FP2: Ffwythiannau Real

Haf 2006

① $f(x) = x$ ar gyfer $x < 0$
$f(x) = \sin(x)$ ar gyfer $x \geqslant 0$.

(i) A yw $f(x)$ yn ddi-dor pan fydd $x = 0$?
o'r ochr chwith, fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to 0$.
o'r ochr dde, fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to 0$.
Felly mae $f(x)$ yn ddi-dor gan fod y ffwythiant yn tueddu i sero o'r ddwy ochr ac mae $f(0) = \sin(0)$
$= 0$.

(ii) $f'(x) = 1$ ar gyfer $x < 0$
$f'(x) = \cos(x)$ ar gyfer $x \geqslant 0$.

A yw $f'(x)$ yn ddi-dor pan fydd $x = 0$?
o'r ochr chwith, fel mae $x \to 0$ mae $f(x) = 1$.
o'r ochr dde, fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to 1$.
Felly mae $f'(x)$ yn ddi-dor gan fod y ffwythiant yn tueddu at 1 o'r ddwy ochr ac mae $f(0) = \cos(0)$
$= 1$.

③ $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ Parth $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

(a) $$f(x) = [x(x^2+1)]^{-1}$$
$$= [x^3+x]^{-1}$$
$$f'(x) = (-1)[x^3+x]^{-2}(3x^2+1)$$
$$= \frac{-(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$$

Mae'r enwadur yn rif wedi ei sgwario felly yn bositif ar gyfer $x > 0$. Mae'r $3x^2+1$ yn y rhifiadur yn bositif yn yr un modd. Felly mae $-(3x^2+1)$ yn negatif ac felly mae $f'(x)$ yn negatif ar gyfer $x > 0$. Felly mae graddiant $f(x)$ yn negatif ar gyfer $x > 0$ ac felly mae'n ffwythiant lleihaol caeth dros y cyfwng $(0, \infty)$.

(b) $$f(-x) = \frac{1}{(-x)((-x)^2+1)}$$

$$= \frac{1}{(-x)(x^2+1)}$$

$$= -\left(\frac{1}{x(x^2+1)}\right)$$

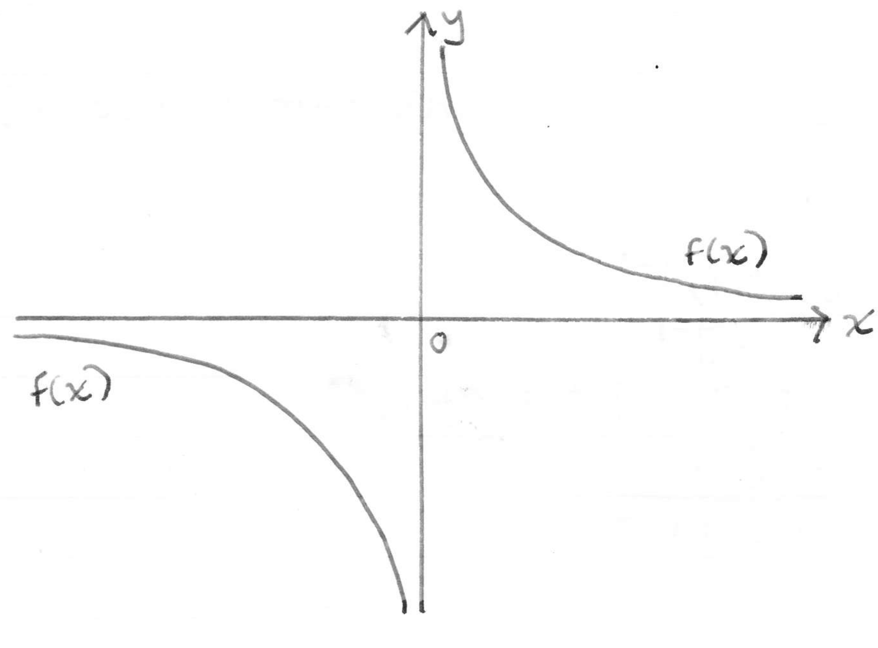
$f(-x) = -f(x)$.

