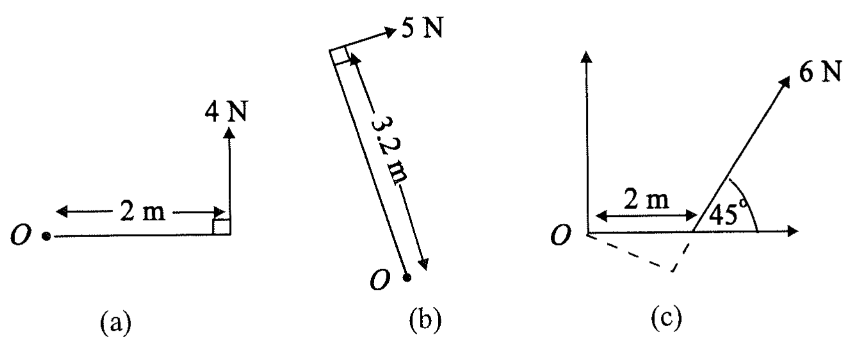
Dywedir bod y moment o amgylch O yn "glocwedd" neu'n "wrthglocwedd" gan ddibynnu a yw'r grym yn gweithredu i gyfeiriad a fyddai'n achosi cylchdro clocwedd neu wrthglocwedd o amgylch O. Yn aml mae angen adio momentau grymoedd gwahanol at ei gilydd a'r confensiwn a ddefnyddir yw bod momentau gwrthglocwedd yn bositif a rhai clocwedd yn negatif.

Yn y diagram, y pellter perpendicwlar o O i'r llinell weithrediad yw $OP \sin \theta$ ac felly y moment yw $F \times OP \sin \theta$. Ar gyfer y cyfeiriad yn y diagram mae'r moment yn bositif.

Os yw llinell weithrediad y grym yn mynd trwy O yna bydd y moment yn sero.

Enghraifft 3.1

Darganfyddwch fomentau y grymoedd canlynol o amgylch O.



(a) Pellter perpendicwlar O o'r llinell weithrediad yw 2 m; mae cyfeiriad y cylchdro yn wrthglocwedd ac felly y moment yw 8 Nm.

(b) Pellter perpendicwlar O o'r llinell weithrediad yw 3.2 m; mae cyfeiriad y cylchdro yn glocwedd ac felly y moment yw -16 Nm.

(c) Pellter perpendicwlar O o'r llinell weithrediad yw $2 \cos 45^\circ$ m $= \sqrt{2}$ m; mae cyfeiriad y cylchdro yn wrthglocwedd ac felly y moment yw $6\sqrt{2}$ Nm.

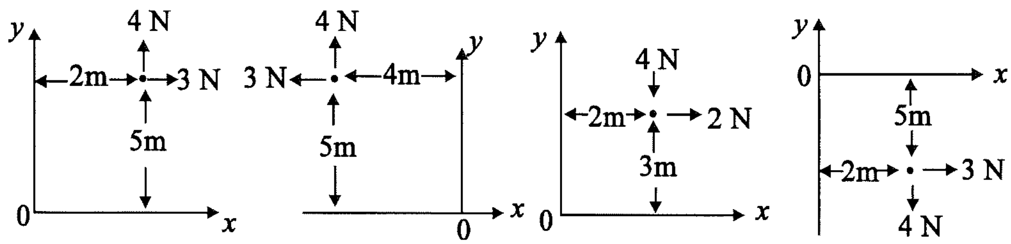
Gellir profi mai moment grym o amgylch pwynt yw lluoswm momentau cydrannau'r grym mewn unrhyw bâr o gyfeiriadau o amgylch y pwynt hwnnw. Mae hyn yn aml yn rhoi ffordd haws o gyfrifo moment grym na cheisio darganfod y pellter perpendicwlar o'r llinell weithrediad.

Enghraifft 3.2

Darganfyddwch foment, o amgylch O, y grym sydd â chydrannau x ac y X N, Y N sy'n gweithredu ar y pwynt (a m, b m) pan fo

(a) $X = 3,\ Y = 4;\quad a = 2,\ b = 5$ (b) $X = -3,\ Y = 4,\quad a = -4,\ b = 5,$

(c) $X = 2,\ Y = -4,\quad a = 2,\ b = 3;$ (d) $X = 3,\ Y = -4,\quad a = 2,\ b = -5.$



(a) (b) (c) (d)

(a) Mae gan y gydran y foment gwrthglocwedd 4×2 Nm a'r gydran x foment clocwedd 3×5 Nm. Cyfanswm y moment felly yw $(8 - 15)$ Nm $= -7$ Nm.

(b) Mae gan y gydran y foment clocwedd 4×4 Nm a'r gydran x foment gwrthglocwedd 3×5 Nm.
Cyfanswm y moment felly yw $(-16 + 15)$ Nm $= -1$ Nm.

(c) Mae gan y gydran y foment clocwedd 4×2 Nm a'r gydran x foment clocwedd 2×3 Nm. Cyfanswm y moment felly yw $(-8 - 6)$ Nm $= -14$ Nm.

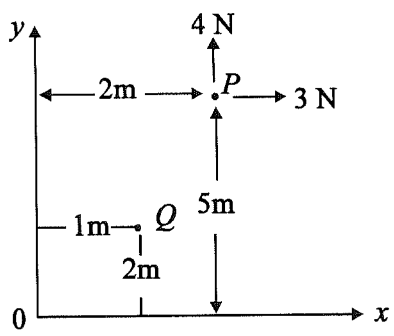
(d) Mae gan y gydran y foment clocwedd 4×2 Nm a'r gydran x foment gwrthglocwedd 3×5 Nm.
Cyfanswm y moment felly yw $(-8 + 15)$ Nm $= 7$ Nm.

Enghraifft 3.3

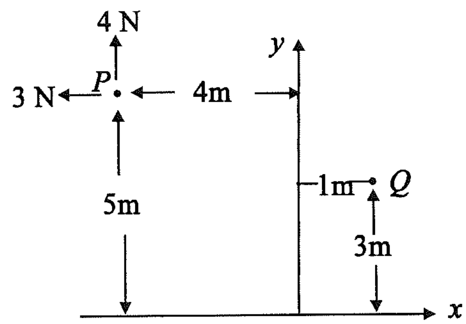
Darganfyddwch foment, o amgylch y pwynt Q (x_0 m, y_0 m), y grym â chydrannau x ac y X N ac Y N sy'n gweithredu ar y pwynt P (a m, b m) pan fo

(a) $X = 3,\ Y = 4;\quad a = 2,\ b = 5,\quad x_0 = 1,\ y_0 = 2$

(b) $X = -3,\ Y = 4;\quad a = -4,\ b = 5,\quad x_0 = 1, y_0 = 3.$



(a)



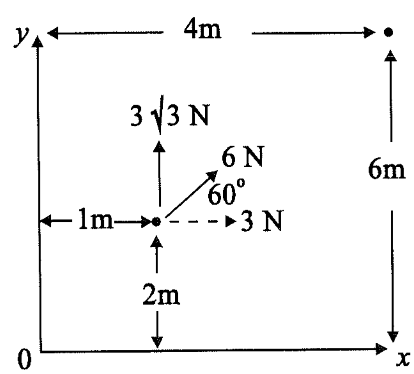
(b)

(a) Mae gan y gydran y foment gwrthglocwedd 4×1 Nm a'r gydran x foment clocwedd 3×3 Nm.
Cyfanswm y moment felly yw $(4 - 9)$ Nm $= -5$ Nm.

(b) Mae gan y gydran y foment clocwedd 4×5 Nm a'r gydran x foment gwrthglocwedd 3×2 Nm.
Cyfanswm y moment felly yw $(-20 + 6)$ Nm $= -14$ Nm.

<u>Enghraifft 3.4</u>

Mae llinell weithrediad grym 6 N yn mynd trwy'r pwynt (1,2) ac mae cyfeiriad y grym ar ongl 60° i'r cyfeiriad x.
Darganfyddwch foment y grym o amgylch y pwynt (4,6).



Mae gan y grym gydrannau 3 N a $3\sqrt{3}$ N ar hyd echelinau x ac y, fel yn y diagram.
Mae gan gydran y foment clocwedd $3\sqrt{3} \times 3$ Nm tra bo gan gydran x foment gwrthglocwedd 3×4 Nm.
Cyfanswm y moment felly yw $(12 - 9\sqrt{3})$ Nm $= -3.59$ Nm.
Gellir olrhain fformiwla ar gyfer moment, o amgylch y pwynt (x_0, y_0), y grym â chydrannau (X, Y) sy'n gweithredu ar y pwynt (x, y).

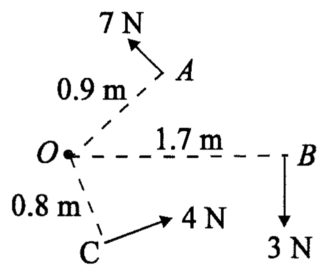
Y moment yw $(x - x_0)Y - (y - y_0)X$. Nid yw'n werth ceisio cofio hyn (er y dylech geisio ei olrhain) ond gall fod yn fuddiol wrth wirio.

Moment nifer o rymoedd

Diffinnir moment nifer o rymoedd (nad ydynt o anghenraid yn gweithredu trwy un pwynt) o amgylch pwynt fel swm algebraidd momentau y grymoedd unigol o amgylch y pwynt hwnnw.

Enghraifft 3.5

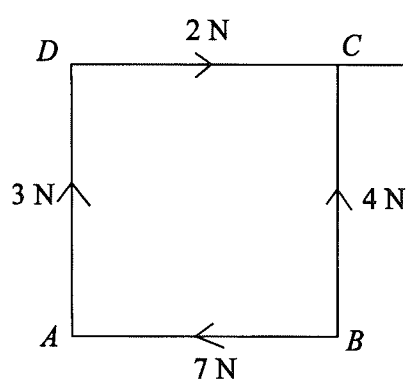
Darganfyddwch foment y system ganlynol o rymoedd o amgylch O. Mae'r grymoedd i gyd yn berpendicwlar i'r llinellau toredig.



Mae gan y grym sy'n gweithredu ar A foment gwrthglocwedd 6.3 Nm; mae gan yr un ar B foment clocwedd 5.1 Nm ac mae gan yr un ar C foment gwrthglocwedd 3.2 Nm. Cyfanswm y moment felly yw 6.3 + 3.2 – 5.1 Nm = 4.4 Nm.

Enghraifft 3.6

Mae grymoedd â meintiau 7 N, 4 N, 2 N, a 3 N yn gweithredu i'r cyfeiriadau a ddangosir yn y diagram ar hyd ochrau BA, BC, DC ac AD, yn ôl eu trefn, y sgwâr $ABCD$ sydd ag ochrau 3 m. Darganfyddwch fomentau, o amgylch A ac o amgylch C, y system o rymoedd.

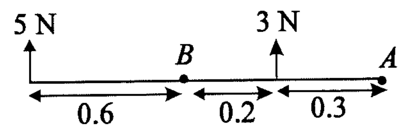


Ni fydd gan y grymoedd y mae eu llinellau gweithrediad yn mynd trwy *A* foment o amgylch *A*. Bydd gan y grym ar hyd *BC* foment gwrthglocwedd 4×3 Nm = 12 Nm, a bydd gan y grym ar hyd *CD* foment clocwedd 2×3 Nm = 6 Nm. Cyfanswm y moment felly yw (12 – 6) Nm = 6 Nm.
Ni fydd gan y grymoedd y mae eu llinellau gweithrediad yn mynd trwy *C* foment o amgylch *C*. Bydd gan y grym ar hyd *BA* foment clocwedd 7×3 Nm = 21 Nm, a bydd gan y grym ar hyd *AD* foment clocwedd 3×3 Nm = 9 Nm.
Cyfanswm y moment felly yw (–21 – 9) Nm = –30 Nm.

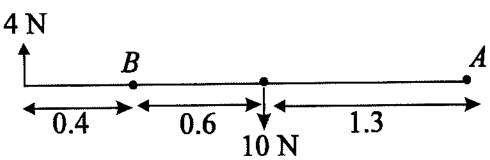
Ymarferion 3.1

Yng nghwestiynau 1 i 4 dangosir grymoedd yn gweithredu ar bwyntiau gwahanol ar linell syth a mesurir y pellterau mewn metrau. Oni nodir fel arall, mae'r grymoedd yn berpendicwlar i'r llinell. Darganfyddwch fomentau'r systemau o amgylch *A* a *B*.

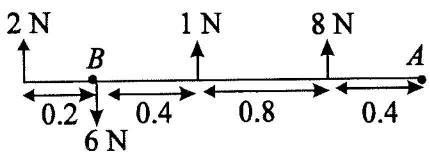
1.



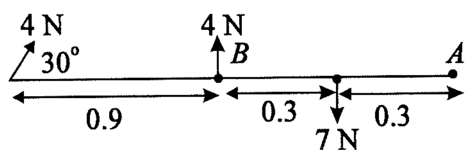
2.



3.

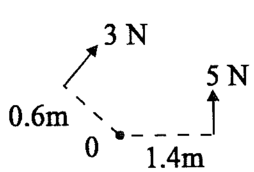


4.

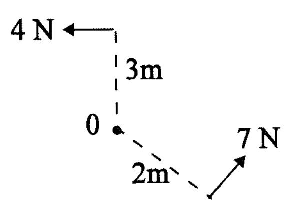


Yng nghwestiynau 5 i 7 darganfyddwch fomentau, o amgylch *O*, y systemau o rymoedd a ddangosir. Mae pob grym yn berpendicwlar i'r llinellau toredig.

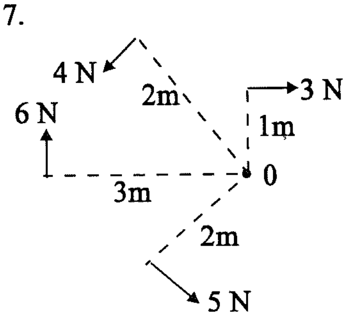
5.



6.



7.



Yn y tri chwestiwn canlynol dylid darganfod momentau y systemau o rymoedd a roddir, o amgylch y pwynt sydd â chyfesurynnau (a, b) mewn metrau Yr uned o rym yw'r newton a'r uned o bellter yw'r metr.

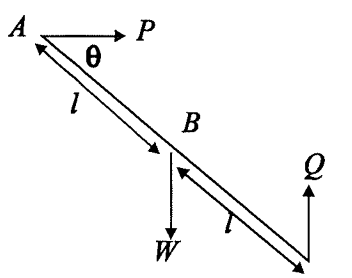
8 Grym â chydrannau (2,3) yn gweithredu ar (1,1) a grym â chydrannau (5,4) yn gweithredu ar (3,–1), $a = 0$, $b = 0$.

9 Grym â chydrannau (5,–3) yn gweithredu ar (–4,1) a grym â chydrannau (–2,–1) yn gweithredu ar (5,–1), $a = 2$, $b = 1$.

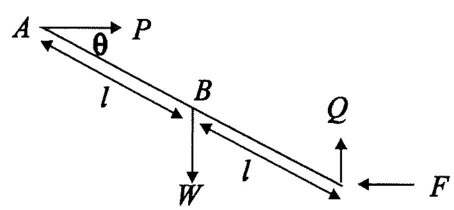
10 Grym â chydrannau (3,1) yn gweithredu ar (2,–3) a grym â chydrannau (–5,2) yn gweithredu ar (–6,–1), $a = -3$, $b = 2$.

Yn y cwestiynau canlynol darganfyddwch fomentau y systemau a dangosir o amgylch y pwyntiau A a B.

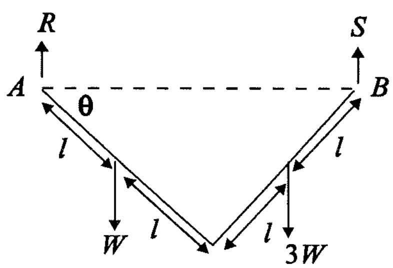
11



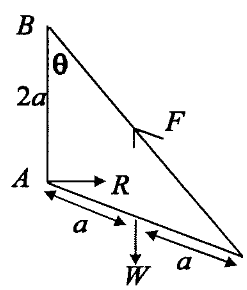
12



13



14



3.2 Cydbwysedd gwrthrych â grymoedd paralel yn gweithredu arno

Yr amodau ar gyfer cydbwysedd gwrthrych pan fo system o rymoedd paralel yn gweithredu yw

(a) mae swm cydrannau yr holl rymoedd yn sero;

(b) mae swm momentau yr holl rymoedd o amgylch unrhyw bwynt yn sero (neu, mae cyfanswm y moment clocwedd yn hafal i gyfanswm y moment gwrthglocwedd).

(Gan fod y grymoedd i gyd yn baralel bydd y cydrannau i gyd yn baralel i un cyfeiriad ac felly gellir symleiddio (a) drwy nodi bod rhaid i'r gydran mewn un cyfeiriad fod yn sero.)

Yn lle'r ddwy amod hyn gellir dweud

(c) mae moment yr holl rymoedd o amgylch unrhyw ddau bwynt yn sero.

Y rhan fwyaf o'r amser mae'n haws defnyddio (a) a (b) ond dylid cofio na ellir cael rhagor na dwy amod ar gyfer pob gwrthrych.

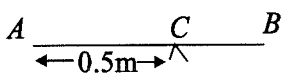
(Er enghraifft, petaech yn cael tri hafaliad trwy ddefnyddio (a) ac (c) byddech yn darganfod y gellid cael y trydydd hafaliad o'r ddau arall. Ni fyddai'r trydydd hafaliad felly wedi darparu unrhyw wybodaeth ychwanegol.)

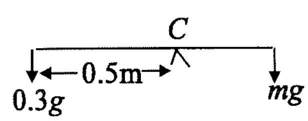
Unwaith eto, y peth pwysig yw lluniadu diagramau grym eglur ac yna gymhwyso'r amodau. Os yw dau wrthrych yn cyffwrdd â'i gilydd efallai fod angen eu hystyried ar wahân ond rhaid cofio trydedd ddeddf Newton wrth wneud y diagramau grym.

Unwaith eto, chi sydd i ddewis o amgylch pa bwynt i gymryd y momentau a dylech geisio ei ddewis fel bod un grym anhysbys yn cael ei ddiddymu trwy gymryd momentau o amgylch pwynt ar linell weithrediad y grym hwnnw.

Ni wneir tybiaethau modelu newydd ond dylech eich atgoffa eich hun o ystyr yr ymadroddion yn y Rhestr Termau ym Mhennod 2. Yr unig nodwedd sydd ychydig yn wahanol yw y bydd grym disgyrchiant yn gweithredu yn achos gwrthrychau nad ydynt yn ysgafn. Mae hwn yn gweithredu trwy'r craidd disgyrchiant. Ac eithrio achosion syml, ni ddisgwylir i chi wybod safle'r craidd disgyrchiant. Dylech wybod bod craidd disgyrchiant rhoden unffurf yn ei chanolbwynt.

Enghraifft 3.7





Mae'r diagram yn dangos rhoden ysgafn *AB*, hyd 0.8 m, yn cael ei chynnal ar golyn ar bwynt *C* sydd 0.5 m o *A*. Darganfyddwch y màs y mae angen ei roi yn *B* er mwyn i'r rhoden aros yn llorwedd pan osodir màs 0.3 kg yn *A*.

Dangosir y diagram grym yn y diagram ar yr ochr dde uchod.

Gan fod colyn yn *C* mae'n well cymryd momentau o'i amgylch er mwyn peidio â chynnwys yr adwaith ar y colyn yn yr hafaliad momentau. Os dynodir y màs yn *B* gan *m* kg yna mae hafalu'r momentau yn rhoi

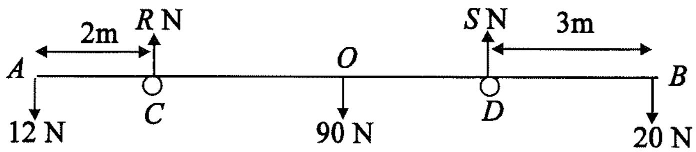
$$0.3 \times 0.5 = m \times 0.3,$$

ac felly $$m = 0.5.$$

Enghraifft 3.8

Mae llwyth o 90 N ynghlwm wrth ganolbwynt O trawst ysgafn AB, hyd 8 m. Mae'r trawst yn gorwedd yn llorwedd ar ddau beg llyfn C a D gydag $AC = 2$ m, $DB = 3$ m a llwythi o 12 N ac 20 N ynghlwm ar y ddau ben A a B yn ôl eu trefn. Darganfyddwch yr adweithiau ar y ddau beg.

Dyma'r diagram grym:



Mae'r pegiau yn llyfn ac felly mae eu hadweithiau yn fertigol i fyny. Mae cydrannu'n fertigol yn rhoi

$$R + S = 122.$$

Os cymerir momentau o amgylch C ni fydd yr adwaith R yn ymddangos yn yr hafaliad. Felly

$$90 \times 2 + 20 \times 6 = 12 \times 2 + S \times 3,$$

sy'n rhoi $S = 92,$

ac felly mae $R = 30.$

Enghraifft 3.9

Darganfyddwch, yn yr enghraifft flaenorol, y pwysau mwyaf y gellir ei roi ar B heb golli'r cydbwysedd.

Mae'n amlwg os rhoddir pwysau digon mawr ar B y bydd y rhoden yn dechrau troi o amgylch D a phan fydd hyn yn digwydd $R = 0$.

Os dynodir y pwysau gan W mae cydrannu yn fertigol yn rhoi

$$R + S = 102 + W.$$

Dyma'r hafaliad momentau nawr:

$$90 \times 2 + W \times 6 = 12 \times 2 + S \times 3.$$

Os yw $R = 0$ yna, o'r hafaliad cyntaf,

$$S = 102 + W,$$

ac mae defnyddio hwn yn yr ail hafaliad yn rhoi

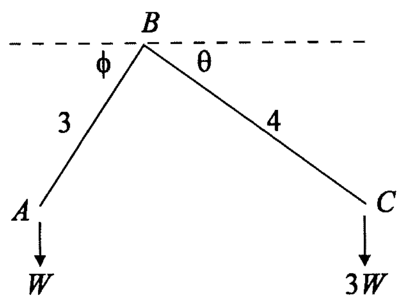
$$W = 50.$$

Wrth ddarganfod W dyfalwyd beth fyddai'n digwydd. Mae'n bosibl osgoi gorfod dyfalu trwy wneud ychydig bach o waith ychwanegol. Mae datrys yr hafaliad momentau am S yn rhoi $S = 52 + 2W$, ac mae hyn yn rhoi $R = 50 - W$. Mae hyn yn dangos y byddai R yn negatif petai $W > 50$, ac felly y byddai cyffyrddiad yn cael ei golli.

Enghraifft 3.10

Cysylltir dwy roden ysgafn AB a BC yn sownd yn B fel eu bod yn ffurfio ongl sgwâr â'i gilydd. Hyd AB yw 3 m, hyd BC yw 4 m, ac mae pwysau W a $3W$ ynghlwm wrth A ac C yn ôl eu trefn. Mae'r system yn hongian mewn cydbwysedd wrth linyn ysgafn ynghlwm wrth B. Darganfyddwch yr ongl rhwng AB a'r llorwedd.

Dyma'r diagram grym:



Mae cymryd momentau o amgylch B yn rhoi

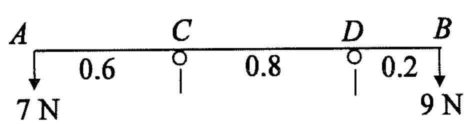
$$3W\cos\phi = 12\,W\cos\theta.$$

Gan fod $\phi + \theta = 90^\circ$, $\cos\phi = \sin\theta$ ac felly $\tan\phi = 4$ a $\theta = 76^\circ$.

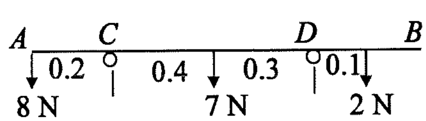
Ymarferion 3.2

Mae cwestiynau 1 i 4 yn ymwneud â rhoden ysgafn sy'n cael ei chynnal ar bwyntiau C a D, ac mae'r grymoedd a ddangosir yn gweithredu arni. Mesurir y pellterau mewn metrau. Darganfyddwch y grymoedd sy'n gweithredu ar C a D.

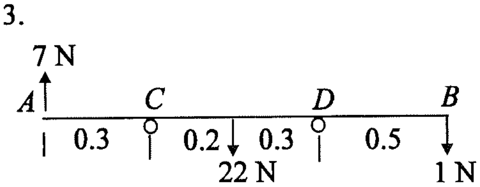
1.



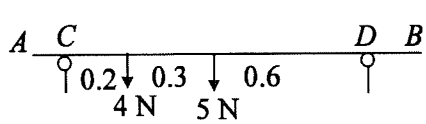
2.



3.



4.



5 Mae rhoden unffurf AB, hyd 4 m a màs 4 kg, ar golyn o amgylch y pwynt C lle mae AC = 1 m. Darganfyddwch fàs y gronyn y mae angen ei glymu wrth A er mwyn cael cydbwysedd gyda'r rhoden yn llorwedd.

6 Ar roden unffurf AB, hyd 6 m a màs 8 kg, mae màs 12 kg ynghlwm wrth A ac mae màs 16 kg ynghlwm wrth B. Darganfyddwch safle'r pwynt y gellir cydbwyso'r rhoden yn llorwedd o'i amgylch.

7 Mae si-so wedi'i wneud o drawst trwm, màs 30 kg a hyd 5 m, ac mae ar golyn ar ei ganolbwynt. Gall dau blentyn, màs 25 kg a 35 kg, eistedd, un ym mhob pen y si-so, a hwnnw yn llorwedd. Darganfyddwch bellter craidd disgyrchiant y trawst oddi wrth y plentyn sydd â màs 25 kg. Nodwch ddwy dybiaeth fodelu a wnewch.

8 Cynhelir rhoden ysgafn AB, hyd 2 m, ar ddau beg C a D, lle mae hyd $AC = 0.6$ m, a $BD = 0.3$ m. Rhoddir grym 60 N i lawr ar ganolbwynt AB. Darganfyddwch y grymoedd sy'n gweithredu ar y pegiau. Darganfyddwch hefyd y grym lleiaf i lawr yn A a fydd yn aflonyddu ar y cydbwysedd.

9 Mae lamina sgwâr ysgafn $ABCD$ yn rhydd i droi o amgylch ei ganol mewn plân fertigol. Mae gronyn â màs m ynghlwm wrth A. Darganfyddwch fàs y gronyn y dylid ei glymu wrth B er mwyn i'r sgwâr fod mewn cydbwysedd, gydag AB yn goleddu ar ongl 30° i'r llorwedd ac A yn is na B.

3.3 Cydeffaith nifer o rymoedd paralel

Gellir estyn y syniad o gydeffaith i nifer o rymoedd paralel. Os nad yw swm cydrannau yr holl rymoedd yn sero mae'r cydeffaith yn rym â'i gydran yn hafal i swm cydrannau yr holl rymoedd ar wahân. Mae'n gweithredu trwy bwynt lle mae moment y cydeffaith o amgylch unrhyw bwynt yn hafal i swm momentau yr holl rymoedd eraill o amgylch y pwynt hwnnw.

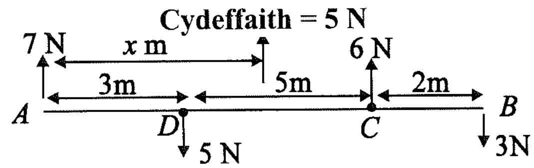
Y pwynt y mae'r cydeffaith yn gweithredu trwyddo yw'r un lle mae swm y momentau clocwedd o amgylch y pwynt hwnnw yn hafal i swm y momentau gwrthglocwedd o amgylch yr un pwynt.

Dim ond pan nad yw swm y cydrannau yn sero y mae'r diffiniad hwn yn ddilys. Os yw swm y cydrannau yn sero, yna nid grym yw'r cydeffaith, ond cwpl. Yn y bôn, dau rym paralel yw cwpl, yn gweithredu trwy bwyntiau gwahanol, heb fod ar yr un llinell, gyda meintiau hafal ond cyfeiriadau dirgroes. Nid oes disgwyl i chi wybod dim am gyplau.

Os gwyddoch beth yw cydeffaith system o rymoedd paralel gallwch gael cydbwysedd trwy adio grym hafal a dirgroes i'r cydeffaith.

Enghraifft 3.11

Darganfyddwch gydeffaith y grymoedd a ddangosir isod.



Cydran y cydeffaith i fyny'r dudalen yw $(7 + 6 - 5 - 3)$ N = 5 N.

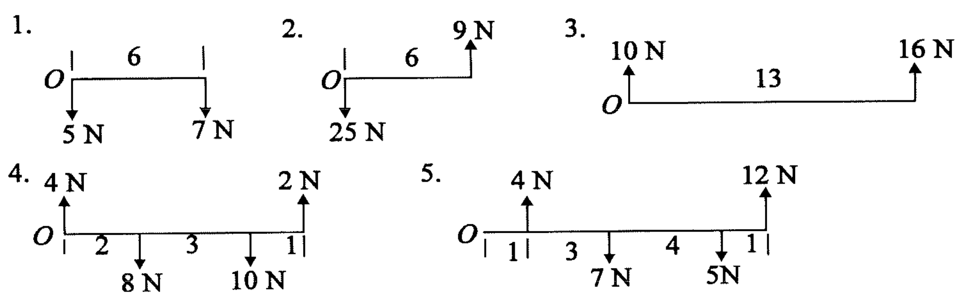
Wrth gymryd momentau o amgylch pwynt rhwng D ac C ac ar bellter x m o A, swm y momentau gwrthglocwedd yw $5(x - 3) + 6(8 - x)$ a'r momentau clocwedd yw $7x + 3(10 - x)$.

Felly mae $5(x-3) + 6(8 - x) = 7x + 3(10 - x)$; h.y. $5x = 3$.

Y cydeffaith felly yw grym 5 N yn gweithredu ar bellter 0.6 m o A.

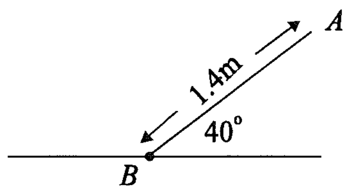
Ymarferion 3.3

Darganfyddwch gydeffaith y grymoedd isod. Mesurir pob pellter mewn metrau.



Ymarferion Amrywiol 3

1



Mae'r diagram yn dangos rhoden anhyblyg ysgafn *AB,* hyd 1.4, m yn goleddu ar ongl 40° i'r llorwedd gyda phen *B* yn sownd wrth lawr llorwedd.

(a) Darganfyddwch foment, o amgylch *B*, grym fertigol 120 N i lawr a roddir yn *A*.

(b) Darganfyddwch faint a chyfeiriad y grym lleiaf y gellir ei roi yn *A* fel bod ganddo foment o amgylch *B* sy'n hafal i'r moment a gafwyd yn (a).

2 Mae trawst unffurf *AB*, hyd 8 m a phwysau 200 N, yn gorwedd yn llorwedd ar ddau gynhaliad llyfn ar bwyntiau *C* a *D*, lle mae $AC = 1$ m ac $AD = 6$ m.
Mae llwythi 100 N a 400 N ynghlwm wrth y trawst ar bwyntiau *E* ac *F*, lle mae $AE = 2$ m ac $AF = 5$ m. Darganfyddwch yr adweithiau ar y cynheiliaid.

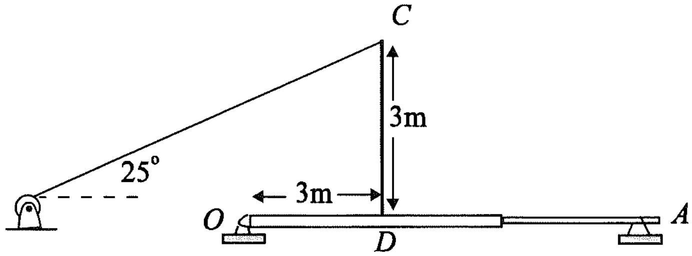
3 Mae trawst unffurf *AB*, hyd 4 m a phwysau 200 N, yn gorwedd yn llorwedd ar ddau gynhaliad llyfn ar bwyntiau *C* a *D*, lle mae $AC = 0.5$ m ac $AD = 3.2$ m, ac mae llwyth o *W* N ynghlwm wrth *B*.

(a) O wybod bod $W = 84$, darganfyddwch yr adweithiau ar y ddau gynhaliad.

(b) Darganfyddwch werth mwyaf *W* lle mae cydbwysedd yn bosibl.

4 Mae trawst anunffurf *AB*, hyd 10 m a phwysau 100 N, yn gorwedd yn llorwedd ar ddau gynhaliad llyfn ar bwyntiau *C* a *D*, lle mae $AC = 3$ m ac $AD = 8$ m. Pan fo pwysau 200 N yn hongian wrth ganolbwynt *AB* mae maint yr adwaith ar *C* yn ddwywaith maint yr adwaith ar *D*. Darganfyddwch bellter craidd disgyrchiant y trawst oddi wrth *A*.

5



Mae'r diagram yn dangos polyn baner OA gyda rhoden anhyblyg CD ynghlwm wrtho. Mae rhaff ynghlwm wrth C ac yn mynd dros wins a ddefnyddir i weindio'r rhaff a chodi'r polyn. O wybod bod y tensiwn yn y rhaff yn 3 kN, darganfyddwch foment y tensiwn hwn o amgylch O.

6 Mae gan feic modur fàs 200 kg, mae 1.5 m rhwng pwyntiau cyswllt yr olwynion â'r ffordd ac mae llinell weithrediad y pwysau yr un pellter oddi wrth y ddwy olwyn. Mae gan y beiciwr fàs o 75 kg ac mae llinell weithrediad ei bwysau yn croestorri'r ffordd ar bellter 0.9 m oddi wrth yr olwyn flaen. Darganfyddwch adwaith y ffordd ar y ddwy olwyn.

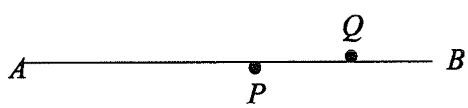
7 Mae menyw, màs 75 kg, yn croesi nant yn ei gardd trwy ddefnyddio trawst, hyd 3 m a màs 150 kg, fel pont. Tybiwch

- y gellir modelu'r trawst fel rhoden â'i chraidd disgyrchiant yn ei chanol;
- y gellir modelu'r fenyw fel gronyn;
- fod adweithiau glannau'r nant yn gweithredu ar dau ben y trawst.

