Mudiant Harmonig Syml

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon, dylech
- wybod beth a olygir wrth fudiant harmonig syml (M.H.S.) a gallu adnabod problemau sy'n ymwneud â mudiant harmonig syml,
- allu datrys problemau cinematig a dynamig sy'n cynnwys mudiant harmonig syml,
- allu mireinio'r problemau i gymryd gwanychu i ystyriaeth.

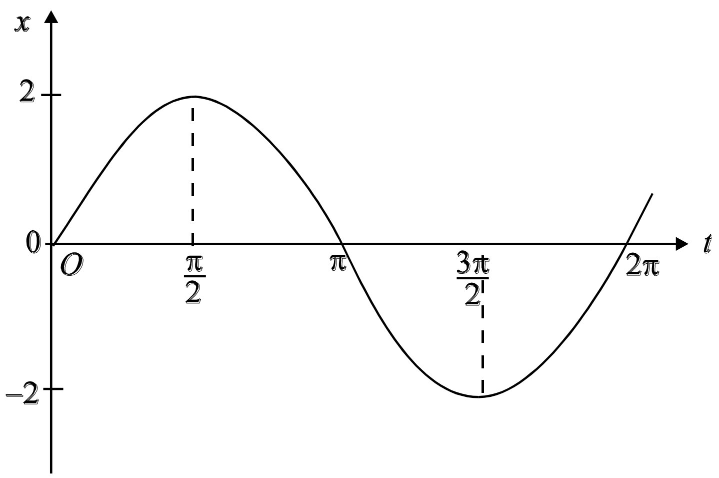
1 Syniadau sylfaenol

Mae mudiant harmonig syml yn fudiant arbennig ar linell syth ac efallai mai'r ffordd orau i'w ddeall yw trwy edrych ar ddwy enghraifft.

Yn yr enghraifft gyntaf, ystyriwn ronyn P sy'n symud ar hyd yr echelin x yn y fath fodd fel y rhoddir ei ddadleoliad x metr o'r tarddiad, ar amser t eiliad, gan

$$x = 2 \sin t.$$

Mae'r diagram yn dangos ymddygiad x gyda t.



Felly rhoddir cyflymder y gronyn i gyfeiriad x cynyddol, sef v ms^{-1}, gan

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 \cos t.$$

Pan fydd $t = 0$ mae'r gronyn ar y tarddiad a'i gyflymder yn 2 ms^{-1} i gyfeiriad x positif. Felly bydd P yn dechrau symud i gyfeiriad x cynyddol. Mae gwerth mwyaf x yn digwydd pan fydd sin t yn cyrraedd ei werth mwyaf, sef 1, gyntaf ac mae hyn yn digwydd pan fydd $t = \frac{\pi}{2}$. Y gwerth mwyaf ar gyfer x felly yw 2. Gan fod $t = \frac{\pi}{2}$, bydd cyflymder P yn sero pan fydd x ar ei werth mwyaf, h.y. pan fydd P ar ei bellter mwyaf o'r tarddiad. Wrth i t barhau i gynyddu mae x yn dechrau lleihau a bydd P yn cyrraedd y tarddiad pan fydd $\sin t = 0$, h.y. pan fydd $t = \pi$. Ar yr ennyd hwn, mae $v = -2$ ac felly mae P yn symud i gyfeiriad x negatif gyda buanedd 2 ms^{-1}. Pan fydd $t > \pi$, bydd $\sin t$ yn negatif a bydd x yn parhau i leihau nes i $\sin t$ gyrraedd ei werth lleiaf, sef -1, a bydd hyn yn digwydd pan fydd $t = \dfrac{3\pi}{2}$. Ar yr amser hwn, mae $v = 0$ ac felly mae P yn ddisymud yn enydaidd.

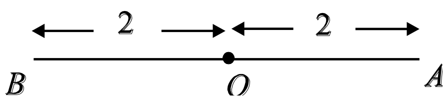
Pan fydd $t > \dfrac{3\pi}{2}$, bydd v yn bositif ac felly bydd P yn symud i gyfeiriad x positif a bydd yn cyrraedd y tarddiad pan fydd $\sin t = 0$, h.y. pan fydd $t = 2\pi$. Ar yr amser hwn mae $v = 2$ ac felly mae P yn symud gyda buanedd 2 ms^{-1} i gyfeiriad x positif. Dyma'r un sefyllfa yn union â phan oedd $t = 0$ ac felly bydd y mudiant yn digwydd eto ac felly, er enghraifft, ymhen amser pellach o $\dfrac{\pi}{2}$ eiliad bydd P unwaith eto ar ei bellter mwyaf o'r tarddiad. Dyma felly yw'r camau yn y mudiant:

(i) bydd P yn teithio o'r tarddiad i bwynt A yn y diagram canlynol lle mae $x = 2$, lle bydd yn dod i aros yn enydaidd,

(ii) bydd P yn teithio o A i'r tarddiad, lle mae $v = -2$,

(iii) bydd P yn teithio o'r tarddiad i bwynt B lle mae $x = -2$, lle bydd yn dod i aros yn enydaidd,

(iv) bydd P yn teithio o B i'r tarddiad, lle mae $v = 2$.

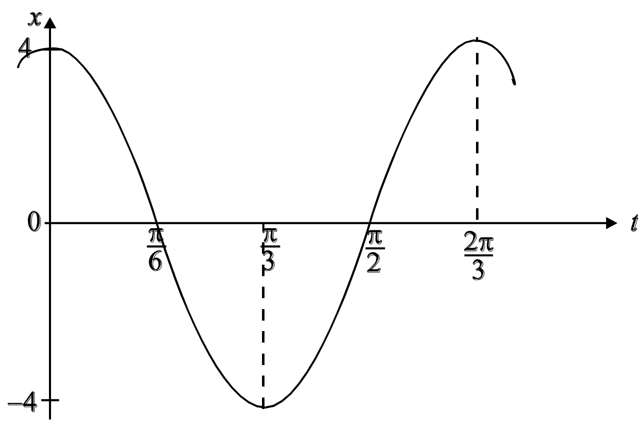


Yna bydd y cylchred yn digwydd eto ac felly mae'r mudiant yn osgiliadol. Cyfanswm yr amser a gymerwyd ar gyfer cylchred cyfan yw 2π eiliad, sef cyfnod yr osgiliad. Yr amser a gymerwyd ar gyfer unrhyw un o'r camau hyn yw $\dfrac{\pi}{2}$ eiliad, h.y. chwarter y cyfnod.

Yn yr ail enghraifft ystyriwn ronyn P sy'n symud ar echelin x yn y fath fodd fel y rhoddir ei ddadleoliad o'r tarddiad ar amser t eiliad, sef x metr, gan

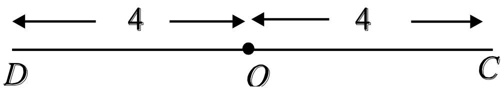
$$x = 4 \cos 3t.$$

Mae'r diagram canlynol yn dangos ymddygiad x gyda t.



Felly rhoddir cyflymder y gronyn i gyfeiriad x cynyddol, sef v ms^{-1}, gan

$$v = \frac{dx}{dt} = -12 \sin 3t.$$



Pan fydd $t = 0$ mae'r gronyn ar bwynt C lle mae $x = 4$ ac mae'n ddisymud yn enydaidd. Wrth i t gynyddu mae cos $3t$ yn lleihau ac felly bydd P yn dechrau symud i gyfeiriad x lleihaol a bydd yn cyrraedd y tarddiad pan fydd cos $3t = 0$. Bydd hyn yn digwydd pan fydd $3t = \frac{\pi}{2}$, h.y. pan fydd $t = \frac{\pi}{6}$. Ar yr amser hwn, mae $v = -12$ a bydd P yn dechrau symud ar hyd yr echelin x negatif gan ddal i symud nes i cos $3t$ gyrraedd ei werth lleiaf, sef -1. Bydd hyn yn digwydd pan fydd $3t = \pi$, h.y. $t = \frac{\pi}{3}$ (h.y. bydd t wedi cynyddu $\frac{\pi}{6}$ pellach). Ar yr amser hwn, mae $v = 0$ ac felly bydd P yn ddisymud yn enydaidd ar bwynt D lle mae $x = -4$. Pan fydd $t > \frac{\pi}{3}$, bydd v yn bositif ac felly bydd P yn symud i gyfeiriad x positif a bydd yn cyrraedd y tarddiad pan fydd cos $3t = 0$, h.y. $3t = \frac{3\pi}{2}$ a $t = \frac{\pi}{2}$ (gyda t yn dangos cynnydd pellach o $\frac{\pi}{6}$). Ar yr amser hwn, mae $v = 12$ ac felly, ar y tarddiad, bydd P yn symud gyda buanedd 12 ms^{-1} i gyfeiriad x positif. Felly mae'n dechrau symud ar hyd yr echelin x positif nes i cos $3t$ gyrraedd ei werth mwyaf, sef 1; bydd hyn yn digwydd pan fydd $t = \frac{2\pi}{3}$ (h.y. bydd t wedi cynyddu $\frac{\pi}{6}$ pellach). Ar yr amser hwn bydd y gronyn unwaith eto yn ddisymud yn enydaidd ar C. Dyma'r un sefyllfa yn union a phan oedd $t = 0$ ac felly bydd y cylchred yn digwydd eto. Dyma felly yw'r camau yn y mudiant:

(i) bydd P yn teithio o bwynt C, lle mae $x = 4$, a ddangosir yn y diagram, i'r tarddiad,
(ii) bydd P yn teithio o'r tarddiad i bwynt D lle mae $x = -4$,

(iii) bydd P yn teithio o D i'r tarddiad,

(iv) bydd P yn mynd yn ei flaen o'r tarddiad yn ôl i bwynt C, lle mae $v = 0$.

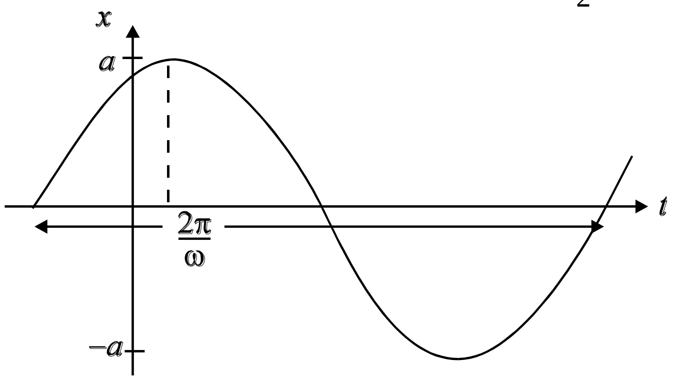
Yna bydd y cylchred yn digwydd eto ac felly mae'r mudiant yn osgiliadol. Cyfanswm yr amser a gymerwyd ar gyfer cylchred cyfan yw $\frac{2\pi}{3}$ eiliad; dyma gyfnod yr osgiliad. Yr amser a gymerwyd ar gyfer unrhyw un o'r camau uchod yw $\frac{\pi}{6}$ eiliad, h.y. chwarter y cyfnod.

Mae'r ddwy enghraifft uchod yn enghreifftiau o fudiant harmonig syml (y gellir ei dalfyrru i M.H.S.) gyda chanol O (sef y pwynt hanner ffordd rhwng y safleoedd eithaf). Diffinnir y ffurf fwyaf cyffredinol o fudiant harmonig syml gyda chanol O gan

$$x \;=\; a \sin(\omega t + \varepsilon),$$

lle mae a, ω ac ε yn gysonion ac a yn bositif. Yn yr enghraifft gyntaf, mae $a = 2$, $\omega = 1$ ac $\varepsilon = 0$, tra yn yr ail enghraifft mae $a = 4$, $\omega = 3$ ac $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.

Dangosir y ffurf gyffredinol ar gyfer x pan fydd $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ yn y diagram canlynol.



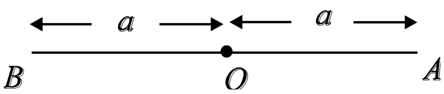
Rhoddir cyflymder v i gyfeiriad x positif gan

$$v \;=\; \frac{dx}{dt} \;=\; a\omega \cos(\omega t + \varepsilon).$$

Mae'r mudiant yn gyfnodol, a'r cyfnod yw $\frac{2\pi}{\omega}$. Os yw'r amser T ar gyfer un osgiliad yn $\frac{2\pi}{\omega}$ yna mae nifer yr osgiliadau ym mhob uned o amser yn $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Gelwir hyn yn amledd yr osgiliad. Yn unedau'r S.I. yr hertz (Hz) yw uned amledd, gydag un hertz yn un osgiliad (neu gylchred) yr eiliad. Gan fod ωt yn ongl a fesurir mewn radianau, unedau ω yn y system S.I. yw rad^{-1}. Gelwir ω yn amledd cylchol. Nid yw'r term hwn yn arbennig o amlwg ac fe'i defnyddir oherwydd bod perthynas rhwng M.H.S. a mudiant cylchol.

