Mudiant Unionlin

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon, dylech

- allu datrys problemau yn ymwneud â mudiant unionlin lle mae'r cyflymiad yn ffwythiant dadleoliad neu gyflymder.

1 Cyflymiad sy'n dibynnu ar ddadleoliad

Rydych wedi gweld eisoes, yn M2 sut i ddatrys problemau mudiant mewn llinell syth lle roedd y cyflymiad yn dibynnu ar amser. Yn y bennod hon, ystyrir problemau lle mae'r cyflymiad yn dibynnu ar ddadleoliad neu ar gyflymder. Y gwahaniaeth sylfaenol rhwng y problemau hyn a'r rhai y daethoch ar eu traws yn M2 yw bod y problemau nawr yn cynnwys hafaliadau. Yn M2, diffiniwyd y cyflymiad a gan

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

lle mae v yn cynrychioli'r cyflymder i'r cyfeiriad x positif a chaiff ei ddiffinio gan

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Mae mynegiad arall ar gyfer a sy'n ddefnyddiol mewn problemau lle rhoddir y cyflymiad yn nhermau'r dadleoliad, sef

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Profir hyn trwy ddefnyddio'r unfathiant

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

sy'n dilyn oddi wrth y rheol gadwyn.

Mae rhoi v yn lle $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ yn rhoi'r mynegiad sydd ei angen ar gyfer a.

Mae'n debyg mai'r ffordd hawsaf i ddeall y dull cyffredinol yw edrych ar enghraifft.

Enghraifft 1

Pan fydd dadleoliad gronyn oddi wrth bwynt O yn x m, ei gyflymiad yw e^{2x} ms^{-2}. Ar amser $t = 0$, mae'r gronyn yn mynd trwy'r tarddiad gyda buanedd 1 ms^{-1} i gyfeiriad x cynyddol. Canfyddwch

(a) ei fuanedd pan fydd ei ddadleoliad yn x m,

(b) ei ddadleoliad ar amser t s.

Hafaliad mudiant y gronyn yw

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{2x}.$$

Ni ellir integru'r hafaliad hwn yn uniongyrchol mewn perthynas â t gan fod yr ochr dde yn cynnwys x nad yw'n hysbys yn nhermau t. Fodd bynnag, gellir ailysgrifennu hafaliad y mudiant, gan ddefnyddio'r mynegiad a ddeilliwyd uchod, fel

$$v\frac{dv}{dt} = e^{2x}.$$

Mae'r ochr chwith yn hafal i $\dfrac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx}$;

h.y.
$$\frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx} = e^{2x}.$$

Gellir integru dwy ochr yr hafaliad hwn mewn perthynas ag x gan roi

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + c,$$

lle mae c yn gysonyn. Mae amnewid $v = 1$ pan fydd $x = 0$ yn dangos bod $c = 0$. Felly, wrth gymryd yr ail isradd, mae

$$v = e^x.$$

Mae angen bod yn ofalus iawn i ddewis yr arwydd cywir ar gyfer yr ail isradd mewn problemau fel hyn. Yn yr achos hwn rhaid dewis yr arwydd positif gan fod y gronyn yn symud i'r cyfeiriad x positif pan oedd $x = 0$ ac felly

$$\frac{dx}{dt} = e^x.$$

Dyma hafaliad differol i ganfod x a gellir ei ddatrys trwy wahanu newidynnau. Mae gwahanu'r newidynnau yn rhoi

$$e^{-x}\frac{dx}{dt} = 1,$$

ac mae integru hwn mewn perthynas â t yn rhoi

$$\int e^{-x}\,dx = \int dt\,.$$

Mae cyflawni'r integriadau yn rhoi

$$-\mathrm{e}^{-x} = t + a,$$

lle mae a yn gysonyn. Mae amnewid $x = 0$ a $t = 0$ yn dangos bod $a = -1$, ac felly

$$x = -\ln(1 - t).$$

Dim ond pan fydd $t < 1$ y mae'r datrysiad yn ddilys gan fod x yn mynd yn anfeidraidd pan fydd $t = 1$. Nid yw'r enghraifft yn un sy'n realistig yn ffisegol, ond mae'r fathemateg yn ddigon syml i'r camau fod yn eglur.

Y dull sylfaenol

Pan roddir y cyflymiad yn nhermau'r dadleoliad, dyma'r camau i'w dilyn:-

(i) Ysgrifennwch y cyflymiad fel

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{\mathrm{d}x}.$$

ac integrwch mewn perthynas ag x yr hafaliad a geir o ganlyniad.