Darganfyddwch adweithiau y glannau ar y trawst o wybod bod y fenyw yn sefyll arno ar bellter 0.5 m o un pen.

Pa wybodaeth bellach y byddai ei hangen arnoch er mwyn darganfod yr adweithiau pan fo'r fenyw yn gwthio berfa ar hyd y trawst?

8



Mae'r diagram yn dangos rhoden ysgafn AB, hyd $8a$, yn gorwedd yn llorwedd rhwng dau beg llyfn P a Q, lle mae $AP = 5a$ a $QB = a$. Mae gronyn, pwysau $4W$, ynghlwm wrth ganolbwynt y rhoden. Darganfyddwch yr adweithiau ar y ddau beg.

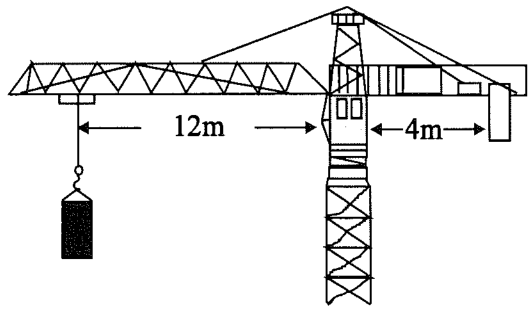
Y grym mwyaf y gall y peg Q ei gynnal yw $10W$. Darganfyddwch faint y grym mwyaf y gellir ei roi yn B, (a) tuag i lawr, (b) tuag i fyny, heb golli cydbwysedd.

9 Mae craidd disgyrchiant lori 2 m o flaen ei hechel ôl ac 1 m tu ôl i'w hechel flaen. Mae'r lori yn pwyso 15 kN ac yn cludo llwyth W kN gyda'r craidd disgyrchiant 0.5 m o flaen yr echel ôl. Mae'r lori yn sefyll ar dir gwastad.

(a) Darganfyddwch, os yw $W = 3$, yr adweithiau ar echelau'r lori.

(b) Darganfyddwch W pan fydd yr adweithiau ar y ddwy echel yn gyfartal.

10



Mae'r diagram yn dangos craen yn dal llwyth sydd â'i fàs yn 25 tunnell fetrig. Darganfyddwch, gan gymryd y gellir anwybyddu màs y caban a'r adeiledd, fàs y gwrthbwysau y mae ei angen er mwyn cael cydbwysedd. Darganfyddwch hefyd, gan gymryd bod y llwyth yn cynyddu i 80 tunnell fetrig, safle newydd y llwyth.

11 Mae rhoden ysgafn $ABGCD$ gyda llwyth ynghlwm wrth G yn gorwedd yn llorwedd ar ddau gynhaliad llyfn yn B ac C. Hyd AB, BC ac CD yw 1.2 m, 2.4 m ac 1.8 m yn ôl eu trefn. Mae'r rhoden ar fin dechrau gogwyddo pan roddir llwyth o 150 N ar A neu pan roddir llwyth o 40 N ar D. Darganfyddwch

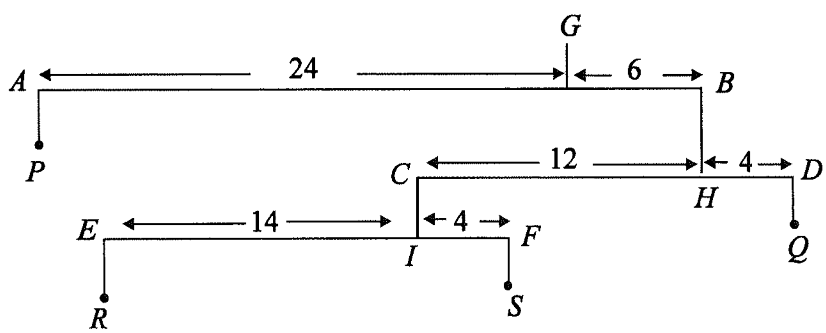
(a) y llwyth ar G,

(b) hyd AG,

(c) yr adweithiau ar y rhoden pan roddir llwythi 150 N a 60 N ar yr un pryd ar A a D.

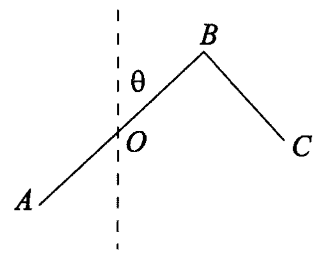
12 Mae trawst ysgafn AB, hyd $6a$, yn gorwedd yn llorwedd ar begiau llyfn a osodwyd ar draean ei hyd o bob pen. Rhoddir gronyn trwm ar bwynt P ar y trawst. Pan roddir màs 1 kg ar A, mae'r trawst ar fin gogwyddo. Pan roddir màs 1 kg ar B mae'r adweithiau ar y ddau gynhaliad yn gyfartal. Darganfyddwch fàs y gronyn a'r pellter AP.

13



Mae'r diagram yn dangos tair rhoden ysgafn AB, CD ac EF gyda gronynnau P, Q, R, S yn hongian wrth A, D, E ac F yn ôl eu trefn. Mae llinynnau ysgafn BH ac CI, fel a ddangosir, yn cysylltu'r tair rhoden. Mae'r system yn hongian mewn cydbwysedd o bwynt G ar AB ac mae'r rhodenni yn llorwedd. O wybod mai pwysau Q yw 13.5 N, darganfyddwch bwysau'r gronynnau eraill. Mae pob pellter mewn centimetrau.

14



Mae'r diagram yn dangos rhoden ysgafn AB,hyd $4a$, wedi'i chysylltu yn sownd yn B â rhoden ysgafn BC, hyd $2a$, fel bod y rhodenni yn berpendicwlar i'w gilydd ac yn yr un plân fertigol. Mae canol O y rhoden AB yn sefydlog a gall y rhodenni gylchdroi yn rhydd o amgylch O mewn plân fertigol. Mae gronyn, màs $4m$, ynghlwm wrth A a gronyn arall, màs m, ynghlwm wrth C. Mae'r system yn aros mewn cydbwysedd gydag AB yn goleddu ar ongl lem θ i'r fertigol fel a ddangosir. Darganfyddwch faint yr ongl θ trwy gymryd momentau o amgylch O.

15 Mae trawst ysgafn AD, hyd $6a$, yn gorwedd yn llorwedd ar begiau llyfn a osodwyd draean y pellter o bob pen yn B ac C. Rhoddir gronyn â phwysau W ar ei ganolbwynt. Mae dyn â'i bwysau yn $4W$, er mwyn gallu sefyll yn A, yn rhoi gwrthbwysau W' ar bwynt P, rhwng C a D, ac ar bellter x o D. Darganfyddwch werth lleiaf W'.

Darganfyddwch hefyd werth mwyaf W' fel bod y trawst yn cadw ei gydbwysedd pan nad yw'r dyn yn sefyll arno.

16 Pwysir beic modur sy'n rhy hir i fynd ar glorian trwy roi un olwyn yn gyntaf ac yna y llall ar y glorian. Mae platfform y glorian uwchben lefel y ddaear.

Tra bo'r beic yn cael ei bwyso mae'r olwyn isaf yn sefyll ar y ddaear ac wedi'i dal fel bod y beic yn aros yn fertigol.

Y pellter rhwng canolau A a B yr olwynion (sydd â'r un diamedr) yw c. Pan fo'r beic ar dir gwastad mae'r pwysau yn gweithredu trwy linell sy'n mynd trwy ganolbwynt AB ac mae'r craidd disgyrchiant ar uchder h uwchben y canolbwynt hwn. Tra bo unrhyw olwyn ar y glorian, mae AB yn goleddu ar ongl θ i'r llorwedd. Dangoswch fod swm y ddau bwysau a gofnodir yn $\frac{2Wh}{c}\tan\theta$ yn llai na'r gwir bwysau W.

Pennod 4

Cinemateg mudiant unionlin

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon dylech

- ddeall beth a olygir, mewn mudiant unionlin, wrth ddadleoliad, cyflymder a chyflymiad,
- allu olrhain y "fformiwlâu cyflymiad cyson" a'u defnyddio i ddatrys problemau sy'n ymwneud â mudiant ar ffurf cyflymiad cyson,
- allu datrys problemau syml sy'n ymwneud â mudiant fertigol o dan effaith disgyrchiant.

4.1 Diffiniadau sylfaenol

Wrth geisio datrys unrhyw broblem sy'n ymwneud â mudiant unionlin gronyn (hynny yw ei fudiant mewn llinell syth), mae'n hanfodol dewis cyfeiriad penodol ar y dechrau fel y cyfeiriad positif a pherthnasu popeth i'r cyfeiriad hwn. Nid yw'n bwysig pa gyfeiriad a ddewisir fel cyfeirnod; yr hyn sy'n bwysig yw glynu at yr un cyfeirnod trwy'r broblem dan sylw. Methu gwneud hyn yw'r prif reswm dros gamgymeriadau mewn problemau, yn enwedig wrth greu hafaliadau mudiant. Er mwyn symlrwydd cymerir yma fod mudiant ar hyd yr echelin x ac mai x cynyddol yw'r cyfeiriad positif.

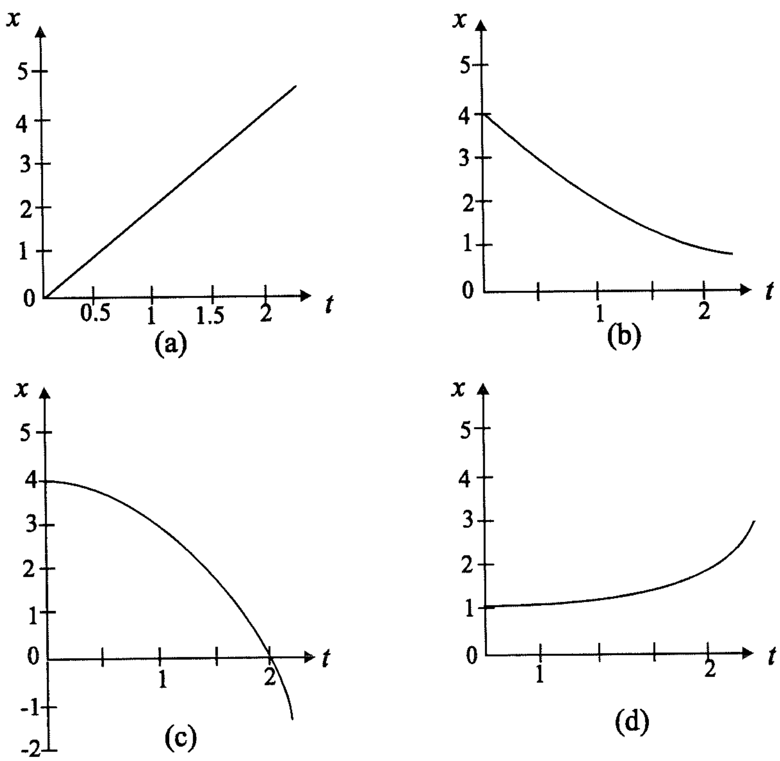
Dadleoliad

Diffinnir safle gronyn ar unrhyw adeg gan ei gyfesuryn x ac mewn cinemateg cyfeirir at y cyfesuryn hwn fel dadleoliad y gronyn o'r tardd. Wrth gwrs, gall y dadleoliad x fod yn bositif neu yn negatif gan ddibynnu a yw'r gronyn i'r dde neu i'r chwith o'r tardd. Pellter y gronyn o'r tardd O yw $|x|$. Trwy ei ddiffiniad, mae dadleoliad gronyn yn pennu ei safle yn unigryw; nid yw'r pellter o'r tardd yn gwneud hynny oherwydd nad yw'n nodi ar ba ochr i'r tardd y mae'r gronyn.

Yr uned fesur arferol yn y system SI yw'r metr (talfyriad m) er bod y centimetr (cm) yn cael ei ddefnyddio ar gyfer pellterau bach, a'r cilometr (km) am bellterau mawr. Mewn egwyddor, trwy fesur dadleoliad gronyn gellir mynegi x fel ffwythiant o t (amser) ac mae diagramau (a), (b), (c) a (d) isod yn dangos ymddygiad x wrth i t amrywio yn y pedwar achos hyn:

(a) $x = 2\,t$, (b) $x = \dfrac{1}{4}(t-4)^2$, (c) $x = 4 - t^2$, (d) $x = \dfrac{1}{4}(t^3 - t^2) + 1$.

Gwelir, yn (c), fod x yn mynd yn negatif pan fo $t > 2$.



Mae'n werth edrych yn fanylach ar ddiagram (a) lle mae $x = 2t$. Er mwyn cadw'r drafodaeth yn syml, cymerir bod y dadleoliad yn cael ei fesur mewn metrau a'r amser mewn eiliadau. Y gwahaniaeth rhwng y dadleoliadau ar amserau T a $T + t'$, yw $2t'$ am bob gwerth T, h.y. mae'r un pellter yn cael ei deithio yn yr un cyfwng amser. Gellir gweld hyn hefyd o'r diagram. Felly mewn unrhyw gyfwng o 1 eiliad mae'r gronyn yn teithio 2 m a byddech yn dehongli hyn yn reddfol trwy ddweud bod gan y gronyn fuanedd o 2 ms^{-1}. Ni ellir rhoi dehongliad syml yn y diagramau eraill gan y gellir gweld na theithir trwy bellterau cyfartal mewn amserau cyfartal. Er mwyn cynnwys yr achosion hyn, mae angen edrych arnynt yn fwy soffistigedig fel a ganlyn.

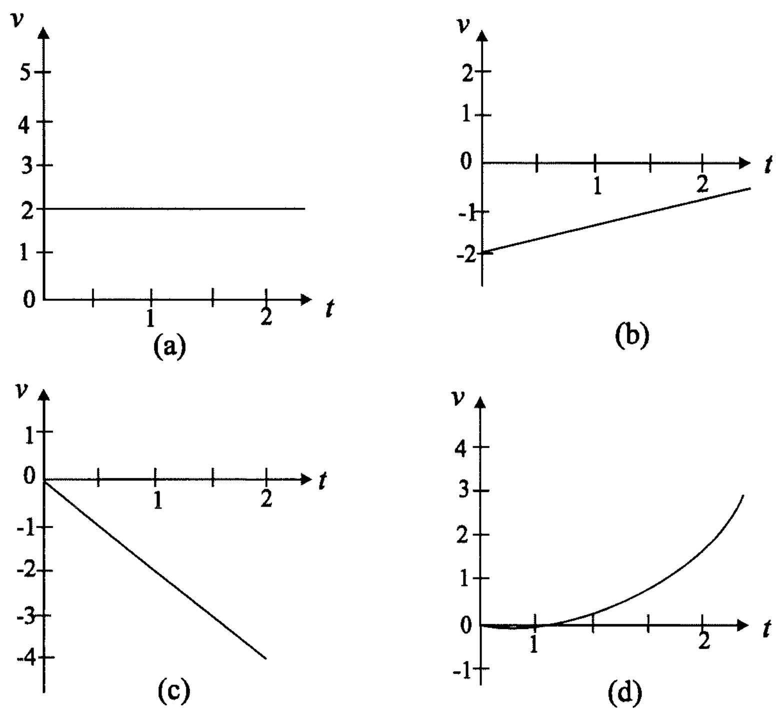
Cyflymder

Diffinnir y cyflymder v yn y cyfeiriad positif fel cyfradd newid dadleoliad mewn perthynas ag amser. Hynny yw,

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}.$$

Defnyddir dot uwchben llythyren yn aml i olygu differiad mewn perthynas ag amser t. Yr uned gyflymder a ddefnyddir yn aml yn y system SI yw metr yr eiliad (ms^{-1}), ac ar gyfer cyflymder cymharol fawr defnyddir cilometr yr awr (kmh^{-1}).

Os nad ydych wedi dod ar draws differiadau yn eich cwrs, mae ffordd graffigol syml o ddiffinio cyfradd newid, fel a ganlyn. Cyfradd newid x gyda t ar unrhyw adeg yw graddiant graff x yn erbyn t ar yr amser penodol hwnnw. Mae'r diagramau isod yn dangos y cyflymderau sy'n cyfateb i'r pedwar graff dadleoliad uchod.



Mae'r graffiau i gyd wedi'u llunio gan ddefnyddio differiad a'r ffwythiannau a ddiffinnir yw 2, $\frac{1}{2}(t-4)$, $-2t$ a $\frac{1}{4}(3t^2-2t)$. Os nad ydych wedi cwrdd â differiadau eto gallwch wirio'r graffiau trwy dynnu'r tangiadau i'r graffiau x fel ffwythiant o t a gweld mai'r graddiannau yw gwerthoedd v yn yr ail set o graffiau. Yn niagramau (b) ac (c) mae'r cyflymder yn negatif, sy'n dangos, fel y gallwch ei wirio o'r diagramau ar gyfer x, fod x yn lleihau gydag amser.

Eto gall y cyflymder fod yn bositif neu'n negatif ac nid oes ddibyniaeth uniongyrchol rhwng arwyddion x a v. Er enghraifft, mae $x = 1 - t^2$ yn bositif gyda $0 < t < 1$, tra bo'r cyflymder, sef $-2t$, yn negatif gyda $0 < t < 1$. Hefyd yn niagram (b) ar y dudalen gyferbyn mae'r cyflymder yn negatif er bod x yn bositif. Yr unig beth a olygir gan gyflymder negatif yw bod y mudiant yn y cyfeiriad dirgroes i'r cyfeirnod. Y buanedd yw maint y cyflymder, hynny yw, mae'r buanedd yn hafal i $|\ v\ |$. Gall cyflymder a buanedd fel y'u diffinnir amrywio gydag amser ond yn niagram (a) gyferbyn mae'r cyflymder yn gyson, neu unffurf. Mewn llawer o sefyllfaoedd ymarferol, amcangyfrifir y buanedd trwy rannu cyfanswm y pellter â chyfanswm yr amser, ond brasamcan yn unig yw hyn, fodd bynnag, ac ni ddylid ei ddefnyddio i gyfrifo'r cyflymder ar adeg benodol. Mae'r gymhareb pellter/cyfanswm yr amser yn diffinio'r buanedd cyfartalog.

Cyflymiad

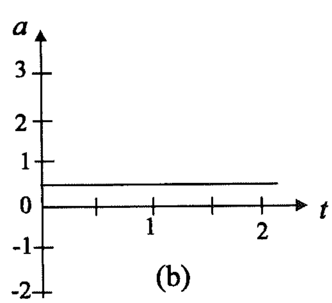
Yn niagramau (b) ac (c) gyferbyn mae'r graddiant yn gyson, ac felly gellir cyfrifo cyfradd newid y cyflymder yn rhwydd. Nid yw hyn yn wir yn niagram (d) ac er mwyn trin hwn mae angen cyflwyno syniad pwysig arall, sef cyflymiad.

Diffinnir y cyflymiad a i'r cyfeiriad positif fel cyfradd newid y cyflymder i'r cyfeiriad positif mewn perthynas ag amser, hynny yw,

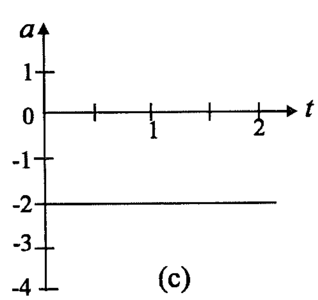
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}$$

Eto gall hwn fod yn bositif neu negatif. Unedau cyflymiad yw metrau yr eiliad^2 (ms^{-2}) a chilometrau yr awr^2 (kmh^{-2}). Pan fo'r cyd-destun yn hollol amlwg, gellir hepgor yr ymadrodd 'i'r cyfeiriad positif' ar ôl y cyflymder neu'r cyflymiad, ond dylid cofio ei fod yn cael ei gymryd yn ganiataol bob amser. Os dywedir bod gronyn yn symud gydag arafiad r, mae hyn yn golygu yn ôl y confensiwn fod y cyflymiad yng nghyfeiriad y cyfeirnod yn hafal i $-r$. Weithiau dywedir bod gronyn yn arafu.

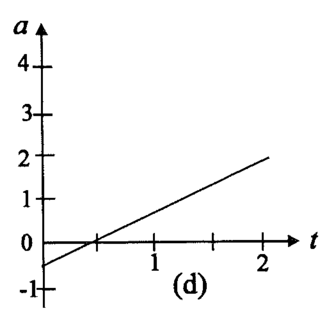
Y cyflymiad yw graddiant y graff v yn erbyn t. Yn niagram (a) gyferbyn mae'r cyflymiad yn sero, ac yn niagramau (b), (c) a (d) isod rhoddir graffiau'r cyflymiad yn erbyn amser.



(b)



(c)



(d)

Y cyflymiadau yn y tri achos yw $\frac{1}{2}$, -2 a $\frac{1}{2}(3t - 1)$ ac eto gellir eu gwirio trwy ddarganfod graddiannau y setiau blaenorol o gromliniau. Yn y ddau achos cyntaf mae'r cyflymiad yn gyson, ac yn yr ail achos mae'n cyfateb i arafiad.

Yn y rhan fwyaf o sefyllfaoedd ymarferol bydd y cyflymiad a yn cael ei roi; gall ddibynnu ar t, x a v i gyd a gofynnir i chi ddarganfod x neu v. Er mwyn darganfod x o wybod a mae angen datrys hafaliad differol; trafodir rhai enghreifftiau syml o'r math cyffredinol o broblem yn Adran 4.4 ond gellir trafod cryn dipyn ar gyflymiad cyson heb orfod gwneud cyfrifiadau cymhleth.

4.2 Cyflymiad cyson

Yn achos gronyn sy'n symud â chyflymiad cyson (neu unffurf) a, gyda'i gyflymder cychwynnol (h.y. ei gyflymder pan fo $t = 0$) yn u, gellir rhoi fformiwlâu ar gyfer ei ddadleoliad s o'i safle cychwynnol a'i gyflymder v ar amser t, sef

$$v = u + at, \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2, \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$v^2 = u^2 + 2as, \qquad \ldots\ldots (3)$$

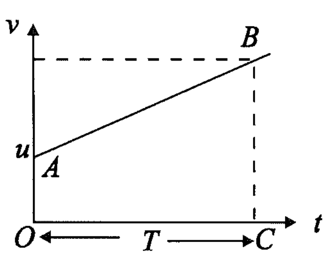
$$s = \frac{1}{2}(u + v)\,t. \qquad \ldots\ldots (4)$$

Petai'r amodau dechreuol yn cael eu rhoi ar $t = T$ yn hytrach nag ar $t = 0$ yna byddai angen newid t yn $t - T$. Rhoddir deilliad yr hafaliadau hyn yn Adran 4.3.

Mae hafaliadau 1 i 4 yn ddigon i chi allu datrys pob problem sy'n ymwneud â mudiant gyda chyflymiad cyson, a dylid eu dysgu ar y cof.

Mae hefyd yn bwysig iawn cofio na ellir eu defnyddio ond ar gyfer <u>cyflymiad cyson</u>.

Cyn disgrifio defnyddio'r hafaliadau hyn i ddatrys problemau, mae'n werth rhoi dehongliad graffigol o hafaliad (1) sy'n ddefnyddiol iawn wrth ddatrys mathau arbennig o broblemau. Dangosir isod ymddygiad v gyda t, fel y caiff ei ddiffinio gan hafaliad (1).



Mae'n llinell syth â graddiant a. Arwynebedd y rhanbarth rhwng yr echelin t ac o dan y llinell, a rhwng y llinellau $t = 0$ a $t = T$, yw arwynebedd y trapesiwm $OABC$ sef $\frac{1}{2}(u+v)\,T$ sydd, trwy hafaliad 4, yn hafal i s. Dyma achos arbennig o'r canlyniad cyffredinol (a ddangosir yn Adran 4.3) bod yr arwynebedd o dan y graff v yn erbyn t yn hafal i'r pellter a deithir.

Yn y bôn, mae'r holl wybodaeth a roddir gan hafaliadau 1, 2 a 4 yn cael ei chynnwys yn y diagram uchod pan ddehonglir arwynebedd $OABC$ fel s. Gall graff o'r fath fod yn ffordd ddefnyddiol a chryno o ddangos yr amodau mewn problem benodol a chyfeirir ato fel y diagram cyflymder–amser, neu'r diagram $v - t$.

Datrys problemau

Y math symlaf o broblem ar gyfer mudiant â chyflymiad cyson yw'r un lle rhoddir u ac a, ac y gofynnir am werthoedd s a v ar gyfer gwerthoedd t penodol. Datrysir y problemau hyn trwy amnewid yn hafaliadau 1 i 4. Wrth ddatrys problemau mae'n bwysig bod yr holl feintiau yn hafaliadau 1 i 4 yn cael eu rhoi a'u cyfrifo yn yr un system unedau. Yn yr enghreifftiau canlynol, defnyddir system unedau SI ac felly dynodir y dadleoliad o'r safle cychwynnol gan s m, y buanedd cychwynnol a therfynol gan u ms^{-1} a v ms^{-1} yn ôl eu trefn, y cyflymiad gan a ms^{-2} a'r amser gan t s. Golyga hyn nad oes unedau yn gysylltiedig ag s, u, v, a a t ac felly nid ydynt ond rhifau sy'n bodloni hafaliadau 1 i 4.

__Enghraifft 4 .1__

I ddechrau, mae gronyn P yn symud ar gyflymder 3 ms^{-1} ar bwynt O ac mae ganddo gyflymiad unffurf 6 ms^{-2}. Darganfyddwch ei gyflymder ar ôl 2 eiliad a'i ddadleoliad o O ar ôl 4 eiliad.

Dyma'r math hawsaf o broblem, gan fod u (= 3) ac a (= 6) yn cael eu rhoi. Darganfyddir y cyflymder ar ôl 2 eiliad trwy osod $t = 2$ yn hafaliad 1, sy'n rhoi

$$v = 3 + 12 = 15,$$

ac felly y cyflymder yw 15 ms^{-1}. Darganfyddir y pellter a deithir yn y 4 eiliad cyntaf trwy roi $t = 4$ i hafaliad 2, sy'n rhoi $s = 3 \times 4 + 3 \times 16 = 60$.

Felly y dadleoliad o O yw 60 m.

Mae math o broblem sydd ychydig yn fwy anodd pan na roddir u ac a yn uniongyrchol, ond mae digon o wybodaeth ar gael i'w darganfod. Wrth ddatrys problem o'r fath, y dull gorau yw rhestru'r anhysbysion ac yna eu darganfod yn systematig trwy ddewis pa un o hafaliadau 1 i 4 sy'n cynnwys un anhysbysyn yn unig. Yna bydd yr hafaliad hwn yn rhoi'r anhysbysyn hwnnw. Ceisiwch ddarganfod u a t yn gyntaf. Yna gellir darganfod s a v ar gyfer pob gwerth t trwy ddefnyddio hafaliadau 1 i 4.

Enghraifft 4. 2

Mae cyflymder gronyn P sy'n symud gyda chyflymiad unffurf 3 ms^{-2} yn cynyddu o 2 ms^{-1} i 8 ms^{-1} wrth i P symud o A i B. Darganfyddwch y pellter rhwng A a B.

Yn yr achos hwn mae $v = 8$, $u = 2$, $a = 3$, ac mae angen darganfod s. Mae hyn yn awgrymu y dylid defnyddio hafaliad 3. Mae gwneud yr amnewidiadau priodol yn rhoi

$$64 = 4 + 6s,$$

ac felly $s = 10$. Felly mae 10 m rhwng y ddau bwynt A a B.
Gellir datrys y broblem hon hefyd trwy amnewid yn hafaliad 1 er mwyn darganfod cyfanswm yr amser, sy'n rhoi $t = 2$, ac yna ddefnyddio hafaliad 4 i gael gwerth s.

Enghraifft 4.3

Mae trên yn cychwyn o ddisymudedd mewn gorsaf ac yn symud â chyflymiad cyson. Ugain eiliad yn ddiweddarach mae'n symud ar fuanedd 72 kmh^{-1} heibio i gaban signalau. Darganfyddwch y pellter, mewn metrau, rhwng yr orsaf a'r caban signalau.

Yn y cwestiwn hwn mae dwy uned ar gyfer hyd a dwy uned o amser. Felly y dasg gyntaf yw penderfynu ar yr unedau i'w defnyddio. Gan fod angen yr ateb mewn metrau, mae'n ymddangos yn rhesymol defnyddio metrau ac eiliadau.

$$72 \text{ kmh}^{-1} = \frac{72 \times 1000}{3600} \text{ ms}^{-1} = 20 \text{ ms}^{-1}.$$

Rhoddir t (=20), u (=0), v (=20) ac felly gellir darganfod a o hafaliad 1 ac

$$20 = a20,$$

ac felly $a = 1$. Nawr gellir darganfod y pellter o hafaliad 3 a

$$400 = 2 \times 1 \times s,$$

ac felly y pellter o'r orsaf i'r caban signalau yw 200 m.

Enghraifft 4.4

Mae dadleoliad gronyn sy'n symud â chyflymiad unffurf o'i safle gwreiddiol yn 6 m ar ôl 2 eiliad, ac 20 m ar ôl 4 eiliad. Darganfyddwch y dadleoliad 6 eiliad ar ôl cychwyn.

Ni roddir a nac u, ond rhoddir gwerthoedd s ar gyfer dau werth t; h.y. bydd $s = 6$ pan fydd $t = 2$ a bydd $s = 20$ pan fydd $t = 4$. Mae rhoi'r ddau werth hyn i hafaliad 2 yn rhoi

$$6 = 2u + 2a, \quad 20 = 4u + 8a.$$

Mae datrys y rhain yn gydamserol yn rhoi $a = 2$ ac $u = 1$.

Darganfyddir y dadleoliad ar ôl 6 eiliad trwy roi'r gwerthoedd hyn yn hafaliad 2, gyda $t = 6$, sy'n rhoi $s = 6 + 36 = 42$, ac felly y dadleoliad y mae ei angen yw 42 m.

Enghraifft 4.5

Mae bachgen sy'n symud i fyny llethr ar sglefr-fwrdd yn profi arafiad o 2 ms^{-2}. Roedd ei fuanedd ar waelod y llethr yn 8 ms^{-1}. Darganfyddwch ba mor bell i fyny'r llethr y bydd yn mynd cyn dod i aros.

Gan fod y bachgen yn profi arafiad, ei gyflymiad i'r cyfeiriad i fyny'r llethr yw -2 ms^{-2}. Yn yr achos hwn $u = 8$, $v = 0$ ac $a = -2$ ac felly gellir darganfod s o hafaliad 3; h.y.

$$0 = 64 - 2 \times 2s,$$

sy'n rhoi $s = 16$ ac felly mae'r bachgen yn teithio 16 m i fyny'r llethr cyn dod i aros.

Enghraifft 4.6

Mae car, sy'n teithio ar 20 ms^{-1}, yn brecio'n sydyn ac yn teithio bellter o 25 m cyn dod i aros. Darganfyddwch y cyflymiad, gan gymryd ei fod yn gyson, a'r amser a gymerir i stopio.

Yn yr achos hwn $v = 0$, $u = 20$ ac $s = 25$ ac felly gellir defnyddio hafaliad 3 er mwyn darganfod a; h.y.

$$0 = 400 + 2 \times 25\, a,$$

sy'n rhoi $a = -8$, ac felly y cyflymiad yw -8 ms^{-2}. Arafiad yw hyn a disgwylir hynny gan fod y car yn arafu. Gellir darganfod yr amser nawr o hafaliad 1, sy'n rhoi

$$0 = 20 - 8t,$$

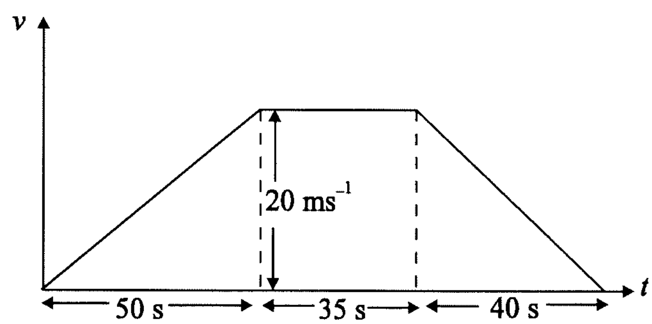
sy'n rhoi'r amser o 2.5 eiliad.

Mae'n debyg mai'r problemau mwyaf cymhleth ar gyflymiad cyson yw'r rhai lle mae'r cyflymiad yn gyson am gyfnod arbennig ond yna'n newid i werth cyson arall am gyfnod gwahanol. Gall y math hwn o broblem ddigwydd, er enghraifft, ym mudiant trên sy'n cyflymu o ddisymudedd hyd at fuanedd cyson, yn cadw at y buanedd cyson hwnnw am gyfnod, ac yna'n arafu a dod i aros. Mewn problemau o'r fath, mae angen defnyddio hafaliadau 1 i 4 yn systematig ar gyfer pob cyfnod, a defnyddio'r wybodaeth a roddir mewn cwestiwn er mwyn darganfod yr anhysbysion i gyd. Yn y problemau hyn, lle gall yr wybodaeth a roddir fod yn gymhleth, mae'r diagram v-t a drafodwyd uchod yn ddefnyddiol iawn. Gellir dangos yr wybodaeth a roddir yn gryno ar ddiagram a defnyddio geometreg elfennol i gwblhau'r cwestiwn.

Mae'r dull hwn yn arbennig o ddefnyddiol gyda phroblemau 'disymudedd i ddisymudedd'. Bydd y graff v yn erbyn t yn gyfres o linellau syth, gyda'r rhannau lle mae cyflymder yn gyson yn segmentau sy'n baralel i'r echelin t.

Enghraifft 4.7

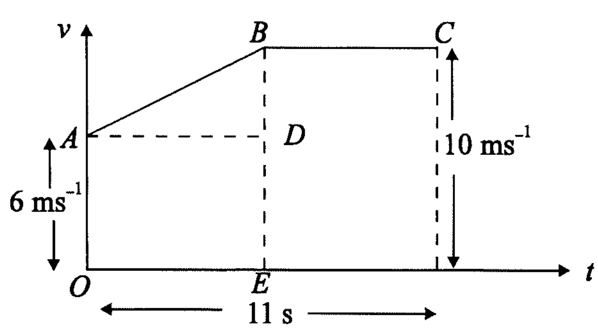
Mae trên yn cychwyn o ddisymudedd gyda chyflymiad unffurf ac yn cyrraedd buanedd uchaf o 20 ms^{-1} mewn 50 eiliad. Mae'n teithio ar y buanedd hwn am 35 eiliad ac yna'n dod i aros ag arafiad unffurf mewn 40 eiliad. Darganfyddwch gyfanswm y pellter a deithir.