Felly mae $f(x)$ yn od-ffwythiant.

(c) Fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to \infty$ felly mae $\underline{x=0}$ yn asymptot.

Fel mae $x \to \infty$ mae $f(x) \to 0$ felly mae $\underline{y=0}$ yn asymptot

(ch)



Haf 2007

(6) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{4}{x}$

$= x + 4x^{-1}$

$f'(x) = 1 - 4x^{-2}$

Pwyntiau arhosol: $f'(x) = 0$

$1 - 4x^{-2} = 0$

$1 = 4x^{-2}$

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{x^2}$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Unai $f(x) = \dfrac{2^2+4}{2}$ neu $f(x) = \dfrac{(-2)^2+4}{-2}$

$f(x) = 4$ $\qquad f(x) = -4$

Felly cyfesurynnau y ddau bwynt arhosol yw $(2, 4)$ a $(-2, -4)$.

(b) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

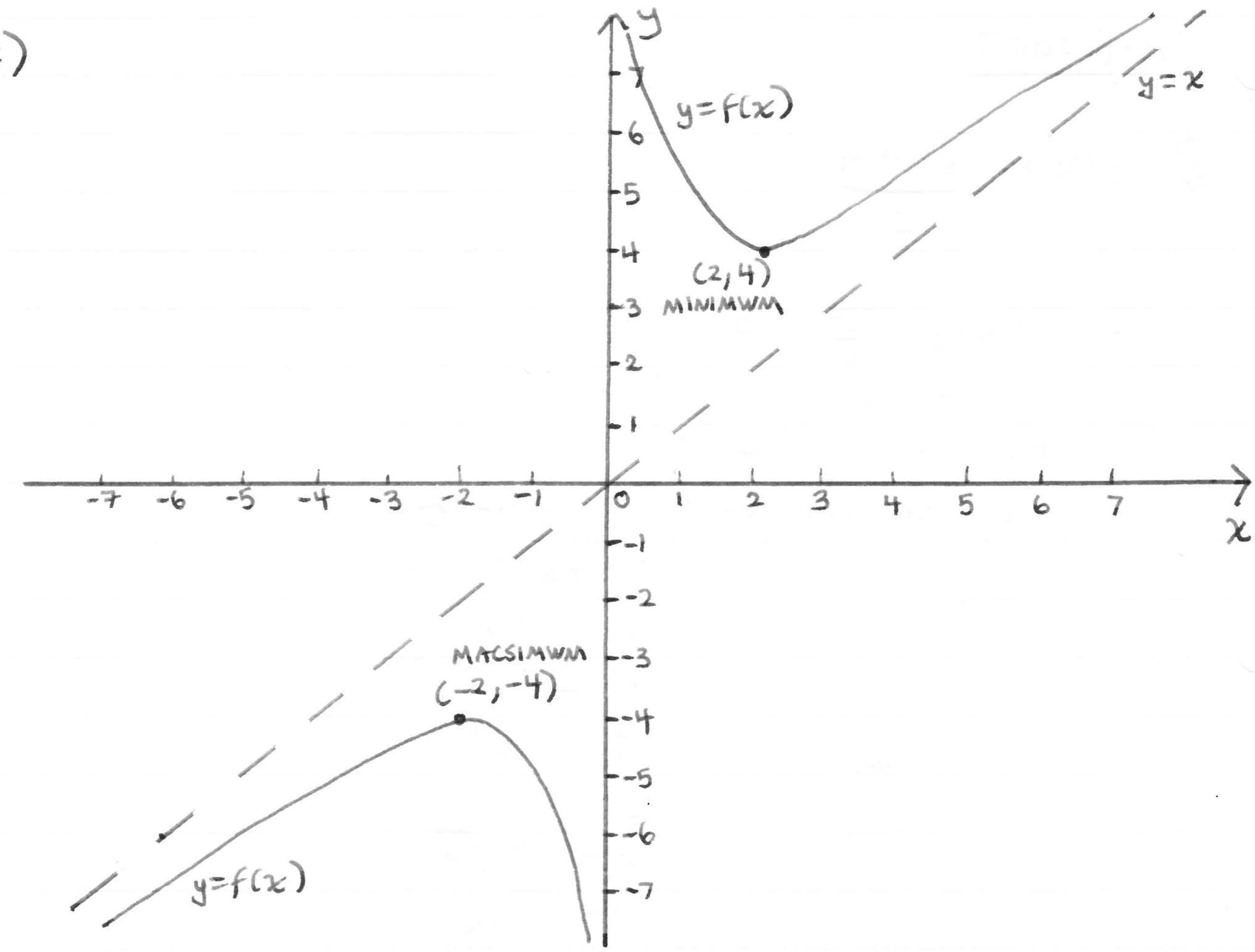
Fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to \infty$ felly mae $\underline{x = 0}$ yn asymptot.