(ii) Defnyddiwch unrhyw amodau a roddir i ganfod y cysonyn mympwyol a gynhyrchwyd gan yr integriad yn (i). Neu efallai y byddai integru rhwng terfannau addas yn gyflymach.

(iii) Nawr bydd gennych fynegiad ar gyfer v^2. Cymerwch yr ail isradd priodol fel bod eich gwerth ar gyfer v yn gyson â'r amodau a roddir.

(iv) Bydd canlyniad (iii) ar ffurf

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x),$$

lle mae F yn hysbys yn nhermau x.

(v) Gellir datrys yr hafaliad a geir yn (iv) trwy wahanu'r newidynnau ac integru mewn perthynas â t gan roi

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{F(x)} = \int \mathrm{d}t.$$

Mae cyflawni'r integriadau yn rhoi t yn nhermau x. Os yw'n bosibl, dylid gwrthdroi'r hafaliad a geir er mwyn rhoi x yn nhermau t.

Yn aml mae'r integriad yn (v) yn anodd iawn ac efallai y bydd angen defnyddio dull rhifiadol fel rheol Simpson er mwyn mynd ymhellach.

Felly yn aml iawn, pan roddir y cyflymiad yn nhermau'r dadleoliad, yr unig beth y gellir ei ganfod yn rhwydd yw perthynas rhwng y cyflymder a'r dadleoliad. Mae'r dull sylfaenol yn cyfateb i ddefnyddio'r egwyddor gwaith-egni, sef yr hyn a ddisgrifiwyd yn M2.

Os rhoddir y cyflymder, yn hytrach na'r cyflymiad, yn nhermau'r dadleoliad bydd y gwaith cyfrifo yn dechrau ar gam (v).

Enghraifft 2

Mae'r cyflymiad oherwydd disgyrchiant ar bwynt y tu allan i'r Ddaear yn cyfeirio tuag at O, canol y Ddaear, ac yn hafal i $\frac{ga^2}{x^2}$, lle mae a yn dynodi radiws y Ddaear ac x yn dynodi'r pellter o O. Mae'r tanwydd mewn roced wedi'i ddisbyddu yn llwyr pan fydd ar bellter b o ganol y Ddaear a buanedd y roced bryd hynny yw u. A chymryd bod y roced yn symud ar hyd y llinell syth ati hi o O, canfyddwch ei buanedd pan fydd ar bellter $\frac{5b}{4}$ o O.

Y cyflymiad i gyfeiriad x cynyddol yw $-\frac{ga^2}{x^2}$ ac felly gellir ysgrifennu hafaliad y mudiant fel

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{ga^2}{x^2}.$$

Os defnyddir V i ddynodi'r cyflymder sydd ei angen, yna mae integru'r ochr chwith mewn perthynas â v o u i V a'r ochr dde mewn perthynas ag x o b i $\frac{5b}{4}$ yn rhoi

$$V^2 - u^2 = -\frac{2ga^2}{5b},$$

ac felly y buanedd sydd ei angen yw $\sqrt{\left(u^2 - \frac{2ga^2}{5b}\right)}$.

Bydd hwn yn ddilys pan fydd $u^2 > \frac{2ga^2}{5b}$ yn unig.

Os yw $u^2 < \frac{2ga^2}{5b}$, yna bydd y roced wedi dod i ddisymudedd cyn cyrraedd y pwynt ar bellter o $\frac{5b}{4}$ o O ac yna bydd yn dychwelyd i'r Ddaear.

Enghraifft 3

Pan fydd dadleoliad gronyn o bwynt O yn x m, ei gyflymiad yw $\frac{24}{x^4}$ ms^{-2} i gyfeiriad x lleihaol. Ar amser $t = 0$, mae'r gronyn yn mynd trwy'r pwynt $x = 2$, gan symud gyda buanedd $\sqrt{2}$ ms^{-1} i gyfeiriad x cynyddol. Canfyddwch

(a) ei fuanedd pan fydd ei ddadleoliad yn x m,

(b) ei ddadleoliad ar amser t s.

Hafaliad mudiant y gronyn yw

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{\mathrm{d}x} = -\frac{24}{x^4}.$$

Mae integru'r hafaliad hwn mewn perthynas ag x yn rhoi

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{8}{x^3} + c,$$

lle mae c yn gysonyn.