Mae'r diagram yn dangos yr wybodaeth wedi'i gosod ar ddiagram $v-t$.
Y pellter yw cyfanswm arwynebedd y ffigur.
Mae gan ochrau paralel y trapesiwm hydoedd 125 a 35.
Felly yr arwynebedd yw $\frac{1}{2}(125+35)\times 20 = 1600$, a'r pellter a deithir yw 1600 m.

Enghraifft 4.8

Dros bellter o 100 m, mae rhedwr yn cyflymu yn unffurf o 6 ms^{-1} i 10ms^{-1} ac yna yn cadw at y buanedd hwnnw dros y pellter sy'n weddill. O wybod bod cyfanswm yr amser dros y pellter o 100 m yn 11 eiliad, darganfyddwch y cyflymiad.
Dangosir y diagram $v-t$ isod.



Cyfanswm yr arwynebedd o dan y llinellau AB a BC yw 100, ac mae'r arwynebedd hwn hefyd yn hafal i

$$\frac{1}{2}(6 + 10)\, OE + 10(11 - OE)$$

ac mae hafalu'r mynegiad hwn i 100 yn rhoi $OE = 5$.

Graddiant AB yw'r cyflymiad anhysbys a ms^{-2}, ac felly

$$a = \frac{BD}{AD} = \frac{10-6}{5} = 0.8.$$

Felly $a = 0.8$ ac felly y cyflymiad yw 0.8 ms^{-2}.

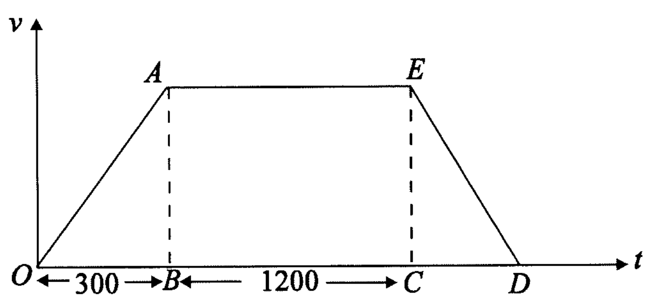
Enghraifft 4.9

Mae trên yn cychwyn o ddisymudedd ac yn teithio â chyflymiad cyson am 5 munud. Yna mae'n symud ar fuanedd cyson am 20 munud. Yna mae'n arafu gydag arafiad cyson, ei faint yn ddwywaith maint y cyflymiad, nes daw y trên i aros. O wybod bod y trên yn teithio 4.5 km wrth gyflymu, darganfyddwch,

(i) y cyflymiad,

(ii) cyfanswm y pellter a deithir.

Rhoddir y diagram v - t isod, gan fesur amser mewn eiliadau a chyflymder mewn ms^{-1}.



(i) Y pellter a deithir gan y trên wrth gyflymu yw'r arwynebedd o dan y llinell OA. Hyd OB yw 300 (sy'n cyfateb i'r amser cyflymu) ac felly

$$4500 = \frac{1}{2} \times 300 \times AB,$$

sy'n rhoi $AB = 30$; h.y. y buanedd cyson yw 30 ms^{-1}.

Graddiant OA yw $\dfrac{AB}{OB} = \dfrac{30}{300} = \dfrac{1}{10}$, ac felly y cyflymiad yw $\dfrac{1}{10}$ms^{-2}.

(ii) Yr arafiad yw graddiant $DE = \dfrac{EC}{CD} = \dfrac{30}{CD}$; rhoddir bod hwn yn ddwywaith y cyflymiad ac felly mae'n $\dfrac{1}{5}$ ms^{-1} ac felly mae $CD = 150$ a'r pellter a deithir wrth arafu, sef yr arwynebedd o dan DE, yw $\dfrac{1}{2} \times 30 \times 150$ m, h.y. 2.25 km.

Hyd BC yw 1200 sy'n cyfateb i'r amser mae'r trên yn teithio ar fuanedd cyson ac felly y pellter a deithir ar fuanedd cyson yw 30×1200 m = 36 km. Felly cyfanswm y pellter a deithir yw 4.5 km + 2.25 km + 36 km = 42.75 km.

Ymarferion 4.1

Mae cwestiynau 1 i 11 yn cyfeirio at ronyn sy'n symud ar linell syth gyda chyflymiad cyson a ms^{-2}, fel y rhoddir cyflymder a dadleoliad y gronyn o bwynt sefydlog O ar amser t s gan v ms^{-1}ac s m, a chyflymder cychwynnol y gronyn yw u ms^{-1}. Mae'r cyflymiad, y cyflymderau a'r dadleoliad i gyd mewn perthynas â'r un cyfeirnod bob tro.

1 $a = 4$, $v = 12$, $u = 4$; darganfyddwch t.

2 $a = -5$, $u = 3$, $v = -12$; darganfyddwch t ac s.

3 $u = 6$, $t = 2$, $s = 20$; darganfyddwch v.

4 $u = -2$, $a = 3$, $t = 5$; darganfyddwch s.

5 $a = 4$, $t = 4$, $s = 42$; darganfyddwch u.

6 $v = 11$, $u = 7$, $t = 2$; darganfyddwch a.

7 $v = 8$, $u = 6$, $s = 7$; darganfyddwch a.

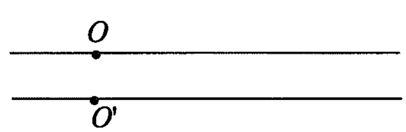
8 $s = 25$, $u = 4$, $v = 11$; darganfyddwch t.

9 $s = 70$, $u = 4$, t = 5; darganfyddwch a.

10 $s = 8$, $u = 9$, $a = -5$; darganfyddwch werthoedd posibl t.

11 $s = 25$ pan fo $v = 13$ ac $s = 52$ pan fo $t = 4$; beth yw gwerthoedd posibl u ac a?

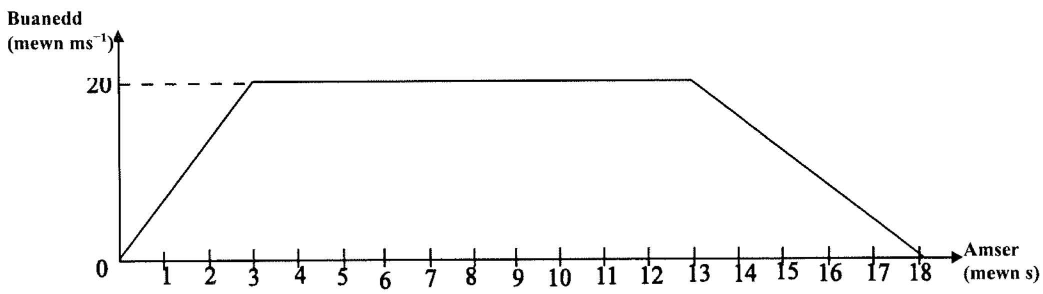
Mae cwestiynau 12 i 13 yn cyfeirio at ronynnau P a Q sy'n rhydd i symud ar linellau paralel cyfagos fel a ddangosir yn y diagram. Mae O ac O' yn bwyntiau sefydlog ar y llinellau ac mae OO' yn berpendicwlar i'r ddwy linell.



12 Ar amser $t = 0$ eiliad, mae P yn mynd trwy O tuag at bwynt B ar fuanedd 7 ms^{-1} ac ar ôl hynny yn symud gyda chyflymiad cyson 2 ms^{-2} tuag at B. Ar yr un pryd, mae Q yn mynd trwy bwynt B', sy'n union gyferbyn â B a 114 m oddi wrth O', gyda chyflymder tuag at O' o 3 ms^{-1} ac ar ôl hynny mae gan Q gyflymiad 1 ms^{-2} i gyfeiriad $B'O'$. Darganfyddwch pryd bydd P a Q gyferbyn â'i gilydd.

13 Ar amser $t = 0$ eiliad, mae P yn mynd trwy O gyda buanedd o 4 ms^{-1} ac ar ôl hynny yn symud gyda chyflymiad cyson o 2 ms^{-2}. Ar amser $t = 2$ eiliad mae Q yn mynd trwy bwynt C', sydd 100 m oddi wrth O', gyda chyflymder tuag at O' o 17 ms^{-1}. Ar ôl hynny mae gan Q gyflymiad o 4 ms^{-2} i gyfeiriad $C'O'$. (Gellir anwybyddu'r pellter rhwng y cledrau.) Darganfyddwch pryd bydd pellter o 60 m rhwng P a Q.

14



Dyma ddiagram $v - t$ ar gyfer gronyn sy'n symud â chyflymiad cyson am 3 eiliad, yna ar gyflymder cyson am 10 eiliad ac yna ag arafiad cyson nes dod i aros. Darganfyddwch

(i) y cyflymiad,

(ii) yr arafiad,

(iii) cyfanswm y pellter a deithir.

15 Mae trên tanddaear yn teithio 576 m o ddisymudedd i ddisymudedd mewn 60 eiliad. Ar y cychwyn mae ganddo gyflymiad cyson o 0.5 ms^{-2}, yna mae'n symud ar fuanedd cyson ac ar y diwedd mae ganddo arafiad cyson o 1 ms^{-2}. Darganfyddwch yr amser a gymerir am bob rhan o'r daith.

16 Mae trên wrth agosáu at orsaf yn teithio 0.25 km mewn 10 eiliad a'r 0.25 km nesaf mewn 20 eiliad. Gan dybio bod yr arafiad yn unffurf (h.y. yn gyson), darganfyddwch yr amser pellach a gymerir cyn i'r trên ddod i aros.

17 Mae trên wrth gychwyn o ddisymudedd yn cyflymu yn unffurf yn ystod 80 eiliad cyntaf ei daith, pryd mae'n teithio 600 m. Yna mae'n teithio ar fuanedd cyson ac wedyn yn arafu'n gyson dros bellter o 750 m cyn dod i aros. Darganfyddwch fuanedd mwyaf y trên a maint yr arafiad.

18 Mae car wrth gychwyn o ddisymudedd yn symud gyda chyflymiad cyson o 1 ms^{-2} am 10 eiliad. Yna mae'n symud ar fuanedd cyson am 1 km ac yna'n arafu'n gyson cyn dod i aros. Cyfanswm y pellter a deithir yw 2 km. Darganfyddwch fuanedd mwyaf y car a chyfanswm yr amser a gymerir.

19 Mae car yn cychwyn o ddisymudedd gyda chyflymiad cyson o 1.2 ms^{-2} ond ar ôl 12 eiliad mae'r gyrrwr yn gweld rhwystr ac yn gorfod brecio. Mae arafiad y car yn 1.6 ms^{-2}. Darganfyddwch gyfanswm yr amser a gymerir o ddisymudedd i ddisymudedd.

4.3 Mudiant fertigol o dan effaith disgyrchiant

Trwy arsylwi gwyddom fod gan ronynnau sy'n rhydd i symud i gyfeiriad fertigol yn agos at y Ddaear yr un cyflymiad cyson, a ddynodir gan g (9.8 ms^{-2}), tuag at i lawr. Felly, gellir datrys pob problem sy'n cynnwys mudiant o'r fath trwy'r dulliau a ddisgrifiwyd uchod. Os mesurir s tuag i fyny o'r pwynt lle caiff y gwrthrych ei daflu, bydd y fformiwlâu yn ddilys gydag $a = -g$, ac os mesurir s tuag i lawr mae'n rhaid rhoi g yn lle a. Fel arfer, nid yw'n bwysig pa gyfeiriad, i fyny neu i lawr, a gymerir fel y cyfeiriad positif ond mae'n ddoethach mesur s tuag i fyny ar gyfer gronynnau a deflir i fyny, a thuag i lawr ar gyfer rhai a ollyngir o ddisymudedd. Bydd unrhyw beth a deflir i fyny, wrth gwrs, yn dod i lawr ac felly mae cymryd mai tuag i fyny yw cyfeiriad positif s ar gyfer y mudiant cyfan yn osgoi gwallau gyda'r arwyddion.
Trwy ddefnyddio hafaliad 3, bydd gronyn a deflir i fyny ar fuanedd u yn cyrraedd buanedd o $v = \sqrt{u^2 - 2gs}$ pan fydd ar uchder s. Felly, ceir yr uchder mwyaf h pan fydd y buanedd, v, yn sero, hynny yw pan fydd

$$u^2 = 2gh \quad \text{neu} \quad h = \frac{u^2}{2g}\,. \qquad \ldots\ldots (5)$$

Felly, bydd gronyn a deflir i fyny ar fuanedd u yn codi trwy bellter $u^2/2$g. Ei fuanedd ar y llwybr i lawr ar y pwynt lle cafodd ei daflu, h.y. lle mae $s = 0$, yw $v = \sqrt{u^2}$ sef u unwaith eto. Felly, mae'r cyflymder pan fydd yn dychwelyd i bwynt y tafliad yn hafal ei faint ond yn y cyfeiriad dirgroes i gyflymder gwreiddiol y tafliad.

Enghraifft 4.10

Teflir carreg i fyny yn fertigol ar fuanedd 20 ms^{-1} o ben adeilad 22.5 m o uchder. Ar ôl faint o amser ac ar ba fuanedd y bydd y garreg yn taro'r llawr?

Trwy ddefnyddio hafaliad 2, y dadleoliad i fyny, s m, ar amser t eiliad yw

$$s = 20\,t - \frac{1}{2}9.8\,t^2.$$

Mae angen darganfod yr amser pan fydd y garreg ar bellter 22.5 m dan ei safle gwreiddiol, hynny yw, pan fydd $s = -22.5$. Felly,

$$-22.5 = 20t - 4.9\,t^2; \quad \text{hynny yw, } 4.9\,t^2 - 20t - 22.5 = 0.$$

Mae'r ochr chwith yn ffactorio i roi $(t - 5)(4.9t + 4.5)$, gwreiddyn positif yr hafaliad yw 5, ac felly yr amser a gymerir yw 5 eiliad. Gellir darganfod y buanedd v pan fydd $s = -22.5$ trwy amnewid yn hafaliad 3 gydag $a = -9.8$, sy'n rhoi

$$v^2 = 400 + 441,$$

sy'n rhoi'r buanedd yn 29 ms^{-1}.

Enghraifft 4.11

Teflir gronyn i fyny'n fertigol ar fuanedd 14 ms^{-1}. Darganfyddwch yr uchder mwyaf mae'n ei gyrraedd a'r amser a gymerir cyn i'r gronyn ddychwelyd i bwynt y tafliad.

Rhoddir yr uchder mwyaf gan hafaliad 5 fel 196/19.6 = 10 m, a'r dadleoliad s m o bwynt y tafliad ar amser t eiliad yw $s = 14t - 4.9t^2$. Mae'n dychwelyd i bwynt y tafliad pan fydd $s = 0$, hynny yw, ar ôl $\dfrac{14}{4.9} = 2.86$ eiliad. Y datrysiad arall sy'n cyfateb i $s = 0$ yw $t = 0$, sy'n cynrychioli'r amser cychwynnol.

Ymarferion 4.2

Cymerwch fod $g = 9.8$ ms^{-2} trwy gydol yr ymarfer hwn. Mae cwestiynau 1 i 5 yn cyfeirio at ronyn a deflir i fyny yn fertigol o bwynt O ar fuanedd u ms^{-1}.

1 $u = 20$; darganfyddwch yr uchder a gyrhaeddir a'r amser i gyrraedd y llawr eto.

2 Yr uchder mwyaf a gyrhaeddir yw 45 m. Darganfyddwch u a'r amser a gymerir i gyrraedd uchder o 40 m uwchben O am y tro cyntaf.

3 $u = 45$; darganfyddwch yr amserau (a) pan fydd buanedd y gronyn yn 35 ms^{-1} (b) pan fydd y gronyn ar uchder o 90 m uwchben O.

4 Mae 6 eiliad rhwng y ddau amser pan yw'r gronyn 35 m uwchben O. Faint yw u?

5 $u = 25$; darganfyddwch yr amser a gymerir i'r gronyn gyrraedd 30 m dan O.

Mae cwestiynau 6 a 7 yn cyfeirio at ronyn sy'n cael ei daflu i lawr yn fertigol o O ar fuanedd u ms^{-1}.

6 $u = 5$; darganfyddwch y buanedd pan fydd y gronyn wedi syrthio 10 m a'r amser a gymerir i gyrraedd y safle hwn.

7 $u = 4$; darganfyddwch y pellter a syrthir mewn 9 eiliad.

8 Teflir gronyn i fyny o bwynt O ar fuanedd u, ac ar amser T yn ddiweddarach, teflir ail ronyn i fyny o O ar yr un buanedd. Darganfyddwch yr amser ar ôl y tafliad cyntaf cyn iddynt gyfarfod.

9 Teflir pêl i fyny yn fertigol ar fuanedd 12 ms^{-1} o bwynt ar uchder o 2 m uwchben y llawr. Darganfyddwch y buanedd pan fydd yn cyrraedd y llawr. O wybod bod y bêl yn adlamu yn syth i fyny gyda hanner y buanedd y mae'n taro'r llawr arno, darganfyddwch yr uchder y mae'n adlamu y tro cyntaf.

10 Mae pêl a deflir i fyny yn fertigol ar fuanedd 20 ms^{-1} yn taro'r llawr 5 eiliad yn ddiweddarach. Darganfyddwch yr uchder uwchben y llawr lle cafodd ei thaflu.

11 Gollyngir pêl o ben adeilad 24 m o uchder ac, ar yr un pryd, teflir pêl arall i fyny yn fertigol o'r llawr er mwyn taro'r bêl gyntaf. Buanedd cychwynnol yr ail bêl hon yw 12 ms^{-1}. Darganfyddwch

(i) yr amser pryd bydd y peli yn gwrthdaro,

(ii) yr uchder lle maent yn gwrthdaro.

12 Gollyngir carreg o ben adeilad uchel. Mae'r garreg yn cymryd 1 eiliad i syrthio o'r nawfed llawr i'r wythfed ac yna 0.5 eiliad i syrthio o'r wythfed llawr i'r seithfed. Darganfyddwch y pellter rhwng y lloriau, gan dybio ei fod yn gyson.

4.4 Profi rhai canlyniadau sylfaenol

Os oes gan gyflymiad werth cyson a, yna mae diffinio cyflymiad fel deilliad yn rhoi

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a .$$

Gellir integru'r hafaliad hwn, sy'n rhoi

$$v = at + \text{cysonyn}.$$

Os u yw'r cyflymder ar $t = 0$, yna mae rhoi $t = 0$ yn y mynegiad uchod yn rhoi u fel y cysonyn, ac felly

$$v = u + at,$$

sef hafaliad 1.

Gan ddefnyddio'r diffiniad o gyflymder fel deilliad gellir ailysgrifennu'r hafaliad hwn fel

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u + at.$$

Gellir integru'r hafaliad hwn i roi

$$x = ut + \frac{1}{2}at^2 + \text{cysonyn}.$$

Os mesurir x o'r safle pan fydd $t = 0$ ac os dynodir x gan s, yna mae amnewid yn yr hafaliad uchod yn rhoi'r cysonyn yn sero ac

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2,$$

sef hafaliad 2.

Mae sgwario hafaliad 1 yn rhoi

$$v^2 = u^2 + 2uat + a^2t^2,$$

ac mae amnewid i'r hafaliad hwn o hafaliad 2 yn rhoi hafaliad 3.

Hefyd gellir ad-drefnu hafaliad 2 fel

$$s = \frac{1}{2}(2ut + at^2) = \frac{1}{2}t(u + u + at) = \frac{1}{2}t(u + v),$$

sef hafaliad 4.

Y deilliad gyferbyn yw'r math symlaf o enghraifft sydd ar gael o ddatrys hafaliadau differol. Dylid sylwi ar un pwynt pwysig, sef bod pob integriad yn cyflwyno cysonyn mympwyol a bod angen darganfod pob cysonyn o'r amodau dechreuol.

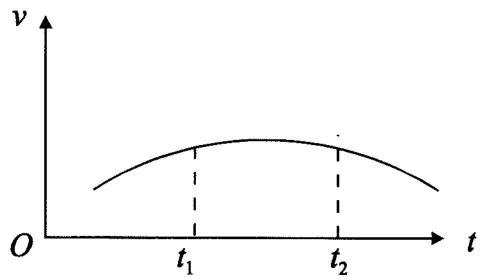
Mae integru'r hafaliad

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

rhwng dau werth t (t_1 a t_2, er enghraifft) yn rhoi

$$[x]_{\text{at } t=t_2} - [x]_{\text{at } t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} v \,\mathrm{d}t \ .$$

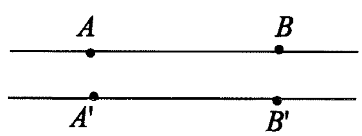
Yr ochr chwith yw'r pellter rhwng y ddau bwynt sy'n cyfateb i $t = t_2$ a $t = t_1$ a'r ochr dde yw'r arwynebedd dan y diagram v - t rhwng $t = t_2$ a $t = t_1$, fel a ddangosir yn y diagram isod.



Mae hyn yn cadarnhau'r datganiad a wnaed yn Adran 4.2 bod yr arwynebedd dan y diagram $v-t$ yn cyfateb i gyfanswm y pellter a deithir.

Ymarferion Amrywiol 4

1



Mae'r diagram yn dangos dau drac paralel ar gyfer ceir tegan, a hyd segmentau AB ac $A'B'$ yw 8.2 m. Ar amser $t = 0$ mae car tegan P yn mynd trwy A ar fuanedd 0.8 ms^{-1} ac yn symud tuag at B gyda chyflymiad cyson o 0.3 ms^{-2} i'r cyfeiriad o A i B. Ar amser $t = 0$ mae car tegan Q yn mynd trwy B' ar fuanedd 0.4 ms^{-1} ac yn symud tuag at A' gyda chyflymiad cyson o 0.1 ms^{-2} i'r cyfeiriad o B' i A'. Trwy fodelu'r ceir fel gronynnau, darganfyddwch

(a) fuanedd P pan fydd $t = 1$, (b) bellter P oddi wrth A pan fydd $t = 1$,
(c) fynegiad am PQ ar amser t eiliad, (d) yr amserau pan fydd 2.8 m rhwng P a Q.
(Yn rhannau (c) a (d), dylid anwybyddu'r pellter perpendicwlar rhwng y traciau.)

2 Teflir gronyn P ar hyd llawr llorwedd garw o bwynt sefydlog A tuag at bwynt sefydlog arall B, lle mae $AB = 60$ m, gyda buanedd 4 ms^{-1} ac mae'n symud o dan arafiad ffrithiannol cyson o $\frac{1}{3}$ ms^{-2}. Ar yr un pryd teflir gronyn Q ar hyd y llawr o B tuag at A gyda buanedd v ms^{-1} ac mae'n symud ag arafiad ffrithiannol cyson o 2 ms^{-2}. Dangoswch y bydd P yn dod i aros ar ôl 12 eiliad ar bellter 24 m oddi wrth A. Trwy hyn diddwythwch y bydd y gronynnau yn gwrthdaro os yw $v \geq 12$. Dangoswch os yw $v = 13$, y bydd y gwrthdrawiad yn digwydd ar ôl 6 eiliad. Darganfyddwch werth v os bydd y gwrthdrawiad yn digwydd ar ôl 4 eiliad a darganfyddwch y pellter o A lle bydd y gwrthdrawiad yn digwydd.

3 Mae car yn mynd heibio i bwynt A ar fuanedd 35 ms^{-1} ac yn parhau ar yr un buanedd. Dau eiliad yn ddiweddarach mae heddwas ar feic modur yn cychwyn o A. Mae'n cyflymu ar gyfradd o 6 ms^{-2} nes cyrraedd buanedd o 45 ms^{-1} ac yna yn symud ar y buanedd hwn nes cyrraedd y car. Darganfyddwch y pellter o A i'r pwynt lle mae'r beic modur yn cyrraedd y car.

4 Amcangyfrifir y gall llewpart redeg ar fuanedd uchaf o 100 kmh^{-1} tra gall antelop redeg ar fuanedd uchaf o 65 kmh^{-1}. Mae llewpart sy'n llonydd yn gweld antelop sydd hefyd yn llonydd, ac yn dechrau rhedeg tuag ato. Mae'r antelop yn dechrau rhedeg i ffwrdd ar unwaith. Tybiwch fod y ddau anifail yn symud gyda chyflymiad cyson ac yn cyrraedd eu buaneddau mwyaf mewn 4 eiliad. Gan dybio bod y ddau yn rhedeg ar hyd yr un llinell syth a bod y llewpart yn dal yr antelop mewn 15 eiliad, darganfyddwch y pellter rhwng yr anifeiliaid pan ddechreuodd y ddau symud.

5 Mae cawell yn disgyn i lawr siafft pwll, dyfnder 480 m, mewn 45 eiliad. Cyflymir y cawell yn unffurf o ddisymudedd am y 160 m cyntaf, yna mae'n teithio ar fuanedd cyson o v ms^{-1} am y 240 m nesaf; ac yn olaf daw i aros gydag arafiad unffurf dros weddill ei daith. Darganfyddwch

(i) v,

(ii) gyflymiad y cawell ar ran gyntaf ei daith.

6 Mae trên sy'n cychwyn o ddisymudedd yn symud gyda chyflymiad cyson yn ystod 50 eiliad cyntaf ei daith, gan deithio 500 m. Yna mae'n teithio ar fuanedd cyson nes dod i aros gydag arafiad cyson. Y pellter mae'n ei deithio yn ystod yr arafiad yw 800 m. Trwy lunio graff buanedd-amser, neu fel arall, darganfyddwch

(i) fuanedd mwyaf y trên,

(ii) faint yr arafiad.

O wybod mai cyfanswm amser y daith oedd 4 munud, darganfyddwch y pellter a deithiwyd ar fuanedd cyson.

7 Mae gronyn yn symud gyda chyflymiad cyson o A i B, lle mae $AB = 96$ m, ac yna yn symud gydag arafiad cyson o B i C, lle mae $BC = 30$ m. Buaneddau'r gronyn ar A a B yw 6 ms^{-1} ac u ms^{-1} yn ôl eu trefn, a daw i aros ar C. Darganfyddwch, yn nhermau u, yr amserau a gymerir gan y gronyn i symud o A i B ac o B i C.
O wybod mai cyfanswm yr amser a gymerir gan y gronyn i symud o A i C yw 18 eiliad, darganfyddwch
(i) werth u,
(ii) gyflymiad ac arafiad y gronyn.

8 Mae angen i yrrwr trên, er mwyn bodloni cyfyngiadau buanedd dros ran o'r daith, arafu ag arafiad cyson o 1 ms^{-2} er mwyn gostwng y buanedd o 40 ms^{-1} ar bwynt A i 10 ms^{-1} ar bwynt arall B. Mae'r trên yn teithio o B i C, pellter o 3.5 km, ar fuanedd cyson o 10 ms^{-1} ac yna'n symud gyda chyflymiad cyson o 0.2 ms^{-2} fel bod ei fuanedd ar bwynt D yn 40 ms^{-1}. Brasluniwch y graff cyflymder-amser ar gyfer y daith o A i D, a dangoswch fod y pellter o A i D yn 8 km.
Dangoswch fod y daith o A i D yn cymryd 330 eiliad yn fwy nag a gymerai petai'r trên yn teithio ar fuanedd cyson o 40 ms^{-1} o A i D.

9 Mae lifft yn teithio pellter fertigol o 22 m o ddisymudedd ar y llawr isaf i ddisymudedd ar y llawr uchaf. Yn gyntaf mae'r lifft yn symud â chyflymiad cyson am bellter o 5 m; yna mae'n parhau ar fuanedd cyson u ms^{-1} am 14 m, ac yna'n arafu yn gyson fel y daw i aros ar y llawr uchaf. Darganfyddwch, yn nhermau u, yr amserau a gymerir gan y lifft i deithio tair rhan ei daith.
O wybod mai cyfanswm yr amser y mae'r lifft yn symud yw 6 eiliad, darganfyddwch
(i) werth u,
(ii) werthoedd y cyflymiad a'r arafiad.

10 Mae car sy'n cychwyn o ddisymudedd ar bwynt A yn symud ar hyd ffordd syth gyda chyflymiad cyson f nes cyrraedd buanedd v; yna mae'n parhau ar y buanedd hwn. Pan fydd y car yn cychwyn, mae car arall ar bellter b tu ôl i'r car cyntaf ac yn symud i'r un cyfeiriad gyda buanedd cyson u. Darganfyddwch y pellter rhwng y ceir ar amser t ar ôl i'r car adael A ar gyfer
(i) $0 < t < v/f$,
(ii) $t > v/f$.
Dangoswch na all yr ail gar ddal y car cyntaf yn ystod y cyfnod $0 < t < v/f$ oni bai fod $u^2 > 2fb$.
Darganfyddwch y pellter lleiaf rhwng y ddau gar yn yr achos lle mae $u^2 < 2fb$ ac mae $u < v$. Nodwch yn fyr beth fydd yn digwydd os yw $u^2 < 2fb$ ac $u > v$.

11 Mae trên tanddaear yn teithio rhwng dwy orsaf sydd 2.7 km oddi wrth ei gilydd. Mae'r trên naill ai yn symud gyda chyflymiad cyson o 0.25 ms^{-2}, neu yn cadw at fuanedd cyson, neu yn symud gydag arafiad cyson o 0.5 ms^{-2}. Ni chaniateir i'r trên fynd yn gyflymach na 15 ms^{-1}. O wybod bod y trên yn cwblhau'r daith, o ddisymudedd i ddisymudedd, yn yr amser lleiaf posibl heb fynd dros y buanedd mwyaf a ganiateir, darganfyddwch yr amser a gymerir a dangoswch mai'r pellter a deithir ar y buanedd mwyaf yw 2.025 km.

12 Mae trefnydd amserlen rheilffordd angen cyfrifo'r amser teithio rhwng dwy orsaf sydd 22.5 km oddi wrth ei gilydd. Er mwyn gwneud hyn mae'n tybio bod trên, wrth adael un orsaf, yn cyflymu ar gyfradd gyson am 75 eiliad nes cyrraedd buanedd cyson o 30 ms^{-1} ar bwynt A. Yna mae'n parhau ar y buanedd hwn at bwynt B lle bydd yn arafu yn gyson am 75 eiliad fel bod y trên yn dod i aros yn yr ail orsaf .

(a) Lluniwch fraslun o'r graff cyflymder-amser gan ddangos mudiant y trên.

(b) Darganfyddwch faint y cyflymiad a chyfanswm y pellter a deithir tra bo'r trên yn cyflymu.

(c) Darganfyddwch gyfanswm yr amser y mae trefnydd yr amserlen yn ei amcangyfrif ar gyfer y daith.

(d) Mae trefnydd yr amserlen yn sylweddoli wrth wneud amserlen bod angen iddo gynnwys lwfans o amser rhag ofn i'r trên orfod aros wrth signal. Gwna hyn trwy dybio bod y trên, rywbryd ar ôl mynd heibio i A, yn gorfod dechrau arafu i ddod i aros ac yna yn aros am 60 eiliad. Mae'n tybio bod yr arafiad a'r cyflymiad yr un ag a geir ar gychwyn a diwedd y daith. Mae hefyd yn tybio bod y pwynt lle mae'r trên yn dechrau arafu yn un fel y bydd y trên wedi cyrraedd y buanedd cyson o 30 ms^{-1} am yr ail dro cyn cyrraedd B. Darganfyddwch gyfanswm yr amser y byddai nawr yn ei amcangyfrif ar gyfer y daith.

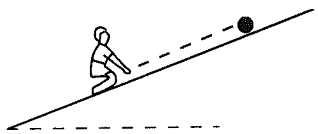
13 Mae gyrrwr car sy'n teithio ar 108 kmh^{-1} yn gweld rhwystr 100 m o'i flaen. Ar ôl oedi am 0.3 eiliad mae'n arafu ar gyfradd o 5 ms^{-2}. Pa mor bell oddi wrth y rhwystr y mae'n dod i aros?

14 Pan fo gyrrwr car yn gweld rhwystr o'i flaen, mae'n oedi am gyfnod T eiliad (yr amser a gymer i'r gyrrwr ymateb) cyn gweithredu. Yna mae'n arafu'r car gydag arafiad cyson f ms^{-2}. Os yw'r gyrrwr yn teithio ar fuanedd unffurf o 12 ms^{-1} pan fo'n gweld rhwystr, gall ddod â'r car i aros mewn 20 m. Os yw ei fuanedd unffurf yn 24 ms^{-1} pan fo'n gweld y rhwystr, yna gall ddod â'r car i aros mewn 64 m. Darganfyddwch f a T.

Mae'r gyrrwr yn gweld rhwystr wrth deithio ar 18 ms^{-1} â chyflymiad cyson o 3 ms^{-2}. Dangoswch y gall stopio'r car mewn 46 m.

15 Teflir pêl i fyny yn fertigol gyda buanedd cychwynnol o 14.7 ms^{-1}.
Darganfyddwch
(i) ei huchder mwyaf,
(ii) yr amser a gymer i gyrraedd ei huchder mwyaf,
(iii) ei buanedd ddau eiliad ar ôl cael ei thaflu.

16



Mae'r diagram yn dangos merch yn rholio pêl i fyny goledd. Mae gan y bêl hon arafiad o 4 ms^{-2} i fyny'r goledd. O wybod bod y bêl yn dechrau symud i fyny'r goledd ar fuanedd 2 ms^{-1}, darganfyddwch
(i) y pellter mae'n symud i fyny'r plân cyn iddi ddod i aros am ennyd,
(ii) cyfanswm yr amser cyn i'r bêl ddychwelyd at y ferch.

17 Ar amser $t = 0$ mae gronyn A yn cael ei daflu i fyny yn fertigol o bwynt O ar fuanedd U. Ar amser $t = U/2g$ teflir ail ronyn B i fyny yn fertigol o O ar fuanedd $3U$. Dangoswch fod y gronynnau yn taro ei gilydd cyn i A gyrraedd ei uchder mwyaf.
Darganfyddwch yr uchder uwchben O lle mae'r gronynnau yn taro ei gilydd.
Yna teflir gronyn A am yr ail dro o O a theflir trydydd gronyn C i fyny yn fertigol o O ar amser $U/2g$ yn ddiweddarach. Mae hwn yn taro gronyn A ar amser U/g, ar ôl i A gael ei daflu. Darganfyddwch fuanedd taflu C.