Bydd y gronyn ar y pwynt pellaf o O pan fydd $\sin(\omega t + \varepsilon) = \pm 1$ ac felly $x = \pm a$, fel mai'r pellter mwyaf o'r tarddiad yw a, sef yr hyn a elwir yn osgled y mudiant.

Pan fydd sin (ωt + ε) = ± 1, mae cos (ωt + ε) = 0, ac felly mae'r gronyn yn ddisymud yn enydaidd ar y pwyntiau eithaf.
Bydd y gronyn yn mynd trwy'r tarddiad pan fydd sin (ωt + ε) = 0 ac ar yr amserau hyn bydd cos (ωt + ε) = ± 1 ac felly ar y tarddiad mae gwerth mwyaf y buanedd, sef $a\omega$.
Gellir gweld oddi wrth gymesuredd y ffwythiant sin bod yr amser a gymerir i deithio rhwng uchafbwynt (h.y. pwynt eithaf) a'r tarddiad yn chwarter y cyfnod.
Felly mae mudiant harmonig syml gydag osgled a a chanol O yn fudiant rhwng pwynt A, lle mae $x = a$, a phwynt B, lle mae $x = -a$.



Bydd gronyn P sy'n symud i'r dde yn y diagram uchod ar bwynt rhwng A a B yn dod i aros yn enydaidd ar A ac yna yn dechrau symud i'r chwith ac yn dal i wneud hynny nes iddo gyrraedd B, lle bydd yn dod i aros yn enydaidd eto cyn symud i'r dde i'w safle cychwynnol.
Bydd gronyn P sy'n symud i'r chwith yn y diagram uchod ar bwynt rhwng A a B yn dod i aros yn enydaidd ar B ac yna yn dechrau symud i'r dde ac yn dal i wneud hynny nes iddo gyrraedd A, lle bydd yn dod i aros yn enydaidd eto cyn symud i'r chwith i'w safle cychwynnol.
Gall defnyddio diagram syml fel yr un uchod fod yn ddefnyddiol iawn wrth ddatrys problemau sy'n cynnwys M.H.S. er mwyn delweddu beth sy'n digwydd. Mewn problemau lle mae angen ystyried cyfeiriad mudiant y gronyn mae diagram o'r fath bron yn hanfodol.
Er mai'r ffurf $x = a \sin(\omega t + \varepsilon)$ yw'r un hawsaf er mwyn gweld ymddygiad cyffredinol mudiant harmonig syml, nid dyma'r ffurf orau i'w defnyddio er mwyn ceisio canfod x o wybod amodau ar werth penodol ar gyfer t. Yn yr achos hwn, mae'n haws fel rheol defnyddio datrysiad cyffredinol yr hafaliad harmonig syml yn y ffurf
$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Gellir cael y ffurf hon hefyd trwy ehangu sin (ωt + ε).
Os yw gronyn ar y tarddiad pan fydd $t = 0$, yna mae $A = 0$ ac felly $x = B \sin \omega t$.
Maint mwyaf x yw $|B|$ a hwn, trwy ddiffiniad osgled, yw a. Felly mae $B = \pm a$ ac $x = \pm a \sin \omega t$. Mae differu hwn yn rhoi $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm a\omega \cos \omega t$ ac felly mae'r arwydd plws yn cyfateb i ronyn sy'n symud i'r dde ar y tarddiad ac mae'r arwydd minws yn cyfateb i ronyn sy'n symud i'r chwith ar y tarddiad.
Mae'r ffurf $x = \pm a \sin \omega t$ felly yn cynrychioli mudiant lle mae'r gronyn ar y tarddiad ar amser $t = 0$, gyda'r arwydd plws a'r arwydd minws yn cyfateb i ronyn sy'n symud i gyfeiriad x cynyddol neu i gyfeiriad x lleihaol, yn ôl eu trefn, ar y tarddiad.

Os yw gronyn ar un o'r pwyntiau eithaf pan fydd $t = 0$, yna bydd yn ddisymud a chan fod $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\,\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$, mae hyn yn golygu bod $B = 0$. Felly mae $A = a$ os yw'r gronyn ar $x = a$ ar y dechrau ac $A = -a$ os yw'r gronyn ar $x = -\,a$ ar y dechrau. Felly mae'r ffurf $x = \pm\, a \cos \omega t$ yn cynrychioli mudiant lle mae'r gronyn ar un o'r pwyntiau eithaf, $x = \pm\, a$, ar amser $t = 0$, gyda'r arwydd plws a'r arwydd minws yn cyfateb, yn ôl eu trefn, i'r safleoedd eithaf $x = a$ ac $x = -a$.

Mae llawer o enghreifftiau mewn "bywyd go iawn" lle mae'r mudiant yn harmonig syml. Rhai enghreifftiau yw blaen nodwydd mewn peiriant gwnïo, mudiant corcyn sy'n cael ei wthio i lawr yn ofalus mewn dŵr, mudiant gronyn y perir iddo osgiliadu ar ben sbring, yr amrywiant yn lefel y llanw mewn harbwr, mudiant pwynt ar lafn herclif drydanol.

Mae mudiant y pwysau ar ben pendil cloc a mudiant piston yn codi ac yn disgyn ym mheiriant car yn fudiannau harmonig syml bras.

Diffiniadau posibl eraill

Y diffiniad uchod o M.H.S. yw'r un sy'n dangos fwyaf eglur natur y mudiant. Efallai y byddwch yn dod ar draws diffiniadau eraill ac mae angen i chi allu adnabod y rhain. Gellir cael y diffiniadau eraill hyn i gyd oddi wrth y ffurf uchod.

Os yw $x = a \sin (\omega t + \varepsilon)$, yna mae $v = a\omega \cos (\omega t + \varepsilon)$ ac felly

$$v^2 = a^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varepsilon).$$

Gan fod $\cos^2(\omega t + \varepsilon) = 1 - \sin^2(\omega t + \varepsilon)$ gellir ailysgrifennu'r mynegiad ar gyfer v^2 fel

$$v^2 = a^2\omega^2 \,(1 - \sin^2(\omega t + \varepsilon)),$$

ac mae amnewid am $\sin (\omega t + \varepsilon)$ yn nhermau x yn rhoi

$$v^2 = \omega^2 \,(a^2 - x^2).$$

Mae'r mynegiad ar gyfer v yn nhermau x yn ffordd arall o ddiffinio M.H.S. ac er mwyn cadarnhau hyn rhaid dangos bod y datrysiad cyffredinol ar gyfer x ar ffurf $a \sin (\omega t + \varepsilon)$. Y ffordd hawsaf o wneud hyn yw ysgrifennu x fel $a \sin \theta$ ac felly, gan ddefnyddio'r rheol gadwyn,

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a \cos \theta \,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

Mae amnewid am x a v yn nhermau θ yn rhoi

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \omega^2,$$

ac felly

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\,\omega.$$

Mae integru hyn yn rhoi

$$\theta = \pm \omega t + \text{cysonyn},$$

ac felly bydd x ar ffurf $a \sin(\omega t + \varepsilon)$.

Dull arall o gael x yw cymryd ail isradd y mynegiad ar gyfer v^2 a'i integru trwy wahanu'r newidynnau.

Os yw $x = a \sin(\omega t + \varepsilon)$, yna mae

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon)$$

ac mae amnewid am $\sin(\omega t + \varepsilon)$ yn nhermau x yn rhoi

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x.$$

Mae hyn yn rhoi diffiniad arall o M.H.S., h.y. bod mudiant unrhyw ronyn y mae ei ddadleoliad yn bodloni'r hafaliad differol uchod yn harmonig syml. I gadarnhau hyn rhaid dangos bod datrysiad cyffredinol yr hafaliad uchod ar ffurf $x = a \sin(\omega t + \varepsilon)$.

Pan fydd $x > 0$ mae'r cyflymiad i gyfeiriad x negatif, h.y. tuag at y tarddiad, a phan fydd $x < 0$ mae'r cyflymiad i gyfeiriad x positif, h.y. tuag at y tarddiad eto. Felly nodir yr hafaliad differol yn aml iawn mewn geiriau gwahanol fel hyn:

"mae'r cyflymiad i gyfeiriad y canol trwy'r amser ac mewn cyfrannedd union â'r pellter oddi wrtho".

Gan fod grym yn hafal i màs wedi'i luosi â chyflymiad gellir aralleirio'r ffurf hon fel "cynhyrchir mudiant harmonig syml gan rym sy'n gweithredu tuag at y canol ac mewn cyfrannedd union â'r pellter oddi yno".

Hefyd gellir cael yr hafaliad differol trwy ddifferu $v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$ mewn perthynas ag x a defnyddio'r unfathiant

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}.$$

Dull cyfatebol yw defnyddio'r unfathiant uchod yn yr hafaliad differol ac integru mewn perthynas ag x, sy'n rhoi

$$v^2 = -\omega^2 x^2 + \text{cysonyn},$$

ac mae ysgrifennu'r cysonyn yn y ffurf $\omega^2 a^2$ yn rhoi $v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$.

Gellir crynhoi'r canlyniadau hyn fel a ganlyn:

Crynodeb o'r fformwlâu sylfaenol

Os yw gronyn yn disgrifio M.H.S. ar hyd yr echelin x o amgylch y tarddiad O gyda chyfnod $\frac{2\pi}{\omega}$ ac osgled a, yna mae'r

$$\text{Cyfnod} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Amledd} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$x = a \sin(\omega t + \varepsilon),$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

(y ffurf hon yw'r un fwyaf defnyddiol os rhoddir amodau ar gyfer $t = 0$)

$$v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

lle mae x a v yn dynodi dadleoliad a chyflymder y gronyn ar amser t.

Mae unrhyw un o'r pedwar hafaliad diwethaf yn diffinio mudiant harmonig syml a gellir cael unrhyw un o'r hafaliadau hyn oddi wrth unrhyw un o'r lleill. Dyma'r **fformwlâu sylfaenol ar gyfer M.H.S.** a dylech eu dysgu ar eich cof. Dyma ganlyniadau sylfaenol eraill ar gyfer mudiant gyda chanol O:

Mae'r buanedd uchaf ar y canol ac mae'n hafal i $a\omega$.

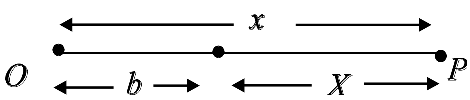
Mae'r pellter rhwng y pwyntiau eithaf = $2a$.

Dadleoliad gronyn sydd ar O pan fydd $t = 0$ yw $\pm a \sin \omega t$.

Dadleoliad gronyn sydd ar $x = \pm a$ pan fydd $t = 0$ yw $\pm a \cos \omega t$.

Canol nad yw ar y tarddiad

Nid oes rhaid i ganol y mudiant fod ar y tarddiad; er enghraifft, gallai fod ar y pwynt $x = b$.



Os yw X yn dynodi dadleoliad y gronyn o $x = b$, yna, trwy ddiffiniad M.H.S., mae $X = a \sin(\omega t + \varepsilon)$. Fodd bynnag, fel y gwelwch oddi wrth y diagram, mae $x = X + b$ ac felly

$$x = b + a \sin(\omega t + \varepsilon),$$

a'r canlyniadau eraill yw

$$v^2 = \omega^2 (a^2 - (x - b)^2),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 (x - b).$$

Mae'r buanedd uchaf ar y canol ac mae'n hafal i $a\omega$.
Mae'r pellter rhwng y pwyntiau eithaf = $2a$.
Dadleoliad gronyn sydd ar y canol pan fydd $t = 0$ yw $b \pm a \sin \omega t$.
Dadleoliad gronyn sydd ar $x = \pm a + b$ pan fydd $t = 0$ yw $b \pm a \cos \omega t$.