Mae amnewid $v = \sqrt{2}$ pan fydd $x = 2$ yn dangos bod $c = 0$.

Felly, wrth gymryd yr ail isradd, mae

$$v = \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Dewiswyd yr arwydd positif gan fod y gronyn yn symud i gyfeiriad x positif pan oedd $x = 2$.

Felly
$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Mae gwahanu'r newidynnau yn rhoi

$$x^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dt} = 4,$$

sef, wrth integru mewn perthynas â t,

$$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = 4\int dt\,.$$

Mae cyflawni'r integriadau yn rhoi

$$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = 4t + a,$$

lle mae a yn gysonyn. Mae amnewid $x = 2$ pan fydd $t = 0$ yn dangos bod $a = \frac{8\sqrt{2}}{5}$ ac mae gwrthdroi'r hafaliad yn rhoi

$$x = \left(4\sqrt{2} + 10t\right)^{\frac{2}{5}}$$

<u>Enghraifft 4</u>

Cyflymiad i gyfeiriad x positif gronyn sy'n rhydd i symud ar hyd yr echelin x yw $-\omega^2 x$, lle mae ω yn gysonyn. Ar amser $t = 0$ mae'r gronyn yn ddisymud ar y pwynt $x = a$. Canfyddwch ei ddadleoliad wedyn. (Dyma enghraifft o fudiant harmonig syml.)

Yn yr achos hwn hafaliad mudiant y gronyn yw

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx} = -\omega^2 x\,.$$

Mae integru'r hafaliad hwn mewn perthynas ag x yn rhoi

$$v^2 = -\omega^2 x^2 + c,$$

lle mae c yn gysonyn. Mae amnewid $v = 0$ pan fydd $x = a$ yn dangos bod $c = \omega^2 a^2$.

Felly, wrth gymryd yr ail isradd, mae

$$v = -\omega\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Dewiswyd yr arwydd negatif gan fod y gronyn yn ddisymud pan oedd $x = a$ a bod ei gyflymiad i gyfeiriad x negatif, ac felly bydd y gronyn yn dechrau symud i gyfeiriad x negatif. Felly

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru yn rhoi

$$\int \frac{dx}{\omega\sqrt{a^2 - x^2}} = -\omega \int d\,t.$$

Gellir enrhifo'r integryn mewn perthynas ag x, ac felly mae

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = -\omega t + b,$$

lle mae b yn gysonyn. Mae amnewid $x = a$ pan fydd $t = 0$ yn dangos bod $b = \frac{\pi}{2}$ ac felly, yn y pen draw, mae $x = a \cos \omega t$.

Ymarferion 1

1 Mae cyflymiad gronyn sy'n symud ar hyd yr echelin x yn $4x$ ms^{-2} i gyfeiriad x negatif pan fydd ei ddadleoliad o'r tarddiad yn x m. Rhyddheir y gronyn o ddisymudedd ar y pwynt $x = 3$. Canfyddwch ei fuanedd pan fydd $x = 2$.

2 Mae gronyn yn symud ar hyd yr echelin x a'i gyflymiad yw $8x^3$ ms^{-2}, i'r cyfeiriad x cynyddol, pan fydd ei ddadleoliad o'r tarddiad yn x m. Mae'n symud i'r cyfeiriad x cynyddol gyda buanedd 3 ms^{-1} pan fydd yn mynd trwy'r tarddiad. Canfyddwch y pellter a deithir cyn y bydd ei fuanedd yn 6 ms^{-1}.

3 Pan fydd dadleoliad gronyn yn x m o'r tarddiad, ei gyflymiad i gyfeiriad x negyddol yw $\frac{3}{2x^2}$ ms^{-2}. Ei gyflymder pan fydd $x = 0.25$ m yw 3 ms^{-1} i gyfeiriad x positif. Canfyddwch y buanedd yn nhermau'r dadleoliad a chanfyddwch lle mae'r gronyn yn dod i aros yn enydaidd gyntaf.

Yng nghwestiynau 4 i 8 dynodir cyflymiad gronyn sy'n symud ar hyd yr echelin x gan $f(x)$ ms^{-2} pan fydd ei ddadleoliad o'r tarddiad ar amser t s yn x m a v yn dynodi cydran y cyflymder i'r cyfeiriad x positif.

4 $f = -\dfrac{16}{x^3}$, $v = 2$, ar gyfer $x = 2$ pan fydd $t = 0$.