18 Ar amser $t = 0$ teflir gronyn i fyn yn fertigol o O ar fuanedd 19.6 ms^{-1}. Ddau eiliad yn ddiweddarach, teflir ail ronyn o O ar yr un buanedd. Mynegwch uchderau y ddau ronyn uwchben O yn nhermau t a thrwy hyn, neu fel arall, darganfyddwch werth t pan fyddant yn taro ei gilydd. Darganfyddwch fuaneddau'r ddau ronyn ar ennyd y gwrthdrawiad.

19 Mae dau ddiferyn glaw yn disgyn yn rhydd oddi ar ymyl clogwyn sydd â'i uchder yn h. Mae'r ail ddiferyn yn cychwyn disgyn pan fo'r cyntaf eisoes wedi disgyn bellter s. Dangoswch mai'r pellter rhwng y diferion pan fo'r diferyn cyntaf yn taro'r ddaear yw $2\sqrt{sh} - s$.
Os 28 m yw uchder y clogwyn, a 3 m yw'r pellter terfynol rhwng y ddau ddiferyn, darganfyddwch werth s i'r centimetr agosaf. Cymerwch mai 9.8 ms^{-2} yw gwerth g.

Pennod 5

Dynameg mudiant unionlin

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon dylech

- wybod deddfau mudiant Newton a gallu eu cymhwyso i ddarganfod mudiant unionlin gwrthrychau o dan effaith grymoedd a roddir,
- allu datrys problemau syml sy'n ymwneud â mudiant gronynnau wedi eu cysylltu.

5.1 Deddfau Newton

Y ddeddf gyntaf

Mae'r ddeddf hon yn nodi bod pob gwrthrych yn parhau yn ddisymud neu mewn mudiant unffurf mewn llinell syth oni bai fod grym yn gorfodi i'r cyflwr hwnnw newid. Os yw gwrthrych yn newid o'i gyflwr o fudiant unffurf, mae gan y gwrthrych hwnnw gyflymiad (neu arafiad) ac, felly, gellir dehongli bod deddf gyntaf Newton yn nodi bod grym sy'n gweithredu ar wrthrych yn cynhyrchu cyflymiad (neu arafiad) a bod grym yn gweithredu ar bob gwrthrych sydd â chyflymiad (neu arafiad).

Yr ail ddeddf

Mae angen cyflwyno uned sylfaenol newydd ar gyfer yr ail ddeddf hon, sef y **màs**. Mae'n debyg eich bod wedi defnyddio'r syniad o fàs gwrthrych er efallai nad oes gennych syniad clir beth mae'n ei olygu. Rhoddir y dull damcaniaethol o ddiffinio a mesur màs yn Adran 5.4.

Diffinnir màs yn aml fel maint y mater sydd mewn gwrthrych ond nid yw'r diffiniad hwn yn arbennig o dda. Y pwynt pwysig yw bod màs gwrthrych yn briodwedd sylfaenol i'r gwrthrych hwnnw ac y gellir diffinio'r uned o fàs yn annibynnol ar yr unedau o amser, hyd neu rym. Yr uned a ddefnyddir yn y system SI yw'r cilogram (kg), ac mae 1000 kg yn un dunnell fetrig. Mae ail ddeddf Newton yn nodi bod cydran grym i gyfeiriad penodol sy'n gweithredu ar wrthrych yn hafal i luoswm màs y gwrthrych a'r cyflymiad i'r cyfeiriad penodol hwnnw. Yr unig broblemau a fydd yn cael eu hystyried fydd rhai lle mae'r cyflymiad ar hyd cyfeiriad sefydlog. Ni fydd mudiant yn bosibl i unrhyw gyfeiriad arall, felly ni fydd cyflymiad i unrhyw gyfeiriad arall yn bosibl, ac felly bydd y grymoedd i unrhyw gyfeiriad arall mewn cydbwysedd. Mewn symbolau,

$$F = kma,$$

lle mae a yn cynrychioli'r cyflymiad yn y cyfeiriad positif ar hyd y llinell, F yw cydran y grym ar hyd y llinell i'r cyfeiriad positif, ac mae k yn gysonyn positif. Mae'n bwysig iawn dewis cyfeiriad penodol fel cyfeirnod ar ddechrau unrhyw broblem.

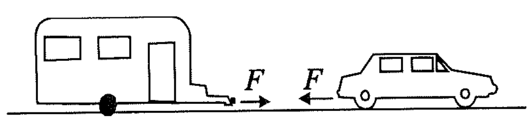
Yn y system SI o unedau dewisir yr uned o rym (y newton) fel bod $k = 1$, ac felly mae un newton yn cynhyrchu cyflymiad sydd â'i faint yn 1 (h.y. 1 ms^{-2}) wrth weithredu ar fàs sydd yn 1 (sef 1 kg). Yn y system hon mae'r hafaliad uchod yn rhoi

$$F = ma.$$

Byddwch yn dod ar draws problemau lle nad yw'r grymoedd i gyd i gyfeiriad sefydlog y mudiant. Yn yr achos hwn, fel y soniwyd uchod, mae'r grymoedd mewn unrhyw gyfeiriad arall mewn cydbwysedd ac mae'n rhaid ychwanegu'r amod ychwanegol hwn at hafaliad y mudiant.

Y drydedd ddeddf

Mae trydedd ddeddf Newton yn nodi bod arwaith ac adwaith yn hafal a dirgroes. Rydych yn gyfarwydd â hyn mewn Stateg ond mae'n berthnasol hefyd i wrthrychau sy'n symud. Yn y diagram isod, os yw'r car yn rhoi grym F i'r dde ar y garafán, yna mae'r garafán yn rhoi grym F i'r chwith ar y car.



5.2 Mudiant gronynnau unigol o dan effaith grymoedd cyson

Er mwyn cael hafaliad mudiant cywir mae'n bwysig iawn llunio braslun eglur sy'n dangos safle'r gronyn ar unrhyw adeg gan nodi'r cyfeiriad a ddewiswyd fel cyfeirnod a hefyd, fel gyda phroblemau mewn Stateg, nodi yr holl rymoedd sy'n gweithredu. Y cam nesaf, yn y rhan fwyaf o broblemau, yw darganfod cydran y grym i'r cyfeiriad a ddewiswyd fel cyfeirnod ac yna gellir defnyddio ail ddeddf Newton i ddarganfod y cyflymiad. Gyda grymoedd cyson, gellir darganfod safle gronyn ar unrhyw amser trwy ddefnyddio'r fformwlâu ym Mhennod 4.

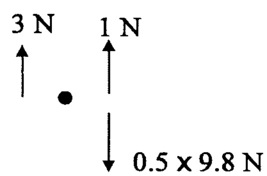
Mewn rhai problemau efallai nad yw cyfeiriad y mudiant yn amlwg. Mae hyn yn wir er enghraifft pan fo dau neu fwy o dynfadau yn tynnu llong i gyfeiriadau gwahanol. Yn yr achos hwn byddai angen darganfod y cydeffaith ac yna ddarganfod maint a chyfeiriad y cyflymiad trwy ddefnyddio ail ddeddf Newton.

Weithiau nid yw'r grymoedd yn hysbys ond gellir gwylio mudiant gronyn ac yna allu cyfrifo'r cyflymiad a thrwy hyn ddarganfod y grym.

<u>Enghraifft 5.1</u>

Mae carreg, màs 0.5 kg, yn disgyn trwy hylif. Mae hynofedd yr hylif yn rhoi grym i fyny o 3 N ac mae'r gwrthiant yn darparu grym arall i fyny o 1 N. Darganfyddwch gyflymiad y garreg.

Cymerir mai'r cyfeiriad a ddewisir fel cyfeirnod yw'r cyfeiriad fertigol i lawr. Y grymoedd fertigol sy'n gweithredu yw grym disgyrchiant o 0.5g tuag i lawr, y gwrthiant, a'r hynofedd. Dangosir y grymoedd hyn yn y diagram.



Cyfanswm y grym yn y cyfeiriad i lawr yw

$$(0.5 \times 9.8 - 3 - 1)\text{ N} = 0.9\text{ N}$$

ac os yw'r cyflymiad i lawr yn a ms^{-2} yna mae ail ddeddf Newton yn rhoi

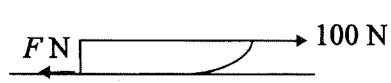
$$0.5\,a = 0.9\text{ N},$$

ac felly y cyflymiad yw 1.8 ms^{-2}.

<u>Enghraifft 5.2</u>

Mae sled â'i màs yn 60 kg yn cael ei thynnu ar eira llorwedd gan fachgen sy'n rhoi grym llorwedd o 100 N ac mae'n symud gyda chyflymiad 1.5 ms^{-2}. Darganfyddwch y gwrthiant ffrithiannol ar y sled.

Fel cyfeirnod dewisir y cyfeiriad y mae'r bachgen yn tynnu. Yr unig rym arall sy'n gweithredu ar y sled yw'r gwrthiant ffrithiannol F N, a fydd yn y cyfeiriad dirgroes i'r cyfeiriad y mae'r bachgen yn tynnu. Dangosir y grymoedd yn y diagram isod.



Cyfanswm y grym i'r dde, felly, yw $(100 - F)$ N. Felly mae deddf Newton yn rhoi

$$100 - F = 60 \times 1.5,$$

ac felly 10 N yw'r gwrthiant.

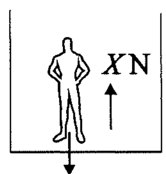
Enghraifft 5.3

Mae dyn, màs 70 kg, yn sefyll mewn lifft. Darganfyddwch y grymoedd a roddir gan lawr y lifft ar y dyn

(i) pan fo'r lifft yn disgyn gyda chyflymiad o 0.3 ms^{-2},

(ii) pan fo'r lifft, ar ei daith i lawr, yn arafu gydag arafiad o 0.3 ms^{-2},

(iii) pan fo'r lifft yn disgyn gyda chyflymiad g.



Cymerir cyfeirnod y cyfeiriad fel yn fertigol i lawr, ac mae'r grymoedd fel a ddangosir yn y diagram.

(i) Yr unig rymoedd sy'n gweithredu ar y dyn yw grym disgyrchiant i lawr ac adwaith anhysbys y llawr, maint X N, yn gweithredu i fyny. Cyfanswm y grym i lawr mewn newtonau, felly, yw $(70 \times 9.8 - X)$ N. Felly mae

$$70 \times 0.3 = 70 \times 9.8 - X.$$

Trwy hyn y grym yw 665 N.

Felly y grym a roddir gan y llawr ar y dyn yw 665 N, sy'n llai na phwysau'r dyn, sydd yn 70×9.8 (= 686) N. Byddai hyn yn cael ei amlygu yn ymarferol trwy i'r dyn deimlo effaith ysgafnu ar ei goesau wrth i'r lifft ddechrau cyflymu tuag i lawr. Petai'r dyn yn sefyll ar glorian yn y lifft y grym fyddai adwaith y glorian ar y dyn sef, fel a drafodwyd yn Adran 2.4, y darlleniad ar y glorian, ac felly byddai'n ymddangos bod ei bwysau wedi newid.

(ii) Mae arafiad o 0.3 ms^{-2} yn golygu bod y cyflymiad i lawr yn $-$ 0.3 ms^{-2} ac felly, gan ddal i gymryd y cyfeiriad i lawr fel cyfeirnod, a chymryd bod y grym i fyny a roddir ar y dyn bellach yn Y N, mae ail ddeddf Newton yn rhoi

$$-70 \times 0.3 = 70 \times 9.8 - Y,$$

sy'n rhoi adwaith Y = 707 N ac felly mae gwthiad ychwanegol ar y coesau tra bo'r lifft yn arafu wrth ddisgyn. Mae hyn yn golygu y bydd pwysau ymddangosiadol y dyn wedi cynyddu.

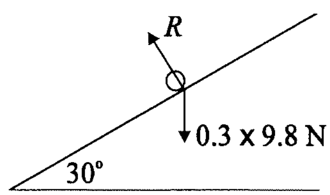
(iii) Mae defnyddio 9.8 yn lle 0.3 yn yr hafaliad mudiant yn (i) yn rhoi

$$70 \times 9.8 = 70 \times 9.8 - X.$$

Mae hyn yn rhoi $X = 0$ ac felly byddai'r dyn yn ymddangos yn ddibwysau! Yn y bôn byddai'r lifft mewn 'cwymp rydd' ac ni fyddai hyn yn digwydd oni bai fod y cebl wedi torri.

Enghraifft 5.4

Teflir gronyn, màs 0.3 kg, i fyny llinell goledd mwyaf plân llyfn sy'n goleddu 30° i'r llorwedd. O wybod bod ei fuanedd cychwynnol yn 19.6 ms^{-1} darganfyddwch ba mor bell i fyny'r plân y mae'n teithio cyn dod i aros am ennyd.



Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu ar y gronyn a dyma enghraifft syml o'r sefyllfa lle mae grymoedd yn gweithredu i gyfeiriadau heblaw cyfeiriad y mudiant. Mae gan y grym disgyrchiant gydran $0.3 \times 9.8 \times \sin 30^\circ$ N yn gweithredu i lawr y plân a chydran $0.3 \times 9.8 \times \cos 30^\circ$ N yn berpendicwlar i'r plân. Mae'r grymoedd oddi ar linell y goledd mwyaf mewn cydbwysedd ac felly mae adwaith R y plân yn hafal i $0.3 \times 9.8 \times \cos 30^\circ$ N. Gan gymryd y cyfeiriad i fyny'r plân fel cyfeirnod ar gyfer y cyflymiad, mae deddf Newton yn dangos bod y cyflymiad, a ms^{-2}, yn bodloni

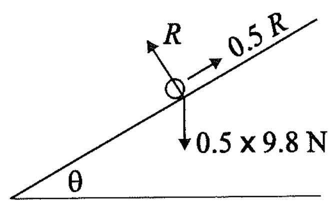
$$0.3\,a = -\,0.3 \times 9.8 \times \sin 30^\circ,$$

ac felly y cyflymiad yw $-\,4.9$ ms^{-2}, h.y. mae'n arafiad.

Nawr ceir y pellter i fyny'r plân o hafaliad 3 ym Mhennod 4: ($v^2 = u^2 + 2as$)
ac felly $0 = 19.6^2 - 9.8s$, sy'n dangos mai'r pellter a deithir i fyny'r plân cyn i'r gronyn ddod i aros am ennyd yw 39.2 m.

Enghraifft 5.5

Mae gronyn, màs 0.5 kg, yn llithro i lawr plân garw ar ongl θ i'r llorwedd lle mae $\cos\theta = \frac{3}{5}$ a $\sin\theta = \frac{4}{5}$. Y cyfernod ffrithiant (llithro) rhwng y plân a'r gronyn yw 0.5. Darganfyddwch gyflymiad y gronyn.



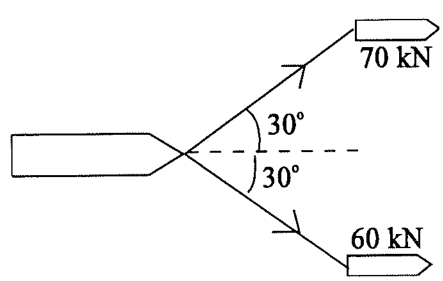
Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu. Gan fod y gronyn yn llithro i lawr y plân bydd y grym ffrithiant i fyny'r plân a'i faint yn 0.5 *R*, lle mae *R* yn dynodi adwaith normal y plân. Mae gan y grym disgyrchiant gydran $0.5 \times \sin\theta \times 9.8$ N i lawr y plân a $0.5 \times \cos\theta \times 9.8$ N yn berpendicwlar i'r plân. Fel yn yr enghraifft flaenorol, mae'r grymoedd nad ydynt ar hyd y plân mewn cydbwysedd ac felly adwaith y plân yw $0.5 \times \cos\theta \times 9.8 \text{ N} = 2.94$ N. Mae hyn yn rhoi'r grym ffrithiant yn 1.47 N. Felly mae'r cyflymiad a ms^{-2} i lawr y plân yn bodloni

$$0.5\,a = 0.5 \times \sin\theta \times 9.8 - 1.47,$$

sy'n gwneud y cyflymiad i lawr y plân yn 4.9 ms^{-2}.

Enghraifft 5.6

Mae'r diagram yn dangos dau dynfad yn tynnu tancer, màs 20 000 tunnell, a dangosir cyfeiriad a maint y grymoedd a roddir gan y tynfadau. Darganfyddwch faint a chyfeiriad cyflymiad y tancer.



Y cam cyntaf yw darganfod cydeffaith y grymoedd. Mae gan hwn gydran o $(60 \cos 30^\circ + 70 \cos 30^\circ)$ kN = 112.58 kN ar hyd y llinell doredig a $(70 \sin 30^\circ - 60 \sin 30^\circ)$ kN = 5 kN yn berpendicwlar i'r llinell doredig ac i fyny'r dudalen. Felly mae gan y cydeffaith faint $\sqrt{112.58^2 + 5^2}$ kN = 112.7 kN ar ongl θ uwchben y llinell doredig lle mae $\tan \theta = \dfrac{5}{112.58} = 0.044$.

Felly mae θ yn 2.5° a'r cyflymiad yw $\dfrac{112.7}{20}\ \text{ms}^{-2} = 5.64\ \text{ms}^{-2}$ ar ongl 2.5° uwchben y llinell doredig.

<u>Ymarferion 5.1</u>

1 Mae tynfad yn tynnu cwch 9000 kg, a'r cyflymiad yw 0.1 ms^{-2}. Gwrthiant y dŵr i symudiad y cwch yw 900 N. O wybod bod y rhaff lusgo yn llorwedd, cyfrifwch y tensiwn yn y rhaff hon.

2 Y gwrthiant i fudiant car â màs 700 kg yw 400 N a'r grym gyrru a roddir gan y peiriant yw 1800 N. Darganfyddwch gyflymiad y car.

3 Rhoddir grym arafu cyson o 2000 N i gar 800 kg sy'n symud ar ffordd wastad er mwyn gostwng ei fuanedd o 20 ms^{-1} i 10 ms^{-1}. Darganfyddwch, ar gyfer y cyfwng pan fydd y car yn arafu,
(i) yr amser a gymerir,
(ii) y pellter a deithir.

4 Symudir gwrthrych, màs 10 kg, yn fertigol i fyny o ddisymudedd gan rym cyson i uchder o 5 m uwchben ei bwynt cychwynnol a rhoddir iddo fuanedd o 6 ms^{-1}. Darganfyddwch faint y grym.

5 Y gwrthiant i fudiant car sy'n symud ar hyd ffordd lorwedd yw 1500 N. Mae peiriant y car yn rhoi grym cyson o 5400 N ac mae'r car yn cyrraedd buanedd 24 ms^{-1} o ddisymudedd mewn 8 eiliad. Darganfyddwch
(i) gyflymiad y car yn ystod yr 8 eiliad cyntaf,
(ii) fàs y car,
(iii) y pellter a deithir gan y car yn ystod yr 8 eiliad cyntaf.

6 Mae plentyn, màs 28 kg, yn sefyll mewn lifft sy'n codi â chyflymiad o 1.4 ms^{-2}. Darganfyddwch
(i) y grym a roddir ar y plentyn gan lawr y lifft,
(ii) y grym a roddir ar y llawr gan y plentyn.

7 Mae lifft yn cyflymu tuag i fyny o ddisymudedd ar gyfradd gyson o 0.5 ms^{-2} nes cyrraedd ei fuanedd mwyaf o 2 ms^{-1}. Ar ôl symud ar y buanedd cyson hwn mae'n symud gydag arafiad cyson o 0.25 ms^{-2} nes iddo ddod i aros.

Mae pecyn, màs 10 kg, yn sefyll ar lawr y lifft yn ystod yr esgyniad hwn o ddisymudedd i ddisymudedd. Darganfyddwch faint y grym a roddir gan lawr y lifft ar y pecyn yn ystod pob rhan o'r esgyniad.

8 Mae dyn, màs 180 kg, ar glorian ar lawr lifft. Mae'r lifft yn symud gyda chyflymiad i lawr o 2 ms^{-2}. Beth yw'r darlleniad ar y glorian?
Yna mae'r dyn yn gwthio ar nenfwd y lifft gyda ffon. Pa un o'r darlleniadau canlynol sy'n debygol o fod yn gywir, 1420 N ynteu 1390 N?
Yna mae'r dyn yn rhoi'r un grym ar y ffon gan wthio ar lawr y lifft. Darganfyddwch ddarlleniad y glorian yn yr achos hwn.

9 Mae car yn symud ar hyd ffordd lorwedd gyda buanedd cyson o 30 ms^{-1}. Darganfyddwch gymhareb maint y grym cyson sydd ei angen i ddod â'r car i aros mewn pellter o 40 m i faint y grym cyson sydd ei angen i ddod â'r car i aros mewn amser o 8 eiliad.

10 Mae carreg yn llithro dros yr iâ ar lyn ac mae'n llithro bellter o 200 m cyn dod i aros o fuanedd o 15 ms^{-1}. Darganfyddwch y cyfernod ffrithiant.

11 Rhoddir modrwy, màs 0.01 kg, ar wifren fertigol sefydlog lefn. Mae grym 0.4 N yn gweithredu ar y fodrwy ac mae llinell weithrediad y grym yn gwneud ongl 60° gyda'r fertigol i fyny. Darganfyddwch faint cyflymiad y fodrwy tuag i fyny.

12 Mae gronyn, màs m, yn symud i fyny llinell goledd mwyaf plân sy'n goleddu ar ongl θ i'r llorwedd, lle mae $\cos\theta = \frac{4}{5}$ a $\sin\theta = \frac{3}{5}$, dan effaith grym F â maint $2mg$ sy'n gweithredu yn baralel i'r plân. O wybod bod y cyfernod ffrithiant rhwng y gronyn a'r plân yn 0.5, darganfyddwch gyflymiad y gronyn.

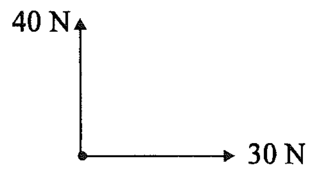
13 Teflir gronyn o fàs m i fyny llinell goledd mwyaf plân sy'n goleddu ar ongl θ i'r llorwedd, lle mae $\cos\theta = \frac{4}{5}$ a $\sin\theta = \frac{3}{5}$, ar fuanedd 14.7 ms^{-1}.

(i) Darganfyddwch os yw'r plân yn llyfn, ba mor bell i fyny llinell y goledd mwyaf y bydd y gronyn yn teithio.

(ii) Os yw'r plân yn arw a'r gronyn yn teithio pellter o 14 m i fyny llinell y goledd mwyaf cyn dod i aros, darganfyddwch y cyfernod ffrithiant rhwng y gronyn a'r plân.

14 Gwthir gronyn, màs 0.2 kg, i fyny llinell goledd mwyaf plân sy'n goleddu ar ongl θ i'r llorwedd, lle mae $\cos\theta = \frac{4}{5}$ a $\sin\theta = \frac{3}{5}$, gan rym llorwedd, maint 2 N. O wybod bod y plân yn llyfn, darganfyddwch faint cyflymiad y gronyn.

15



Mae'r diagram yn dangos gronyn, màs 0.5 kg, yn cael ei dynnu ar lawr llyfn i ddau gyfeiriad perpendicwlar gan rymoedd 30 N a 40 N. Darganfyddwch y cyfeiriad y mae'r gronyn yn symud a maint ei gyflymiad.

5.3 Gronynnau wedi eu cysylltu yn symud dan effaith grymoedd cyson

Mudiant ar hyd llinell unigol

Y math symlaf o broblemau gyda dau, neu ragor, o ronynnau wedi eu cysylltu â'i gilydd yw rhai lle mae'r gronynnau i gyd yn symud ar hyd yr un llinell, e.e. car yn tynnu ôl-gerbyd, ac felly lle mae gan y gronynnau i gyd yr un cyflymiad. Mewn achosion mwy cymhleth mae'r gronynnau yn cael eu cysylltu gan linyn dros bwli ac felly nid ydynt i gyd yn symud yn yr un llinell syth.

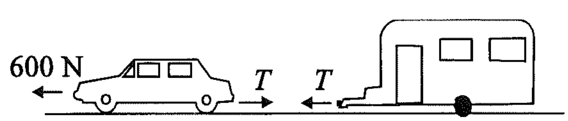
Mae'r dull cyffredinol yr un fath eto. Lluniwch ddiagram sy'n dangos y cyfeirnod a ddewiswyd ar gyfer y cyfeiriad a'r grymoedd sy'n gweithredu ar bob gronyn. Yn yr achosion hyn mae angen cynnwys y grymoedd rhwng y gronynnau a chofio bod angen bodloni trydedd ddeddf Newton. Yn aml, er mwyn datrys problem benodol, mae angen cymhwyso ail ddeddf Newton i'r ddau ronyn neu, fel arall, i un gronyn ac i'r system gyfan. Mae hyn yn osgoi cyfrifo'r grym rhwng y gronynnau. Os ystyrir un yn unig o'r gronynnau mae angen cynnwys y grym rhwng y gronynnau.

__Enghraifft 5.7__

Mae car, màs 900 kg, yn tynnu carafán, màs 600 kg, ar hyd ffordd lorwedd. Grym gyrru'r peiriant yw 600 N. O wybod nad oes gwrthiannau yn gweithredu, darganfyddwch

(i) gyflymiad y car a'r garafán,

(ii) y tensiwn yn y bar tynnu.



Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu. Os cymerir y system o gar a charafán gyda'i gilydd mae'r grymoedd tensiwn yn y bar tynnu yn canslo, a chyfanswm y grym sy'n gweithredu yw 600 N. Mae ail ddeddf Newton, wrth i'r cyflymiad gael ei ddynodi gan a ms^{-2}, yn rhoi

$$1500\,a = 600\text{ N},$$

ac felly y cyflymiad yw 0.4 ms^{-2}.

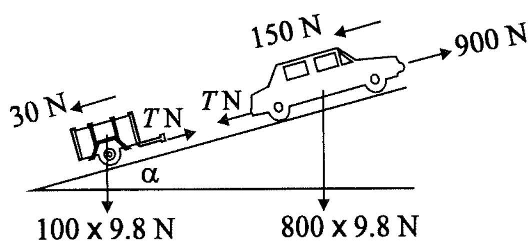
Nawr gellir cymhwyso ail ddeddf Newton i'r garafán. Yr unig rym sy'n gweithredu yw'r tensiwn T, ac felly

$$T = 600 \times 0.4\text{ N} = 240\text{ N}.$$

Byddai wedi bod yn bosibl defnyddio hafaliad mudiant y car. Y grym sy'n gweithredu yw $(600 - T)$ N ac mae hyn yn hafal i 900×0.4 N, sy'n rhoi yr un ateb.

Enghraifft 5.8

Mae car, màs 800 kg, yn tynnu tryc, màs 100 kg, i fyny llethr ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\sin\alpha = \frac{1}{14}$. Grym gyrru'r peiriant yw 900 N a'r gwrthiannau i'r car ac i'r tryc, yn ôl eu trefn, yw 150 N a 30 N. Darganfyddwch gyflymiad y car a'r tensiwn yn y bar tynnu.



Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu. Yn yr achos hwn mae angen cymryd i ystyriaeth gydran y pwysau i lawr y llethr. Gan gymryd y car a'r tryc gyda'i gilydd, cyfanswm y gwrthiant sy'n gweithredu i lawr y llethr yw 180 N. Cydran cyfanswm y pwysau i lawr y llethr yw $900 \times 9.8 \times \sin\alpha$ N = 630 N. Cyfanswm cydran y grym, yn gweithredu i fyny'r llethr, felly yw $(900 - 630 - 180)$ N = 90 N. Rhoddir y cyflymiad, a ms^{-2}, gan

$$900a = 90,$$

ac felly $$a = 0.1.$$

Ystyriwn yn awr y tryc. Cydran y pwysau i lawr y llethr yw

$$100 \times 9.8 \times \sin\alpha\text{ N} = 70\text{ N},$$

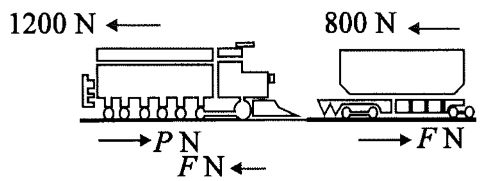
y gwrthiant yw 30 N ac felly mae'r tensiwn , T N, yn bodloni

$$T - 30 - 70 = 100 \times 0.1.$$

ac felly y tensiwn yw 110 N.

Enghraifft 5.9

Mae injan 50 tunnell fetrig, yn gwthio cerbyd 10 tunnell fetrig, ac mae'r cyflymiad yn 0.4 ms^{-2}. Y gwrthiant i fudiant yr injan yw 1200 N a'r gwrthiant i fudiant y cerbyd yw 800 N. Darganfyddwch
(i) gyfanswm grym gyrru'r injan,
(ii) y grym a roddir ar y cerbyd gan yr injan.



Cyfanswm y grym ar y ddau yw (P – 2000) N i'r dde, lle mae P N yn dynodi'r grym gyrru, ac felly, yn ôl ail ddeddf Newton,

$$P - 2000 = 60000 \times 0.4,$$

ac felly y grym gyrru yw 26 000 N.
Y grym sy'n gweithredu i'r dde ar y cerbyd yw (F – 800) N, lle mae F N yn dynodi'r grym a roddir gan yr injan. Felly

$$F - 800 = 10000 \times 0.4,$$

ac felly y grym a roddir gan yr injan yw 4800 N.

Ymarferion 5.2

1 Mae car, màs 700 kg, yn tynnu carafán, màs 500 kg, ar hyd ffordd lorwedd. O wybod bod y grym gyrru yn 300 N ac wrth anwybyddu gwrthiannau, darganfyddwch gyflymiad y car.

2 Mae car, màs 900 kg, yn tynnu carafán, màs 600 kg, gan ddefnyddio bar tynnu, ar hyd ffordd lorwedd syth. Y grymoedd gwrthiannol sy'n gwrthwynebu mudiant y car a'r garafán yw 120 N a 60 N yn ôl eu trefn. O wybod bod y car yn cyflymu ar 2 ms^{-2}, darganfyddwch
(i) y tensiwn yn y bar tynnu,
(ii) y grym a gynhyrchir gan beiriant y car.

3 Mae car, màs 800 kg, yn tynnu carafán, màs 400 kg, yn erbyn cyfanswm gwrthiant o 600 N. O wybod bod cyflymiad y car yn 0.8 ms^{-2} a bod y gwrthiannau ar y car ac ar y garafán mewn cyfrannedd â'u masau, darganfyddwch
(i) y grym gyrru,
(ii) y tensiwn yn y bar tynnu.

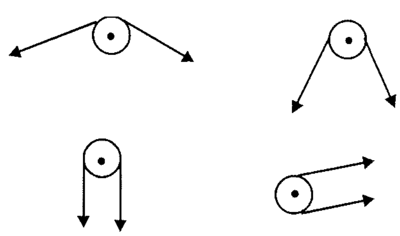
4 Mae gan gar, màs 800 kg, rym gyrru 2.1 kN wrth dynnu carafán, màs 400 kg, ac mae ganddo gyflymiad cyson 0.5 ms^{-2}. Os yw'r gwrthiannau ar y car a'r garafán mewn cyfrannedd â'u masau, darganfyddwch y gwrthiannau hyn a'r tensiwn yn y bar tynnu.

5 Mae tynfad, màs 50 000 kg, yn tynnu tri chwch mewn rhes ar ei ôl ar hyd camlas. Mae gan bob cwch fàs o 10 000 kg a'r gwrthiant i fudiant pob cwch yw 800 N. Y gwrthiant i fudiant y tynfad yw 3000 N. Cyfrifwch y tensiynau yn y rhaffau llusgo rhwng
(i) y tynfad a'r cwch cyntaf,
(ii) y cwch cyntaf a'r ail gwch,
(iii) yr ail gwch a'r trydydd cwch
(a) pan fydd y tynfad a'r cychod yn symud ar fuanedd unffurf,
(b) pan fyddant i gyd yn cyflymu ar 0.5 ms^{-2}.

6 Mae car, màs 1200 kg, yn tynnu carafán, màs 300 kg, i fyny llethr sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\sin \alpha = \frac{1}{196}$. Y grym gyrru yw 1800 N a'r gwrthiannau i'r car ac i'r garafán yw 275 N a 100 N yn ôl eu trefn. Darganfyddwch gyflymiad y system a'r tensiwn yn y bar tynnu.

Mudiant sy'n cynnwys pwlïau

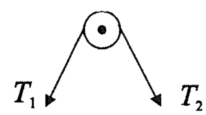
Mewn rhai problemau sy'n cynnwys gronynnau wedi eu cysylltu mae pob gronyn yn symud ar linell syth ond nid ydynt yn symud ar yr un llinell syth. Mae hyn yn digwydd pan fo'r cysylltiad (e.e. llinyn) yn mynd dros bwli. Dangosir enghreifftiau yn y diagram.



Yn yr achos hwn mae gan gyflymiad y gronynnau (gan gymryd bod y llinyn yn anestynadwy) yr un faint ond nid yr un cyfeiriad. Mae angen defnyddio'r un dull eto, h.y. dangos y grymoedd i gyd ar ddiagram eglur a chymhwyso deddf Newton i bob gronyn ar wahân.

Modelu pwli

Yn y bôn, teclyn ar gyfer newid cyfeiriad grym yw pwli ac fel arfer mae'n rhydd i droi o amgylch echel. Os yw ymyl y pwli'n llyfn yna mae llinyn a roddir trosto yn llithro heb achosi i'r pwli droi ac yna yn y bôn mae'r pwli yr un fath â pheg llyfn. Trafodwyd y pwynt hwn yn y Rhestr Termau yn Adran 2.2. Yn ymarferol, fodd bynnag, bydd ymyl y pwli yn arw ac felly fel arfer nid yw llinyn yn llithro mewn perthynas ag ef ac mae'r llinyn yn achosi i'r pwli gylchdroi.