Fel mae $x \to \infty$ mae $\dfrac{4}{x} \to 0$ Felly mae $f(x) \to x + 0$

$f(x) \to x$

Felly mae $\underline{y = x}$ yn asymptot.

(c)



(ch) $f(A)$, ble mae $A = [1, 5]$

$f(1) = \dfrac{1^2+4}{1}$ $\qquad$ $f(5) = \dfrac{5^2+4}{5}$ $\qquad$ Minimwm yn $(2, 4)$.

$f(1) = 5$ $\qquad$ $f(5) = 5.8$

Felly $f(A) = [4, 5.8]$.

(8) $f(x) = 4x^2$ ar gyfer $0 < x < 1$

$f(x) = (x+1)^2$ ar gyfer $1 \leq x < 2$.

(a) A yw f yn ddi-dor pan fydd $x = 1$?

o'r ochr chwith, fel mae $x \to 1$ mae $f(x) \to 4(1^2)$

$f(x) \to 4$.

o'r ochr dde, fel mae $x \to 1$ mae $f(x) \to (1+1)^2$

$f(x) \to 4$

Felly mae f yn ddi-dor gan fod y ffwythiant yn tueddu i 4 o'r ddwy ochr ac mae $f(1) = (1+1)^2$

$= 4$.

(b) $f'(x) = 8x$ ar gyfer $0 < x < 1$

$f'(x) = 2(x+1)$ ar gyfer $1 \leq x < 2$.

Yn y cyfwng $(0, 1)$, mae'r $8x$ o hyd yn bositif.

Yn y cyfwng $[1, 2]$, mae $2(x+1)$ hefyd wastad yn bositif.

Felly mae graddiant $f(x)$ bob amser yn bositif.

Mae $f(x)$ felly yn ffwythiant cynyddol caeth.

(c) Ar gyfer $0 < x < 1$:

$y = 4x^2$

$\frac{y}{4} = x^2$

$\pm\sqrt{\frac{y}{4}} = x$

$f(0) = 0$

$f(1) = 4$

Parth $f(x) = (0, 1)$

Felly angen yr ail isradd positif yn unig.

Ar gyfer $1 \leq x < 2$:

$y = (x+1)^2$

$\pm\sqrt{y} = x + 1$

$\pm\sqrt{y} - 1 = x$.

$f(1) = 4$

$f(2) = (2+1)^2$

$= 9$

Parth $f(x) = [1, 2)$

Felly angen yr ail isradd positif yn unig.

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{4}}$ ar gyfer $0 < x < 4$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$ ar gyfer $4 \leq x < 9$

Haf 2008

① (a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$f(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2+1}$

$= \dfrac{-x}{x^2+1}$

$= -\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

$f(-x) = -f(x)$

Felly mae $f(x)$ yn od-ffwythiant.

(b) $f(x) = e^x + 1$

$f(-x) = e^{-x} + 1$

$= \dfrac{1}{e^x} + 1.$

Nid yw $f(-x)$ yn hafal i $f(x)$ na chwaith i $-f(x) = -e^x - 1$

Felly nid yw $f(x)$ yn eil-ffwythiant nac ychwaith yn od-ffwythiant.