2 Problemau cinematig

Mae'r problemau symlaf yn rhai cinematig lle nodir bod y mudiant yn harmonig syml ac y rhoddir ychydig o wybodaeth i chi, gan ofyn i chi ganfod gwybodaeth bellach. Yn yr enghreifftiau rhifiadol canlynol, tybir bod x m a b m yn dynodi, yn ôl eu trefn, dadleoliad gronyn P ar amser t eiliad a dadleoliad canol yr osgiliad o darddiad sefydlog O. Dynodir osgled unrhyw fudiant harmonig syml gan a m a'r amledd cylchol gan ω rad^{-1}.
Dynodir cyflymder y gronyn ar amser t eiliad gan v ms^{-1}. Felly mae x, b, a, v, t ac ω yn rhifau pur sy'n bodloni'r perthnasau sylfaenol uchod.
Yr anhysbysion sylfaenol yw a ac ω a'r cam cyntaf yw defnyddio'r wybodaeth a roddir er mwyn eu canfod.

Enghraifft 1

Mae gronyn yn disgrifio M.H.S. gyda chyfnod π eiliad a'r pellter rhwng pwyntiau eithaf y mudiant yw 4 m. Canfyddwch fuanedd mwyaf y gronyn a'i fuanedd pan fydd ar bellter 1 m o ganol yr osgiliad.

Gan fod y cyfnod yn π eiliad, mae'n dilyn bod $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ac felly $\omega = 2$.
Mae'r pellter rhwng y pwyntiau eithaf ddwywaith cymaint â'r osgled ac felly mae $a = 2$.
Y buanedd mwyaf yw $a\omega$, sef 4 ms^{-1}.
Canfyddir y buanedd pan fydd pellter y gronyn o'r canol yn x m trwy ddefnyddio'r canlyniad $v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$.
Mae amnewid y gwerthoedd yn y mynegiad hwn yn rhoi'r buanedd yn $2\sqrt{3}$ ms^{-1}.

Enghraifft 2

Mae gronyn sy'n symud mewn mudiant harmonig syml yn gwneud 4 osgiliad yr eiliad a'r pellter rhwng pwyntiau eithaf y mudiant yw 0.3 m. Canfyddwch gyflymiad mwyaf y gronyn.

Cyfnod pob osgiliad yw $\frac{1}{4}$ eiliad ac felly mae $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{4}$ ac felly $\omega = 8\pi$.
Mae'r pellter rhwng y pwyntiau eithaf ddwywaith cymaint â'r osgled ac felly mae $a = 0.15$.
Y cyflymiad yw $-\omega^2 x$. Ceir y cyflymiad mwyaf felly pan fydd x ar ei fwyaf, h.y. ar y pwyntiau eithaf. Felly y cyflymiad mwyaf yw $\omega^2 a$ ac mae amnewid y gwerthoedd a ganfuwyd ar gyfer ω ac a yn rhoi'r cyflymiad mwyaf fel $9.6\ \pi^2$ ms^{-2}.

Enghraifft 3

Rhoddir dadleoliad gronyn ar amser t eiliad, sef x m, gan $x = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$. Canfyddwch osgled a chyfnod yr osgiliad.

Y cam cyntaf yw ysgrifennu'r dadleoliad yn y ffurf $a \sin(\omega t + \varepsilon)$. Gellir ehangu'r ffurf hon fel $a \sin \omega t \cos \varepsilon + a \cos \omega t \sin \varepsilon$.
Bydd y ddwy ffurf yn hafal os yw $\omega = 2$, $3 = a \sin \varepsilon$, $4 = a \cos \varepsilon$.
Mae sgwario ac adio'r ddau hafaliad diwethaf hyn yn rhoi $a = 5$, ac felly mae'r osgled yn
5 m a'r cyfnod yn π eiliad.

Enghraifft 4

Buanedd mwyaf gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig syml mewn llinell syth yw 10 ms^{-1} a'i fuanedd pan fydd ar bellter 4 m o ganol yr osgiliad yw 6 ms^{-1}.
Canfyddwch gyfnod ac osgled yr osgiliad.

Mae'n dilyn o'r ffaith bod y buanedd mwyaf yn 10 ms^{-1} fod

$$a\omega = 10,$$

ac mae amnewid $v = 6$ ac $x = 4$ yn $v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$ hefyd yn rhoi

$$36 = \omega^2 a^2 - \omega^2 16.$$

Mae amnewid $a\omega = 10$ yn yr hafaliad hwn yn rhoi $\omega = 2$ ac felly mae'r cyfnod yn π eiliad.
Gan fod $\omega = 2$ mae'n dilyn o $a\omega = 10$ fod $a = 5$ ac felly mae'r osgled yn 5 m.

Enghraifft 5

Buanedd gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig syml mewn llinell syth yw 6 ms^{-1} pan fydd ar bellter o 1 m o ganol yr osgiliad a 2 ms^{-1} pan fydd ar bellter o 3 m o ganol yr osgiliad. Canfyddwch gyfnod ac osgled yr osgiliad.

Mae amnewid $v = 6$ ac $x = 1$ yn $v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$ yn rhoi

$$36 = \omega^2(a^2 - 1),$$

ac mae amnewid $v = 2$ ac $x = 3$ yn $v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$ yn rhoi

$$4 = \omega^2(a^2 - 9).$$

Hafaliadau cydamserol ar gyfer a ac ω yw'r rhain ac mae rhannu'r cyntaf gyda'r ail er mwyn dileu ω yn rhoi

$$9 = \frac{(a^2 - 1)}{(a^2 - 9)}.$$

Mae datrys ar gyfer a yn rhoi $a = \sqrt{10}$, gan roi'r osgled fel $\sqrt{10}$ m. Mae amnewid $a = \sqrt{10}$ yn $36 = \omega^2(a^2 - 1)$ yn dangos bod $\omega = 2$ ac felly mae'r cyfnod yn π eiliad.

<u>Enghraifft 6</u>

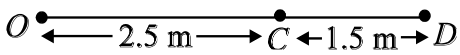
Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml, gyda chanol O, cyfnod 4 eiliad ac osgled 5 m. O wybod bod y gronyn ar O ar amser $t = 0$, canfyddwch ei ddadleoliad o O ar unrhyw amser t eiliad wedyn. Canfyddwch hefyd yr amser a gymer y gronyn i deithio (i) o O yn syth i'r pwynt C lle mae $OC = 2.5$ m,

(ii) o C yn syth i'r pwynt D lle mae $CD = 1.5$ m.

Gan fod y cyfnod yn 4 eiliad, mae $\frac{2\pi}{\omega} = 4$ ac felly $\omega = \frac{\pi}{2}$. Canfyddir y dadleoliad trwy amnewid $a = 5$ ac $\omega = \frac{\pi}{2}$ yn $x = a \sin \omega t$, sy'n rhoi

$$x = 5 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Mewn problemau sy'n cynnwys amser o bwynt i bwynt mae llunio braslun syml, fel yr un isod, yn aml o gymorth, gan nodi'r pwyntiau.



Canfyddir gwerth t, yr amser i gyrraedd C, trwy amnewid $x = 2.5$ yn y mynegiad uchod a datrys ar gyfer t, h.y.

$$2.5 = 5 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Mae nifer anfeidraidd o ddatrysiadau ond dim ond yr un lleiaf sydd ei angen arnom gan mai dim ond yr amser a gymerir i fynd yn syth i C sydd arnom ei angen ac felly mae $\frac{\pi}{2} t = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ ac felly $t = \frac{1}{3}$.

Y ffordd gyflymaf o ganfod yr amser a gymerir i fynd yn syth o C i D yw canfod yr amser a gymer i deithio o O i D a thynnu ohono yr amser o O i C.

Canfyddir yr amser o O i D trwy ddatrys $4 = 5 \sin \frac{\pi}{2} t$ ar gyfer t.

Felly mae $\frac{\pi}{2} t = \sin^{-1} 0.8 \ (= 0.927)$.

Mae'n bwysig iawn cofio bod angen canfod y sin gwrthdro mewn radianau ac mae hyn yn rhoi t, sef tua 0.59.

Mae tynnu'r amser a gymer i deithio o O i C yn rhoi'r amser o C i D, sef tua 0.26 eiliad.

<u>Enghraifft 7</u>

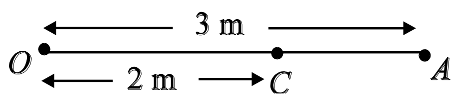
Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml, canol O, gyda chyfnod 6 eiliad ac osgled 3 m. O wybod bod y gronyn yn ddisymud ar bwynt A ar echelin x positif ar amser $t = 0$, canfyddwch ei ddadleoliad o O ar unrhyw amser t eiliad wedyn.

Canfyddwch hefyd yr amser a gymer y gronyn i deithio yn syth i'r pwynt C lle mae C rhwng O ac A ac OC = 2m.

Gan fod y cyfnod yn 6 eiliad, mae $\frac{2\pi}{\omega} = 6$ ac felly $\omega = \frac{\pi}{3}$. Gan fod y gronyn yn ddisymud ar A pan fydd $t = 0$, yna mae A yn un o bwyntiau eithaf y mudiant. Felly canfyddir y dadleoliad trwy amnewid $a = 3$ ac $\omega = \frac{\pi}{3}$ yn $x = a \cos \omega t$ gan roi

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{3} t.$$

Dangosir y pwynt dechreuol a phwynt C yn y braslun canlynol.

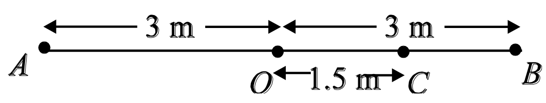


Canfyddir gwerth yr amser t i gyrraedd C trwy amnewid $x = 2$ yn y mynegiad uchod a datrys ar gyfer t, h.y. $2 = 3 \cos \frac{\pi}{3} t$.

Rhoddir y gwerth lleiaf ar gyfer t gan $\frac{\pi}{3} t = \cos^{-1} \frac{2}{3}$, ac felly mae $t = 0.8$.

<u>Enghraifft 8</u>

Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml, gyda chanol O ac osgled 3 m, ac mae'n mynd trwy bwynt ar bellter 1.5 m o O ar ddau achlysur olynol gyda 2 eiliad rhyngddynt. Canfyddwch ddau gyfnod posibl yr osgiliad.



Mae'r braslun yn dangos pwynt *C* ar bellter 1.5 m o'r canol, sef *O*, a safleoedd eithaf y gronyn, sef *A* a *B*. Mae dwy ffordd y gall y gronyn deithio ddwywaith trwy bwynt *C* mewn cyfwng o ddau eiliad:
(i) mae'n teithio i'r dde o *C* i *B* ac yna yn ôl i *C*,
(ii) mae'n teithio i'r chwith o *C* i *A* ac yna yn ôl i *C*.

(i) Gellir canfod yr amser o *O* i *C* trwy dybio ar $t = 0$ fod y gronyn ar *O* ac felly bod ei ddadleoliad wedyn o *O*, sef x m, yn $3 \sin \omega t$. Yna bydd y gronyn yn mynd trwy *C* pan fydd $$1.5 = 3 \sin \omega t.$$
Datrysiad lleiaf yr hafaliad hwn yw $t = \dfrac{\pi}{6\omega}$. Mae'r amser o *O* i *B* yn hafal i chwarter y cyfnod ac felly yr amser o *C* i *B* ac yn ôl yw $2\left(\dfrac{\pi}{2\omega} - \dfrac{\pi}{6\omega}\right) = \dfrac{2\pi}{3\omega}$.
Rhoddir bod yr amser hwn yn 2 eiliad ac felly mae'r cyfnod, sef $\dfrac{2\pi}{\omega}$, yn 6 eiliad.

(ii) Mae'r amser o *C* i *A* ac yn ôl ddwywaith cymaint â swm yr amser o *C* i *O* ac o *O* i *A*. Mae'r amser o *O* i *A* yn chwarter y cyfnod ac felly cyfanswm yr amser yw
$$2\left(\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{6\omega}\right) = \frac{4\pi}{3\omega}.$$
Rhoddir bod hwn yn 2 eiliad ac felly mae'r cyfnod, sef $\dfrac{2\pi}{\omega}$, yn 3 eiliad.

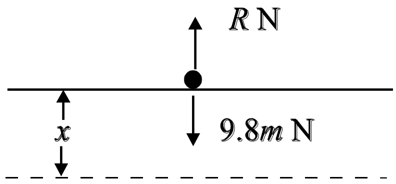
Enghraifft 9

Tybir bod lefel y llanw mewn porthladd yn symud gyda mudiant harmonig syml gyda chyfnod 12.4 awr a'r gwahaniaeth yn y lefel rhwng y penllanw a'r distyll yw 6 m. Ar ddiwrnod penodol mae'r distyll yn digwydd ganol dydd. Canfyddwch yr amser pan fydd lefel y dŵr yn cynyddu ar y gyfradd fwyaf a chanfyddwch y gyfradd hon mewn ms^{-1}.