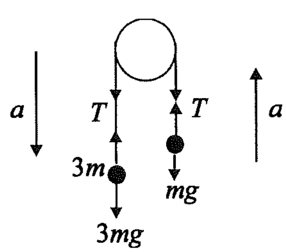


Gellir dangos bod y gwahaniaeth yn y tensiynau T_1 a T_2 ar y pwyntiau a ddangosir yn y diagram mewn cyfrannedd â màs a radiws y pwli ac os anwybyddir y rhain (dweud bod y pwli yn fach) yna mae'r tensiynau yn gyfartal. Dyma'r dybiaeth arferol. Gan fod y pwli yn gallu cylchdroi, efallai fod ffrithiant ar yr echel a gall hwn hefyd achosi i T_1 fod yn wahanol i T_2. Os gellir anwybyddu'r ffrithiant hwn, disgrifir y pwli fel un llyfn, sydd ychydig yn wahanol i'r defnydd mewn Stateg. I grynhoi, mewn Dynameg tybir nad yw llinyn yn llithro mewn perthynas â'r pwli, a phwli llyfn bach yw un lle mae'r tensiynau T_1 a T_2, a ddangosir uchod, yn gyfartal a lle nad oes effaith ffrithiannol ar echel y pwli.

<u>**Enghraifft 5.10**</u>

Mae llinyn anestynadwy ysgafn yn mynd dros bwli llyfn bach ac mae gronynnau â masau $3m$ ac m ynghlwm wrth ddau ben y llinyn. Gall y gronynnau symud ac mae'r rhannau o'r llinyn nad ydynt mewn cysylltiad â'r pwli yn dynn ac yn fertigol. Darganfyddwch gyflymiad y gronynnau a'r tensiwn yn y llinyn.

Gan fod y llinyn yn ysgafn bydd y tensiwn yn gyson trwy unrhyw ran syth, ac mae'r ffaith bod y pwli yn fach a llyfn yn sicrhau bod y tensiwn yr un faint trwy'r holl linyn.



Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu ar y gronynnau; gan fod y llinyn yn dynn, bydd gan y ddau ronyn gyflymiadau o'r un maint a ond i gyfeiriadau dirgroes, fel a ddangosir yn y diagram. Cydran y grym i lawr ar y gronyn trymaf yw $3mg - T$ ac felly mae cymhwyso ail ddeddf Newton iddo yn rhoi

$$3mg - T = 3ma.$$

Mae cyflymiad y gronyn ysgafnaf tuag i fyny a chydran y grym arno yw $T - mg$. Mae deddf Newton yn rhoi

$$T - mg = ma.$$

Mae adio'r hafaliadau yn rhoi

$$2mg = 4ma,$$

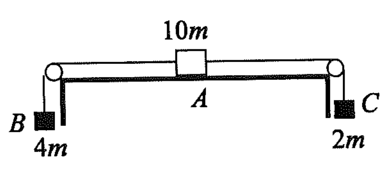
ac felly mae $a = \frac{g}{2}$.

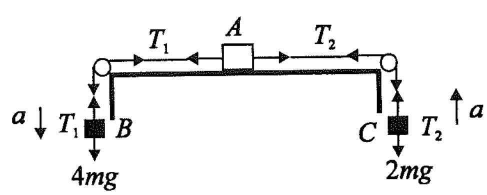
Mae amnewid hwn yn unrhyw un o'r hafaliadau eraill yn rhoi $T = \frac{3mg}{2}$.

Mae'n werth nodi bod yr hafaliad ar gyfer a yn union yr un hafaliad â'r un a gawn trwy ystyried mudiant llorwedd y system a fyddai'n cael ei ffurfio trwy gylchdroi yn glocwedd un o rannau fertigol y llinyn a chylchdroi'r rhan arall yn wrthglocwedd, fel bod y llinyn yn dod yn syth ac yn llorwedd heb newid, mewn perthynas â'r llinyn, y grymoedd sy'n gweithredu. Yn y broblem newydd hon mae cyflymiadau'r ddau ronyn i'r un cyfeiriad ond mae'r grymoedd mewn cyfeiriadau dirgroes. Yn bendant nid yw hwn yn ddull cywir i ddatrys y broblem hon na chwaith broblemau eraill sy'n cynnwys llinynnau dros bwlïau ac **ni ddylid ei ddefnyddio mewn arholiadau** gan fod angen profi ei fod yn gywir ym mhob achos. Mae hefyd yn hawdd iawn gwneud camgymeriad ac felly golli marciau gyda'r dull hwn. Hefyd mae'r rhan fwyaf o gwestiynau arholiadau yn tueddu i ofyn am y tensiwn ac i ddarganfod hwn mae angen ysgrifennu o leiaf un hafaliad mudiant. Felly nid oes fawr o fudd ceisio defnyddio'r 'ffordd fer' hon. Ar ei orau, ni ddylid ond defnyddio'r dull hwn i wirio'r algebra a ddefnyddir wrth ddileu'r tensiwn.

Enghraifft 5.11

Mae'r diagram isod ar y chwith yn dangos gronyn A, màs $10m$, yn gorwedd ar fwrdd petryalog llyfn. Mae gronyn A wedi ei gysylltu gan linynnau anestynadwy ysgafn â dau ronyn B (màs $4m$) ac C (màs $2m$) ac mae'r llinynnau hyn yn mynd dros bwlïau llyfn ar ddau ben y bwrdd. Mae'r ddau linyn yn berpendicwlar i ochrau'r bwrdd. Darganfyddwch gyflymiad A, B ac C a'r tensiwn yn y llinyn sydd ynghlwm wrth C.





Mae'r diagram ar y dde yn dangos y grymoedd sy'n gweithredu ar y gronynnau; nid oes rheswm dros dybio bod y tensiynau yn y llinynnau yn gyfartal ac felly fe'u dynodir gan T_1 a T_2. Os tybir bod gan B gyflymiad a tuag i lawr, yna mae gan A gyflymiad a i'r chwith ac C gyflymiad a tuag i fyny. Dyma hafaliadau mudiant gronynnau A, B, C, yn ôl eu trefn:

$$\begin{aligned} 4mg - T_1 &= 4ma, \\ T_1 - T_2 &= 10\,ma, \\ T_2 - 2mg &= 2ma. \end{aligned}$$

Trwy adio'r rhain ceir $a = \frac{g}{8}$ ac wrth amnewid yn yr hafaliad olaf ceir $T_2 = 2.25\,mg$.

<u>Enghraifft 5.12</u>

Darganfyddwch y cyflymiad ar gyfer y trefniant yn Enghraifft 5.11 pan fydd y bwrdd yn arw â'i gyfernod ffrithiant llithro yn 0.1.

Yr unig wahaniaeth yw y bydd grym ffrithiannol yn gweithredu ar A. Adwaith y bwrdd yw $10mg$ ac felly y grym ffrithiant yw mg ac mae'n gweithredu i'r dde gan fod A yn symud i'r chwith. Yna mae'r hafaliad canol yn dod yn

$$T_1 - T_2 - mg = 10\,ma,$$

ac mae adio'r hafaliadau nawr yn rhoi $a = \frac{g}{16}$.

<u>Ymarferion 5.3</u>

Mae cwestiynau 1 i 3 yn cyfeirio at linyn anestynadwy ysgafn yn mynd dros bwli llyfn bach, gyda gronynnau sydd â masau m_1 ac m_2 ynghlwm un wrth bob pen i'r llinyn. Darganfyddwch, ym mhob achos, faint cyflymiad y gronynnau a'r tensiwn yn y llinyn.

1 $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg.

2 $m_1 = 7$ kg, $m_2 = 3$ kg.

3 $m_1 = 4M$, $m_2 = 6M$.

Mae cwestiynau 4 i 6 yn cyfeirio at ronyn A, màs m_1, ar blân llorwedd ac sydd wedi ei gysylltu trwy linyn anestynadwy ysgafn, dros bwli llyfn bach ar ochr y plân, i ronyn B, màs m_2, sy'n hongian yn rhydd â'r llinyn yn fertigol. Mae'r plân fertigol trwy B a'r pwli yn cynnwys y rhan o'r llinyn sydd rhwng A a'r pwli.

4 Mae'r plân yn llyfn, $m_1 = 3$ kg, ac $m_2 = 5$ kg. Darganfyddwch faint cyflymiad y gronynnau a'r tensiwn yn y llinyn.

5 Mae'r plân yn llyfn, $m_1 = 1$ kg, ac $m_2 = 4$ kg. Darganfyddwch faint y grym a roddir ar y pwli.

6 Mae'r plân yn arw gyda chyfernod ffrithiant 0.5, $m_1 = 3$ kg, ac $m_2 = 6$ kg. Darganfyddwch y tensiwn yn y llinyn.

Mae cwestiynau 7 i 10 yn cyfeirio at ronyn *A*, màs m_1 ar blân sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd. Mae wedi ei gysylltu trwy linyn anestynadwy ysgafn, dros bwli llyfn bach yn y pwynt B, i ronyn *C*, màs m_2 , sy'n hongian yn rhydd â'r llinyn *BC* yn fertigol. Mae'r rhan *AB* o'r llinyn yn baralel i linell goledd mwyaf y plân.

7 Mae'r plân yn llyfn gydag $\alpha = 30°$, $m_1 = 1$ kg, ac $m_2 = 4$ kg. Darganfyddwch faint cyflymiad y gronynnau.

8 Mae'r plân yn llyfn gyda $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $m_1 = 5$ kg, ac $m_2 = 3$ kg. Darganfyddwch y tensiwn yn y llinyn.

9 Mae'r plân yn arw gyda chyfernod ffrithiant 0.25, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $m_1 = 2$ kg, ac $m_2 = 8$ kg. Darganfyddwch faint cyflymiad y gronynnau.

10 Mae'r plân yn arw gyda chyfernod ffrithiant 0.25, $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $m_1 = 13$ kg, ac $m_2 = 15$ kg. Darganfyddwch faint cyflymiad y gronynnau.

5.4 Y cysyniad o fàs

Fel a drafodwyd yn Adran 5.1, un o briodweddau sylfaenol gwrthrych yw ei fàs, a gellir dewis yr uned o fàs yn annibynnol ar unedau hyd ac amser. Yn yr adran hon disgrifir yn fwy manwl y syniad o fàs a sut mae'n cael ei fesur.

Os, er enghraifft, crogir gwrthrych bach wrth sbring ysgafn a gwneud iddo symud yn fertigol yna, mewn egwyddor, gellir mesur ei gyflymiad gydag estyniadau gwahanol o'r sbring. Os ail-wneir y broses hon gyda gwrthrych gwahanol yna gellir mesur ei gyflymiad hefyd gydag estyniadau gwahanol a gellir gwneud hyn gyda llawer o wrthrychau. Gwelir bod y grym a roddir gan y sbring, sy'n dibynnu ar yr estyniad yn unig, yr un fath ar yr un estyniad ym mhob achos, ond fod y cyflymiadau ar yr un estyniad yn wahanol. Gwelir hefyd gyda phob estyniad, h.y. gyda gwerthoedd gwahanol ar gyfer y grym sy'n gweithredu, fod cymarebau meintiau'r cyflymiadau yn gyson ar gyfer unrhyw bâr o wrthrychau. Felly, mae priodwedd gymharol annibynnol yn bodoli i'r gwrthrychau ac mae'r gymhareb hon yn dangos hyn. Cyfeirir at y briodwedd hon fel màs y gwrthrych.

Ar ôl cydnabod bod màs yn bodoli, y cam nesaf yw ei fesur. Mesurir y cyflymiadau a gynhyrchir gan yr un grym (h.y. ar yr un estyniad) yn gweithredu ar ronynnau gwahanol P, Q ac R a dynodir maint y cyflymiadau hyn gan a_P, a_Q ac a_R yn ôl eu trefn. Yna diffinnir masau P, Q ac R, a ddynodir gan m_P, m_Q m_R fel bod

$$\frac{m_Q}{m_P} = \frac{a_P}{a_Q}, \; \frac{m_R}{m_P} = \frac{a_P}{a_R}.$$

Os dewisir bod gan un o'r gronynnau hyn (dyweder P) fàs sydd yn 1, gellir darganfod masau'r gronynnau eraill trwy fesur y cyflymiadau. Gellir hefyd gadarnhau trwy arbrawf, gyda màs wedi'i ddiffinio yn y modd hwn, mai màs y gronyn cyfunol Q ac R yw swm masau Q ac R.

Felly, mewn egwyddor, gellir sefydlu dull o fesur màs, ac mae'r diffiniad o'r uned o fàs yn annibynnol ar yr unedau o hyd, amser a grym a ddewisir.

Ymarferion Amrywiol 5

1 Mae tynfad, màs 7000 kg, yn tynnu cwch, màs 4000 kg, wrth raff lorwedd anestynadwy ar hyd camlas syth. Y grymoedd gwrthiannol sy'n gwrthwynebu mudiannau'r tynfad a'r cwch yw 1400 N a 900 N yn ôl eu trefn. Darganfyddwch y tensiwn yn y rhaff pan fo'r tynfad yn cyflymu ar 1 ms^{-2} , a grym gyrru'r tynfad.

2 Wrth i gar, màs 1800 kg, symud ar fuanedd 20 ms^{-1} ar ffordd lorwedd syth, mae ei beiriant yn cael ei ddiffodd. Mae'r car yn dod i aros ymhen 500 m dan effaith grym arafu cyson F newton. Darganfyddwch F a'r amser a gymer y car i ddod i aros.

3 Mae buanedd car, màs 600 kg, sy'n symud ar hyd ffordd wastad, yn cael ei leihau o 18 ms^{-1} i 8 ms^{-1} gan rym arafu cyson o 1800 N. Darganfyddwch yr amser a gymer i leihau buanedd y car, a'r pellter a deithir.

4 Mae lifft, gan gychwyn o ddisymudedd, yn symud â chyflymiad cyson am 4 eiliad ac yna â chyflymder cyson am yr 8 eiliad nesaf. Yna rhoddir arafiad cyson fel bod y lifft yn dod i aros mewn 4 eiliad ar uchder 6 m uwchben ei bwynt cychwynnol. Mae parsel, màs 20 kg, ar lawr y lifft.
Darganfyddwch (i) gyflymiad ac arafiad y lifft,
(ii) adwaith llawr y lifft ar y parsel yn ystod pob cam o'r mudiant.

5 Mae dyn, màs 60 kg, yn sefyll ar lawr lifft sy'n disgyn â chyflymiad 0.6 ms^{-2}. Darganfyddwch gyfanswm y grym a roddir rhwng llawr y lifft a thraed y dyn. Mae dyn arall yn sefyll ar glorian ar lawr lifft nad yw'n symud ac mae'r glorian yn dangos 75 kg. Yna mae'r lifft yn esgyn ac mae'r glorian yn dangos gwerth cyson, sef 80 kg. Darganfyddwch gyflymiad y lifft tuag i fyny.

Yna mae'r lifft yn dechrau arafu ac mae darlleniad y glorian yn newid i werth cyson, sef 70 cilogram. Darganfyddwch arafiad y lifft.

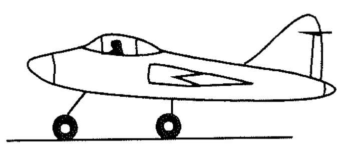
6 Mae gronyn trwm yn hongian wrth glorian sbring oddi ar nenfwd lifft. Pan fydd y lifft yn esgyn â chyflymiad cyson a ms^{-2} mae'r glorian yn dangos darlleniad o 1.8 kg. Pan fydd y lifft yn disgyn â chyflymiad cyson $3a$ ms^{-2} mae'r glorian yn dangos darlleniad o 1.2 kg. Darganfyddwch fàs y gronyn a gwerth a.

7 Mae gronyn, màs m, yn codi'n fertigol ar fuanedd v ac yn mynd i mewn i haen lorwedd, trwch a, o ddeunydd. Gwrthwynebir ei fudiant gan rym cyson R. Darganfyddwch yr amod y mae rhaid i v ei fodloni cyn gall y gronyn fynd trwy'r haen.

8 Mae menyw, màs 49 kg, yn sefyll mewn lifft. Darganfyddwch adwaith llawr y lifft arni pan fydd y lifft (a) yn symud i lawr gyda chyflymiad cyson 0.2 ms^{-2},
(b) yn symud i fyny gyda chyflymiad 0.3 ms^{-2}.

Mae menyw arall â'r un màs yn sefyll yn y lifft pan nad yw'n symud. Mae'n gorfod defnyddio ffon gerdded ac mae'n ei gwthio ar lawr y lifft. Gan gymryd bod y grym a roddir gan y ffon ar lawr y lifft yn fertigol a'i faint yn 98 N, darganfyddwch adwaith llawr y lifft ar y fenyw.

9(a)

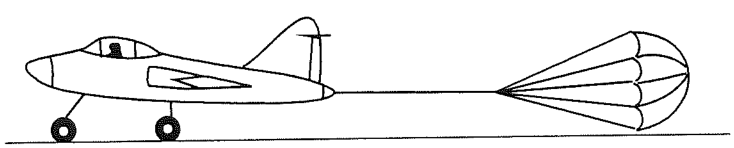


Mae awyren, màs 7000 kg, yn glanio ar gyflymder 50 ms^{-1}. Mae grymoedd arafu a gwrthiannol yn dod â hi i aros. Gellir tybio bod y rhain yn gyson ac mai eu cyfanswm yw 7 kN.

(i) Darganfyddwch arafiad yr awyren.

(ii) Darganfyddwch y pellter a deithir gan yr awyren cyn dod i aros.

(b)



Trwy osod parasiwt ar y gynffon, mae'r pellter a deithir gan yr awyren cyn dod i aros yn cael ei leihau 500 m. Màs yr offer ychwanegol yw 200 kg.

(i) Darganfyddwch arafiad yr awyren, gan dybio ei fod yn gyson, pan ddefnyddir y parasiwt.

(ii) Darganfyddwch gyfanswm grym y llusgiad yn yr achos hwn.

10 Mae gronyn yn llithro gyda chyflymiad 3 ms^{-2} i lawr llinell goledd mwyaf plân garw sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae tan $\alpha = \frac{3}{4}$. Cyfrifwch gyfernod y ffrithiant rhwng y gronyn a'r plân.

11 Mae dau ronyn, màs M a $4M$, wedi eu cysylltu gan linyn anestynadwy ysgafn sy'n mynd dros bwli sefydlog llyfn. Rhyddheir y gronynnau o ddisymudedd ac mae dwy ran y llinyn yn hongian yn fertigol. Darganfyddwch

(i) gyflymiad y gronynnau,

(ii) y grym a roddir gan y llinyn ar y pwli yn ystod y mudiant sy'n digwydd wedyn.

12 Mae gan lifft fàs 1200 kg pan fo'n wag, a phan fydd yn esgyn â chyflymiad o 1 ms^{-2} ac yn cludo N teithiwr, pob un â màs 80 kg, y tensiwn yn y cebl yw $\frac{1}{2}T$ newton. Mae'r un tensiwn yn digwydd pan fydd $N + 5$ o bobl, pob un â màs 80 kg, yn cyflymu tuag at i lawr ar 1 ms^{-2}.

Darganfyddwch werthoedd N a T.

13 Mae dau ronyn, màs $4m$ ac m, wedi eu cysylltu gan <u>linyn anestynadwy ysgafn sy'n mynd dros beg llyfn</u>. Mae'r gronynnau yn cael eu dal yn ddisymud gyda'r llinyn yn dynn ac yna'n cael eu rhyddhau o ddisymudedd.

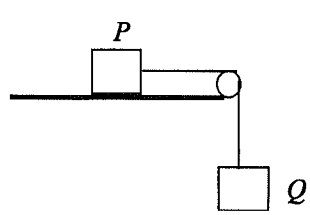
(a) Nodwch ba un o'r geiriau a danlinellwyd sy'n eich galluogi i gymryd bod

(i) y tensiwn yn gyson yn y llinyn ar bob ochr i'r peg,

(ii) y tensiwn yr un fath ar bob ochr i'r peg ar y pwyntiau cyswllt â'r llinyn.

(b) Ysgrifennwch hafaliad mudiant y ddau ronyn a darganfyddwch gyflymiad y gronynnau.

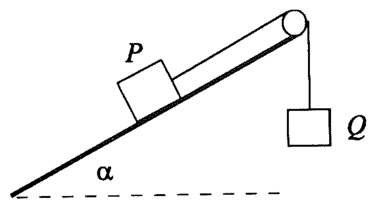
14 Mae'r diagram yn dangos gronyn P, màs m, ar fwrdd llorwedd wedi ei gysylltu i ronyn Q, màs $5m$, trwy linyn anestynadwy ysgafn sy'n mynd dros bwli llyfn ar ochr y bwrdd. Mae'r llinyn yn berpendicwlar i ochr syth y bwrdd a gall Q symud mewn llinell fertigol. Mae'r gronynnau yn cael eu dal yn ddisymud gyda'r llinyn yn dynn ac yna'n cael eu rhyddhau.



(a) Gan gymryd bod y bwrdd yn llyfn, dangoswch fod buanedd Q ar ôl iddo ddisgyn pellter d o ddisymudedd yn $\sqrt{\frac{5gd}{3}}$.

(b) Mewn arbrawf go iawn gyda'r gronynnau ceir bod buanedd Q ar ôl iddo ddisgyn pellter d yn llai na $\sqrt{\frac{5gd}{3}}$. Awgrymwch un rheswm dros y lleihad yn y buanedd a gafwyd yn yr arbrawf.

15

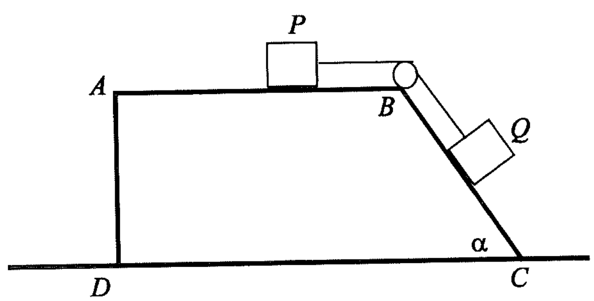


Mae'r diagram yn dangos gronyn P, màs $5m$, ar blân garw sy'n goleddu ar ongl α i'r llorwedd, lle mae $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Cyfernod y ffrithiant rhwng P a'r plân yw $\frac{1}{4}$.

Mae llinyn anestynadwy ysgafn ynghlwm wrth y gronyn yn mynd yn baralel i linell goledd mwyaf y plân a dros bwli llyfn bach ar ben uchaf y plân. Mae gronyn Q, màs $10m$, ynghlwm wrth ben arall y llinyn a gall Q symud yn rhydd mewn llinell fertigol. O wybod bod y gronynnau yn cael eu rhyddhau o ddisymudedd ar amser $t = 0$, darganfyddwch y tensiwn yn y llinyn.

Ar ôl i Q ddisgyn bellter $10a$ mae'n taro plân llorwedd ac yna'n aros yn ddisymud ar y plân. Darganfyddwch y pellter pellach a deithir gan P cyn iddo ddod i aros am ennyd fer am y tro cyntaf.

16

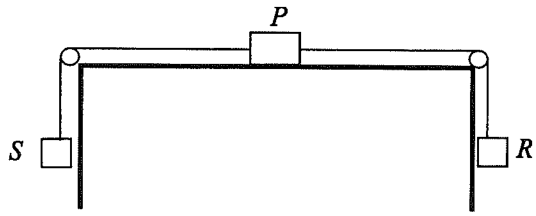


Mae'r diagram yn dangos toriad fertigol $ABCD$ trwy floc o bren a osodwyd yn sefydlog ar blân llorwedd. Mae AB yn llorwedd ac mae BC ar ongl α i'r llorwedd lle mae $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Rhoddir gronynnau P (màs m) a Q (màs $5m$) ar AB ac ar BC ac fe'u cysylltir gan linyn anestynadwy ysgafn sy'n mynd dros bwli llyfn ar B. Yna rhyddheir y gronynnau o ddisymudedd. Darganfyddwch, gan gymryd nad yw P yn cyrraedd B ac nad yw Q yn cyrraedd C, gyflymiad y gronynnau a'r tensiwn yn y llinyn pan fo

(a) AB a BC yn llyfn,

(b) AB a BC yn arw, gyda'r un cyfernod ffrithiant, sef $\frac{1}{3}$.

17



Mae'r diagram yn dangos gronyn P, màs $2m$, ar fwrdd llorwedd wedi ei glymu trwy linynnau anestynadwy ysgafn wrth ronynnau R (màs $6m$) ac S (màs $2m$). Y cyfernod ffrithiant rhwng P a'r bwrdd yw 0.5. Mae'r llinynnau yn mynd dros bwlïau llyfn ar ochrau cyferbyn y bwrdd fel bod R ac S yn gallu symud yn rhydd gyda'r llinynnau yn berpendicwlar i ymylon y bwrdd. O wybod bod y system yn cael ei rhyddhau o ddisymudedd gyda'r llinynnau yn dynn, darganfyddwch gyflymiad cyffredin y gronynnau a'r tensiwn yn y llinyn sy'n cysylltu P ac S.
Ar ôl cwympo bellter d o ddisymudedd mae'r gronyn R yn taro'r llawr. Mae natur defnydd y llawr yn golygu bod R yn stopio ac yna'n aros yn ddisymud. Darganfyddwch y pellter pellach y mae S yn codi.

Pennod 6

Ergydion a momentwm

Ar ôl darllen y bennod hon dylech

- wybod beth a olygir wrth ergyd a momentwm,
- wybod a gallu defnyddio'r egwyddor momentwm ergyd,
- wybod a gallu defnyddio'r egwyddor cadwraeth momentwm i ddatrys problemau sy'n ymwneud â gwrthrychau anelastig yn taro ei gilydd,
- wybod beth yw deddf elastig Newton a gallu ei defnyddio, ynghyd â'r egwyddor cadwraeth momentwm, wrth drafod gwrthrychau anelastig yn taro ei gilydd.

6.1 Egwyddor momentwm ergyd

Mae llawer o enghreifftiau mewn bywyd bob dydd lle mae cyflymder gwrthrych yn cael ei newid yn eithaf sydyn. Un enghraifft yw pan bwysir ar freciau car yn gyflym iawn; enghraifft arall yw pan gaiff pêl dennis ei tharo. Ym mhob un o'r achosion hyn mae grym yn gweithredu ar wrthrych am gyfnod byr iawn o amser. Gan fod y grym yn gweithredu am amser mor fyr mae'n anodd dros ben fesur yr amser a'r grym. Fel mae'n digwydd, fodd bynnag, rhywbeth mesuradwy sy'n dibynnu ar y grym a'r amser sydd mewn gwirionedd yn pennu'r newid mewn cyflymder. Yr enw ar hwn yw'r **ergyd** ac efallai mai'r ffordd hawsaf o ddeall y syniad o ergyd yw trwy feddwl am rym cyson yn gweithredu am gyfnod byr o amser. Nid yw hwn yn fodel da ar gyfer trawiadau sydyn ond caiff y diffiniad sylfaenol ei addasu i roi model mwy realistig.

Tybir bod cydran grym i gyfeiriad penodol yn cael ei dynodi gan P a'i bod yn gweithredu ar ronyn, màs m, am amser T. Yn ystod y cyfnod hwn tybir bod cyflymder y gronyn i'r cyfeiriad hwnnw yn newid o u i v. Y cyflymiad a achosir gan y grym yw $\frac{P}{m}$ ac mae defnyddio'r hafaliad $v = u + at$ yn rhoi

$$v - u = \frac{P}{m}T.$$

Gellir aildrefnu ychydig ar yr hafaliad hwn a chael

$$m\,(v-u) = PT\,.$$

Mae ochr dde yr hafaliad hwn mewn cyfrannedd union â'r newid mewn cyflymder ac mae'n dibynnu ar y grym a'r amser gweithredu yn unig. Gelwir hyn yn **ergyd y grym** ac, yn achos grym cyson, mae'n cael ei ddiffinio fel lluoswm cydran y grym i gyfeiriad a roddir a'r amser gweithredu. Yr uned o ergyd yw'r newton eiliad (Ns).

Enw lluoswm màs gronyn a'i gyflymder yw ei **fomentwm** (ac felly, y newton eiliad yw'r uned ar gyfer mesur momentwm hefyd). Felly mae'r hafaliad uchod yn gywerth â

newid mewn momentwm = ergyd.

Dyma'r hafaliad momentwm ergyd; hyd yn hyn dangoswyd ei fod yn wir ar gyfer grymoedd cyson yn unig, ond mae'n wir pa rym bynnag sy'n gweithredu. Mewn gwirionedd, y momentwm llinol yw'r momentwm a ddiffiniwyd ond, gan na chyflwynir unrhyw fath arall o fomentwm yn eich cwrs, ni fydd gadael allan yr ansoddair llinol yn achosi dryswch.

Yn ymarferol y newid yn y momentwm yw'r hyn a welir ac yna darganfyddir yr ergyd o'r hafaliad momentwm ergyd. Os yw amser gweithredu'r grym yn hysbys, yna, gan gymryd bod y grym yn gyson, gellir amcangyfrif y grym trwy'r hafaliad momentwm ergyd.

Tybiwch fod buanedd car, màs 1000 kg, sy'n symud ar 20 ms^{-1} , yn gostwng yn sydyn, oherwydd brecio, i 15 ms^{-1}. Mae'r hafaliad momentwm ergyd yn dangos bod ergyd 5000 Ns wedi cael ei rhoi ond byddai angen rhagor o wybodaeth er mwyn darganfod y grym sy'n cynhyrchu'r newid hwn. Petai'r un weithred o frecio yn digwydd (h.y. yr un ergyd yn gweithredu) ar fuanedd 18 ms^{-1} yna bydd y momentwm yn

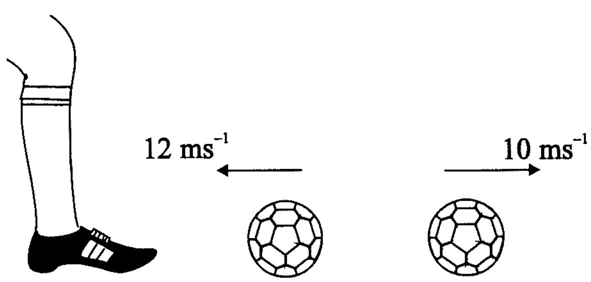
$$(18000 - 5000)\text{ Ns} = 13000\text{ Ns}$$

ac felly mae'r buanedd yn gostwng i 13 ms^{-1}.

Modelu trawiad sydyn

Er ei bod yn annhebygol y bydd grymoedd yn gyson trwy gydol y cyfnod o gyswllt, wrth fodelu trawiad sydyn nid oes angen ystyried union ffurf y grym, dim ond dweud bod "ergyd" yn cael ei rhoi fel bod newid sydyn iawn (enydaidd) yn y momentwm sy'n hafal i'r ergyd. Felly mae'r model yn un lle tybir bod grymoedd mawr yn gweithredu am gyfnodau o amser sy'n anfeidraidd fychan fel bod yr ergyd yn feidraidd.

Yn amlwg yn ystod unrhyw drawiad sydyn bydd grymoedd megis disgyrchiant yn gweithredu ond, ar derfan sero yr amser, nid yw'r rhain yn gwneud cyfraniad i'r ergyd. Mae hyn hefyd yn wir gyda'r tensiwn mewn sbring neu linyn elastig, na all gynnal tensiwn ergydiol. (Mae'r tensiwn mewn cyfrannedd â'r estyniad, ac felly y tensiwn ergydiol fyddai integryn yr estyniad dros gyfwng sero ac felly mae'n sero.) Cyfeirir at y grymoedd sy'n gwneud cyfraniad o fewn y terfan wrth i amser dueddu at sero fel grymoedd "ergydiol" ac fel arfer nid yw eu hymddygiad manwl yn hysbys. Nid oes ffwythiannau, yn ystyr arferol y gair, y mae eu hintegryn dros gyfwng sero yn ansero, ond gellir creu rhai ffwythiannau ffiniol y mae eu hintegryn dros gyfwng bychan iawn yn feidraidd ac ansero. Un ffwythiant o'r fath yw $\dfrac{T}{t^2+T^2}$. Ni fyddwch wedi cyfrifo ei integryn o $t = 0$ i $t = T$ eto, ond gellir dangos ei fod yn hafal i $\dfrac{\pi}{2}$. Efallai y carech geisio ei blotio yn yr amrediad $0 \le t \le T$, ar gyfer gwerthoedd bychain o T.



Mae'r diagram yn dangos pêl droed, màs 0.4 kg, sy'n symud yn llorwedd ar fuanedd 12 ms^{-1} cyn cael ei chicio. Yn syth ar ôl gadael y droed mae'n symud yn llorwedd ar fuanedd 10 ms^{-1}. Momentwm y bêl wedi'r gic yw 4 Ns i'r dde; cyn y gic ei momentwm oedd 4.8 Ns i'r chwith. Felly y newid yn y momentwm i gyfeiriad y dde yw 8.8 Ns a dyma'r ergyd a roddwyd gan y gic.

Nid oes modd i chi ddarganfod y grym gwirioneddol heb wneud rhagor o dybiaethau am ei ffurf ond y peth pwysig fodd bynnag yw, hyd yn oed heb wybod union ffurf y grym, y gallwch yn awr gyfrifo beth sy'n digwydd pan fydd y bêl yn cyrraedd ar gyflymder o 8 ms^{-1}. Y dybiaeth fodelu yw bod y chwaraewr yn cicio yn union fel o'r blaen h.y. bod ergyd grym y gic yn 8.8 Ns. Tybir bod y bêl yn gadael ar fuanedd v ms^{-1}, ac felly y momentwm i gyfeiriad y dde ar ôl y gic yw $0.4v$ Ns a chyn y gic roedd yn -3.2 Ns. Mae'r egwyddor momentwm ergyd yn rhoi

$$0.4v + 3.2 = 8.8,$$

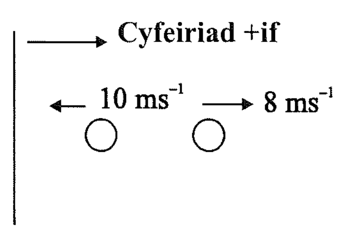
ac felly $$v = 14.$$

Mae'n amlwg y gellir cyfrifo'r ergyd sy'n gysylltiedig ag unrhyw rym, ac mewn gwirionedd gellir ei defnyddio i ddatrys problemau eraill sy'n ymwneud â mudiant. Nid yw'n ddull arbennig o dda ar gyfer datrys problemau eraill, ac mewn gwirionedd mae'n well cadw at y syniad fod ergyd yn rhywbeth sy'n gysylltiedig â thrawiadau sydyn yn benodol, a'i bod mewn cyfrannedd â'r newid yn y momentwm. Dylid hefyd geisio cofio bod ergyd yn y ffurf grym × amser yn achos arbennig iawn ac yn annhebygol o ddigwydd mewn problemau go iawn sy'n ymwneud â thrawiadau sydyn.