② $f(x) = 1 + ax^3$ ar gyfer $x < 2$

$f(x) = bx^2 - 3$ ar gyfer $x \geqslant 2$

$f'(x) = 3ax^2$ ar gyfer $x < 2$

$f'(x) = 2bx$ ar gyfer $x \geqslant 2$

Mae $f(x)$ yn ddi-dor yn $x = 2$.

o'r chwith: $f(2) = 1 + a(2^3)$

$f(2) = 1 + 8a$

o'r dde: $f(2) = b(2^2) - 3$

$f(2) = 4b - 3$

Di-dor felly $1 + 8a = 4b - 3$

$4 + 8a = 4b$

$1 + 2a = b$ —— ①

Mae $f'(x)$ yn ddi-dor yn $x = 2$.

o'r chwith: $f'(2) = 3a(2^2)$
$= 12a$

o'r dde: $f'(2) = 2b(2)$
$= 4b$

Di-dor felly $12a = 4b$

$3a = b$ —— ②

Mae ① a ② yn awgrymu bod $1 + 2a = 3a$

$1 = a$

$\underline{a = 1}$

Felly, yn ôl yn ②, $b = 3 \times 1$

$\underline{b = 3}$

Haf 2009

① $f(x) = \sin(x)$
$g(x) = |x|$
$h(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Nid yw $h(x)$ yn ddi-dor ar gyfer $x = 0$.
o'r chwith, fel mae $x \to 0$ mae $h(x) \to -\infty$
o'r dde, fel mae $x \to 0$ mae $h(x) \to +\infty$.
Mae $-\infty \neq +\infty$ felly mae $h(x)$ yn fylchog / ddim yn di-dor.

(b) (i) $g(-x) = |-x|$
$= |-1| \times |x|$
$= |x|$

$g(-x) = g(x)$
Felly mae $g(x)$ yn eil-ffwythiant.

(ii) $h(-x) = \dfrac{1}{-x}$

$= -\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$h(-x) = -h(x)$

Felly mae $h(x)$ yn od-ffwythiant.

8 $f(x) = \dfrac{x(x+3)}{x-1}$

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

Rhannu Hir:

$$\begin{array}{r|l} & x + 4 \\ \hline x-1 & x^2 + 3x \\ & x^2 - x \\ \hline & \quad 4x \\ & \quad 4x - 4 \\ \hline & \qquad 4 \end{array}$$

Felly $f(x) = x + 4 + \dfrac{4}{x-1}$

$(a = 1,\ b = 4,\ c = 4)$

(b) $f(x) = x + 4 + 4(x-1)^{-1}$

$f'(x) = 1 + 4(-1)(x-1)^{-2}$

$= 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2}$

Pwyntiau arhosol: $f'(x) = 0$

$1 - \dfrac{4}{(x-1)^2} = 0$

$1 = \dfrac{4}{(x-1)^2}$

$$(x-1)^2 = 4$$
$$x^2-2x+1 = 4$$
$$x^2-2x-3 = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$

Unai $x-3=0$ neu $x+1=0$

$x=3$ $\quad$ $x=-1$

$f(x) = \dfrac{3(3+3)}{3-1}$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{-1(-1+3)}{-1-1}$

$= 9$ $\quad$ $= 1$

Felly cyfesurynnau'r pwyntiau arhosol yw $(3,9)$ a $(-1,1)$

(c) $f(x) = x + 4 + \dfrac{4}{x-1}$

Fel mae $x \to 1$, mae $\frac{4}{x-1} \to \infty$, Felly $f(x) \to \infty$.