Y cyfnod yw 3600×12.4 eiliad ac felly mae $\omega = \dfrac{2\pi}{3600 \times 12.4}$.
Osgled yr osgiliad yw 3 m, mae gwerth mwyaf cyfradd y newid yn digwydd ar ganol yr osgiliad a bydd hyn yn digwydd chwarter cyfnod ar ôl y distyll h.y. ar amser 3.1 awr wedi hanner dydd.
Y buanedd mwyaf yw $a\omega = \dfrac{6\pi}{3600 \times 12.4} = 4.2 \times 10^{-4}\ ms^{-1}$.

<u>Enghraifft 10</u>

Mae silff lorweddol yn osgiliadu yn fertigol gydag osgled 0.2 m. Canfyddwch gyfnod lleiaf yr osgiliadau fel na fydd gronyn a roddir ar y silff yn cael ei daflu oddi arno.



Mae'r diagram yn dangos y gronyn ar y silff a safle canolog y silff. Dynodir dadleoliad y gronyn uwchben y safle canolog gan x m. Os yw màs y gronyn yn m kg yna mae'r grym tuag i fyny ar y gronyn yn $(R - 9.8m)$ N, lle mae adwaith y silff yn R N. Mae deddf Newton yn rhoi

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = R - 9.8m.$$

Gan fod y mudiant yn harmonig syml, mae

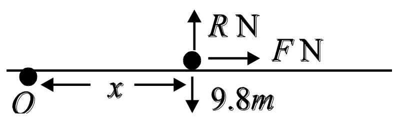
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x,$$

ac fellymae $$R = m\,(9.8 - \omega^2 x).$$

Y gwerth mwyaf ar gyfer x yw 0.2 ac felly bydd yr adwaith yn bositif, h.y. ni fydd y gronyn yn gadael y silff cyn belled â bod $9.8 \geq 0.2\,\omega^2$ h.y. $\omega \leq 7$, ac felly y cyfnod lleiaf yw $\frac{2\pi}{7}$ eiliad.

<u>Enghraifft 11</u>

Mae silff lorweddol yn osgiliadu yn llorweddol gydag amledd 5 Hz. Canfyddwch yr osgled mwyaf fel nad yw gronyn a roddir ar y silff yn llithro. Cyfernod y ffrithiant rhwng y silff a'r gronyn yw 0.4.



Mae'r diagram yn dangos y gronyn ar y silff a dynodir safle canolog y gronyn gan O a dadleoliad y gronyn o'r safle canolog gan x m. Yr unig rym llorweddol sy'n gweithredu ar y gronyn yw'r grym ffrithiant F N ac os yw màs y gronyn yn m kg yna mae deddf Newton yn rhoi

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F.$$

Adwaith R y silff yw $9.8m$ N ac felly maint mwyaf F heb i'r gronyn lithro yw

$$0.4R = 3.92m \text{ N}.$$

Felly ni fydd y gronyn yn llithro cyn belled nad yw maint $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ yn fwy na 3.92 ms^{-2}.

Gan fod y mudiant yn harmonig syml, mae

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

lle mae $\dfrac{\omega}{2\pi} = 5$, ac felly $\qquad \omega = 10\pi.$

Y gwerth mwyaf ar gyfer $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ felly yw $100\pi^2\, a$ ms^{-2}, lle mae a m yn dynodi osgled yr osgiliad.

Felly ni fydd y gronyn yn llithro cyn belled â bod $a \leq \dfrac{3.92}{100\pi^2} = 3.97 \times 10^{-3}$.

Enghraifft 12

Canfyddwch osgled, cyfnod a chanol y mudiant harmonig syml a ddiffinnir gan
$v^2 = 84 - 4x^2 + 16x$.

Ffurf gyffredinol y buanedd ar gyfer mudiant harmonig syml yw

$$v^2 = \omega^2(a^2 - (x - b)^2),$$

ac felly y cam cyntaf yw cwblhau'r sgwâr ar gyfer y termau sy'n cynnwys x ac x^2
h.y. $\qquad -4x^2 + 16x$.
Gellir ailysgrifennu'r mynegiad hwn fel $-4(x-2)^2 + 16$,
ac felly mae $\qquad v^2 = 100 - 4(x-2)^2 = 4(25 - (x-2)^2)$.
Felly mae $\qquad \omega = 2,\ a = 25$ a $b = 2$
ac felly cyfnod y mudiant yw π eiliad, gydag osgled 5 m a'r canol ar y pwynt $x = 2$ m.

Enghraifft 13

Cyflymder gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig syml yw 4 ms^{-1} ar y tarddiad, $\sqrt{13}$ ms^{-1} pan fydd $x = 1$ m ac 1 ms^{-1} pan fydd $x = 3$ m. Canfyddwch ganol y mudiant.

Gan fod y cwestiwn yn gofyn am ganol y mudiant mae'n annhebygol iawn y bydd ar y tarddiad, ac felly rhaid defnyddio'r ffurf $v^2 = \omega^2(a^2 - (x-b)^2)$.
Mae amnewid y data a roddir yn y mynegiad hwn yn rhoi

$$16 = \omega^2(a^2 - b^2),\quad 13 = \omega^2(a^2 - (1-b)^2),\quad 1 = \omega^2(a^2 - (3-b)^2).$$

Mae tynnu'r ail hafaliad o'r hafaliad cyntaf a'r trydydd hafaliad o'r hafaliad cyntaf yn rhoi

$$3 = \omega^2(1 - 2b), \quad 15 = \omega^2(9 - 6b).$$

Mae rhannu'r ail hafaliad â'r un cyntaf er mwyn dileu ω yn rhoi $b = -1$; h.y. mae'r canol ar y pwynt lle mae $x = -1$ m.

Ymarferion 1

Mae cwestiynau 1 i 6 yn cyfeirio at ronyn P sy'n disgrifio mudiant harmonig syml gyda chanol O; dynodir pwyntiau eithaf y mudiant gan A a B.

1 Maint y cyflymiad yw 8 ms^{-2} pan fydd $OP = 2$ m. Canfyddwch y cyfnod.

2 Y cyfnod a'r buanedd mwyaf yw $\frac{\pi}{5}$ eiliad a 5 ms^{-1}.
Canfyddwch osgled y mudiant a hyd OP pan fydd y buanedd yn 4 ms^{-1}.

3 Cyflymiad mwyaf P yw 20 ms^{-2} ac mae'n gwneud 10 osgiliad yr eiliad.
Canfyddwch ei fuanedd mwyaf.

4 Amledd yr osgiliadau yw 3 Hz a'r buanedd mwyaf yw 10 ms^{-1}.
Canfyddwch yr osgled.

5 Buanedd P yw 6 ms^{-1} pan fydd $OP = 4$ m ac 8 ms^{-1} pan fydd $OP = 3$ m.
Canfyddwch osgled a chyfnod yr osgiliadau.

6 Buanedd P yw 16 ms^{-1} pan fydd $OP = 3$ m a 12 ms^{-1} pan fydd $OP = 4$ m.
Canfyddwch osgled yr osgiliadau a buanedd mwyaf P.

7 Buanedd P yw 12 ms^{-1} pan fydd $BP = 2$ m a 3 ms^{-1} pan fydd $BP = 1$ m.
Canfyddwch osgled y mudiant.

8 Rhoddir dadleoliad gronyn ar amser t eiliad, sef x m, gan

$$x = 4 \cos 3t - 2 \sin 3t.$$

Canfyddwch osgled a chyfnod yr osgiliad.

9 Mae blaen nodwydd peiriant gwnïo yn teithio pellter o 0.025 m o ben i waelod ei strôc a'i fuanedd mwyaf yw 5 ms^{-1}. A chymryd bod y mudiant yn harmonig syml, canfyddwch ei amledd.

10 Mae llafn herclif benodol yn gwneud rhwng 1200 a 3000 strôc y munud (strôc yw un symudiad o'r top i'r gwaelod). Hyd y strôc yw 0.02 m. Canfyddwch amrediad y buaneddau mwyaf ar gyfer y llafn.

11 Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml, gyda chanol O, cyfnod 4 eiliad ac osgled 3 m. Canfyddwch yr amser a gymer y gronyn i deithio o O yn syth i'r pwynt C lle mae $OC = 1$ m a'r amser a gymer i deithio pellter pellach o 0.5 m o C.

12 Mae gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig syml gydag osgled 3 m yn mynd trwy bwynt C ar gyfyngau o $\frac{5\pi}{3}$ eiliad ac $\frac{7\pi}{3}$ eiliad.

Canfyddwch bellter C o ganol y mudiant.

13 Buanedd gronyn yw 0.4 ms^{-1} ar bwynt A ar bellter o 0.06 m o ganol yr osgiliad a 0.3 ms^{-1} ar bwynt B, sydd ar yr un ochr o O ag y mae A gyda $OB = 0.08$ m.

Canfyddwch yr amser a gymerir i deithio o A i B.

14 Mae dyfnder dŵr mewn harbwr yn symud yn harmonig syml o amgylch safle cymedrig. Ar ddiwrnod penodol, y dyfnder adeg penllanw am 5 a.m. yw 10 m a 6 awr 15 munud yn ddiweddarach y dyfnder adeg distyll yw 5 m.

Canfyddwch yr amser cyntaf ar ôl 5 a.m. pan fydd dyfnder y dŵr yn 9 m.

15 Ar ddiwrnod penodol mewn harbwr mae'r distyll yn digwydd am 10 a.m. a'r penllanw am 4.15 p.m. Dyfnder y dŵr yw 2 m adeg distyll a 5 m adeg penllanw. A chymryd bod y newid yn lefel y dŵr yn harmonig syml, canfyddwch yr amserau rhwng 10 a.m. a 10 p.m. pan fydd dyfnder y dŵr yn fwy na 3 m.

16 Mae gwrthrych sy'n arnofio yn y môr yn osgiliadu i fyny ac i lawr gyda'r tonnau gyda mudiant harmonig syml. Mae'n symud pellter fertigol o 0.4 m a'i gyfnod yw 6 eiliad. Canfyddwch ei fuanedd mwyaf a'i gyflymiad mwyaf.

17 Mae silff lorweddol yn disgrifio osgiliadau fertigol mewn mudiant harmonig syml gyda chyfnod 5 eiliad ac osgled 0.5 m. Canfyddwch werth mwyaf a gwerth lleiaf adwaith y silff ar ronyn gyda màs 0.4 kg sy'n gorwedd arni.

18 Mae silff lorweddol yn disgrifio osgiliadau fertigol mewn mudiant harmonig syml ac yn gwneud 2 osgiliad yr eiliad. Osgled yr osgiliadau yw 0.1 m. Canfyddwch uchder y silff uwchben ei safle canolog pan fydd gronyn bach ar y silff yn colli cysylltiad â hi.

19 Mae pilen lorweddol yn osgiliadu yn fertigol mewn mudiant harmonig syml gydag osgled 0.2 cm. Canfyddwch amledd yr osgiliad os bydd tywod a ysgeintiwyd ar y bilen dim ond prin yn colli cysylltiad â hi.

20 Mae llwyfan llorweddol yn osgiliadu yn llorweddol mewn mudiant harmonig syml gyda chyfnod $\frac{\pi}{5}$ eiliad ac osgled 0.02 m. O wybod bod cyfernod y ffrithiant rhwng y llwyfan a gronyn sy'n gorwedd arno yn 0.25, canfyddwch a all y gronyn aros ar y llwyfan heb lithro.

21 Mae llwyfan llorweddol yn osgiliadu yn llorweddol mewn mudiant harmonig syml gan wneud pum osgiliad cyfan pob eiliad. Cyfernod y ffrithiant rhwng y llwyfan a gronyn sy'n gorwedd arno yw 0.1. Canfyddwch osgled mwyaf yr osgiliadau fel nad yw'r gronyn yn llithro ar y llwyfan.

22 Rhoddir buanedd gronyn y mae ei ddadleoliad yn x m, sef v ms^{-1}, gan $v^2 = 15 - 5x^2 + 10x$. Canfyddwch osgled, cyfnod a chanol yr osgiliad.

3 Problemau dynamegol

Hyd yn hyn, fe roddwyd bod mudiant yn harmonig syml ond mewn llawer o broblemau go iawn y cam cyntaf yw **sefydlu** bod y mudiant yn harmonig syml. Unwaith y bydd hyn wedi'i wneud bydd y problemau yn enghreifftiau tebyg i'r rhai yn yr adran flaenorol.

Y dull sylfaenol o sefydlu bod mudiant yn M.H.S., fel gyda phob problem ddynamegol, yw dewis cyfeiriad cyfeirnod, gweithio allan y grymoedd i'r cyfeiriad hwnnw ac yna nodi bod màs × cyflymiad = grym.