Wrth ddatrys problemau ar ergyd a momentwm dylid cofio, fel mewn problemau sy'n ymwneud â hafaliadau mudiant Newton, dewis cyfeirnod ar gyfer nodi cyfeiriad.

Enghraifft 6.1

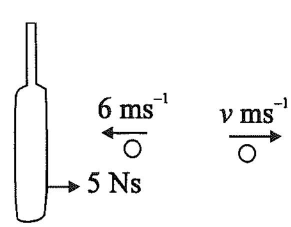
Mae pêl, màs 0.05 kg, yn taro wal fertigol ar fuanedd 10 ms^{-1}, ac mae cyfeiriad y mudiant yn berpendicwlar i'r wal. Mae'r bêl yn adlamu ar fuanedd 8ms^{-1}. Darganfyddwch yr ergyd a roddwyd i'r bêl gan y wal.



Cymerir y cyfeiriad oddi wrth y wal fel y cyfeiriad positif fel a ddangosir yn y diagram. Momentwm llinol y bêl yn syth ar ôl yr ardrawiad yw 0.05×8 Ns = 0.4 Ns, a'r momentwm llinol yn syth cyn yr ardrawiad yw $-\, 0.05 \times 10$ Ns = – 0.5 Ns.
Yr ergyd felly yw 0.4 Ns – (–0.5) Ns = 0.9 Ns.
Mae'r ergyd, fel y byddech yn disgwyl, yn gweithredu i ffwrdd oddi wrth y wal. Trwy drydedd ddeddf Newton bydd ergyd hafal a dirgroes yn gweithredu ar y wal.

Enghraifft 6.2

Mae pêl griced, màs 0.5 kg, sy'n symud yn llorwedd ar fuanedd 6 ms^{-1} yn cael ei tharo gan fat sy'n rhoi ergyd lorwedd 5 Ns i'r cyfeiriad dirgroes i gyfeiriad y bêl. Darganfyddwch gyflymder y bêl yn syth ar ôl yr ardrawiad.



Tybir bod y cyflymderau cyn ac ar ôl yr ardrawiad, a'r ergyd, fel a ddangosir yn y diagram. Y momentwm cyn yr ardrawiad yw -0.5×6 Ns a'r momentwm ar ôl yr ardrawiad yw $0.5v$ Ns. Mae cymhwyso'r egwyddor momentwm ergyd yn rhoi

$$0.5v + 0.5 \times 6 = 5,$$

ac felly $$v = 4.$$

Enghraifft 6.3

Mae pêl, màs 0.3 kg, yn symud ar fuanedd 5 ms^{-1} wrth iddi daro llawr llorwedd ac mae'n adlamu oddi ar y llawr ar fuanedd 2 ms^{-1}. Darganfyddwch yr ergyd a roddir ar y bêl gan y llawr, gan gymryd y gellir anwybyddu amser y cysylltiad â'r llawr.

Momentwm y bêl yn syth ar ôl yr ardrawiad yw 0.6 Ns tuag i fyny ac yn syth cyn yr ardrawiad y momentwm yw -1.5 Ns. Cyfanswm y newid yn y momentwm tuag i fyny yw 2.1 Ns a dyma'r ergyd a roddir i'r bêl. Os gellir anwybyddu amser y cysylltiad, yna gellir anwybyddu'r ergyd a achosir gan ddisgyrchiant, a'r ergyd a roddir gan y llawr yw 2.1 Ns.

Ymarferion 6.1

1 Darganfyddwch fomentwm y gwrthrychau canlynol.

(a) gronyn, màs 0.03 kg, yn symud ar gyflymder 4 ms^{-1},

(b) pêl griced, màs 0.5 kg, yn symud ar gyflymder 15 ms^{-1},

(c) car, màs 1200 kg, yn symud ar fuanedd 25 ms^{-1}.

Mae cwestiynau 2 i 4 yn cyfeirio at ronyn, màs m kg, y mae ei gyflymder yn newid o u ms^{-1} i v ms^{-1}. Darganfyddwch y newid mewn momentwm.

2 $m = 0.5, u = 4, v = 6.$

3 $m = 1.6, u = 4, v = -2.$

4 $m = 2.2, u = -3, v = -5.$

5 Rhoddir ergyd 3.2 Ns i ronyn, màs 0.8 kg, sy'n ddisymud. Mae'r gronyn yn rhydd i symud ar hyd yr echelin x a rhoddir yr ergyd i'r cyfeiriad hwn. Darganfyddwch fuanedd y gronyn o ganlyniad.

6 Mae wagen rheilffordd, màs 1400 kg, yn symud ar gledrau llorwedd syth ar fuanedd 6 ms^{-1}. Yna mae'n taro byffrau sefydlog ac yn adlamu oddi arnynt ar fuanedd 1.5 ms^{-1}.

Darganfyddwch yr ergyd a roddir gan y byffrau ar y wagen.

7 Mae sglefriwr iâ, màs 70 kg, yn derbyn ergyd lorwedd 200 Ns pan yw'n sefyll yn ddisymud. Darganfyddwch fuanedd cychwynnol y sglefriwr ac, o wybod bod cyfanswm y gwrthiant yn 25 N, darganfyddwch gyfanswm y pellter a symudir gan y sglefriwr.

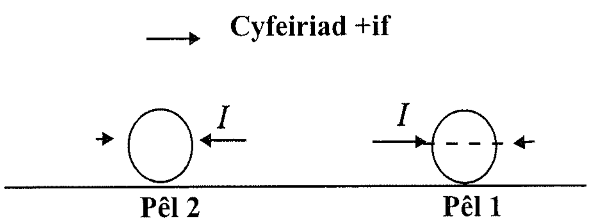
8 Mae pêl dennis, màs 0.08 kg, sy'n symud yn llorwedd tuag at raced ar fuanedd 6 ms^{-1} yn cael ei tharo gan y raced ac yn ei gadael yn llorwedd ar fuanedd 12 ms^{-1}. Cyfrifwch faint yr ergyd ar y bêl.

9 Mae pêl griced, màs 0.15 kg, sy'n symud yn llorwedd ar fuanedd 14 ms^{-1} wrth iddi gyrraedd y batiwr yn cael ei tharo yn syth yn ôl yn llorwedd ar fuanedd 24 ms^{-1}. Darganfyddwch ergyd y bat ar y bêl.

10 Mae pêl, màs 0.2 kg, yn cwympo'n fertigol ar lawr llorwedd, yn ei daro ar fuanedd 10 ms^{-1} ac yn adlamu i gyrraedd uchder o 2.5 m uwchben y llawr.
Darganfyddwch yr ergyd a roddir gan y llawr.

6.2 Cadwraeth momentwm

Pan fydd batiwr yn taro pêl, yn ôl trydedd ddeddf Newton, bydd ergyd ddirgroes yn gweithredu ar y bat, ac felly ar y batiwr. Dylai hyn effeithio ar ei fomentwm ond fel arfer bydd y batiwr ar yr un pryd yn rhoi ergyd arall ar y llawr er mwyn aros yn ddisymud. Mae'r math hwn o adwaith yn arbennig o amlwg yn achos saethu gwn, pryd ceir adlamiad. Fodd bynnag, mae llawer o broblemau yn ymwneud â thrawiadau sydyn rhwng gwrthrychau lle nad yw un gwrthrych yn gallu cyfadfer fel y gwna person sy'n chwarae pêl, a lle mae mudiant gan y ddau wrthrych yn bosibl. Enghreifftiau amlwg yw peli snwcer, neu geir, yn taro ei gilydd. Enghraifft o broblem o'r fath yw gwrthdrawiad dwy bêl sy'n symud yn uniongyrchol tuag at ei gilydd fel yn y diagram.



Yn y gwrthdrawiad bydd grymoedd ergydiol yn gweithredu rhwng y peli yn ystod y gwrthdrawiad. Yn ôl trydedd ddeddf Newton, mae'r grymoedd a roddir gan bêl 2 ar bêl 1 yn ystod y gwrthdrawiad yn hafal a dirgroes i'r rhai a roddir gan bêl 1 ar bêl 2. Gan mai'r ergyd yw integryn y grym, mae'r ergydion sy'n gweithredu ar y peli yn hafal a dirgroes. Dynodir yr ergyd ar bêl 1 oherwydd pêl 2 gan I, ac felly yr ergyd ar bêl 2 oherwydd pêl 1 yw $-I$ (h.y. I i'r chwith).

Cymerir bod y cyfeiriad positif tua'r dde; felly yn ôl yr egwyddor momentwm ergyd:
mae'r newid ym momentwm pêl 1 = I; mae'r newid ym momentwm pêl 2 = $-I$.
Trwy adio'r rhain, y newid yng nghyfanswm momentwm peli 1 a 2 = 0.
Felly mae cyfanswm momentwm y ddwy bêl heb newid (h.y. mae'n cael ei gadw); mae hyn yn wir hefyd gydag unrhyw nifer o ronynnau a dyma'r **egwyddor cadwraeth momentwm**, sy'n nodi:

> **Yn ystod unrhyw gyfnod pan nad oes ergydion allanol yn gweithredu ar system o ronynnau rhyngweithiol, mae cyfanswm y momentwm yn aros yn gyson**.

Gellir profi hefyd gyda system lle mae ergydion allanol yn bresennol, yr **egwyddor momentwm ergyd gyffredinol**, sy'n nodi:

> **Os rhoddir ergydion i system o ronynnau rhyngweithiol mae'r newid mewn momentwm a achosir gan yr ergyd yn hafal i swm yr ergydion a roddir**.

Byddwn yn ystyried tri math gwahanol o sefyllfaoedd sy'n ymwneud â mudiant ergydiol system o ronynnau.

(i) Gwrthdrawiadau rhwng gwrthrychau sy'n symud gyda'i gilydd ar ôl gwrthdaro; gelwir y rhain yn wrthdrawiadau anelastig a gellir eu datrys fel arfer trwy ddefnyddio'r egwyddor cadwraeth momentwm llinol. Ystyrir y rhain yn fanwl yn Adran 6.3.

(ii) Gwrthdrawiadau lle mae'r gwrthrychau yn adlamu oddi ar ei gilydd ar ôl gwrthdaro; gelwir y rhain yn wrthdrawiadau elastig ac i'w datrys mae angen gwybod rhywbeth am briodweddau elastig y gwrthrychau. Gweler Adran 6.4.

(iii) Problemau lle mae'r gwrthrychau wedi eu cysylltu gan linyn anelastig ac felly'n symud gyda'i gilydd. Enghraifft syml yw dau gar wedi eu cysylltu gan raff lusgo ac mae un yn dechrau symud. Yn ogystal â'r problemau syml o ddau wrthrych yn symud ar hyd llinell, ystyrir hefyd broblemau'n ymwneud â gronynnau wedi eu cysylltu gan linyn dros bwli. Edrychir ar yr holl broblemau hyn yn Uned M2.

6.3 Gwrthdrawiadau anelastig

Fel arfer, trwy ddefnyddio'r egwyddor cadwraeth momentwm, mae'n eithaf hawdd datrys problemau fel y rhain lle mae dau gar yn gwrthdaro â'i gilydd. Bydd cyfanswm y momentwm cyn y gwrthdrawiad yn hysbys; bydd angen dewis cyfeirnod ar gyfer y cyfeiriad yn ofalus iawn er mwyn cael arwyddion cywir ar gyfer pob momentwm. Dangosir y dull hwn orau trwy ddatrys yr enghreifftiau canlynol.

Enghraifft 6.4

Mae car, màs 1400 kg, sy'n symud ar fuanedd 4 ms^{-1} yn taro car, màs 1000 kg, sy'n ddisymud. Ar ôl y gwrthdrawiad maent yn symud gyda'i gilydd. Darganfyddwch y buanedd cyffredin yn syth ar ôl y gwrthdrawiad.

Cymerir mai cyfeirnod y cyfeiriad yw cyfeiriad y car sy'n symud fel a ddangosir yn y diagram a dynodir y buanedd cyffredin yn syth ar ôl y gwrthdrawiad gan v ms^{-1}.

Felly y momentwm cyn y gwrthdrawiad yw 1400×4 Ns = 5600 Ns.

Y momentwm ar ôl y gwrthdrawiad yw

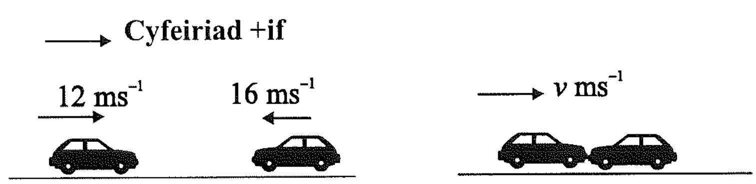
$$(1400 + 1000)v \text{ Ns} = 2400v \text{ Ns}.$$

Mae cadwraeth momentwm yn rhoi $2400v = 5600$,

ac felly mae'r ceir yn symud gyda'i gilydd ar fuanedd $\frac{7}{3}$ ms^{-1}.

Enghraifft 6.5

Mae dau gar, màs 1200 kg a 1300 kg, yn symud yn syth at ei gilydd ar 12 ms^{-1} a 16ms^{-1} yn ôl eu trefn. Ar ôl y gwrthdrawiad mae'r ddau gar yn symud gyda'i gilydd. Darganfyddwch eu buanedd cyffredin.



Cymerir cyfeiriad mudiant y car ysgafnaf fel y cyfeiriad positif ac felly ei fomentwm yw 14400 Ns a momentwm y car trymaf yw –20 800 Ns; cyfanswm y momentwm cyn y gwrthdrawiad felly yw –6400 Ns.

Nawr tybir bod y ddau yn symud gyda'i gilydd ar fuanedd v ms^{-1} i'r dde.

Cyfanswm y momentwm llinol ar ôl y gwrthdrawiad yw $2500v$ Ns ac mae hyn yn hafal i –6400 Ns.

Felly mae $v = -2.56$ a'r ddau gar yn symud i'r chwith ar fuanedd 2.56 ms^{-1}.

Ymarferion 6.2

Mae cwestiynau 1 i 6 yn cyfeirio at ronyn, màs M kg, sy'n symud ar gyflymder u ms^{-1} yn gwrthdaro â gronyn, màs m kg, sy'n symud ar gyflymder v ms^{-1}. Ar ôl y gwrthdrawiad maent yn symud gyda'i gilydd ar gyflymder w ms^{-1}.

1 $M = 0.4$, $m = 0.2$, $u = 3$, $v = 0$; darganfyddwch w.
2 $M = 0.2$, $m = 0.6$, $u = 5$, $v = 0$; darganfyddwch w.
3 $M = 4$, $m = 3$, $u = 5$, $v = 2$; darganfyddwch w.
4 $M = 0.8$, $m = 0.6$, $u = 2$, $v = 5$; darganfyddwch w.
5 $M = 3$, $m = 2$, $u = 5$, $v = -2$; darganfyddwch w.
6 $M = 2$, $m = 3$, $u = -4$, $v = 7$; darganfyddwch w.

7 Mae car B, màs 1200 kg, yn ddisymud cyn cael ei daro gan gar A, màs 1500 kg, sy'n symud ar fuanedd 15 ms^{-1}. Mae'r ceir yn mynd yn sownd ac yn symud gyda'i gilydd yn syth ar ôl y gwrthdrawiad. Darganfyddwch eu buanedd cyffredin.

8 Mae wagen rheilffordd, màs 12 tunnell fetrig, sy'n symud ar fuanedd 2 ms^{-1} yn gwrthdaro â wagen ddisymud, màs 16 tunnell fetrig. Mae'r wagenni yn symud gyda'i gilydd yn syth ar ôl yr ardrawiad. Darganfyddwch eu buanedd cyffredin.

9 Mae wagen nwyddau rheilffordd A sydd â chyfanswm ei màs yn 20 tunnell fetrig, yn symud ar gledrau llorwedd ar fuanedd 1.5 kmh^{-1}. Mae ail wagen nwyddau B, cyfanswm màs 25 tunnell fetrig, sy'n symud ar fuanedd 3 kmh^{-1} yn ei chyrraedd ac yn cyplu â hi. Darganfyddwch gyflymder cyffredin v y ddwy wagen wrth iddynt symud gyda'i gilydd ar ôl cyplu.

10 Saethir bwled 0.045 kg o wn yn llorwedd ar gyflymder 425 ms^{-1} i floc o bren 5 kg, a all symud yn rhydd i'r cyfeiriad llorwedd. Darganfyddwch gyflymder terfynol y bloc.

11 Mae merch, màs 44 kg, yn rhedeg ar gyflymder llorwedd 5 ms^{-1} ac yna'n neidio ar sled 16 kg sy'n llonydd. Mae'r ferch a'r sled yn teithio 18 m yn llorwedd ar eira cyn dod i aros. Beth yw'r cyfernod ffrithiant llithro rhwng y sled a'r eira?

6.4 Gwrthdrawiadau elastig

Yn y bôn mae dwy sefyllfa wahanol, y naill lle mae un gwrthrych yn aros yn sefydlog (pêl yn taro wal) a'r llall lle gall y ddau wrthrych symud. Edrychir arnynt yn eu tro.

Un gwrthrych yn sefydlog

Pan fo pêl yn taro wal, er enghraifft, nid oes dull damcaniaethol ar gyfer darganfod ei buanedd yn syth ar ôl gadael y wal. Fodd bynnag mae arbrofion wedi dangos os yw pêl, neu ronyn, yn symud ar fuanedd u yn berpendicwlar i'r wal yn syth cyn yr ardrawiad yna ei buanedd yn gadael y wal yw eu, lle mae e yn rhif sy'n dibynnu ar briodweddau elastig y wal a'r bêl fel ei gilydd ac a elwir **y cyfernod adfer**. Sefydlwyd y ddeddf arbrofol hon yn gyntaf gan Newton.

Cyfeiriodd Newton at u, buanedd y bêl wrth gyrraedd y wal, fel buanedd nesâd, a chyfeiriodd at v, buanedd y bêl wrth adael y wal, fel buanedd gwahaniad. Mynegodd ei ddeddf arbrofol yn y ffurf

$$\frac{\text{buanedd gwahaniad}}{\text{buanedd nesâd}} = e$$

lle mae e yn dynodi'r cyfernod adfer, sy'n bodloni'r amodau $0 \leq e \leq 1$. Mae'r terfan isaf yn cyfeirio at wrthdrawiad sy'n berffaith blastig, neu anelastig, lle mae'r bêl yn glynu wrth y wal. Mae'r terfan uchaf yn cyfateb i wrthdrawiad sy'n berffaith elastig lle mae'r bêl yn gadael y wal ar fuanedd u.

Enghraifft 6.6

Gollyngir pêl yn fertigol i lawr ar blân llyfn o uchder 1.4 m. O wybod mai'r cyfernod adfer rhwng y bêl a'r plân yw 0.6, darganfyddwch

(i) yr uchder y mae'r bêl yn ei gyrraedd wrth adlamu am y tro cyntaf,

(ii) yr amser rhwng gollwng y bêl a bod y bêl yn cyrraedd brig ei hadlam cyntaf.

O'r fformiwla $v^2 = u^2 + 2gh$, buanedd y bêl, mewn ms^{-1}, wrth iddi gyrraedd y plân am y tro cyntaf yw $\sqrt{2 \times 9.8 \times 1.4} = 5.24$.

Yn ôl deddf Newton, y buanedd adlamu yw

$$0.6 \times 5.24 = 3.14.$$

Mae cymhwyso'r fformiwla uchod eto yn rhoi'r uchder, mewn m, y mae'r bêl yn ei gyrraedd fel $\dfrac{3.14^2}{2 \times 9.8} = 0.50.$

Trwy gymhwyso'r fformiwla $v = u + gt$, amser, mewn eiliadau, y mudiant i lawr yw

$$\frac{5.24}{9.8} = 0.53.$$

Trwy gymhwyso'r fformiwla i'r mudiant i fyny, yr amser, mewn eiliadau, i gyrraedd brig yr adlam yw

$$\frac{3.14}{9.8} = 0.32.$$

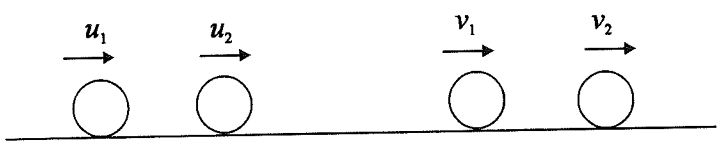
Felly cyfanswm yr amser yw 0.85 eiliad.

Y ddau wrthrych yn rhydd i symud

Cyflawnodd Newton arbrofion gyda gwrthrychau symudol a darganfod bod ei ddeddf arbrofol yn y ffurf

$$\frac{\text{buanedd gwahaniad}}{\text{buanedd nesâd}} = e, \quad \text{yn dal yn ddilys.}$$

Mae angen peth gofal wrth ddehongli hyn pan fo'r ddau wrthrych yn symud.



Mae'r diagram yn dangos dau wrthrych yn symud ar hyd llinell gyda chydrannau cyflymder u_1 a u_2. Os yw $u_1 > u_2$ byddant yn gwrthdaro a'r cydrannau ar ôl y gwrthdrawiad fydd v_1 a v_2. Y buanedd nesâd yw'r gyfradd y mae'r pellter rhwng y ddau yn lleihau cyn y gwrthdrawiad, sef $u_1 - u_2$. Y buanedd gwahaniad yw'r gyfradd y mae'r pellter rhwng y ddau yn cynyddu ar ôl y gwrthdrawiad, sef $v_2 - v_1$. Felly gellir ysgrifennu deddf Newton fel

$$v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2) = -e(u_2 - u_1).$$

Wrth ddatrys problemau ymarferol mae'n bwysig dewis cyfeirnod ar gyfer y cyfeiriad a chyfrifo'r cydrannau i gyd i'r cyfeiriad hwnnw. Annoeth yw ceisio dyfalu a yw gwrthrych yn symud i gyfeiriad arbennig ar ôl gwrthdrawiad a dangos y cyfeiriad hwn mewn diagram. Os yw'n digwydd bod gwrthrych yn symud i'r cyfeiriad dirgroes i'r cyfeirnod, bydd hyn yn ymddangos yn y cyfrifiadau trwy i'r gydran fod yn negatif.

Mae'n haws cofio deddf Newton yn y ffurf

$$v_2 - v_1 = -e(u_2 - u_1),$$

gan fod rhoi'r arwydd minws y tu allan yn osgoi'r angen i gofio newid trefn y tynnu ar ddwy ochr yr hafaliad.

Mewn problem ar wrthdrawiad mae cyfanswm y momentwm yn cael ei gadw. Mae hyn yn golygu, os dynodir masau y ddau ronyn uchod gan m_1 ac m_2, bod

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Mae pob problem sy'n ymwneud â gwrthdrawiadau elastig yn y pen draw yn golygu datrys dau hafaliad o'r math uchod.

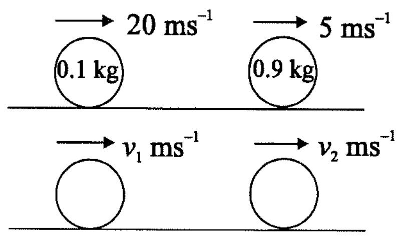
Enghraifft 6.7

Mae sffêr llyfn bach, màs 0.1 kg, yn symud ar fuanedd 20 ms^{-1} ar hyd plân llorwedd. Mae'n cyrraedd a tharo sffêr llyfn arall sydd â'r un radiws ond màs 0.9 kg ac sy'n symud ar fuanedd 5 ms^{-1}. Y cyfernod adfer yw $\frac{1}{3}$. Darganfyddwch fuaneddau'r sfferau yn syth ar ôl y gwrthdrawiad.

Y cam pwysicaf yw llunio diagramau i ddangos y mudiant cyn ac ar ôl y gwrthdrawiad a nodi cyfeirnod y cyfeiriad. Nid yw'n werth ceisio dyfalu cyfeiriadau'r mudiannau ar ôl y gwrthdrawiad; mae'n well cymryd pob anhysbysyn yn y cyfeiriad a ddewiswyd fel cyfeirnod gan fod hyn yn osgoi problemau gydag arwyddion.

Cyn gwrthdaro

Ar ôl gwrthdaro



Yn y diagram, cyflymder y sfferau ar ôl y gwrthdrawiad yw v_1 ms^{-1} a v_2 ms^{-1} i'r dde. Cydran y momentwm, mewn Ns, i'r dde cyn y gwrthdrawiad yw

$$0.9 \times 5 + 0.1 \times 20 = 6.5,$$

ac ar ôl y gwrthdrawiad mae'n $0.1v_1 + 0.9v_2$.

Mae cadwraeth momentwm yn rhoi

$$6.5 = 0.1v_1 + 0.9v_2.$$

Mae deddf Newton yn rhoi $v_2 - v_1 = -\frac{1}{3}(5 - 20) = 5.$

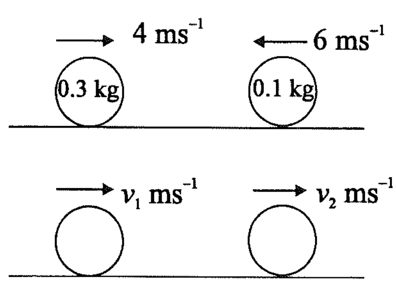
Mae datrys y rhain yn rhoi $v_1 = 2, \quad v_2 = 7.$

Enghraifft 6.8

Mae dau sffêr llyfn bach â'r un radiws ond màs 0.3 kg a 0.1 kg, yn symud yn syth tuag at ei gilydd ar fuanedd 4 ms^{-1} a 6 ms^{-1} yn ôl eu trefn Y cyfernod adfer yw 0.5. Darganfyddwch eu buaneddau ar ôl y gwrthdrawiad.

Cyn gwrthdaro

Ar ôl gwrthdaro



Mae'r diagram yn dangos y cyflymderau cyn ac ar ôl y gwrthdrawiad. Wrth gyfrifo'r momentwm a defnyddio deddf Newton mae'n bwysig cofio mai cydran cyflymder cychwynnol y sffêr ysgafnaf yw -6 ms^{-1} i'r dde. Cydran y momentwm, mewn Ns, i'r dde cyn y gwrthdrawiad yw $0.3 \times 4 - 0.1 \times 6 = 0.6$ ac ar ôl y gwrthdrawiad mae'n $0.3v_1 + 0.1v_2$.
Mae cadwraeth momentwm yn rhoi

$$0.3v_1 + 0.1v_2 \;=\; 0.6.$$

Mae deddf Newton yn rhoi

$$v_2 - v_1 = -0.5(-6-4) = 5.$$

Mae datrys yr hafaliadau hyn yn rhoi $\quad v_1 = 0.25, \;\; v_2 = 5.25.$

<u>Ymarferion 6.3</u>

Mae cwestiynau 1 i 4 yn cyfeirio at bêl fach a ollyngir o ddisymudedd ar uchder h uwchben plân llyfn; y cyfernod adfer yw e, ac h_1 yw'r uchder a gyrhaeddir ar ôl yr adlam cyntaf.

1 $h = 5$ m, $e = 0.4$; darganfyddwch h_1.

2 $h = 8$ m, $h_1 = 5$ m; darganfyddwch e.

3 $h = 1$ m, $e = \frac{1}{4}$; darganfyddwch gyfanswm pellter teithio'r bêl cyn iddi ddod i aros.

4 $h = 2.4$ m, $e = 0.4$; darganfyddwch, o wybod bod gan y bêl fàs 0.2 kg, faint yr ergyd ar y bêl pan ddigwydd yr adlam cyntaf.

5 Teflir pêl dennis yn fertigol i lawr o uchder 1.6 m uwchben cwrt tennis. O wybod bod y cyfernod adfer yn 0.8, darganfyddwch fuanedd y tafliad er mwyn i'r bêl prin ddychwelyd i'r pwynt lle cafodd ei thaflu, ar ôl adlamu unwaith.

Yng nghwestiynau 6 i 8 mae sffêr llyfn, màs m_1 kg, sy'n symud ar fuanedd u_1 ms^{-1} yn cyrraedd sffêr llyfn, màs m_2 kg, sy'n symud ar fuanedd u_2 ms^{-1} i'r un cyfeiriad, ac yn gwrthdaro yn uniongyrchol ag ef. Dynodir cydrannau'r cyflymder ar ôl yr ardrawiad, a fesurir i gyfeiriad gwreiddiol y mudiant, gan v_1 ms^{-1} a v_2 ms^{-1}, yn ôl eu trefn.

6 $m_1 = 3, m_2 = 1, u_1 = 6, u_2 = 1, e = 0.4$; darganfyddwch v_1 a v_2.

7 $m_1 = 2, m_2 = 3, u_1 = 6, u_2 = 2, v_1 = 3$; darganfyddwch e a v_2.

8 $m_2 = 10, u_1 = 9, u_2 = 2, v_1 = 2, v_2 = 5$; darganfyddwch e a m_1.

Yng nghwestiynau 9 i 11 mae sffêr llyfn, màs m_1 kg, sy'n symud ar fuanedd u_1 ms^{-1} yn gwrthdaro yn uniongyrchol â sffêr llyfn, màs m_2 kg, sy'n symud ar fuanedd u_2 ms^{-1} i'r cyfeiriad dirgroes. Dynodir cydrannau'r cyflymder ar ôl yr ardrawiad, a fesurir i gyfeiriad mudiant y sffêr cyntaf, gan v_1 ms^{-1} a v_2 ms^{-1}, yn ôl eu trefn.

9 $m_1 = 4, m_2 = 1, u_1 = 3, u_2 = 1, e = 0.5$; darganfyddwch v_1 a v_2.

10 $m_1 = 4, u_1 = 3, u_2 = 5, v_1 = 2, e = 0.2$; darganfyddwch m_2 a v_2.

11 $m_2 =12, u_1 =10, u_2 = 2, v_1 = 2, v_2 = 4$; darganfyddwch e a m_1.

12 Mae sffêr llyfn, màs 4 kg, yn gwrthdaro yn uniongyrchol â sffêr llyfn, màs 8 kg, sy'n ddisymud. Darganfyddwch yr amod y mae'n rhaid i e ei fodloni er mwyn i'r sfferau symud i gyfeiriadau dirgroes ar ôl y gwrthdrawiad.

13 Mae ceir unfath A, B, C yn sefyll mewn llinell syth, ychydig oddi wrth ei gilydd, heb frêc. Gwthir car A tuag at y lleill i daro car B ar fuanedd 1 ms^{-1}. O wybod mai'r cyfernod adfer yw 0.75, darganfyddwch fuaneddau'r ceir ar ôl y gwrthdrawiadau i gyd.

Ymarferion Amrywiol 6

1 Mae'r heddlu yn ymchwilio i ddamwain lle tarodd car, màs 1000 kg, yn uniongyrchol yn erbyn car, màs 1200 kg, oedd wedi'i barcio. Yn syth ar ôl y gwrthdrawiad roedd y ceir ynghlwm wrth ei gilydd ac yn llithro ymlaen bellter 10 m. Gan gymryd mai 0.5 yw'r cyfernod ffrithiant, bod y ffordd yn wastad ac mai'r unig rym llorwedd ar y ceir oedd ffrithiant, darganfyddwch fuanedd cyffredin y ceir wrth iddynt ddechrau symud.
Yna darganfyddwch fuanedd y car oedd yn symud ar ennyd y gwrthdrawiad.

2 Mae lori, màs 4 tunnell fetrig, yn tynnu car, màs 1200 kg. Mae'r lori yn cychwyn â'r rhaff lusgo yn llac ond pan yw ei buanedd yn 1.5 ms^{-1} mae'r rhaff yn tynhau. Darganfyddwch

(i) fuanedd y car yn syth ar ôl iddo ddechrau symud,

(ii) y tensiwn ergydiol yn y rhaff lusgo.

3 Mae car, màs 1200 kg, yn symud ar fuanedd 30 ms^{-1} ac yn taro cefn car arall, màs 1000 kg, sy'n symud i'r un cyfeiriad ar fuanedd 15 ms^{-1}. Ar ôl y gwrthdrawiad mae'r ceir yn symud gyda'i gilydd. Darganfyddwch eu buanedd cyffredin yn syth ar ôl y gwrthdrawiad a'r ergyd ar y car ysgafnaf.

4 Mae dau ronyn P a Q, masau $4m$ a $5m$ yn ôl eu trefn, ynghlwm wrth ddau ben llinyn anestynadwy ysgafn sy'n mynd dros bwli llyfn bach. Mae'r gronynnau yn symud mewn plân fertigol gyda'r ddwy ran o'r llinyn yn hongian yn fertigol. Maent yn cael eu rhyddhau o ddisymudedd. Darganfyddwch, yn nhermau m a/neu g, fel y bo'n briodol, gyflymiadau'r gronynnau a'r tensiwn yn y llinyn.
Pan fydd y gronyn P yn esgyn ar fuanedd V bydd yn codi gronyn ychwanegol, màs $2m$, o bwynt A er mwyn ffurfio gronyn cyfansawdd R, màs $6m$. Darganfyddwch fuanedd cychwynnol R.

5 Gollyngir sffêr llyfn bach o bwynt 0.6 m uwchben llawr llorwedd llyfn. Mae'n cwympo'n fertigol, yn taro'r llawr ac yn adlamu i 0.15 m uwchben y llawr. Darganfyddwch

(a) fuanedd y sffêr wrth iddo daro'r llawr,

(b) y cyfernod adfer rhwng y sffêr a'r llawr.

6 Mae sffêr llyfn bach P, màs $6m$, sy'n symud ar blân llyfn mewn llinell syth ar fuanedd cyson o $8u$ yn gwrthdaro yn uniongyrchol â sffêr llyfn bach Q gyda'r un radiws ond màs $4m$ sy'n symud i'r un cyfeiriad ar fuanedd $6u$. Ni newidir cyfeiriad mudiant sffêr Q gan y gwrthdrawiad ac yn syth ar ôl y gwrthdrawiad mae'n symud ar fuanedd $8u$. Darganfyddwch

(i) fuanedd P yn syth ar ôl y gwrthdrawiad,

(ii) y cyfernod adfer.