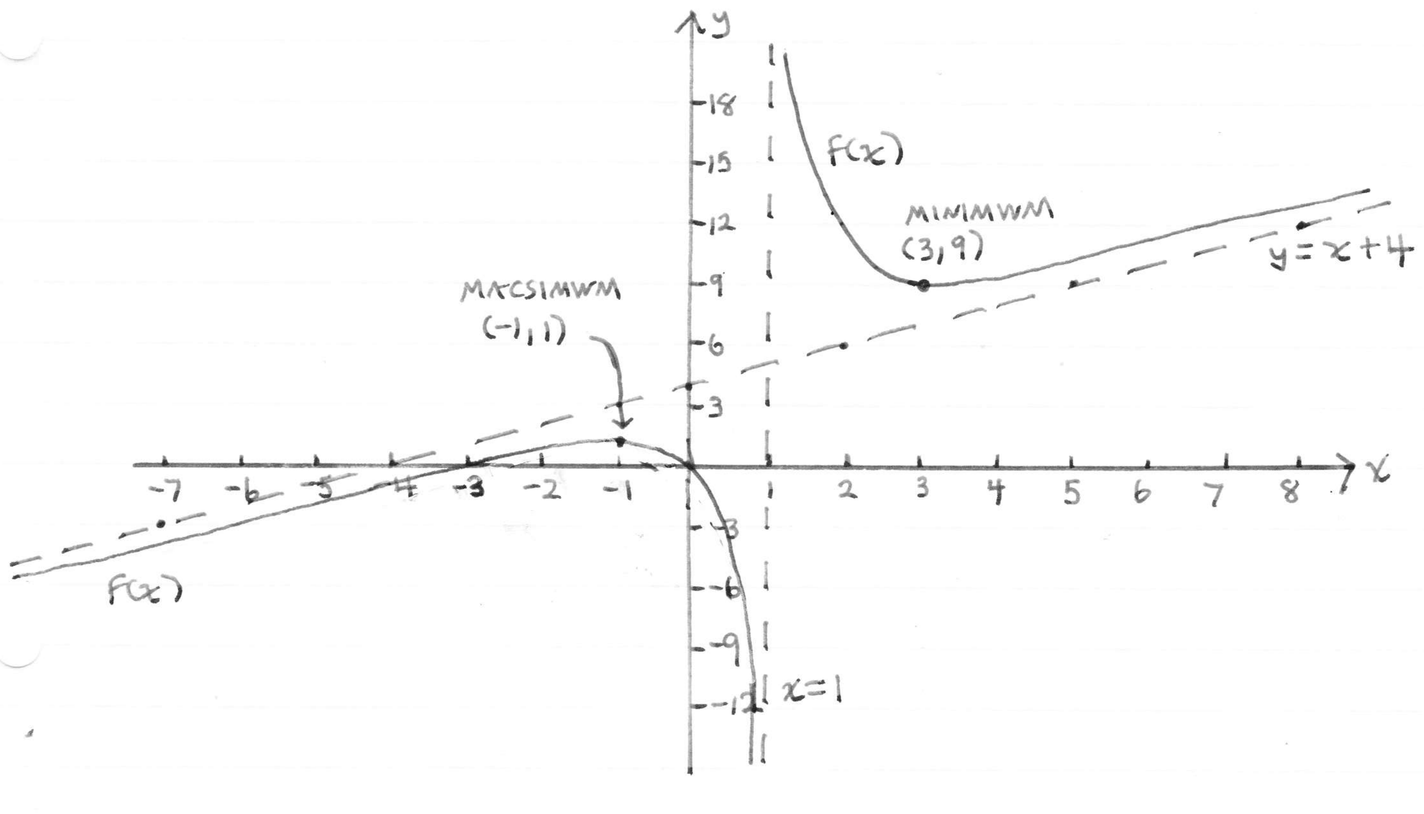
Felly mae $\underline{x=1}$ yn asymptot.

Fel mae $x \to \infty$, mae $\frac{4}{x-1} \to 0$.

Felly $f(x) \to x+4+0$

$f(x) \to x+4$.

Felly mae $y = x+4$ yn asymptot.



cch) $f^{-1}(A)$ ble mae $A = [0, 10]$

Pa werthoedd ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $[0, 10]$?

Ble mae $f(x) = 0$?

$$0 = x + 4 + \frac{4}{x-1}$$

$$-x - 4 = \frac{4}{x-1}$$

$$(x-1)(-x-4) = 4$$

$$-x^2 - 4x + x + \cancel{4} = \cancel{4}$$

$$-x^2 - 3x = 0$$

$$-x(x+3) = 0$$

Unai $-x = 0$ neu $x + 3 = 0$

$\underline{x = 0}$ $\underline{x = -3}$

Ble mae $f(x) = 10$?

$$10 = x + 4 + \frac{4}{x-1}$$

$$-x + 6 = \frac{4}{x-1}$$

$$(x-1)(-x+6) = 4$$

$$-x^2 + 6x + x - 6 = 4$$

$$-x^2 + 7x - 10 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

Unai $x - 2 = 0$ neu $x - 5 = 0$

$\underline{x = 2}$ $\underline{x = 5}$

Felly, ac o gymharu efo'r graff, mae $f^{-1}(A) = [-3, 0] \cup [2, 5]$ ble mae $A = [0, 10]$.