Os yw'r mudiant yn harmonig syml, cewch un o'r hafaliadau hyn,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 (x - b).$$

Mae'r ail hafaliad yn cyfateb i gael canol ar $x = b$.

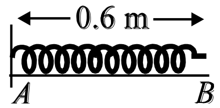
Os gwelwch un o'r hafaliadau uchod mewn papur arholiad **rydych yn gwybod bod gennych broblem ar M.H.S.** Mae'r rhan fwyaf o broblemau ar ronynnau sy'n symud ar ben sbringiau a llinynnau elastig yn cynnwys mudiant harmonig syml ac os dewch ar draws problem o'r fath byddwch yn gwybod, unwaith eto, ei bod yn debygol iawn bod gennych broblem yn ymwneud â mudiant harmonig syml.

Rydych wedi dod ar draws problemau sy'n cynnwys sbringiau a llinynnau elastig eisoes lle defnyddiwyd cadwraeth egni. Yno cafwyd y ffaith y rhoddid y buanedd v gan fynegiad ar ffurf $v^2 = px^2 + qx + r$, sef yn y bôn y ffurf $\omega^2(a^2 - (x - b)^2)$ fel a ddangoswyd yn Enghraifft 12. Dyma'r ffurf gyffredinol ar gyfer M.H.S. gyda chanol $x = b$, ac felly gallech gymharu'r cyfernodau er mwyn canfod a, b ac ω. Os mai buanedd a dadleoliad yw'r unig bethau y mae arnoch angen eu canfod, gallwch ddefnyddio'r dull egni fel dull arall cyfatebol, ond os oes arnoch angen canfod amserau teithio o bwynt i bwynt, yna bydd yn rhaid i chi ddefnyddio mynegiadau ar ffurf

$$x = a \sin(\omega t + \varepsilon) \text{ neu } x = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Mae gwahaniaeth pwysig rhwng llinynnau a sbringiau lle mae angen gofal mawr. Mae sbringiau yn rhoi grymoedd pan fyddant yn estynedig a phan fyddant yn gywasgedig, ond mae llinynnau yn rhoi grymoedd pan fyddant yn estynedig yn unig. Fel y gwelwch yn yr enghreifftiau canlynol, effaith hyn yw nad yw gronyn ar ben llinyn elastig yn disgrifio mudiant harmonig syml ond pan fydd y llinyn yn estynedig.

Enghraifft 14



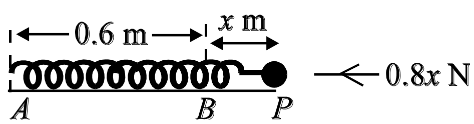
Mae'r diagram yn dangos sbring gyda hyd naturiol 0.6 m a modwlws 0.48 N ar fwrdd llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog wrth bwynt *A* ar y bwrdd ac ar y dechrau mae'r sbring yn gorwedd yn ddisymud, ei hyd yn 0.6 m, gyda'i ben rhydd ar bwynt *B* ar y bwrdd. Yna mae gronyn *P* gyda màs 0.2 kg yn cael ei glymu wrth y pen rhydd ac ar amser t = 0 mae'r sbring yn cael ei estyn trwy bellter o 0.06 m ac yna ei ryddhau o ddisymudedd. Dangoswch, ar amser t eiliad wedyn, fod dadleoliad *P* o *B*, sef x m, i'r cyfeiriad o *A* i *B*, yn bodloni'r hafaliad differol

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -4x.$$

Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer x ar amser t eiliad a chanfyddwch yr amser sy'n mynd heibio cyn

(i) i estyniad y sbring fod yn 0.02 m am y tro cyntaf,

(ii) i bellter *P* o *O* fod yn 0.58 m.



Rhoddir y cyfeiriad cyfeirnod i'r cyfeiriad o *A* i *B* ac felly pan fydd yr estyniad yn x m mae'r tyniant yn y sbring yn gweithredu o *B* i *A* a'i faint yw $\frac{0.48x}{0.6}$ N = $0.8x$ N ac felly y grym i'r cyfeiriad x positif yw $-0.8\,x$ N.

Os yw x yn negatif, yna mae'r sbring wedi'i gywasgu bellter o $-x$ m ac mae'n rhoi grym i gyfeiriad x positif, sef $-\frac{0.48x}{0.6}$ N = $-0.8x$ N, ac felly y grym i gyfeiriad x positif yw $-0.8x$ N.

Fel rheol, ni fyddai disgwyl i chi ddadansoddi'r grym mor ofalus â hyn ac, oni ddywedir wrthych yn wahanol, gallwch dybio, pan fydd dadleoliad gronyn ar ben sbring i gyfeiriad a roddir yn x, yna bod y grym i'r un cyfeiriad yn $-\frac{\lambda x}{l}$. Yn y mynegiad hwn mae λ yn dynodi'r modwlws ac l hyd naturiol y sbring.

Mae defnyddio deddf Newton yn rhoi

$$0.2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -0.8x,$$

h.y. $$\frac{d^2x}{dt^2} = -4x.$$

Mae'r hafaliad hwn yn dweud wrthych ar unwaith fod y mudiant yn harmonig syml gyda chanol B a chydag $\omega = 2$. Rhyddheir y gronyn o bwynt disymudedd, h.y. o bwynt eithaf, ac felly yr osgled yw pellter cychwynnol P o O, h.y. 0.06 m, a chan fod $x = 0.06$ pan fydd $t = 0$, rhoddir y dadleoliad wedyn o O gan $x = 0.06 \cos 2t$.

(i) Felly mae $x = 0.02$ pan fydd

$$0.02 = 0.06 \cos 2t,$$

a bydd hyn yn digwydd gyntaf pan fydd $2t = \cos^{-1}\frac{1}{3}$ ac felly mae $t = 0.62$.

(ii) Yn yr achos hwn mae $x = -0.02$ h.y. mae t yn bodloni

$$-0.02 = 0.06 \cos 2t,$$

ac fellymae $$t = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.96.$$

<u>Enghraifft 15</u>

Atebwch rannau (i) a (ii) yn yr enghraifft flaenorol pan deflir y gronyn P ar amser $t = 0$ o B gyda buanedd 0.08 ms^{-1} i'r cyfeiriad o A i B.

Yr unig wahaniaeth yn yr achos hwn yw bod y gronyn ar y canol ar amser $t = 0$ ac felly rhoddir y dadleoliad gan $x = \pm a \sin 2t$. Gan fod y cyflymder i gyfeiriad x cynyddol, rhaid dewis yr arwydd positif. Mae'r buanedd mwyaf yn digwydd ar y canol, h.y. ar B, a'r buanedd hwn yw $a\omega = 2a$, ac felly mae $a = 0.04$. Felly mae $x = 0.04 \sin 2t$ a bydd estyniad y sbring yn 0.02 m pan fydd

$$0.02 = 0.04 \sin 2t,$$

a bydd hyn yn digwydd gyntaf pan fydd $2t = \sin^{-1}\frac{1}{2}$, ac felly mae $t = \frac{\pi}{12}$.

Yn yr un modd, pan fydd $x = -0.02$

$$-0.02 = 0.04 \sin 2t,$$

a bydd hyn yn digwydd gyntaf pan fydd $2t = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, ac felly mae $t = \frac{7\pi}{12}$.

<u>Enghraifft 16</u>

Atebwch rannau (i) a (ii) yn Enghraifft 14 pan roddir llinyn gyda'r un modwlws a hyd naturiol yn lle'r sbring.

Yn yr achos hwn y prif wahaniaeth yw nad yw hafaliad y mudiant yn dal ond pan fydd x yn bositif.

Pan fydd x yn negatif bydd y llinyn yn llac a bydd P yn symud gyda chyflymiad sero, h.y. ar fuanedd cyson.

Nid yw'r amser a gymer i gyrraedd estyniad o 0.02 wedi newid.

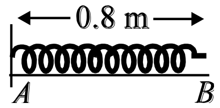
Fodd bynnag ar ôl i P fynd trwy B bydd yn symud ar fuanedd cyson, sef y buanedd ar B. H.y. mae $a\omega = 0.12$ ms^{-1} ac felly mae $x = -0.02$ ar amser $\dfrac{0.02}{0.12}$ eiliad = 0.17 eiliad ar ôl mynd trwy B.

Yr amser a gymer i gyrraedd B yw chwarter y cyfnod, h.y.

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{4}\text{s} = 0.79 \text{ eiliad.}$$

Felly mae $t = 0.17 + 0.79 = 0.96$.

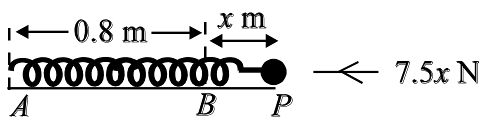
Enghraifft 17



Mae'r diagram yn dangos sbring gyda hyd naturiol 0.8 m a modwlws 6 N ar fwrdd llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog wrth bwynt A ar y bwrdd ac mae gronyn P gyda màs 0.3 kg yn cael ei glymu wrth y pen rhydd. Rhyddheir y gronyn i symud ac ar amser $t = 0$ mae estyniad y sbring yn 0.1 m ac mae'r gronyn yn symud gyda buanedd 0.3 ms^{-1} tuag at bwynt A. Canfyddwch estyniad y sbring ar amser t eiliad a hefyd osgled yr osgiliadau.

Gan fod angen yr estyniad fel ffwythiant amser, y dull mwyaf priodol o ddatrys y broblem yw canfod hafaliad y mudiant.

Cymerir safle'r cydbwysedd ar bwynt B a phan fydd yr estyniad yn x m (gyda $x > 0$) mae'r tyniant yn y sbring yn gweithredu i'r cyfeiriad o B i A a'i faint yw $\dfrac{6x}{0.8}$ N = $7.5x$ N. Felly y grym i gyfeiriad x positif yw $-7.5x$ N.



Dyma hefyd y grym i gyfeiriad x positif pan fydd x yn negatif ac felly mae cymhwyso deddf Newton yn rhoi

$$0.3\frac{d^2x}{dt^2} = -7.5x,$$

h.y.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -25x.$$

Mae'r hafaliad hwn yn dweud wrthych yn syth bod y mudiant yn harmonig syml o amgylch B gyda $\omega = 5$.

Yn yr achos hwn, gan na roddir amodau ar amser $t = 0$ naill ai ar y canol neu ar bwynt eithaf, mae angen defnyddio'r datrysiad cyffredinol $x = A \cos 5t + B \sin 5t$.
Pan fydd $t = 0$, mae $x = 0.1$ a $\frac{dx}{dt} = -0.3$ (mae'r gronyn yn symud tuag at A).
Felly mae $A = 0.1$ a $5B = -0.3$ ac felly mae $B = -0.06$ fel bod

$$x = 0.1 \cos 5t - 0.06 \sin 5t.$$

I ganfod yr osgled mae angen ysgrifennu'r mynegiad hwn yn y ffurf

$$x = a \sin(5t + \varepsilon) = a \sin 5t \cos \varepsilon + a \cos 5t \sin \varepsilon.$$

Felly mae $-0.06 = a \cos \varepsilon$ a $0.1 = a \sin \varepsilon$.
Mae sgwario'r rhain a'u hadio yn rhoi $a = \sqrt{0.06^2 + 0.1^2} = 0.12$,
ac felly yr osgled yw 0.12 m.