7 Mae dau sffêr llyfn bach A a B, â'r un màs, sy'n symud ar yr un llinell syth (ac i'r un cyfeiriad) ac â buaneddau $2u$ ac u yn ôl eu trefn, yn gwrthdaro yn uniongyrchol. Ar ôl y gwrthdrawiad nid yw cyfeiriad eu mudiant wedi newid ond mae buanedd A yn v a buanedd B yn $1.5v$. Dangoswch mai'r cyfernod adfer yw 0.6.

8 Mae sffêr P yn symud ar lawr llorwedd ac yn gwrthdaro yn uniongyrchol â sffêr unfath Q sy'n ddisymud ar bellter 2 m oddi wrth wal fertigol lyfn. Mae Q yn nes at y wal na P. Mae'r mudiannau cyn ac ar ôl pob gwrthdrawiad posibl yn berpendicwlar i'r wal, a'r cyfernod adfer ar gyfer pob gwrthdrawiad yw 0.6.

(i) Dangoswch, pan fydd Q yn taro'r wal am y tro cyntaf, fod P bellter 1.5 m o'r wal.

(ii) Darganfyddwch bellter y sfferau o'r wal pan fyddant yn gwrthdaro am yr ail dro.

9 Mae dau sffêr llyfn bach P a Q, gyda'r un radiws ond màs $2m$ a $4m$ yn ôl eu trefn, yn symud yn uniongyrchol tuag at ei gilydd ar fwrdd llorwedd llyfn ar fuaneddau $2u$ a $3u$, yn ôl eu trefn. Canlyniad y gwrthdrawiad yw bod Q yn derbyn ergyd $8amu$, lle mae a yn gysonyn. Darganfyddwch

(a) fuaneddau'r sfferau yn syth ar ôl y gwrthdrawiad,

(b) y cyfernod adfer,

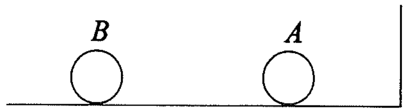
(c) amrediad gwerthoedd posibl a.

10 Mae sffêr llyfn bach A, màs m, sy'n symud ar fuanedd $5u$ yn cyrraedd a tharo'n uniongyrchol ail sffêr B, màs $4m$, sy'n symud ar fuanedd u. Ar ôl y gwrthdrawiad mae cyfeiriad mudiant A wedi ei gildroi a'i fuanedd yw u. Darganfyddwch

(a) fuanedd B ar ôl y gwrthdrawiad,

(b) y cyfernod adfer.

11



Mae'r diagram yn dangos dau sffêr llyfn bach A a B â'r un radiws yn ddisymud ar fwrdd llorwedd, gyda sffêr A rhwng wal fertigol lyfn a sffêr B. Mae'r llinell sy'n cysylltu canolau'r sfferau yn berpendicwlar i'r wal. Màs sffêr A yw m a màs sffêr B yw qm. Teflir sffêr A fel ei fod yn gwrthdaro yn uniongyrchol â sffêr B. O wybod bod y cyfernod adfer rhwng y sfferau yn $\frac{2}{5}$ a bod $q > \frac{5}{2}$, dangoswch fod cyfeiriad mudiant sffêr A yn cael ei gildroi gan yr ardrawiad.
O wybod hefyd mai'r cyfernod adfer rhwng sffêr A a'r wal yw $\frac{1}{5}$ darganfyddwch yr amod y mae angen i q ei fodloni er mwyn i'r sfferau wrthdaro eto.
(Gellir tybio, rhwng gwrthdrawiadau, fod y sfferau yn symud ar fuanedd cyson.)

12 Mae dau sffêr llyfn bach P a Q, â'r un radiws ond â masau m a $3m$ yn ôl eu trefn, yn symud tuag at ei gilydd ar fwrdd llorwedd llyfn. Cyn y gwrthdrawiad mae buanedd P yn $3u$ a buanedd Q yn $6u$ ac ar ôl y gwrthdrawiad mae cyfeiriad mudiant P yn cael ei gildroi ac mae'n symud ar fuanedd $5u$. Darganfyddwch yr ergyd ar Q, buanedd Q ar ôl y gwrthdrawiad a'r cyfernod adfer rhwng P a Q.

13 Mae dau sffêr llyfn bach A a B, màs $2m$ a $5m$ yn ôl eu trefn, yn symud ar hyd Ox ac yn gwrthdaro. Cyflymder A yn syth cyn y gwrthdrawiad yw $5u$ i gyfeiriad positif x ac yn syth ar ôl y gwrthdrawiad, cyflymderau A a B i gyfeiriad positif x yw $2u$ a $4u$ yn ôl eu trefn. Darganfyddwch

(i) gyflymder B yn syth cyn y gwrthdrawiad,
(ii) faint yr ergyd ar B,
(iii) werth y cyfernod adfer.

14 Mae dau sffêr llyfn bach A a B â'r un radiws, ond â masau m a km yn ôl eu trefn, yn ddisymud ar lawr llorwedd llyfn. Mae sffêr B yn gorwedd rhwng sffêr A a wal fertigol lyfn ac mae ar bellter perpendicwlar o 3 m oddi wrth y wal. Mae llinell AB yn berpendicwlar i'r wal. Y cyfernod adfer ar gyfer gwrthdrawiadau rhwng y sfferau a rhwng sffêr B a'r wal yw 0.2. Yna teflir sffêr A yn uniongyrchol tuag at sffêr B ar fuanedd u ms^{-1}. Darganfyddwch gyflymderau'r sfferau yn syth ar ôl yr ardrawiad.

(i) O wybod bod $k = 3$, darganfyddwch
 (a) y pellter rhwng A a B pan fydd B yn taro'r wal,
 (b) y pellter o'r wal i'r pwynt lle mae'r sfferau yn gwrthdaro y tro nesaf.

(ii) O wybod bod $k \neq 3$ darganfyddwch werth lleiaf k fel nad yw'r sfferau yn gwrthdaro ar ôl i B daro'r wal.

15 Mae dwy bêl lefn A a B, masau 0.2 kg a 0.1 kg yn ôl eu trefn, yn symud mewn llinell fertigol syth trwy bwynt sefydlog O. Mae'r peli yn gwrthdaro ar bwynt P uwchben O. Yn syth cyn y gwrthdrawiad mae pêl A yn symud i lawr ac mae pêl B yn symud i fyny. Y cyfernod adfer rhwng y peli yw $\frac{3}{5}$ ac yn syth ar ôl y gwrthdrawiad mae pêl A yn symud i fyny ar fuanedd 1 ms^{-1} a phêl B yn symud i lawr ar fuanedd 17 ms^{-1}. Darganfyddwch

(i) fuaneddau'r ddwy bêl yn syth cyn y gwrthdrawiad,

(ii) yr ergyd a roddir i A gan y gwrthdrawiad.

Eglurwch pam y byddech yn cael yr un canlyniadau pe byddech yn ystyried y ddwy bêl yn cael eu taflu o bwynt islaw P ar yr un buanedd cychwynnol, gydag A yn cael ei thaflu o flaen B.

Pennod 7

Craidd màs

Ar ôl gweithio drwy'r bennod hon dylech allu

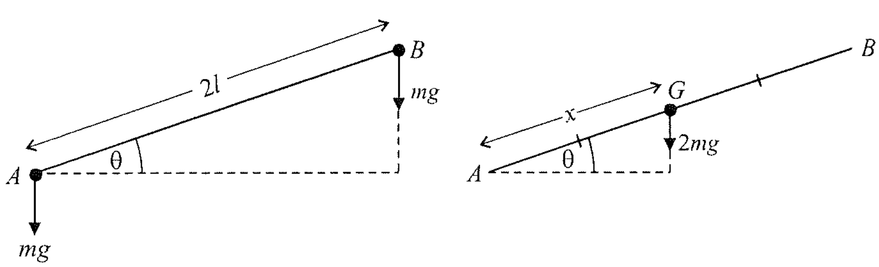
- darganfod craidd màs system gymhlan o ronynnau,
- darganfod craidd màs lamina plân unffurf,
- datrys problemau sy'n ymwneud â chydbwysedd lamina plân crog.

7.1 System gymhlan o ronynnau

Craidd màs nifer o ronynnau sy'n gorwedd ar blân yw'r pwynt y mae pwysau cydeffaith y system yn gweithredu drwyddo. Yn yr un modd, mae cyfanswm momentau'r pwysau o gwmpas y craidd màs yn sero.

Enghraifft 7.1

Mae dau ronyn gyda màs cyfartal, m, ym mhwynt A a B.



Mae'r system hon yn gyfartal â màs o 2m yn G, y craidd màs. Tybiwch mai $2l$ yw hyd AB. Cyfanswm momentau'r gronynnau o gwmpas A yw

$$\text{mg} \times 0 + \text{mg} \times 2l\cos\theta = 2\text{mg}l\cos\theta .$$

Momentau o amgylch A y màs cywerth o 2m yn G yw

$$2\text{mg} \times x\cos\theta = 2\text{mg}\,x\cos\theta .$$

Drwy wneud y momentau'n hafal, cawn $x = l$ fel bod G yn ganolbwynt rhwng A a B.

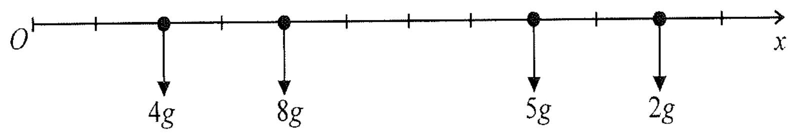
Yn yr un modd, cyfanswm momentau'r system o amgylch G yw

$$\text{mg} \times l\cos\theta - \text{mg} \times l\cos\theta = 0.$$

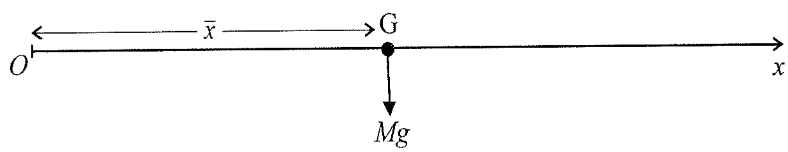
Nodwch y gellir gadael g allan o'r hafaliadau heb effeithio ar yr ateb.

Enghraifft 7.2

Darganfyddwch graidd màs gronynnau sydd â masau o 4 kg, 8 kg, 5 kg a 2 kg ac sy'n gorwedd ar yr echelin x yn y pwyntiau (2, 0), (4, 0), (8, 0) a (10, 0).



Tybiwch fod y grym cydeffaith Mg yn gweithredu drwy G ar yr echelin x ar bellter $\bar{x}$ o'r tarddiad O.



Trwy ddatrys yn fertigol cawn

$$\begin{aligned} Mg &= 4g + 8g + 5g + 2g \\ M &= 19. \end{aligned}$$

Drwy wneud momentau'r ddwy system gyfartal o gwmpas O yn hafal, cawn

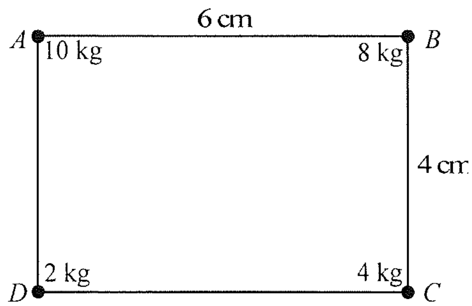
$$\begin{aligned} Mg \times \bar{x} &= (4g \times 2) + (8g \times 4) + (5g \times 8) + (2g \times 10) \\ 19\bar{x} &= 100 \\ \bar{x} &= 5.26. \end{aligned}$$

Mae'r craidd màs wedi'i leoli ar bwynt sydd 5.26 uned o'r tarddiad. Nodwch unwaith eto fod y cyflymiad disgyrchiant g yn diflannu o'r hafaliad, a gellir ei adael allan o'r broblem heb effeithio ar yr ateb.

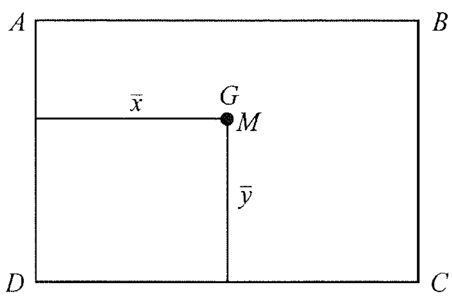
Pan nad yw pob un o'r masau ar linell syth, ond yn hytrach wedi eu gwasgaru ar blân, rhaid cael dau hafaliad momentau. Fel arfer, cymerir y rhain ar ongl sgwâr i'w gilydd.

Enghraifft 7.3

Mae gan y petryal *ABCD* ochrau *AB* = 6 cm a *BC* = 4 cm. Rhoddir gronynnau gyda màs 10 kg, 8 kg, 4 kg a 2 kg ym mhwyntiau *A*, *B*, *C* a *D*, yn y drefn honno. Darganfyddwch leoliad craidd màs y system.



Tybiwch fod y craidd màs yn *G*, lle bo $\bar{x}$ a $\bar{y}$ yn cynrychioli pellteroedd *G* oddi wrth *AD* a *DC*, yn y drefn honno.



Mae pwysau cydeffaith y system, Mg, yn gweithredu drwy *G* yn berpendicwlar i'r plân *ABCD*.

Gan ddatrys yn berpendicwlar i blân *ABCD*, cawn

$$\begin{aligned} Mg &= 10g + 8g + 4g + 2g \\ M &= 24. \end{aligned}$$

Gan wneud momentau'r ddwy system o amgylch *AD* yn hafal, cawn

$$\begin{aligned} Mg \times \bar{x} &= (10g \times 0) + (8g \times 6) + (4g \times 6) + (2g \times 0) \\ 24\,\bar{x} &= 72 \\ \bar{x} &= 3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Gan wneud momentau'r ddwy system o amgylch *DC* yn hafal, cawn

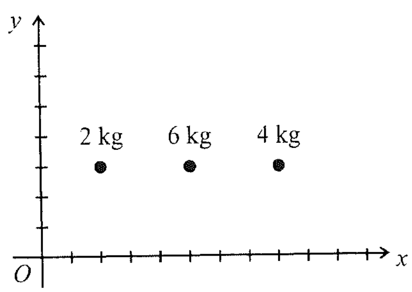
$$\begin{aligned} Mg \times \bar{y} &= (10g \times 4) + (8g \times 4) + (4g \times 0) + (2g \times 0) \\ 24\,\bar{y} &= 72 \\ \bar{y} &= 3\text{cm} \end{aligned}$$

Felly, mae'r craidd màs wedi'i leoli 3 cm oddi wrth *AD* a 3 cm oddi wrth *DC*.
Nodwch fod y cyflymiad disgyrchiant g yn diflannu ym mhob un o'r hafaliadau. Yn syml, M yw cyfanswm masau'r holl ronynnau.

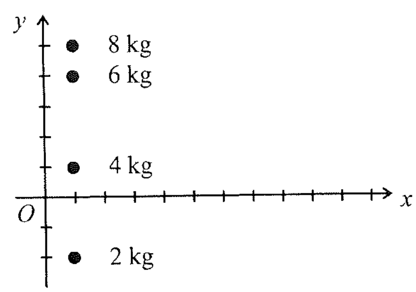
Ymarferion 7.1

1 Darganfyddwch gyfesurynnau craidd màs y systemau gronynnau canlynol.

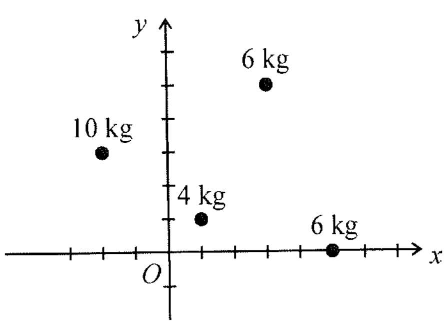
(a)



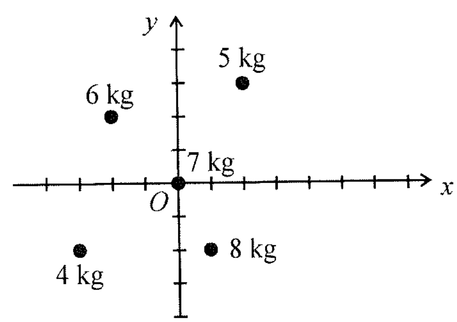
(b)



(c)



(d)



Yn ymarferion 2 – 4 isod, darganfyddwch leoliad craidd màs y system, gan roi eich atebion o'r pwyntiau cyfeirnod a awgrymir.

2 Gronynnau â màs 4, 7, 10, 13 kg yn A, B, C, D, lle mae $ABCD$ yn llinell syth gydag $AB = BC = CD = 5$cm. (Pellter oddi wrth A.)

3 Gronynnau â màs 3, 5, 4 kg yn A, B, C, lle mae ABC yn driongl gydag $AC = 5$m, $AB = 3$m a $BC = 4$m. (Pellteroedd oddi wrth AB a BC.)

4 Gronynnau â màs m, $2m$, $3m$, $4m$ a $6m$ yn A, B, C, D ac O, yn y drefn honno, lle mae $ABCD$ yn betryal gydag AB = 6m, $BC = 8$m ac mae AC a BD yn croestorri yn O. (Pellteroedd oddi wrth AB a DC.)

5 Mae gronynnau â màs 7kg, 3kg, 5kg, 6kg, m kg a M kg wedi'u lleoli ar fertigau hecsagon rheolaidd $ABCDEF$, yn y drefn honno. Mae craidd màs y system yn G, sydd ar CF, fel bod $CG : GF = 3 : 1$. Darganfyddwch m a M.

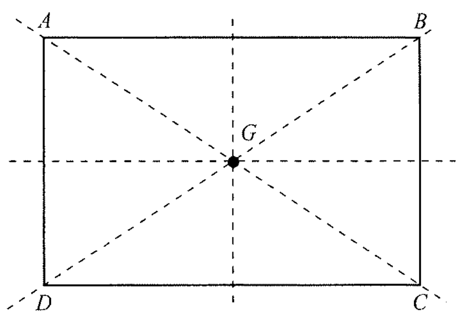
7.2 Lamina

Hyd yn hyn, rydym wedi trin gronynnau yn unig. Byddwn yn awr yn ystyried laminâu sy'n siapiau 2-ddimensiwn. Gellir anwybyddu'r trwch o'i gymharu â'r dimensiynau eraill. Gellir dangos bod pwynt ym mhob lamina, sef ei graidd màs, lle y gellir tybio bod ei fàs wedi'i grynhoi. Dyma'r pwynt y mae pwysau'r lamina yn gweithredu drwyddo.

Lamina unffurf

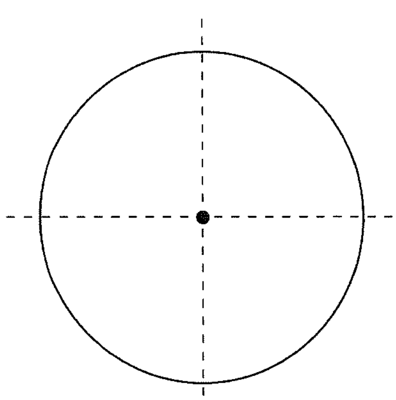
Mewn lamina unffurf, mae'r màs yn gyfrannol i'w arwynebedd. Dim ond siapiau syml y byddwn yn eu hystyried, megis y petryal, y cylch, y triongl a siapiau cyfansawdd sydd wedi'u llunio o gyfuniad o'r rhain, naill ai wedi eu hychwanegu neu wedi eu torri o siâp arall o'r math hwnnw. Yn ymarferol, nid yw'r rhan fwyaf o wrthrychau yn berffaith unffurf. Mae unffurfiaeth yn rhywbeth a dybir wrth fodelu.

Petryal



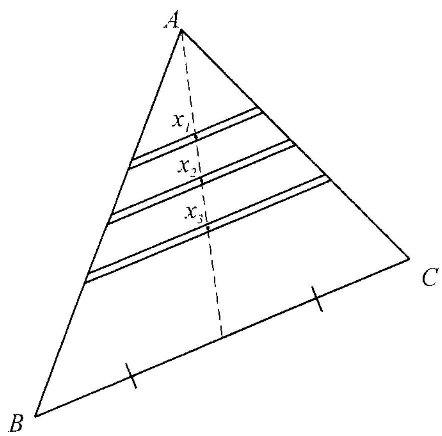
Mae craidd màs lamina unffurf petryalog yng nghanol geometregol y petryal, h.y. croestoriad ei groesliniau, neu groestoriad ei ddwy linell gymesuredd.

Cylch

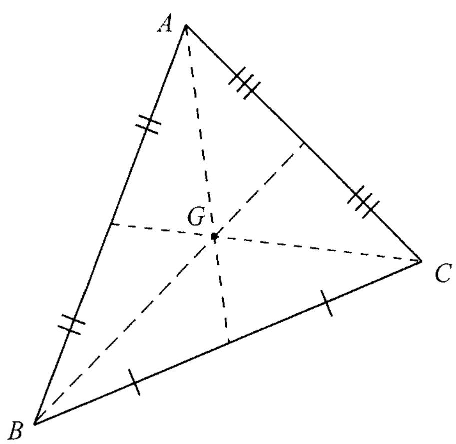


Mae craidd màs lamina crwn yng nghanol y cylch.

Triongl



Tybiwch fod lamina unffurf triongl ABC yn cael ei rannu i nifer fawr o stribedi paralel tenau gan linellau sy'n baralel i BC. Mae craidd màs pob stribed yn gorwedd yng nghanol x_1, x_2, x_3 ac ati pob stribed. Mae pob un o'r pwyntiau hyn, x_1, x_2 ac ati, yn gorwedd ar y llin ganol sy'n cysylltu A â chanolbwynt BC. Felly, mae'r craidd màs, G, yn gorwedd ar y llin ganol.



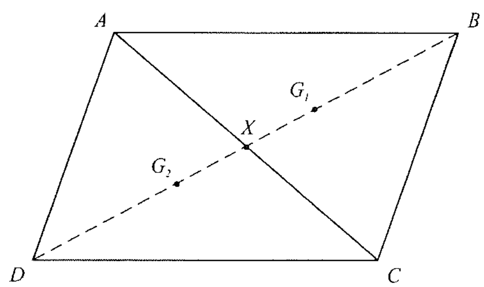
Yn yr un modd, mae'r craidd màs, G, hefyd yn gorwedd ar y ddwy lin ganol arall.
Felly, mae craidd màs lamina unffurf triongl yn gorwedd ar groestoriad tair llin ganol y triongl. Mae hwn yn $\frac{2}{3}$ o hyd y llin ganol o'r fertig.

Fel arfer, mae problemau'n ymwneud â siapiau cyfansawdd wedi'u ffurfio o'r siapiau syml hyn. Er enghraifft, gellir ychwanegu triongl at betryal er mwyn gwneud siâp tebyg i goeden Nadolig. Gellir tynnu siâp cylch o siâp arall. Efallai fod gronynnau wedi eu lleoli ar bwyntiau ar y lamina, neu efallai fod siâp wedi ei ffurfio o wifren unffurf.

Mae pob un o'r problemau hyn yn troi'n broblemau craidd màs system gymhlan o ronynnau; gyda phob siâp syml yn creu màs yn ei graidd màs.

Mae'n werth ystyried craidd màs rhai siapiau rheolaidd cyffredin. Rhoddir rhai enghreifftiau isod.

Paralelogram

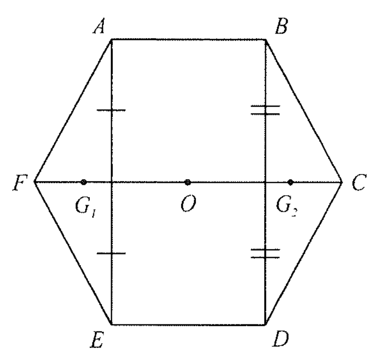


Mae croesliniau *AB* a *CD* yn croestorri ei gilydd. Mae'r paralelogram wedi ei wneud o ddau driongl *ABC* ac *ADC.*

Mae craidd màs triongl *ABC,* sef G_1, yn gorwedd ar *BD*, yn ogystal â chraidd màs triongl ADC, sef G_2.

Hefyd mae XG_1 yn hafal i XG_2, fel mai X yw craidd disgyrchiant *ABCD* hefyd.

Hecsagon



Gellir rhannu hecsagon rheolaidd *ABCDEF* yn drionglau *AEF*, *BCD* a phetryal *ABDE.*

O yw craidd màs petryal *ABDE.*

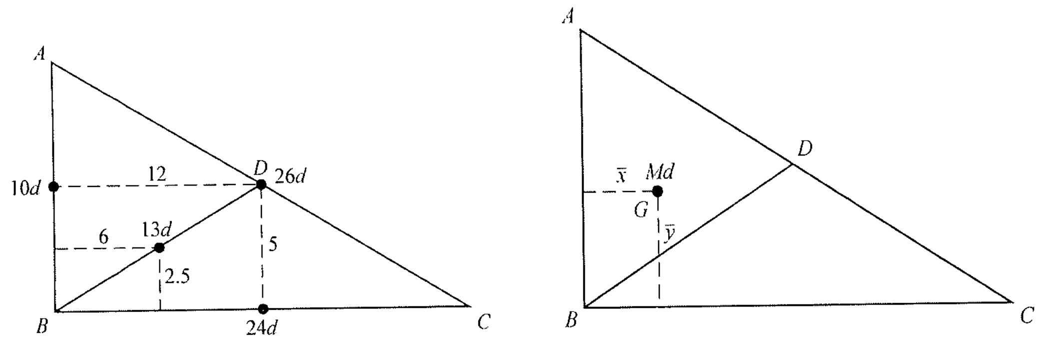
Mae craidd màs triongl *AEF*, sef G_1, yn gorwedd ar *FC*, yn ogystal â chraidd màs triongl *BCD*, sef G_2.

Gyda chymesuredd, mae $OG_1 = OG_2$ ac felly *O* yw craidd màs yr hecsagon hefyd.

Yn gyffredinol, canol geometregol lamina unffurf siâp rheolaidd yw ei graidd màs hefyd.

Enghraifft 7.4

Darganfyddwch graidd màs ffrâm sydd wedi'i gwneud o wifren unffurf ar siâp triongl ongl sgwâr ABC gydag ochrau AB = 10 cm, BC = 24 cm ac AC = 26 cm, gyda phwyslath yn cysyllyu D, canolbwynt AC, â B.



Er bod y broblem yn ymwneud â gwifren unffurf, mae'r masau yn ymddwyn fel pe byddent yn ronynnau wedi'u lleoli yng nghraidd màs pob darn o wifren.
Gadewch i ddwysedd y wifren fod yn d kg am bob cm. Mae'r broblem felly'n ymwneud â gronynnau mewn plân.
Mae gan AB, BC, AC a BD fasau o $10d$, $24d$, $26d$ a $13d$ kg wedi'u lleoli ar ei ganolbwynt fel a ddangosir yn y diagram.
Mae cyfanswm y màs $Md = 10d + 24d + 26d + 13d = 73d$ kg yn G, ar bellter o $\bar{x}$ oddi wrth AB a phellter o $\bar{y}$ oddi wrth BC.

Gan wneud momentau'r ddwy system o amgylch AB yn hafal, cawn

$$\begin{aligned} M\bar{x} &= (10 \times 0) + (13 \times 6) + (26 \times 12) + (24 \times 12) \\ 73\bar{x} &= 678 \\ \bar{x} &= 9.3\text{cm} \end{aligned}$$

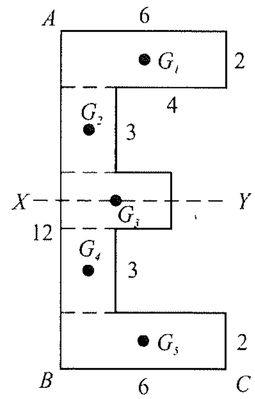
Gan wneud momentau'r ddwy system o amgylch BC yn hafal, cawn

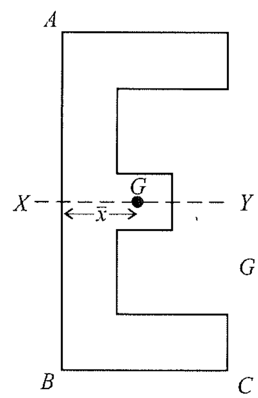
$$\begin{aligned} M\bar{y} &= (24 \times 0) + (13 \times 2.5) + (10 \times 5) + (26 \times 5) \\ 73\bar{y} &= 212.5 \\ \bar{y} &= 2.9\text{cm} \end{aligned}$$

Mae'r craidd màs 9.3 cm oddi wrth AB a 2.9 cm oddi wrth BC.

Enghraifft 7.5

Darganfyddwch graidd màs y darn cardbord sydd wedi'i dorri i'r siâp a ddangosir yn y diagram. Mae'r hydoedd mewn cm.





Gellir rhannu'r siâp yn 5 petryal a phob un ohonynt â chraidd màs yn ei ganol geometregol, a ddangosir gan G_1, G_2, G_3, G_4, a G_5 yn y diagram uchod. Mae ganddo linell gymesuredd XY, sydd 6 cm oddi wrth BC a bydd y craidd màs, G, yn gorwedd arni. Gadewch i ddwysedd y cardbord fod yn d kg y cm^2.

Cyfanswm màs $\quad Md = (6 \times 2)d + (3 \times 2)d + (4 \times 2)d + (3 \times 2)d + (6 \times 2)d$

$$M = 44$$

Tybiwch fod y craidd màs, G, ar bellter o $\bar{x}$ cm oddi wrth AB.

Gan wneud momentau'r ddwy system o amgylch AB yn hafal, cawn

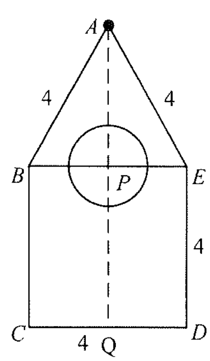
$$M \times \bar{x} = (12 \times 3) + (6 \times 1) + (8 \times 2) + (6 \times 1) + (12 \times 3)$$

$$44\bar{x} = 100$$

$$\bar{x} = 2.27$$

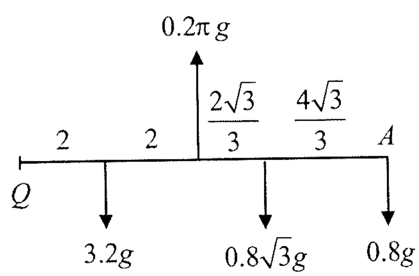
Mae'r craidd màs 2.27 cm oddi wrth AB a 6cm oddi wrth BC.

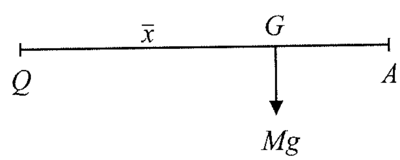
Enghraifft 7.6



Dengys y diagram lamina unffurf wedi'i ffurfio o driongl hafalochrog *ABE* wedi'i uno â sgwâr *BCDE*. Mae hyd pob ochr yn 4 cm. *P*, *Q* yw canolbwyntiau *BE* a *CD*, yn y drefn honno. Tynnir cylch â chanol *P* a radiws 1 cm o'r lamina. Rhoddir gronyn â màs 0.8 kg ynghlwm wrth bwynt *A*. Mae dwysedd y deunydd yn 0.2 kg y cm^2.
Darganfyddwch graidd màs y lamina.

Ceir llinell gymesuredd *AQ* a bydd y craidd màs, *G*, yn gorwedd arni.
Mae gan driongl *ABE* arwynebedd o $4\sqrt{3}$ cm^2, a màs o $0.8\sqrt{3}$ kg yn gweithredu ar bellter $\frac{2}{3} \times 4 \sin 60° = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm oddi wrth *A*.
Mae gan sgwâr *BCDE* arwynebedd o 16 cm^2, a màs o 3.2 kg yn gweithredu 2 cm oddi wrth *Q*.
Mae gan ronyn *A* fàs o 0.8 kg yn gweithredu yn *A*.
Mae gan gylch sydd â chanol *P* arwynebedd o π cm^2, a màs o 0.2π kg yn gweithredu yn *P*.
Tybiwch fod y craidd màs, *G*, ar bellter o $\bar{x}$ oddi wrth *Q*.





$$\text{Cyfanswm màs} \quad M = 3.2 - 0.2\pi + 0.8\sqrt{3} + 0.8$$
$$= 4 - 0.2\pi + 0.8\sqrt{3}$$

Gan wneud y ddwy system o gwmpas *Q* yn hafal, cawn

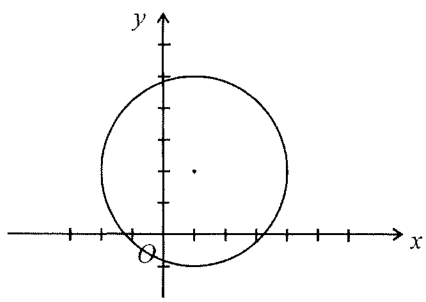
$$M \times \bar{x} = (3.2 \times 2) - (0.2\pi \times 4) + \left(0.8\sqrt{3} \times \left(4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right) + (0.8 \times (4 + 2\sqrt{3}))$$

Drwy amnewid gwerth M yn yr hafaliad hwn cawn $\bar{x} = 4.23$.
Mae'r craidd disgyrchiant yn gorwedd ar *AQ*, sydd 4.23 cm oddi wrth *Q*.