Haf 2010

(6) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

(a) $f(x) = x(x-1)^{-2}$

$f'(x) = x(-2)(x-1)^{-3}(1) + (1)(x-1)^{-2}$

$= -2x(x-1)^{-3} + (x-1)^{-2}$

Pwyntiau arhosol: $f'(x) = 0$

$$-2x(x-1)^{-3} + (x-1)^{-2} = 0$$

$$(x-1)^{-2} = 2x(x-1)^{-3}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$x-1 = 2x$$

$$-1 = x$$

$$x = -1$$

Felly $f(x) = \dfrac{-1}{(-1-1)^2}$

$= -\dfrac{1}{4}$

Felly cyfesurynnau'r pwynt arhosol yw $(-1, -\frac{1}{4})$

(b) Fel mae $x \to 1$, mae $f(x) \to \frac{1}{0^2}$

$f(x) \to \infty$

Felly mae $\underline{x=1}$ yn asymptot

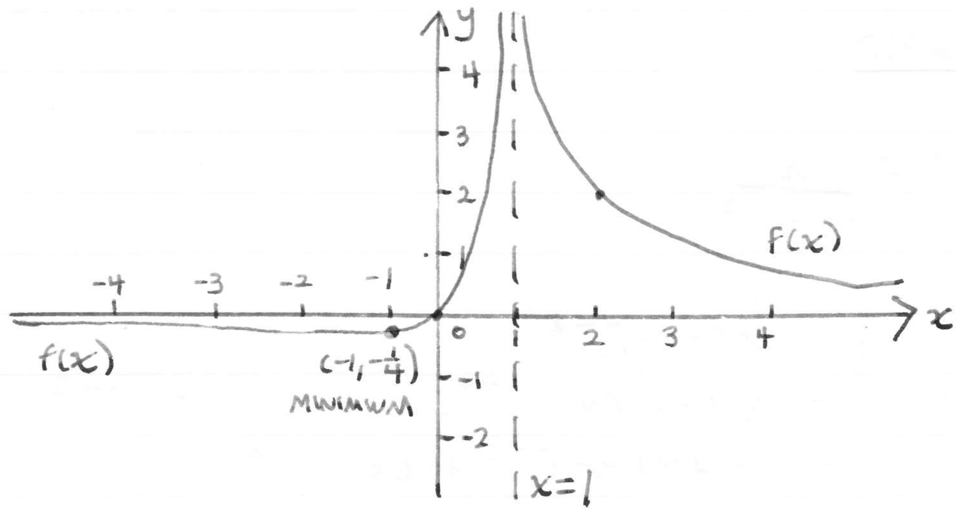
Fel mae $x \to \infty$, mae $f(x) \to \dfrac{\infty}{(\infty-1)^2} \approx \dfrac{\infty}{\infty^2}$

$f(x) \to \dfrac{1}{\infty}$

$f(x) \to 0$

Felly mae $\underline{y=0}$ yn asymptot.

(c)



(ch) $f^{-1}(A)$, ble mae $A = [0, 2]$.

Pa rifau ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $[0, 2]$?

Ble mae $f(x) = 0$?

$$0 = \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$0 = x$$

$$\underline{x = 0}$$

Ble mae $f(x) = 2$?

$$2 = \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$2(x-1)^2 = x$$

$$2(x^2 - 2x + 1) = x$$

$$2x^2 - 4x + 2 = x$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x - 1)(x - 2) = 0$$

Unai $2x - 1 = 0$ neu $x - 2 = 0$

$2x = 1$ $\qquad$ $\underline{x = 2}$

$\underline{x = \frac{1}{2}}$

Felly, ac o gymharu efo'r graff,
$f^{-1}(A) = [0, \frac{1}{2}] \cup [2, \infty)$

⑦ $f(x)$ Parth $(-a, a)$

$g(x) = f(x) + f(-x)$

$h(x) = f(x) - f(-x)$.