Canfyddwch v yn nhermau x ac x yn nhermau t.

5 $f = (x + 5)$, $v = 5$, ar gyfer $x = 0$ pan fydd $t = 0$.

Canfyddwch v yn nhermau x ac x yn nhermau t.

6 $f = e^{2x}$, $v = 2$, ar gyfer $x = \ln 2$ pan fydd $t = 0$.

Canfyddwch v yn nhermau x ac x yn nhermau t.

7 $f = 3\sqrt{x}$, $v = 0$, ar gyfer $x = 0$ pan fydd $t = 0$.

Canfyddwch v yn nhermau x ac x yn nhermau t.

8 $f = -\dfrac{1}{x^3}$, $v = 0$, ar gyfer $x = 1$ pan fydd $t = 0$.

Canfyddwch yr amser a gymerir i gyrraedd y pwynt $x = \frac{1}{2}$.

9 Mae'r cyflymiad oherwydd disgyrchiant ar bwynt ar bellter x m uwchlaw canol y Ddaear yn cael ei gyfeirio tuag at ganol y Ddaear a'i faint yw

$$10\left(\frac{6.4\times10^6}{x}\right)^2 \text{ ms}^{-2}.$$

Gellir tybio bod y Ddaear yn sffêr gyda radiws 6.4×10^6 m.

Canfyddwch yr uchder mwyaf uwchlaw arwyneb y Ddaear a gyrhaeddir gan roced a deflir yn fertigol i fyny o arwyneb y Ddaear gyda buanedd 1000 ms^{-1}. Modelir y roced fel gronyn a deflir yn fertigol i fyny mewn gwactod.

2 Cyflymiad sy'n dibynnu ar gyflymder

Mae'r rhan fwyaf o broblemau sy'n cynnwys mudiant a wrthsefir yn symleiddio i rai lle rhoddir y cyflymiad yn nhermau'r cyflymder. Rhaid datrys yr hafaliadau differol a geir o ganlyniad, fel rheol trwy ddefnyddio dull gwahanu newidynnau.

Ceir dull cyffredinol safonol y mae'n rhaid ei ddilyn ac, fel yn yr adran flaenorol, mae'n debyg mai'r ffordd hawsaf o ddeall hyn yw gweithio trwy enghraifft benodol.

Enghraifft 5

Cyflymiad gronyn sy'n symud gyda buanedd v ms^{-1} ar amser t s yw $\frac{1}{v^2}$ ms^{-2}. Pan fydd $t = 0$, mae $v = 1$ ac mae'r gronyn ar bellter 4 m o bwynt O.

Canfyddwch fuanedd a dadleoliad y gronyn o O ar unrhyw amser wedyn a hefyd ei fuanedd pan fydd ar bellter 6 m o O.

Hafaliad y mudiant yw $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v^2}$.

Yn yr achos hwn nid yw defnyddio cyflymiad fel $\frac{d^2x}{dt^2}$ yn helpu ond mae'r ffurf amgen, sef $\frac{dv}{dt}$, yn rhoi hafaliad differol y gellir ei integru trwy wahanu newidynnau.

Felly $$\int v^2 \, dv = \int dt .$$

Mae cyflawni'r integriadau yn rhoi

$$\frac{v^3}{3} = t + c,$$

lle mae c yn gysonyn. Mae amnewid $v = 1$ pan fydd $t = 0$ yn dangos bod $c = \frac{1}{3}$.

Felly $$v = (1 + 3t)^{\frac{1}{3}}.$$

Y cam nesaf yw canfod y dadleoliad, x m. Mae rhoi $\frac{dx}{dt}$ yn lle v yn rhoi

$$\frac{dx}{dt} = (1 + 3t)^{\frac{1}{3}}.$$

Gellir integru hwn yn uniongyrchol mewn perthynas â t, naill ai trwy gyflwyno cysonyn neu gan integru rhwng terfannau. Mae'r ail ddull ychydig yn gyflymach ac mae integru o $t = 0$ i $t = t$ yn rhoi, gan fod $x = 4$ pan fydd $t = 0$,

$$x - 4 = \int_0^t (1+3w)^{\frac{1}{3}} \, dw = \frac{(1+3t)^{\frac{4}{3}} - 1}{4},$$

ac felly $$x = \frac{(1+3t)^{\frac{4}{3}} + 15}{4}.$$

Y cam nesaf yw canfod y buanedd pan fydd $x = 6$. Mae amnewid $x = 6$ yn y mynegiad ar gyfer x yn rhoi $(1 + 3t)^{\frac{4}{3}} = 9$ ac felly $(1 + 3t)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$. Felly mae amnewid am t yn y mynegiad ar gyfer $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ yn rhoi'r buanedd sydd ei angen fel $\sqrt{3}$ ms^{-1}.