Mae'n werth edrych hefyd ar y dull arall sy'n defnyddio cadwraeth egni.
Pan fydd yr estyniad yn x m mae'r egni elastig yn y sbring yn

$$\frac{1}{2} \times \frac{6x^2}{0.8} \text{ J} = 3.75x^2 \text{ J},$$

ac felly, os yw v ms^{-1} yn dynodi buanedd y gronyn, mae cadwraeth egni yn rhoi

$$\frac{1}{2} \times 0.3v^2 + 3.75x^2 = \text{cysonyn}.$$

Gellir canfod y cysonyn trwy amnewid gwerthoedd dechreuol x a v, ac felly

$$0.15v^2 + 3.75x^2 = 0.15 \times 0.3^2 + 3.75 \times 0.1^2.$$

Gellir ad-drefnu'r hafaliad hwn i'r ffurf safonol ar gyfer M.H.S. fel

$$v^2 = -25x^2 + 0.3^2 + 25 \times 0.1^2,$$

neu

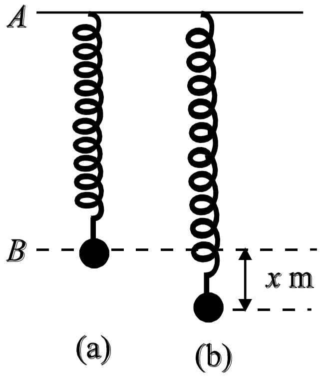
$$v^2 = 25\left(\frac{0.3^2 + 25 \times 0.1^2}{25} - x^2\right)$$

$$= 25\,(0.06^2 + 0.1^2 - x^2).$$

Felly mae'r mudiant yn harmonig syml gyda $\omega = 5$, a'r osgled yn $\sqrt{0.06^2 + 0.1^2}$.
Unwaith eich bod wedi dangos bod y mudiant yn harmonig syml ac wedi canfod ω gallwch ddyfynnu'r datrysiad cyffredinol a datrys y broblem fel uchod.
Gellir canfod yr hafaliad differol ar gyfer x trwy ddifferu'r mynegiad ar gyfer v^2 mewn perthynas ag x a defnyddio $v\frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

<u>Enghraifft 18</u>

Mae gronyn P gyda màs 0.1 kg yn cael ei glymu wrth un pen i sbring elastig, gyda'r pen arall, sef A, yn sefydlog. Gall y gronyn symud mewn llinell fertigol trwy A. Hyd naturiol y sbring yw 1 m a'i fodwlws yw 4.9 N. Mae'r gronyn yn aros mewn cydbwysedd ar bwynt B. Canfyddwch pa mor bell yw B o dan A. Yna caiff y sbring ei estyn ymhellach nes bod P ar bellter o 0.1 m o dan B ac yna fe'i rhyddheir o ddisymudedd. Dangoswch fod y mudiant yn harmonig syml gyda chanol B a chanfyddwch faint o amser a gymer nes i P gyrraedd B gyntaf.



Mae diagram (a) yn dangos safle'r cydbwysedd gyda'r estyniad cydbwysedd yn cael ei ddynodi gan d m. Y grymoedd sy'n gweithredu ar y gronyn yw 0.1×9.8 N tuag i lawr a'r tyniant $4.9d$ N sy'n gweithredu tuag i fyny. Ar gyfer cydbwysedd, mae'r rhain yn hafal, h.y. $0.98 = 4.9d$ ac felly mae $d = 0.2$ ac felly mae pwynt B yn 1.2 m o dan A.

Mae angen dangos bod y mudiant yn harmonig syml gyda chanol B, ac felly mae'n edrych yn rhesymol defnyddio dadleoliad tuag i lawr P o B, sef x m, fel newidyn, fel a ddangosir yn niagram (b). Felly'r grym i'r cyfeiriad tuag i lawr oherwydd y tyniant yn y llinyn yw $-4.9(0.2 + x)$ N, y grym i'r cyfeiriad hwn oherwydd disgyrchiant yw 0.98 N ac felly cyfanswm y grym i gyfeiriad x cynyddol yw

$$-4.9(0.2 + x)\text{ N} + 0.98\text{ N} = -4.9x\text{ N}.$$

Mae defnyddio deddf Newton yn rhoi, ar amser t eiliad,

$$0.1\frac{d^2x}{dt^2} = -4.9x,$$

neu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -49x.$$

Felly mae'r mudiant yn harmonig syml gyda $\omega^2 = 49$ ac mae canol yr osgiliad ar B. Mae'r amser a gymer P i gyrraedd B gyntaf yn chwarter cyfnod, h.y. $\frac{\pi}{14}$ eiliad.

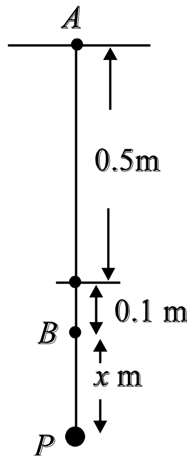
<u>Gydag unrhyw fudiant ar ben sbring mae'r mudiant bob amser yn harmonig syml o amgylch y safle cydbwysedd ac felly mae'n werth mesur y dadleoliad o'r pwynt hwn gan fod hynny'n osgoi defnyddio algebra.</u>

Enghraifft 19

Mae llinyn elastig gyda hyd naturiol 0.5 m, gydag un pen yn sefydlog wrth bwynt *A*, yn cael ei estyn bellter o 0.1 m gan ronyn *P* sy'n hongian yn rhydd o'r pen arall. Yna caiff y gronyn ei dynnu i lawr bellter pellach o *d* m a'i ryddhau o ddisymudedd. Canfyddwch yr amser a gymer y gronyn i gyrraedd ei uchder mwyaf pan fydd
(a) $d = 0.05$, (b) $d = 0.15$.

Mae'r cwestiwn hwn yn eithaf tebyg i'r un blaenorol heblaw na roddir màs y gronyn na modwlws y llinyn. Dynodir y rhain gan m kg a λ N yn ôl eu trefn. Mewn cydbwysedd, y grymoedd sy'n gweithredu ar y gronyn yw $9.8\,m$ N i lawr a'r tyniant $\frac{0.1\lambda}{0.5}$ N = 0.2λ N, sy'n gweithredu tuag i fyny. Ar gyfer cydbwysedd, mae'r rhain yn hafal, h.y. $\lambda = 49\,m$.

Fel a nodir uchod, mae'n werth mesur dadleoliad o'r safle cydbwysedd ac mae x m yn dynodi dadleoliad *P* tuag i lawr o'r pwynt cydbwysedd *B*, fel a ddangosir yn y diagram.



Felly y grym i'r cyfeiriad tuag i lawr oherwydd y tyniant yn y llinyn yw

$$\frac{-\lambda(0.1+x)}{0.5}\ \text{N} = -\,2\lambda\,(0.1 + x).$$

Y grym i'r cyfeiriad hwn oherwydd disgyrchiant yw $9.8\,m$ N ac felly cyfanswm y grym i gyfeiriad x cynyddol yw $-\,2\lambda\,(0.1 + x)$ N + $9.8m$ N $= -2\lambda x$ N, gan fod $\lambda = 49\,m$.

Mae defnyddio deddf Newton yn rhoi, ar amser t eiliad,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\,2\lambda x \qquad \text{neu} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\,98x.$$

Mae'r mudiant yn ymddangos fel petai'n harmonig syml gyda $\omega^2 = 98$, ac mae canol yr osgiliad ar *B*. Mae problem fach oherwydd y cafwyd hafaliad y mudiant gan dybio nad yw'r llinyn byth yn llac a rhaid ystyried y posibilrwydd y gall fod yn llac.

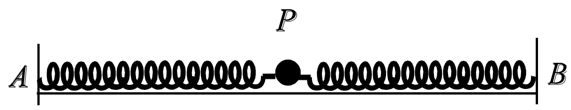
<u>Achos (a)</u> Gyda mudiant harmonig syml gyda'r gronyn yn cael ei ryddhau o bwynt 0.05 m o dan y canol, byddai'r uchder mwyaf uwchben *B* ar y pwynt eithaf arall, h.y. ar uchder o 0.05 m uwchben *B*. Ar y pwynt hwn, nid yw'r llinyn yn llac eto ac felly mae hafaliad y M.H.S. dal yn ddilys ac mae'r amser i bwynt yr uchder mwyaf yn hanner cyfnod, h.y. $\dfrac{\pi}{\sqrt{98}}$.

<u>Achos (b)</u> Gan dybio bod y mudiant yn harmonig syml, yr uchder mwyaf uwchben *B* yw 0.15 m. Fodd bynnag, byddai'r llinyn wedi dod yn llac ar uchder o 0.1 m uwchben *B* ac felly nid yw hafaliadau M.H.S. yn dal yn ddilys. Yn yr achos hwn, unwaith y bydd y gronyn wedi cyrraedd y pwynt lle nad yw'r llinyn bellach yn dynn (h.y. ar uchder 0.1 m uwchben *B*) bydd y gronyn yn symud o dan ddisgyrchiant yn unig. Felly er mwyn canfod yr amser y mae'n codi mae angen canfod y cyflymder pan fydd $x = -0.1$ m. Nes iddo gyrraedd y pwynt hwn mae'r mudiant yn harmonig syml gydag osgled 0.15 m ac felly, ar amser *t* eiliad, mae $x = 0.15\cos\sqrt{98}\,t$, lle mae $t = 0$ ar yr amser y rhyddhawyd y gronyn, a
$v^2 = 98\,(0.15^2 - x^2)$. Mae amnewid $x = -0.1$ yn rhoi'r buanedd pan fydd y gronyn yn dechrau symud o dan ddisgyrchiant yn unig, sef 1.11 ms^{-1}, a'r amser a gymer i gyrraedd y pwynt uchaf hwnnw yw $\dfrac{1.11}{9.8}$ eiliad = 0.11 eiliad. Canfyddir yr amser a gymer i gyrraedd y pwynt $x = -0.1$ trwy ddatrys

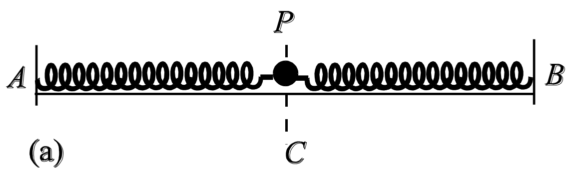
$$-0.1 = 0.15\cos\sqrt{98}\,t.$$

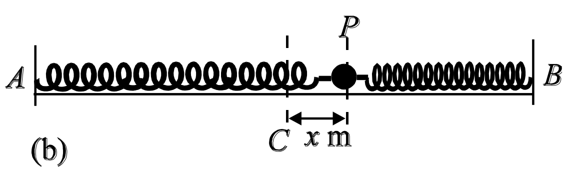
Y datrysiad yw $t = 0.23$. Cyfanswm yr amser a gymer o ddisymudedd i gyrraedd y pwynt uchaf yw (0.11 + 0.23) eiliad = 0.34 eiliad.

<u>Enghraifft 20</u>



Mae'r diagram yn dangos gronyn *P*, màs 0.2 kg, yn gorwedd ar fwrdd llorweddol llyfn ac a glymwyd gan ddau sbring gyda hydoedd naturiol 0.6 m a 0.4 m a modwli 3 N a 6 N yn ôl eu trefn, wrth bwyntiau *A* a *B*, lle mae *AB* = 1.4 m. Canfyddwch bellter pwynt *C*, sef y pwynt lle mae'r gronyn mewn cydbwysedd, o bwynt *A*. Os symudir y gronyn o *C*, dangoswch y bydd yn disgrifio mudiant harmonig syml o amgylch *C* a chanfyddwch gyfnod y mudiant hwn.





Dangosir safle'r cydbwysedd yn niagram (a) uchod, a dynodir y pellter *AC* gan *d* m. Estyniad y sbring sydd ynghlwm wrth *A* yw (d – 0.6) m ac estyniad y sbring arall yw (1 – d) m.

Y tyniannau yn y sbringiau felly yw $\frac{3(d-0.6)}{0.6}$ N a $\frac{6(1-d)}{0.4}$ N.

Ar gyfer cydbwysedd, mae'r rhain yn hafal, h.y. $\frac{3(d-0.6)}{0.6} = \frac{6(1-d)}{0.4}$, gan roi d = 0.9.

Pan wneir i'r gronyn symud, dynodir ei ddadleoliad o *C* i'r cyfeiriad o *A* i *B* gan *x* m fel a ddangosir yn niagram (b).

Estyniad y sbring sydd ynghlwm wrth *A* yw ($d + x - 0.6$) m ac felly y grym sy'n gweithredu ar *P* oherwydd y sbring hwn yw $-\frac{3(d+x-0.6)}{0.6}$N i gyfeiriad *x* positif.

Estyniad y sbring sydd ynghlwm wrth *B* yw ($1 - d - x$) m ac felly y grym sy'n gweithredu ar *P* oherwydd y llinyn hwn yw $\frac{6(1-d-x)}{0.4}$ N i gyfeiriad *x* positif.

Cyfanswm y grym i gyfeiriad *x* positif felly yw $-\frac{3(d+x-0.6)}{0.6}$ N + $\frac{6(1-d-x)}{0.4}$N.

Wrth ddefnyddio'r gwerth ar gyfer *d*, mae hyn yn symleiddio i – 20x N.

Mae deddf Newton yn rhoi

$$0.2\frac{d^2x}{dt^2} = -20x,$$

h.y.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -100x.$$

Felly mae'r mudiant yn harmonig syml gyda chyfnod $\frac{2\pi}{10}$ eiliad = $\frac{\pi}{5}$ eiliad.

<u>Ymarferion 2</u>

Yng nghwestiynau 1 i 3 mae sbring gyda modwlws λ N, hyd naturiol *a* m yn cael ei roi ar blân llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog ar bwynt *A*, clymir gronyn *P* gyda màs *m* kg wrth y pen arall ac mae'r gronyn yn rhydd i symud ar hyd llinell y sbring.