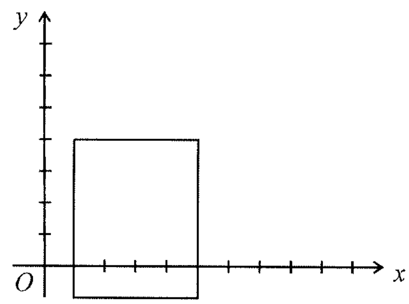
Ymarferion 7.2

1 Ysgrifennwch gyfesurynnau craidd màs y laminâu canlynol.

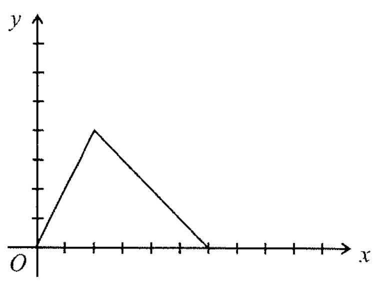
(a)



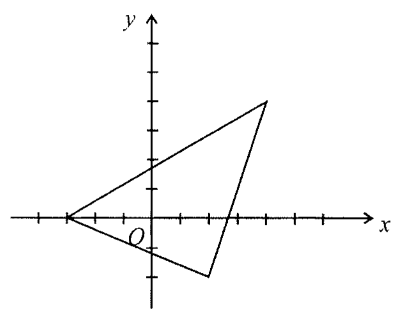
(b)



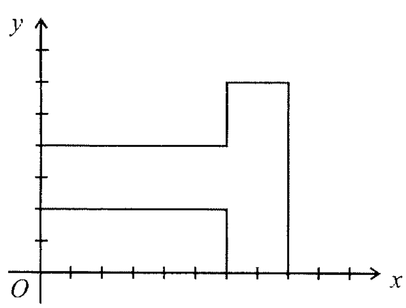
(c)



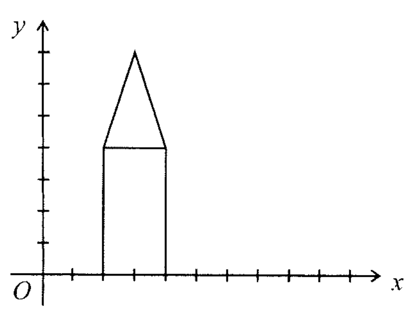
(d)



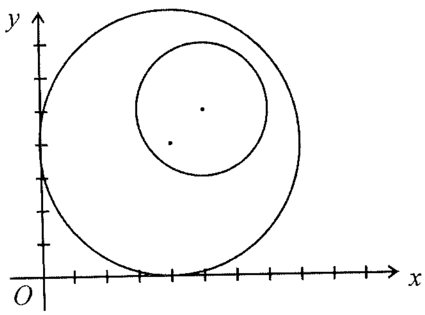
(e)



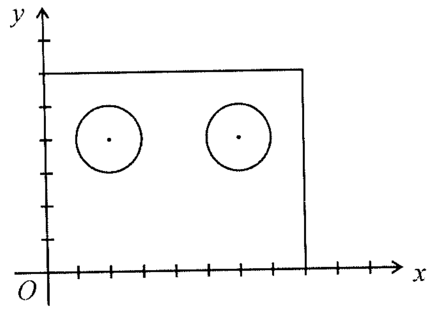
(f)



(g)



(h)



2 Mae *ABCD* yn daflen bapur sgwâr gyda chanol *O*, ac ochrau 24 cm. Caiff corneli *A* a *B* eu plygu fel eu bod yn cyd-daro yn *O*. Darganfyddwch safle craidd màs y daflen sydd wedi'i phlygu.

3 Mae *AB* a *CD* yn ochrau paralel i drapesiwm gyda hyd 4 cm a 6 cm a phellter o 10 cm rhyngddynt. Darganfyddwch y pellter rhwng y craidd màs a *CD*.

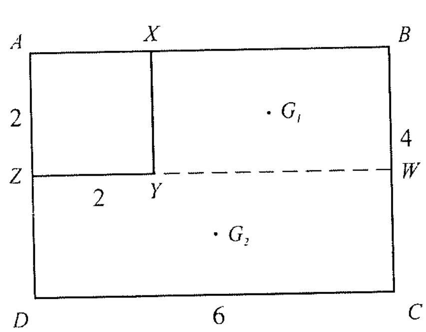
7.3 Cydbwysedd lamina crog

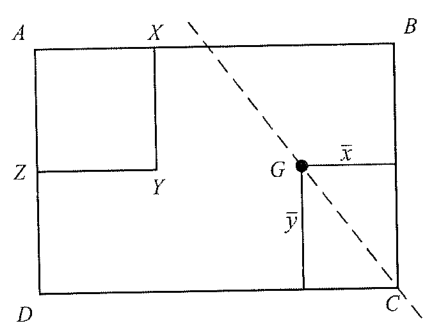
Os yw lamina'n hongian yn rhydd, mae'n gorffwys mewn cydbwysedd dan effaith ei bwysau cydeffaith sy'n gweithredu'n fertigol i lawr drwy ei graidd màs, a'r tyniant yn y llinyn. Mae'r ddau rym yn hafal ac yn gweithredu oddi wrth ei gilydd, a rhaid i'r llinell sy'n cysylltu'r pwynt crog a'r craidd màs fod yn fertigol.

<u>Enghraifft 7.7</u>

Mae *ABCD* yn lamina petryal unffurf gydag $AB = 6$ cm a $BC = 4$ cm. Caiff sgwâr ag ochrau hyd 2 cm gydag un gornel yn *A* ei dorri ohono. Mae'r lamina yn hongian mewn cydbwysedd wrth linyn sydd ynghlwm yn *C*.
Darganfyddwch yr ongl a wna *CB* gyda'r fertigol.

I ddechrau, darganfyddwch graidd màs y lamina.





Mae màs petryal *XYWB* yn 8 uned ac yn gweithredu yn G_1 sydd bellter 2 cm oddi wrth *BC* a 3 cm oddi wrth *DC*.
Mae màs petryal *ZDCW* yn 12 uned ac yn gweithredu yn G_2 sydd bellter 3 cm oddi wrth *BC* ac 1 cm oddi wrth *DC*.
Cyfanswm màs y Lamina M = 20 uned.
Gan wneud momentau'r ddwy system o amgylch *BC* yn hafal, cawn

$$\mathrm{M} \times \bar{x} = (8 \times 2) + (12 \times 3)$$

Drwy amnewid am M cawn

$$\bar{x} = 2.6$$

Gan wneud momentau'r ddwy system o amgylch *DC* yn hafal, cawn

$$\mathrm{M} \times \bar{y} = (8 \times 3) + (12 \times 1)$$

Drwy amnewid am M cawn

$$\bar{y} = 1.8$$

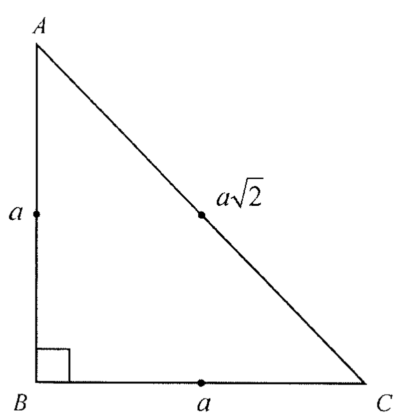
Mae craidd màs y lamina, sef *G*, 2.6 cm oddi wrth *BC* a 1.8 cm oddi wrth *DC*.
Pan gaiff y lamina ei hongian o *C*, mae *CG* yn fertigol. Felly $\angle BCG$ yw'r ongl rhwng *CB* a'r fertigol.

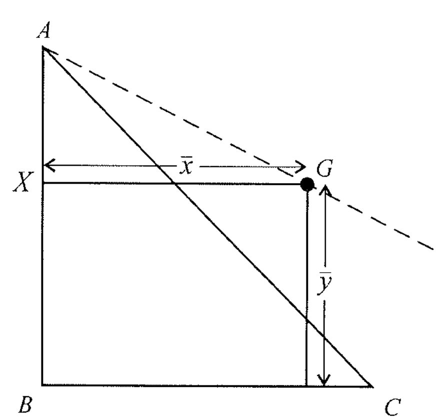
$$\tan \angle BCG = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{2.6}{1.8}$$

Cawn $\angle BCG = 55.3°$, felly mae *CB* yn ffurfio ongl o 55.3° â'r fertigol pan fo'r lamina yn hongian yn rhydd oddi wrth *C*.

Enghraifft 7.8

Gwneir triongl ongl sgwâr *ABC* o rodenni unffurf, gydag $AB = a$ m, $BC = a$ m a $\angle ABC = 90°$. Darganfyddwch y pellter rhwng *BA* a *BC* a chraidd màs y tair rhoden. Os caiff y triongl ei hongian mewn cydbwysedd o bwynt *A*, dangoswch y bydd *AB* yn ffurfio ongl 28.7° â'r fertigol.





Màs AB	=	a uned^2 yn gweithredu yng nghanolbwynt AB.
Màs BC	=	a uned^2 yn gweithredu yng nghanolbwynt BC.
Màs AC	=	$a\sqrt{2}$ uned^2 yn gweithredu yng nghanolbwynt AC
Cyfanswm màs	=	a $(2 + \sqrt{2})$ uned^2 yn gweithredu yn G, $\bar{x}$, $\bar{y}$ oddi wrth AB, BC, yn y drefn honno.

Gan wneud y ddwy system o amgylch AB yn hafal, cawn

$$a(2+\sqrt{2})\,\bar{x} = (a \times 0) + (a \times \frac{a}{2}) + (a\sqrt{2} \times \frac{a}{2})$$

$$\bar{x} = \frac{a(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})}$$

Gyda chymesuredd, mae $\bar{y} = \dfrac{a(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})}$.

Pan gaiff y system ei hongian o A, mae AG yn fertigol ac mae AB yn ffurfio ongl $\angle BAG$ â'r fertigol.

$$\tan \angle BAG = \frac{\text{XG}}{\text{XA}} = \frac{\bar{x}}{a-\bar{y}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})}}{\dfrac{1-(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}.$$

Felly, cawn $\angle BAG = 28.7°$, fel bod AB yn ffurfio ongl $28.7°$ â'r fertigol pan fo'r lamina'n hongian yn rhydd o A.

<u>Ymarferion 7.3</u>

1 Mae $ABCD$ yn lamina sgwâr gyda màs y gellir ei anwybyddu ac X, Y yw canolbwynt AB a BC, yn y drefn honno. Mae gronynnau gyda màs 1, 2, 3, 4 a 5 kg ynghlwm wrth X, B, Y, C a D, yn y drefn honno. Mae'r system yn hongian mewn cydbwysedd o A. Darganfyddwch, i'r radd agosaf, yr ongl rhwng AD a'r fertigol.

2 Mae lamina $ABCD$ ar ffurf siâp rhombws gydag ochrau 5 cm ac mae $AC = 8$ cm. Mae triongl ABC yn lamina unffurf â màs M ac mae triongl ACD yn lamina unffurf â màs 3M. Mae'r system yn hongian mewn cydbwysedd o A. Cyfrifwch yr ongl mae AC yn ei ffurfio gyda'r fertigol.

Ychwanegir màs kM at bwynt B fel bod AC yn fertigol pan gaiff ei hongian yn rhydd o A. Darganfyddwch werth k.

3 Caiff dwy roden unffurf AB a BC, sydd â hyd cyfartal o 2a a màs cyfartal o M, eu cysylltu'n anhyblyg yn B, fel bod $\angle ABC = 90°$. Caiff y rhodenni eu hongian mewn cydbwysedd o A. Darganfyddwch dangiad yr ongl a wna AB gyda'r fertigol.

Os ychwanegir màs kM at ben C, dangoswch mai $\dfrac{(1+2\text{k})}{(3+2\text{k})}$ yw tangiad yr ongl a wna AB gyda'r fertigol.

Cyfrifwch k os yw'r tangiad hwn yn $\frac{3}{4}$.

4 Mae hecsagon $ABCDEF$ yn rhodenni unffurf $AB = AF = DC = DE = 5$ cm, ac mae $BC = 4$ cm a $EF = 2$ cm. Mae'r pellter AD yn 10 cm, ac mae $\angle ABC = \angle BCD$ ac $\angle AFE = \angle FED$. Darganfyddwch bellter craidd màs y system oddi wrth BC.

Mae'r system yn hongian mewn cydbwysedd o bwynt B. Cyfrifwch yr ongl a wna BC gyda'r fertigol.

5 Mae gan lamina unffurf canol siâp disg crwn, O, a radiws o $OA = 2\text{a}$. Caiff darn crwn gyda diamedr OA ei dynnu allan ohono. Mae gan y lamina newydd fàs M kg. Dangoswch fod craidd màs y lamina $\dfrac{a}{3}$ oddi wrth O.

BC yw'r diamedr sy'n berpendicwlar i OA. Caiff gronyn gyda màs $\dfrac{M}{3}$ kg ei roi ynghlwm wrth y lamina ym mhwynt C. Caiff y system ei hongian yn rhydd o B ac mae mewn cydbwysedd. Darganfyddwch dangiad yr ongl a wna OB gyda'r fertigol.

6 Ceir llen o fetel siâp petryal unffurf, $ABCD$, gydag $AB = 8a$ a $BC = 4a$. X yw canolbwynt AD ac Y yw canolbwynt BC. Mae P a Q yn ddau bwynt sy'n gorwedd ar XY fel bod $PQ = 2a$. Caiff cylch gyda diamedr PQ ei dynnu ohono. Caiff gweddill y llen fetel ei hongian o B a gwelir bod BP yn fertigol pan fo'r system yn gytbwys. Dangoswch fod craidd màs gweddill y lamina bellter $a\left(4-\dfrac{\pi}{32}\right)$ oddi wrth AD.

ATEBION

Ymarferion 2.1

1. 2.85N, 10.6N
2. -4N, -6.93N
3. -4.79N, 13.2N
4. 5.13N, -14.1N

5(a). -5N, -8.66N
 (b). -4.60N, -3.86N

6(a). 4N, -6.93
 (b). 1.37N, -3.76N

Ymarferion 2.2

1. 7N, 2N
2. 14N, 6.93N
3. 1.41N, -0.101N
4. 1.73N, -2N
5. -8.57N, -4.55N

Ymarferion 2.3

1. 12N
2. α=0, P=6N
3. P=11.3N, Q=4.10N
4. P=17.1N, Q=12.8N
5. 5.96N, Q=4.39
6. 26N, 67°
7. 14.7N, 4°

8(i). R=5N, $\tan\theta = \frac{3}{4}$
 (ii). R=7.28N, $\tan\theta = \frac{2}{7}$

Ymarferion 2.4

1(a). 3.92N, 3.92N
 (b). 1.5kg, 14.7N

2(a). 29.4N
 (b). 2kg

3. 0.4m
4. 1000N
5. 1.4m
6. 3.29N
7. P=1.96N, T=3.39N
8. 2.78N, 3.08N
9. $\dfrac{mg}{(1+\cos\alpha)}\sin\alpha$
10. 2.08m
11. 2.09m
12. 588N, 509N, llorweddol,
 882N, fertigol
13. 261N
14. 3.53kg, 20N
15. 0.2
16. 9.8N, 9.8N ac 13.7N, 0.11

Ymarferion 2.5

1(a). 30.6N
 (b). 78.3N

2. 0.340

3(i). 7.84N (ii). 9.26N

4(i). 17.8N (ii). 27.2N

5(i). 102N (ii). 11.5N

6. 0.255

Ymarferion 2.6

1(a). 7.62N, 23.2°
(b). 8.94N, -63.4°
(c). 11.4N, 105°
(d). 13.9N, 249°
(e). 8.06N, 150.3°
(f). 4.24N, 225°

2(a). 3.74N, -77.8°
(b). 5.95N, 141°
(c). 5.92N, 72.5°

3(a). 3.74N ar 102.2°
(b). 5.95N ar –39°
(c). 5.92N ar 252.5°

Ymarferion Amrywiol 2

1(a). 20N, 21N
(b). 29N
(c). 46.4°
(d). 29N ar 226.4° i gyfeiriad x

2. 1, 7
3. 42N ar 261.8° i AB
4. 22, 60°
5. ysgafn, 0.48m
6. 78N, 325N
7(i). $\sqrt{3}\,P$ (ii). 150° (iii). 120°, 60°
9. 16.7°
10. 4022N, 1105N
11. 31°
12. 0.24
13. 0.58
14. 11.4N, 13.9N
15(a). 80N
(b). 69.28N
16. 0.5
17. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{\sqrt{15}}$
18(i). 1975N (ii). 3890N (iii). 3712N
20(i). 1.96N (ii). 41.8°
21(i). 4.62N (ii). –0.63N
22. 1.73kN

Ymarferion 3.1

1. -6.4Nm, -2.4Nm
2. 3.8Nm, -7.6Nm
3. 1.6Nm, 9.6Nm
4. -3.3Nm, -3.9Nm
5. 5.2Nm
6. 26Nm
7. -3Nm
8. 18Nm
9. 11Nm
10. -1Nm
11. $2\theta\,\ell\cos\theta - W\ell\cos\theta$, $\theta\,\ell\cos\theta - P\ell\sin\theta$
12. $2\theta\,\ell\cos\theta - W\ell\cos\theta - F2\ell\sin\theta$,
$\theta\,\ell\cos\theta - P\ell\sin\theta - F\,\ell\sin\theta$
13. $4S\ell\cos\theta - 10W\ell\cos\theta$,
$6W\ell\cos\theta - 4R\ell\cos\theta$
14. $2Fa\sin\theta - Wa\sin 2\theta$, $2Ra - Wa\sin 2\theta$

Ymarferion 3.2

1. 10N, 6N
2. 13N, 4N
3. 1N, 15N
4. 6N, 3N
5. 4kg
6. $2\frac{2}{3}$ m o B
7. $1\frac{2}{3}$ m
8. 21.82N, 38.18N, 40N
9. m tan 15°

ATEBION

Ymarferion 2.1

1. 2.85N, 10.6N
2. -4N, -6.93N
3. -4.79N, 13.2N
4. 5.13N, -14.1N

5(a). -5N, -8.66N
(b). -4.60N, -3.86N
6(a). 4N, -6.93
(b). 1.37N, -3.76N

Ymarferion 2.2

1. 7N, 2N
2. 14N, 6.93N
3. 1.41N, -0.101N
4. 1.73N, -2N
5. -8.57N, -4.55N

Ymarferion 2.3

1. 12N
2. α=0, P=6N
3. P=11.3N, Q=4.10N
4. P=17.1N, Q=12.8N
5. 5.96N, Q=4.39
6. 26N, 67°
7. 14.7N, 4°

8(i). R=5N, $\tan\theta = \frac{3}{4}$
(ii). R=7.28N, $\tan\theta = \frac{2}{7}$

Ymarferion 2.4

1(a). 3.92N, 3.92N
(b). 1.5kg, 14.7N
2(a). 29.4N
(b). 2kg
3. 0.4m
4. 1000N
5. 1.4m
6. 3.29N
7. P=1.96N, T=3.39N
8. 2.78N, 3.08N
9. $\dfrac{mg}{(1+\cos\alpha)}\sin\alpha$
10. 2.08m
11. 2.09m
12. 588N, 509N, llorweddol,
882N, fertigol
13. 261N
14. 3.53kg, 20N
15. 0.2
16. 9.8N, 9.8N ac 13.7N, 0.11

Ymarferion 2.5

1(a). 30.6N
(b). 78.3N
2. 0.340
3(i). 7.84N (ii). 9.26N
4(i). 17.8N (ii). 27.2N
5(i). 102N (ii). 11.5N
6. 0.255

Ymarferion 2.6

1(a). 7.62N, 23.2°
(b). 8.94N, -63.4°
(c). 11.4N, 105°
(d). 13.9N, 249°
(e). 8.06N, 150.3°
(f). 4.24N, 225°
2(a). 3.74N, -77.8°
(b). 5.95N, 141°
(c). 5.92N, 72.5°
3(a). 3.74N ar 102.2°
(b). 5.95N ar –39°
(c). 5.92N ar 252.5°

Ymarferion Amrywiol 2

1(a). 20N, 21N
(b). 29N
(c). 46.4°
(d). 29N ar 226.4° i gyfeiriad x
2. 1, 7
3. 42N ar 261.8° i AB
4. 22, 60°
5. ysgafn, 0.48m
6. 78N, 325N
7(i). $\sqrt{3}$ P (ii). 150° (iii). 120°, 60°
9. 16.7°
10. 4022N, 1105N
11. 31°
12. 0.24
13. 0.58
14. 11.4N, 13.9N
15(a). 80N
(b). 69.28N
16. 0.5
17. $\frac{1}{4}, \frac{3}{\sqrt{15}}$
18(i). 1975N (ii). 3890N (iii). 3712N
20(i). 1.96N (ii). 41.8°
21(i). 4.62N (ii). –0.63N
22. 1.73kN

Ymarferion 3.1

1. -6.4Nm, -2.4Nm
2. 3.8Nm, -7.6Nm
3. 1.6Nm, 9.6Nm
4. -3.3Nm, -3.9Nm
5. 5.2Nm
6. 26Nm
7. -3Nm
8. 18Nm
9. 11Nm
10. -1Nm
11. $2\theta\,\ell\cos\theta - W\ell\cos\theta$, $\theta\,\ell\cos\theta - P\ell\sin\theta$
12. $2\theta\,\ell\cos\theta - W\ell\cos\theta - F2\ell\sin\theta$,
$\theta\,\ell\cos\theta - P\ell\sin\theta - F\,\ell\sin\theta$
13. $4S\ell\cos\theta - 10W\ell\cos\theta$,
$6W\ell\cos\theta - 4R\ell\cos\theta$
14. $2Fa\sin\theta - Wa\sin 2\theta$, $2Ra - Wa\sin 2\theta$

Ymarferion 3.2

1. 10N, 6N
2. 13N, 4N
3. 1N, 15N
4. 6N, 3N
5. 4kg
6. $2\frac{2}{3}$m o B
7. $1\frac{2}{3}$m
8. 21.82N, 38.18N, 40N
9. m tan 15°

Ymarferion 3.3

1. 12N ar 3.5m i'r dde o O
2. 16N i lawr ar 3.375m i'r chwith o O.
3. 26N i fyny ar 8m i'r dde o O.
4. 12N i lawr ar 4.5m i'r dde o O.
5. 4N i fyny ar 11m i'r dde o O.

Ymarferion Amrywiol 3

1. 128.7Nm, 91.93N yn berpendicwlar i AB.
2. 240N, 460N
3. 64N, 220N, 300N
4. 4m o A
5. 4.35 kNm
6. 1421N, 1274N
7. 857.5N, 1347.5N
8. 2W, 6W, $\frac{4W}{3}$, $\frac{16W}{3}$

9(a). 7.5kN, 10.5kN
(b). 7.5kN

10. 75 tunnell fetrig, 3.75m

11(a). 105N
(b). 2.91m
(c). 105N, 210N

12. 5kg, $\frac{12a}{5}$
13. R=1N, S=3.5N, P=4.5N
14. 18.4°
15. $\frac{7Wa}{4a-x}$, $\frac{Wa}{2a-x}$

Ymarferion 4.1

1. 2
2. 3, -13.5
3. 14
4. 27.5
5. 2.5
6. 2
7. 2
8. $\frac{10}{3}$
9. 4
10. 1.6, 2
11. u=12, a=0.5, u=13, a=0
12. t=6
13. t=3, 6
14. $\frac{20}{3}ms^{-2}$, $4ms^{-2}$, 280m
15. 32s, 12s, 16s
16. 5s
17. $15ms^{-1}$, $0.15ms^{-2}$
18. $10ms^{-1}$, 300s
19. 21s

Ymarferion 4.2

1. 20.4m, 4.1s
2. 29.7, 2.02s

3(a). 1.02s, 8.16s (b). 6.2s, 2.9s

4. 39.4
5. 6.1s
6. $14.9ms^{-1}$, 1s
7. 432.9m
8. $\frac{u}{g} + \frac{1}{2}T$
9. $13.5ms^{-1}$, 2.3m
10. 22.5m

11(i) 2s (ii) 4.4m o'r gwaelod

12. 7.35m

Ymarferion Amrywiol 4

1(a). $1.1ms^{-1}$ (b). 0.95m

(c). $8.2 - 1.2t - 0.2t^2$ (d). 3, 5

2. $\frac{47}{3}$, $\frac{40}{3}$m

3. 905.6m

4. 126m

5(i). 16 (ii). $0.8ms^{-2}$

6(i). $20ms^{-1}$ (ii) $0.25ms^{-2}$, 2200m

7. $\frac{192}{u+6}$ s, $\frac{60}{u}$ s

(i). 10 (ii). $\frac{1}{3}ms^{-2}$, $\frac{5}{3}ms^{-2}$

9. $\frac{10}{u}$, $\frac{14}{u}$, $\frac{6}{u}$

(i). 5 (ii). $\frac{5}{2}ms^{-2}$, $\frac{25}{6}ms^{-2}$

10(i). $\frac{1}{2}ft^2 + b - ut$

(ii). $-\frac{v^2}{2f} + (v-u)t + b$, $b - \frac{u^2}{2f}$

11. 225s

12(b). $0.4ms^{-2}$, 1125m

(c). 825s

(d). 960s

13. 1m

14. 6, $\frac{2}{3}$

15(i). 11.025m (ii) 1.5s

(iii). $4.9ms^{-1}$

16(i). 0.5m (ii) 1s

17. $\frac{351u^2}{800g}$, $\frac{5u}{4}$

18. $19.6t - 4.9t^2$,

$19.6(t-2) - 4.9(t-2)^2$, 3, $9.8ms^{-1}$

19. 8cm

Ymarferion 5.1

1. 1800N

2. $2ms^{-2}$

3 (i). 45 (ii). 60m

4. 134

5(i). $3ms^{-2}$ (ii). 1300kg (iii). 96m

6(i). 313.6N (ii) 313.6N

7. 103N, 98N, 95.5N

8. 1404N, 1420N, 1388N

9. 3

10. 0.057

11. $10.2ms^{-2}$

12. g

13. 18.375m, 0.23

14. $2.12ms^{-2}$

15. Ar 53.1° i rym o faint 30N ac o faint $100ms^{-2}$

Ymarferion 5.2

1. $0.25ms^{-2}$

2(i). 1260N (ii). 3180N

3(i). 1560N (ii). 520N

4. 1000N, 500N, 700N

5(a). (i). 2400N (ii). 1600N (iii). 800N

(b). (i) 17400N (ii). 11600N (iii). 5800N

6. $0.9ms^2$, 385N

Ymarferion 5.3

1. $2.45ms^{-2}$, 36.75N

2. $3.92\ ms^{-2}$, 41.2N

3. 0.2g, 4.8Mg

4. $6.1\ ms^{-2}$, 18.4N

5. 11.1N

6. 29.4N

7. $6.9ms^{-2}$

8. 33.1N

9. $6.3ms^{-2}$

10. $2.45ms^{-2}$

Ymarferion Amrywiol 5

1. 4900N, 13300N
2. 720, 50s
3. $\frac{10}{3}$ s, $\frac{130}{3}$ m

4(i). $\frac{1}{8}ms^{-2}$, $\frac{1}{8}ms^{-2}$

(ii). 198.5N, 196N, 193.5N

5. 552N, 0.65 ms^{-2}, 0.65ms^{-2}
6. 1.65kg, 0.89ms^{-2}
7. $v^2 > 2a\left(\frac{R}{m} + g\right)$

8(a). 470.4N

(b). 494.9N, 382N

9(a). (i) 1ms^{-2} (ii) 1250m

(b). (i) $\frac{5}{3}$ ms^{-2} (ii) 12kN

10. 0.37
11. (i) $\frac{3g}{5}$ (ii) $\frac{16mg}{5}$
12. N = 7, T = 38016

13(a). (i) ysgafn (ii) llyfn, (b) $\frac{3g}{5}$

15. 6mg, 5a

16(a). $\frac{2g}{3}$, $\frac{2mg}{3}$ (b). $\frac{4g}{9}$, $\frac{7mg}{9}$

17. $\frac{3g}{10}$, 2.6mg, $\frac{2d}{5}$

Ymarferion 6.1

1(a). 0.12Ns

(b). 7.5Ns

(c). 30000Ns

2. 1 Ns
3. -9.6Ns
4. -4.4Ns
5. 4 ms^{-1}
6. 10500Ns
7. 2.86ms^{-1}
8. 1.44 Ns
9. 5.7N
10. 3.4Ns

Ymarferion 6.2

1. 2
2. 1.25
3. 3.71
4. 3.29
5. 2.2
6. 2.6
7. 8.3ms^{-1}
8. 0.86ms^{-1}
9. 2.3kmh^{-1}
10. 3.79ms^{-1v}
11. 0.038

Ymarferion 6.3

1. 0.8m
2. 0.79
3. 1.13m
4. 1.92Ns
5. 4.23ms^{-1}
6. 4.25, 6.25
7. 0.25, 4
8. 4.29, 0.43
9. 1.8, 3.8
10. 0.47, 3.6
11. 9, 0.17
12. $e > \frac{1}{2}$
13. 0.11 ms^{-1}, 0.12ms^{-1}, 0.77ms^{-1}

Ymarferion Amrywiol 6

1. $9.9ms^{-1}$, $21.8ms^{-1}$
2. $1.15ms^{-1}$, 1385Ns
3. $23.2ms^{-1}$, 8200Nsv
4. $\frac{g}{9}$, $40\frac{mg}{9}$, $\frac{9V}{11}$

5(a). $3.4ms^{-1}$
 (b). 0.5

6. $\frac{20u}{3}$, $\frac{2}{3}$

8. 1.06m

9(a). $u|4a-2|$, $u|2a-3|$
 (b). $\frac{6a}{5}-1$
 (c). $\frac{5}{6} \le a \le \frac{5}{3}$

10. $\frac{5u}{2}$, $\frac{7}{8}$

11. $q > 20$

12. 8mu, 3.33, 0.19

13(a). 2.8u
 (b). 6mu
 (c). 0.91

14. $\frac{1.2u}{k+1}$, $\frac{(1-0.2k)u}{1+k}$
 (i)(a). 2m (b). 0.75m (c). 6.2

15(i). $15ms^{-1}$ (ii) 3.2Ns

Ymarferion 7.1

1(a). (5, 3)
 (b). (1, 3.2)
 (c). (0.1, 3.2)
 (d). $(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{6})$

2. $9\frac{12}{17}$cm
3. $\frac{4}{3}$m, $\frac{3}{4}$m
4. 5m, 3m
5. m = 4kg, m = 33kg

Ymarferion 7.2

1(a). (1, 2)
 (b). $(3, 1\frac{1}{2})$
 (c). $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$
 (d). (1, 0)
 (e). $(4\frac{1}{2}, 3)$
 (f). $(3, \frac{31}{11})$v
 (g). $(3\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3})$v
 (h). (4, 2.85)

2. 11cm o DC, 12cm o AD
3. $4\frac{2}{3}$ cm

Ymarferion 7.3

1. 42°
2. $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$
4. $3\frac{11}{16}$, 59.7°
5. $\frac{1}{10}$

Ymarferion Amrywiol 5

1. 4900N, 13300N
2. 720, 50s
3. $\frac{10}{3}$ s, $\frac{130}{3}$ m

4(i). $\frac{1}{8}$ ms^{-2}, $\frac{1}{8}$ ms^{-2}

(ii). 198.5N, 196N, 193.5N

5. 552N, 0.65 ms^{-2}, 0.65ms^{-2}
6. 1.65kg, 0.89ms^{-2}
7. $v^2 > 2a\left(\frac{R}{m} + g\right)$

8(a). 470.4N

(b). 494.9N, 382N

9(a). (i) 1ms^{-2} (ii) 1250m

(b). (i) $\frac{5}{3}$ ms^{-2} (ii) 12kN

10. 0.37
11. (i) $\frac{3g}{5}$ (ii) $\frac{16mg}{5}$
12. N = 7, T = 38016

13(a). (i) ysgafn (ii) llyfn, (b) $\frac{3g}{5}$

15. 6mg, 5a

16(a). $\frac{2g}{3}$, $\frac{2mg}{3}$ (b). $\frac{4g}{9}$, $\frac{7mg}{9}$

17. $\frac{3g}{10}$, 2.6mg, $\frac{2d}{5}$

Ymarferion 6.1

1(a). 0.12Ns

(b). 7.5Ns

(c). 30000Ns

2. 1 Ns
3. -9.6Ns
4. -4.4Ns
5. 4 ms^{-1}
6. 10500Ns
7. 2.86ms^{-1}
8. 1.44 Ns
9. 5.7N
10. 3.4Ns

Ymarferion 6.2

1. 2
2. 1.25
3. 3.71
4. 3.29
5. 2.2
6. 2.6
7. 8.3ms^{-1}
8. 0.86ms^{-1}
9. 2.3kmh^{-1}
10. 3.79ms^{-1v}
11. 0.038

Ymarferion 6.3

1. 0.8m
2. 0.79
3. 1.13m
4. 1.92Ns
5. 4.23ms^{-1}
6. 4.25, 6.25
7. 0.25, 4
8. 4.29, 0.43
9. 1.8, 3.8
10. 0.47, 3.6
11. 9, 0.17
12. e > $\frac{1}{2}$
13. 0.11 ms^{-1}, 0.12ms^{-1}, 0.77ms^{-1}

Ymarferion Amrywiol 6

1. $9.9ms^{-1}$, $21.8ms^{-1}$
2. $1.15ms^{-1}$, 1385Ns
3. $23.2ms^{-1}$, 8200Nsv
4. $\frac{g}{9}$, $40\frac{mg}{9}$, $\frac{9V}{11}$

5(a). $3.4ms^{-1}$

(b). 0.5

6. $\frac{20u}{3}$, $\frac{2}{3}$

8. 1.06m

9(a). $u|4a-2|$, $u|2a-3|$

(b). $\frac{6a}{5}-1$

(c). $\frac{5}{6} \le a \le \frac{5}{3}$

10. $\frac{5u}{2}$, $\frac{7}{8}$

11. $q > 20$

12. 8mu, 3.33, 0.19

13(a). 2.8u

(b). 6mu

(c). 0.91

14. $\frac{1.2u}{k+1}$, $\frac{(1-0.2k)u}{1+k}$

(i)(a). 2m (b). 0.75m (c). 6.2

15(i). $15ms^{-1}$ (ii) 3.2Ns

Ymarferion 7.1

1(a). (5, 3)

(b). (1, 3.2)

(c). (0.1, 3.2)

(d). $(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{6})$

2. $9\frac{12}{17}$cm
3. $\frac{4}{3}$m, $\frac{3}{4}$m
4. 5m, 3m
5. m = 4kg, m = 33kg

Ymarferion 7.2

1(a). (1, 2)

(b). $(3, 1\frac{1}{2})$

(c). $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$

(d). (1, 0)

(e). $(4\frac{1}{2}, 3)$

(f). $(3, \frac{31}{11})$v

(g). $(3\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3})$v

(h). (4, 2.85)

2. 11cm o DC, 12cm o AD
3. $4\frac{2}{3}$ cm

Ymarferion 7.3

1. 42°
2. $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}$
4. $3\frac{11}{16}$, 59.7°
5. $\frac{1}{10}$

MYNEGAI