Pe byddai angen y buanedd gyda gwerth cyffredinol ar gyfer x, yna mae gwrthdroi'r mynegiad ar gyfer x yn rhoi $(1 + 3t) = (4x - 15)^{\frac{3}{4}}$

ac felly $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (4x - 15)^{\frac{1}{4}}.$$

Petai'r cwestiwn wedi gofyn am y berthynas rhwng v ac x yn unig, yna dull cyflymach fyddai defnyddio'r mynegiad $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ ar gyfer y cyflymiad. Yn yr achos hwn, hafaliad y mudiant fyddai $$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v^2}.$$

Mae'r dull gwahanu newidynnau yn rhoi
$$\int v^3\,\mathrm{d}v = \int \mathrm{d}x.$$

Mae integru'r ochr chwith o $v = 1$ i $v = v$ a'r ochr dde o $x = 4$ i $x = x$ yn rhoi
$$v^4 - 1 = 4x - 16,$$
sef y canlyniad a gafwyd ynghynt.

Bob tro y rhoddir y cyflymiad fel ffwythiant buanedd bydd y camau yn y gwaith cyfrifo yn union yr un fath ag yn Enghraifft 5.

Y dull cyffredinol

(i) Defnyddiwch y cyflymiad yn y ffurf $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ yn hafaliad y mudiant, gwahanwch y newidynnau ac integrwch, naill ai gan gyflwyno cysonyn integriad neu gan integru rhwng terfannau. Os cyflwynir cysonyn mympwyol, yna defnyddiwch yr amodau a roddir er mwyn ei ganfod. Os yw'r cyflymiad mewn cyfrannedd union â v, ceir ffordd arall, sef defnyddio'r amnewidiad $v = \mathrm{e}^{mt}$.

(ii) Bydd hyn yn rhoi v yn nhermau t; gellir integru hwn gan ddefnyddio $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ i ganfod x yn nhermau t. Unwaith eto integrwch rhwng terfannau neu cyflwynwch gysonyn mympwyol. Os cyflwynir cysonyn mympwyol, yna defnyddiwch yr amodau a roddir er mwyn ei ganfod.

(iii) Os oes angen perthynas rhwng v ac x, yna

naill ai

(a) gwrthdrowch y datrysiad a ganfuwyd yng ngham (ii) er mwyn rhoi t yn nhermau x ac amnewidiwch y canlyniad yn y mynegiad ar gyfer v a ganfuwyd yng ngham (i). Os na ellir cyflawni'r gwrthdroad hwn, efallai y gellir gwrthdroi'r mynegiad ar gyfer v er mwyn canfod t yn nhermau v a thrwy hyn ganfod x yn nhermau v.

neu

(b) defnyddiwch y cyflymiad yn y ffurf $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ yn hafaliad y mudiant, gwahanwch y newidynnau ac integrwch, naill ai gan gyflwyno cysonyn integriad neu gan integru rhwng terfannau. Os cyflwynir cysonyn mympwyol, yna defnyddiwch yr amodau a roddir er mwyn ei ganfod.

<u>Enghraifft 6</u>

Arafiad gronyn sy'n symud gyda buanedd v ms^{-1} ar amser t s yw $3v^3$ ms^{-2}. Pan fydd $t = 0$, mae $v = 2$ ac mae'r gronyn yn mynd trwy'r pwynt sefydlog O. Canfyddwch

(a) ddadleoliad y gronyn ar unrhyw amser wedyn,

(b) buanedd y gronyn pan fydd ei ddadleoliad o O yn x m.