1 m = 0.1, λ = 10, a = 1, estynnir y sbring bellter o 0.2 m a rhyddheir *P* o ddisymudedd.

Canfyddwch yr amser a gymerir hyd nes

(a) bod yr estyniad yn hafal i 0.05 m am y tro cyntaf,

(b) bod *AP* yn hafal i 0.97 m am y tro cyntaf.

2 m = 0.8, λ = 2.56, a = 0.8, ar amser t = 0 teflir y gronyn o'i safle cydbwysedd gyda buanedd 0.8 ms^{-1} yn syth tuag at *A*.

Canfyddwch fynegiadau ar gyfer dadleoliad a chyflymder y gronyn ar amser t eiliad wedyn.

3 $m = 1.5$, $\lambda = 27$, $a = 2$, teflir y gronyn o'i safle cydbwysedd i gyfeiriad yn uniongyrchol oddi wrth A gyda buanedd 1.2 ms^{-1}.

Canfyddwch yr amser sy'n mynd heibio hyd nes y bydd $AP = 1.9$ m.

4 Atebwch gwestiwn 1 pan roddir llinyn gyda'r un modwlws a hyd naturiol yn lle'r sbring.

5 Atebwch gwestiwn 3 pan roddir llinyn gyda'r un modwlws a hyd naturiol yn lle'r sbring.

Yng nghwestiynau 6 a 7 mae gronyn P gyda màs m kg yn cael ei hongian o un pen i sbring gyda modwlws λ N, hyd naturiol a m, ac mae pen arall y sbring yn sefydlog ar A. Mae'r gronyn yn rhydd i symud ar hyd y fertigol trwy A.

6 $m = 0.5$, $\lambda = 16$, $a = 0.5$. Mae'r gronyn yn ddisymud yn y safle cydbwysedd i ddechrau ac yna caiff ei dynnu i lawr bellter pellach o 0.04 m a'i ryddhau o ddisymudedd.

Canfyddwch yr amser a gymer y gronyn

(a) i ddychwelyd i'r safle cydbwysedd am y tro cyntaf,

(b) i gyrraedd uchder o 0.01 m uwchben y safle cydbwysedd am y tro cyntaf.

7 $m = 1.5$, $\lambda = 30$, $a = 0.8$. Mae'r gronyn yn ddisymud ar ei safle cydbwysedd i ddechrau ac yna caiff ei daflu yn fertigol i lawr gyda buanedd 1 ms^{-1}.

Canfyddwch ddyfnder mwyaf y gronyn o dan ei safle cydbwysedd a'r amser a gymer i ddisgyn pellter o 0.05 m o'r safle cydbwysedd.

8 Clymir gronyn P gyda màs 0.1 kg wrth un pen i linyn elastig, ac mae'r pen arall, sef A, yn sefydlog. Gall y gronyn symud ar hyd llinell fertigol trwy A. Hyd naturiol y llinyn yw 1 m a'i fodwlws yw 4.9 N. Mae'r gronyn yn ddisymud i ddechrau ac yna caiff ei dynnu i lawr bellter o 0.4 m o dan ei safle cydbwysedd a'i ryddhau. Canfyddwch yr amser rhwng yr adeg y daw'r llinyn yn llac a phan fydd y gronyn yn cyrraedd ei bwynt uchaf.

9 Mae gronyn P gyda màs 0.1 kg yn cael ei hongian mewn cydbwysedd oddi wrth sbring ac estyniad y sbring yw 0.1 m. Gyda P mewn cydbwysedd, mae màs ychwanegol o 0.2 kg yn cael ei glymu wrtho yn ofalus ac yna mae'r gronyn cyfunol yn cael ei ryddhau. Canfyddwch gyfnod ac osgled y mudiant harmonig syml sy'n dilyn.

10 Mae un pen i sbring yn sefydlog a chlymir dau ronyn gyda masau 0.4 kg ac m kg gyda'i gilydd wrth y pen arall ac maent yn hongian mewn cydbwysedd. Pan gânt eu dadleoli ychydig o dan y safle cydbwysedd a'u rhyddhau, maent yn gwneud osgiliadau harmonig syml gyda chyfnod 0.5 eiliad. Os tynnir y gronyn gyda màs 0.4 kg mae'r gronyn arall, pan gaiff ei ddisodli o'i safle cydbwysedd, yn gwneud osgiliadau harmonig syml gyda chyfnod 0.25 eiliad. Canfyddwch m.

11 Mae dau bwynt A a B yn gorwedd ar linell lorweddol gyda phellter o 3 m rhyngddynt. Clymir gronyn P gyda màs 0.6 kg yn y rhanbarth rhwng A a B gydag un o ddau linyn unfath gyda modwlws 20 N a hyd naturiol 1 m wrth A a chyda'r llall wrth B. Caiff y gronyn ei ddadleoli ar bellter o 0.1 m o'i safle cydbwysedd ar hyd llinell AB a'i ryddhau o ddisymudedd. Dangoswch fod ei fudiant wedyn yn harmonig syml a chanfyddwch ei gyfnod.

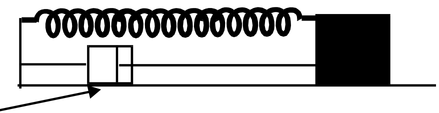
12 Clymir gronyn sy'n gorwedd ar fwrdd llorweddol llyfn gyda sbring o hyd naturiol 0.6 m wrth bwynt sefydlog ar y bwrdd. Caiff y sbring ei ddal ar bwynt A lle mae estyniad y llinyn yn 0.1 m ac yna ei ryddhau o ddisymudedd. Mae'n dychwelyd i A am y tro cyntaf ar ôl $\frac{\pi}{2}$ eiliad. Canfyddwch fuanedd y gronyn pan fydd ar bellter o 0.02 m oddi wrth A a'r amser a gymer i gyrraedd y pwynt hwn.

13 Pan gaiff gronyn gyda màs 5 kg ei hongian o sbring, mae'r estyniad yn 0.2 m. Canfyddwch fuanedd mwyaf y gronyn pan gaiff ei dynnu i lawr bellter pellach o 0.2 m a'i ryddhau o ddisymudedd.

4 Mudiant harmonig gwanychol

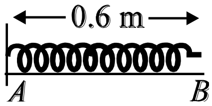
Yn y problemau yn yr adran flaenorol, dangoswyd y byddai gronyn sy'n symud ar ben sbring yn disgrifio mudiant harmonig syml, sy'n fudiant cyfnodol a all barhau am byth. Ni all mudiant o'r fath fodoli yn y byd go iawn wrth gwrs a phetaech yn arsylwi mudiant gronyn ar ben sbring fe welech fod yr osgiliadau yn lleihau'n raddol ac yn darfod. Mae hyn oherwydd effaith gwrthiant aer neu wrthiant ffrithiannol a rhaid mireinio'r model syml er mwyn cymryd y gwrthiant hwn i ystyriaeth.

Mae llawer o fodelau posibl ar gyfer gwrthiant, ond yr unig un sy'n arwain at fathemateg weddol hawdd wrth fireinio problemau sy'n cynnwys sbringiau yw'r model sy'n tybio bod y gwrthiant mewn cyfrannedd union â'r buanedd. Yn ogystal â'r gwrthiant sy'n digwydd yn naturiol mae llawer o enghreifftiau lle cyflwynir gwanychu rhag i'r osgiliadau barhau. Er enghraifft, model syml o hongiad car fyddai gronyn ar ben sbring ac felly yn y model hwn byddai'r car yn symud i fyny ac i lawr a byddai'n anghyffyrddus i'w yrru. Er mwyn osgoi hyn, cyflwynir system gwanychu sy'n cynnwys system o ddashpotiau ac fe adeiledir y rhain fel eu bod yn rhoi gwrthiant sydd mewn cyfrannedd â'r buanedd. Yn y bôn, silindr yw dashpot sy'n cynnwys hylif gyda phiston sy'n dynn, efallai gyda thwll bychan ynddo. Pan symudir y piston, mae'r hylif yn tryddiferu trwy'r ochrau a thrwy'r twll ac mae'r gwrthiant i'r mudiant mewn cyfrannedd bras â buanedd y piston. Wrth fodelu osgiliadau màs sy'n dirgrynu, tybir bod y màs yn gysylltiedig â'r dashpot fel a ddangosir yn y diagram.



Mewn gwirionedd, dashpotiau yw'r sioc laddwyr mewn car.
Felly mae'r model sy'n tybio bod gwrthiant mewn cyfrannedd â buanedd yn arbennig o ddefnyddiol oherwydd ei fod yn fodel rhesymol ar gyfer llawer o systemau lle mae angen cyflwyno gwanychu am resymau ymarferol.

Enghraifft 21



Mae'r diagram yn dangos sbring gyda hyd naturiol 0.6 m a modwlws 0.48 N ar fwrdd llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog ar bwynt A ar y bwrdd ac ar y dechrau mae'r sbring yn gorwedd yn ddisymud, gyda hyd 0.6 m, a'i ben rhydd ar bwynt B ar y bwrdd. Yna clymir gronyn P gyda màs 0.2 kg wrth y pen rhydd ac ar amser $t = 0$ caiff y sbring ei estyn bellter o 0.06 m a'i ryddhau o ddisymudedd. Mae gwrthiant i'r mudiant â maint $0.4v$ N pan fydd y gronyn yn symud ar fuanedd v ms^{-1}. Dangoswch, ar amser t eiliad yn ddiweddarach, fod dadleoliad P oddi wrth B, sef x m, i'r cyfeiriad o A i B, yn bodoli'r hafaliad differol

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4\,x \;=\; 0.$$

Canfyddwch fynegiad ar gyfer x ar amser t eiliad a thrafodwch y mudiant wedyn.
(Enghraifft 14 yw hon gyda therm gwrthiannol ychwanegol wedi'i gynnwys.)

Rhoddir y cyfeiriad cyfeirnod i'r cyfeiriad o A i B ac felly pan fydd y dadleoliad o B yn x m mae'n dilyn, fel yn yr enghreifftiau blaenorol, mai'r grym i gyfeiriad x positif yw $-\dfrac{0.48x}{0.6} = -\,0.8x$ N.
Pan fydd y gronyn yn symud i'r dde ei fuanedd yw $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ms^{-1} ac felly mae'r grym gwrthsafol sy'n gweithredu arno i'r chwith a'i faint yw $0.4\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ N, ac felly y grym a achosir gan y gwrthiant yw $-\,0.4\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ N i gyfeiriad x positif. Pan fydd y gronyn yn symud i'r chwith ei fuanedd yw $-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ms^{-1}, gan fod $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ bellach yn negatif, ac felly mae'r grym gwrthsafol sy'n gweithredu arno i'r dde a'i faint yw $-\,0.4\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ N, ac felly

y grym a achosir gan y gwrthiant yw $-0.4\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ N i gyfeiriad x positif. Felly i ba gyfeiriad bynnag y mae'r gronyn yn symud, mae'r grym i gyfeiriad x positif yn $-0.4\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ N. Fel arfer, ni ddisgwylid i chi ddadansoddi'r sefyllfa mor fanwl ac fel rheol gallwch dybio, os yw'r gwrthiant yn cv N, yna mae'r grym i gyfeiriad x positif yn $-c\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ N. Nid yw'n wir bob amser, beth bynnag yw'r ddeddf wrthiant, bod y grym i'r cyfeiriad cyfeirnod yr un fath beth bynnag yw cyfeiriad y mudiant. (Gellir dangos bod y canlyniad yn wir pryd bynnag y mae'r gwrthiant yn od-ffwythiant o fuanedd.)

Mae defnyddio deddf Newton yn rhoi

$$0.2\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -0.8x - 0.4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

h.y.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4x = 0.$$

Hafaliad trefn dau yw hwn gyda chyfernodau cyson ac mae rhoi cynnig ar yr amnewidiad $x = \mathrm{e}^{mt}$ yn rhoi'r hafaliad ategol

$$m^2 + 2m + 4 = 0.$$

Gwreiddiau'r hafaliad hwn yw $-1 \pm \sqrt{-3}$. Mae'n dilyn nawr mai'r datrysiad cyffredinol yw

$$x = \mathrm{e}^{-t}(A\cos\sqrt{3}\,t + B\sin\sqrt{3}\,t).$$

Mae differu hwn mewn perthynas â t yn rhoi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{e}^{-t}(A\cos\sqrt{3}\,t + B\sin\sqrt{3}\,t) + \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-t}(-A\sin\sqrt{3}\,t + B\cos\sqrt{3}\,t).$$

I ddechrau, mae $x = 0.06$ a $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$, ac felly mae amnewid $t = 0$ yn y mynegiadau uchod yn rhoi $A = 0.06$ ac $\sqrt{3}\,B = A$ ac felly

$$x = 0.06\,\mathrm{e}^{-t}\left(\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right).$$

Gwelir ffurf gyffredinol y mudiant fwyaf eglur trwy ailysgrifennu'r rhan mewn cromfachau yn y ffurf $a\sin(\sqrt{3}t + \varepsilon)$ lle mae

$$a\cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ac} \quad a\sin\varepsilon = 1.$$

Mae sgwario ac adio yn rhoi $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ac felly mae $\varepsilon = \dfrac{\pi}{3}$ ac

$$x = \frac{0.12}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-t}\sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

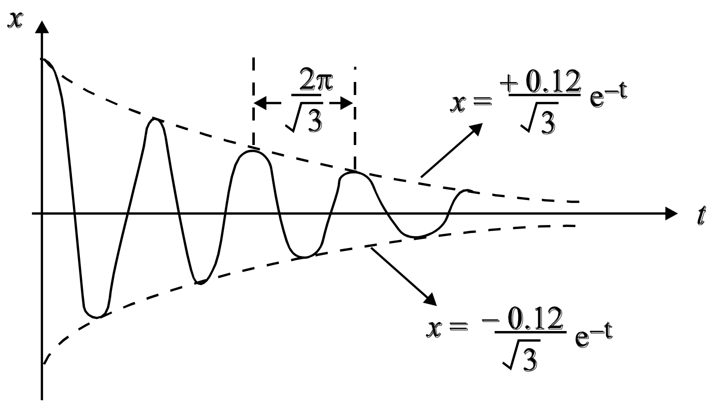
Bydd x yn sero pan fydd $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right), \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$, ... h.y. ar gyfyngau $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Hefyd bydd $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ yn diflannu pan fydd $\sin\left(\sqrt{3}t + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

h.y. $\qquad t = 0, \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}, ...$

h.y. $\qquad$ ar gyfyngau $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Felly bydd y ffurf gyffredinol fel a ddangosir yn y diagram canlynol. Bydd osgiliad yn yr ystyr y bydd *P* yn dychwelyd i *B* dro ar ôl tro ond bydd y pellterau rhwng *B* a'r pwyntiau lle mae'r cyflymder yn sero yn dal i leihau a bydd *x* yn tueddu at sero yn esbonyddol ac felly bydd y mudiant yn graddol ddod i ben. Bydd y mudiant yn gorwedd rhwng y ddwy gromlin $x = \pm\dfrac{0.12}{\sqrt{3}}e^{-t}$, fel a ddangosir yn y diagram.



Gyda'r math hwn o fudiant, lle mae rhyw fath o osgiliad yn digwydd, dywedir bod y gwanychu yn wan neu yn is-gritigol.

Enghraifft 22

Ystyriwn nawr y broblem flaenorol pan fo'r grym gwrthsafol yn 0.8 *v* N.

Y gwahaniaeth yn yr achos hwn yw bod y grym i gyfeiriad *x* positif bellach yn $-0.8\dfrac{dx}{dt}$ N, ac mae defnyddio deddf Newton yn rhoi

$$0.2\frac{d^2x}{dt^2} = -0.8x - 0.8\frac{dx}{dt},$$

h.y. $$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Hafaliad trefn dau yw hwn gyda chyfernodau cyson ac mae rhoi cynnig ar yr amnewidiad $x = e^{mt}$ yn rhoi'r hafaliad ategol

$$m^2 + 4m + 4 = 0.$$

Dim ond un gwreiddyn sydd gan yr hafaliad hwn, sef $m = -2$, ac yn awr mae'n dilyn mai'r datrysiad cyffredinol yw

$$x = e^{-2t}(At + B).$$

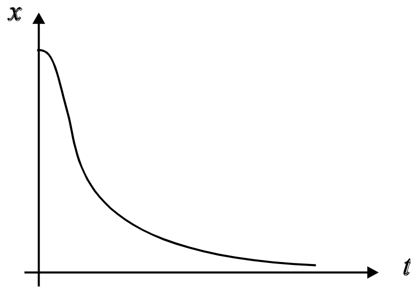
I ddechrau, mae $x = 0.06$ a $\dfrac{dx}{dt} = 0$ ac felly mae $B = 0.06$ ac $A = 2B = 0.12$.

Y datrysiad cyffredinol felly yw

$$x = e^{-2t}(0.12t + 0.06).$$

Mae differu'r mynegiad hwn yn rhoi $\dfrac{dx}{dt} = -0.24t\,e^{-2t}$.

Felly nid yw x yn diflannu pan fydd t yn bositif a bydd ffurf x fel a ddangosir yn y diagram.



Dywedir bod y gwanychu yn yr achos hwn yn gritigol.

<u>Enghraifft 23</u>

Ystyriwn nawr y broblem flaenorol pan fo'r grym gwrthsafol yn v N.

Yn yr achos hwn y grym i gyfeiriad x positif nawr yw $-\dfrac{dx}{dt}$ N ac mae defnyddio deddf Newton yn rhoi

$$0.2\frac{d^2x}{dt^2} = -0.8x - \frac{dx}{dt},$$

h.y.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Hafaliad trefn dau yw hwn gyda chyfernodau cyson ac mae rhoi cynnig ar yr amnewidiad $x = e^{mt}$ yn rhoi'r hafaliad ategol

$$m^2 + 5m + 4 = 0.$$

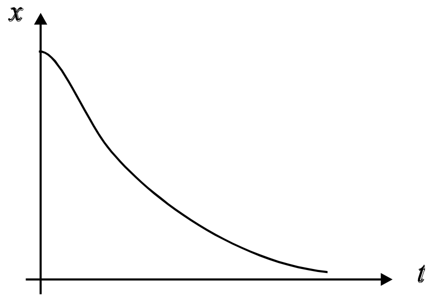
Gwreiddiau'r hafaliad hwn yw $m = -1$ ac $m = -4$ ac yn nawr mae'n dilyn mai'r datrysiad cyffredinol yw

$$x = Ae^{-t} + Be^{-4t}.$$

I ddechrau, mae $x = 0.06$ a $\dfrac{dx}{dt} = 0$ ac felly mae $A + B = 0.06$ ac $A + 4B = 0$, ac felly mae $B = -0.02$ ac $A = 0.08$ a'r datrysiad cyffredinol felly yw

$$x = 0.08e^{-t} - 0.02e^{-4t}.$$

Er mwyn i x fod yn sero, mae $e^{3t} = 0.25$ ac nid yw hyn yn digwydd pan fydd t yn bositif. Felly bydd y ffurf gyffredinol ar gyfer x fel a ddangosir isod ac unwaith eto mae'n lleihau'n esbonyddol gydag amser.



Yn yr achos hwn dywedir bod y gwanychu yn gryf neu'n or-gritigol.

Ymarferion 3

Yng nghwestiynau 1 i 4, rhoddir sbring gyda modwlws λ N a hyd naturiol a m ar blân llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog ar bwynt A, clymir gronyn P gyda màs m kg wrth y pen arall ac mae'r gronyn yn rhydd i symud ar hyd llinell y sbring er bod y gronyn, pan fydd yn symud gyda buanedd v ms^{-1}, yn profi gwrthiant i'w fudiant gyda maint kv N.

1 $m = 0.4$, $\lambda = 31.2$, $a = 0.5$, $k = 10$. Caiff y gronyn ei ddadleoli ar bellter o 0.04 m o'i safle cydbwysedd i gyfeiriad i ffwrdd oddi wrth A a'i ryddhau o ddisymudedd. Canfyddwch ei ddadleoliad o'r safle cydbwysedd ar unrhyw amser wedyn.

2 $m = 0.5$, $\lambda = 48$, $a = 0.6$, $k = 4$. Teflir y gronyn o'r safle cydbwysedd i gyfeiriad i ffwrdd oddi wrth A gyda buanedd 0.6 ms^{-1}.
Canfyddwch ei ddadleoliad o'r safle cydbwysedd ar unrhyw amser wedyn.

3 $m = 0.8$, $\lambda = 12$, $a = 0.75$, $k = 7.2$. Caiff y gronyn ei ddadleoli ar bellter o 0.2 m o'i safle cydbwysedd i gyfeiriad tuag at A a'i ryddhau o ddisymudedd.
Canfyddwch ei ddadleoliad o'r safle cydbwysedd ar unrhyw amser wedyn.

4 $m = 0.6$, $\lambda = 12$, $a = 0.8$, $k = 6$. Teflir y gronyn o'r safle cydbwysedd gyda buanedd 0.2 ms^{-1} i gyfeiriad tuag at A.
Canfyddwch ei ddadleoliad o'r safle cydbwysedd ar unrhyw amser wedyn.

5 Mae model syml o fudiant gronyn ar ben sbring yn dangos ei fod yn disgrifio mudiant harmonig syml gyda chyfnod $\frac{2\pi}{5}$ eiliad.
Canfyddwch yr amser rhwng uchafbwyntiau olynol ei fudiant pan dybir bod y gwrthiant i'w fudiant, pan fydd yn symud gyda buanedd v ms^{-1}, yn $8v$ N am bob uned o fàs.

6 Mae gronyn, pan anwybyddir grymoedd gwrthsafol, yn perfformio osgiliadau harmonig syml gyda chyfnod $\frac{2\pi}{\omega}$ eiliad. Dangoswch, os tybir bod y gwrthiant i'r mudiant yn $2kv$ N am bob uned o fàs pan fydd y gronyn yn symud gyda buanedd v ms^{-1}, yna fod yr amser rhwng uchafbwyntiau olynol yn $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}$ eiliad.

7 Rhagfynegir y byddai gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml gyda chyfnod 8 eiliad yn absenoldeb gwrthiant. Gwelir bod y gronyn mewn gwirionedd yn cyrraedd ei uchafbwyntiau olynol o'i safle cydbwysedd ar gyfyngau o 10 eiliad. Gan gymryd yr achosir hyn gan wrthiant i'r mudiant o $2kv$ N am bob uned màs pan fydd y gronyn yn symud gyda buanedd v ms^{-1}, canfyddwch k.

8 Yr amser rhwng uchafbwyntiau olynol dadleoliad gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig gwanychol yw 0.1 eiliad. Cymhareb y dadleoliadau ar uchafbwyntiau olynol yw 0.9. O wybod bod màs y gronyn yn 0.4 kg, canfyddwch y gwrthiant i'w fudiant pan fydd yn symud gyda buanedd 3 ms^{-1}.

ATEBION I'R YMARFERION`

Ymarferion 1

1. π s
2. 0.5 m, 0.3 m
3. $\frac{1}{\pi}$ ms^{-1}
4. $\frac{5}{3\pi}$ m
5. 5 m, π s
6. 5 m, 20 ms^{-1}
7. 0.4 m
8. $2\sqrt{5}$ m $\frac{2\pi}{3}$ s
9. 63.7 Hz
10. 0.63 ms^{-1} i 1.57 ms^{-1}
11. 0.22 s, 0.12 s
12. $3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ m
13. 0.057
14. 6.48 am
15. 12.32 am a 8.18 pm
16. $\frac{0.2\pi}{3}$ ms^{-1}, $\frac{0.2\pi^2}{9}$ ms^{-2}
17. 4.2 N, 3.6 N
18. 0.06 m
19. $\frac{35}{\pi}$ Hz
20. Nid yw'n llithro
21. 9.9×10^{-4} m
22. 2 m, $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ s, $x = 1$ m

Ymarferion 2

1. (a) 0.13 s, (b) 0.17 s
2. $x = -0.4\sin 2t$ m, $v = -0.8\cos 2t$ ms^{-1}
3. 1.13 s
4. (a) 0.13 s, (b) 0.17 s
5. 1.13 s

6. (a) $\frac{\pi}{16}$ s, (b) 0.23 s
7. 0.2 m, 0.05 s
8. 0.25 s
9. 1.10 s, 0.2 m
10. 0.13
11. 0.77 s
12. 0.24 ms $^{-1}$, 0.16 s
13. 1.4 ms $^{-1}$

Ymarferion 3

1. $0.52e^{-12t} - 0.48e^{-13t}$
2. $0.05e^{-4t}\sin 12t$
3. $-e^{-4t} + 0.8e^{-5t}$
4. $-0.2te^{-5t}$
5. $\frac{2\pi}{3}$ s
6. $\frac{3\pi}{20}$
7. 2.53 N