Yn yr achos hwn mae'r cyflymiad yn negatif a hafaliad y mudiant yw

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -3v^3.$$

Mae gwahanu'r newidynnau fel yng ngham (i) yn rhoi

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v^3} = -3\int \mathrm{d}t\,.$$

Mae integru'r ochr chwith o $v = 2$ i $v = v$ a'r ochr dde o $t = 0$ i $t = t$ yn rhoi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{4}\right) = 3t.$$

Mae datrys ar gyfer v yn nhermau t yn rhoi

$$v = \frac{2}{\sqrt{1 + 24\,t}}.$$

Mae rhoi $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ yn lle v fel yng ngham (ii) yn rhoi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{\sqrt{1 + 24\,t}}\,.$$

Mae integru'r hafaliad hwn o $t = 0$ i $t = t$ yn rhoi, gan ddefnyddio $x = 0$ pan fydd $t = 0$,

$$x = \frac{\sqrt{1 + 24\,t}}{6} - \frac{1}{6}.$$

Gellir datrys yr hafaliad uchod er mwyn rhoi t yn nhermau x a gellir amnewid y canlyniad yn y mynegiad ar gyfer $\frac{dx}{dt}$. Ffordd arall yw ysgrifennu'r cyflymiad fel $v\frac{dv}{dx}$ fel bod

$$v\frac{dv}{dx} = -3v^3 .$$

Mae gwahanu'r newidynnau yn rhoi

$$\int\frac{dv}{v^2} = -3\int dx .$$

Mae integru'r ochr chwith o $v = 2$ i $v = v$ a'r ochr dde o $x = 0$ i $x = x$ yn dangos bod

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{2} = 3x.$$

Mae datrys ar gyfer v yn nhermau x yn rhoi $v = \frac{2}{1+6x}$.

<u>Ymarferion 2</u>

Mae cwestiynau 1 i 5 yn cyfeirio at ronyn P yn symud ar hyd yr echelin x gyda chyflymiad a ms^{-2} i gyfeiriad x positif; mae x m yn dynodi ei ddadleoliad o'r tarddiad ar amser t s ac mae v ms^{-1} yn dynodi ei gyflymder i gyfeiriad x positif ar yr amser hwnnw.

1 $a = -6v$, $x = 3$ a $v = 5$ pan fydd $t = 0$. Canfyddwch x yn nhermau t.

2 $a = \frac{1}{v}$, $x = 4$ a $v = 3$ pan fydd $t = 0$. Canfyddwch v yn nhermau x.

3 $a = -\frac{v^2}{4}$, $x = 0$, $v = 2$ pan fydd $t = 0$. Canfyddwch v a t pan fydd $x = 8$.

4 $a = 4(2 - v)^2$, $x = 0$ a $v = 0$ pan fydd $t = 0$. Canfyddwch v yn nhermau t.

5 $a = -2\sqrt{v}$, $x = 0$ a $v = 4$ pan fydd $t = 0$. Canfyddwch yr amser a gymerir i ddod i ddisymudedd a'r pellter a deithir yn ystod yr amser hwnnw.

6 Mae arafiad gronyn sy'n symud mewn llinell syth mewn cyfrannedd â chiwb ei fuanedd. Mae buanedd y gronyn yn disgyn o 10 ms^{-1} i 5 ms^{-1} mewn 9 eiliad. Canfyddwch y pellter a deithir yn ystod yr amser hwn.

7 Mae cyflymiad gronyn sy'n symud mewn llinell syth mewn cyfrannedd gwrthdro â'i fuanedd. Mae buanedd y gronyn yn cynyddu o 5 ms^{-1} i 15 ms^{-1} mewn 1 munud. Dangoswch fod y pellter a deithir yn ystod yr amser hwn yn 650 m.

8 Mae arafiad gronyn sy'n symud mewn llinell syth mewn cyfrannedd ag n fed pðer ei fuanedd. Dangoswch, ar gyfer $n < 2$, nad yw'r gronyn ond yn symud pellter meidraidd.

ATEBION I'R YMARFERION

Ymarferion 1

1. $\sqrt{20}$ ms^{-1}
2. 1.61 m
3. $\sqrt{\frac{3}{x}-3}$, $x = 1$
4. $\frac{4}{x}$, $2\sqrt{1+2t}$
5. $5+x$, $-5+5e^{t}$
6. e^{x}, $\ln\left(\frac{2}{1-2t}\right)$
7. $2x^{\frac{3}{4}}$, $\frac{t^4}{16}$
8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ s
9. 50 km

Ymarferion 2

1. $-\frac{5}{6}e^{-6t}+\frac{23}{6}$
2. $(3x+15)^{\frac{1}{3}}$
3. $2e^{-2}$, $2e^{2}-2$
4. $\frac{16t}{8t+1}$
5. $t = 2$ s, $\frac{8}{3}$ m
6. 60 m