(a) $g(-x) = f(-x) + f(-(-x))$

$= f(-x) + f(x)$

$= f(x) + f(-x)$

$g(-x) = g(x)$

Felly mae $g(x)$ yn eil-ffwythiant.

$h(-x) = f(-x) - f(-(-x))$

$= f(-x) - f(x)$

$= -1(-f(-x) + f(x))$

$= -1(f(x) - f(-x))$

$= -1(h(x))$

$h(-x) = -h(x)$

Felly mae $h(x)$ yn od-ffwythiant.

$g(x) + h(x) = [f(x) + f(-x)] + [f(x) - f(-x)]$

$g(x) + h(x) = f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)$

$g(x) + h(x) = 2f(x)$

$2f(x) = g(x) + h(x)$

$f(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}h(x)$

$f(x) =$ eil-ffwythiant + od-ffwythiant.

(Nid yw lluosi efo $\frac{1}{2}$ yn newid y ffaith bod $g(x)$ yn eil-ffwythiant a bod $h(x)$ yn od-ffwythiant).

(b) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$

(i) $g(x) = f(x) + f(-x)$

$$= \ln(1+\sin x) + \ln(1+\sin(-x))$$
$$= \ln(1+\sin x) + \ln(1-\sin x)$$
$$= \ln((1+\sin x)(1-\sin x))$$
$$= \ln(1 - \sin x + \sin x - \sin^2 x)$$
$$= \ln(1-\sin^2 x)$$
$$= \ln(\cos^2 x)$$
$$= \ln((\cos x)^2)$$
$$= 2\ln\cos x$$

(ii) $h(x) = f(x) - f(-x)$

$$= \ln(1+\sin x) - \ln(1+\sin(-x))$$
$$= \ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)$$
$$= \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$$
$$= \ln\left(\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \times \left(\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\right)\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(1+\sin x)^2}{1+\sin x - \sin x - \sin^2 x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right)$$
$$= \ln\left(\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2\right)$$
$$= 2\ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= 2\ln\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= 2\ln(\sec x + \tan x)$$

✓

Haf 2011

3 $f(x) = -x^2 + 6x - 7$ ar gyfer $x \leq 2$
$f(x) = x^2 - 2x + 4$ ar gyfer $x > 2$.

(a) A yw $f(x)$ yn ddi-dor pan fydd $x = 2$?
o'r ochr chwith, fel mae $x \to 2$ mae $f(x) \to -(2^2) + 6 \times 2 - 7$
$f(x) \to 1$.
o'r ochr dde, fel mae $x \to 2$ mae $f(x) \to 2^2 - 2 \times 2 + 4$
$f(x) \to 4$
Mae $1 \neq 4$ felly nid yw $f(x)$ yn ddi-dor ar gyfer pob gwerth o x.

(b) $f'(x) = -2x + 6$ ar gyfer $x \leq 2$
$f'(x) = 2x - 2$ ar gyfer $x > 2$

Ar gyfer $x < 0$, mae $f'(x)$ yn bositif gan fod $-2x$ yn bositif. Ar gyfer $0 \leq x \leq 2$, mae $f'(x)$ o hyd yn bositif (yn amrywio rhwng 2 a 6.
Ar gyfer $x > 2$, mae $f'(x)$ yn amrywio rhwng 2 a ∞, felly mae'n bositif ar gyfer pob gwerth o x.

Felly mae graddiant $f(x)$ yn bositif ar gyfer pob gwerth o x. Ar ben hyn, mae $f(x)$ yn neidio o 1 i 4 pan fo $x = 2$, felly mae $f(x)$ yn ffwythiant cynyddol caeth.

(c) $f(1) = -(1^2) + 6(1) - 7$
$= -2$

$f(3) = 3^2 - 2(3) + 4$
$= 7$

Gan gofio bod $f(x)$ yn neidio o 1 i 4 pan fo $x = 2$,

$f(A) = [-2, 1] \cup (4, 7]$.

Haf 2012

(1) $f(x) = ax^2 - 8$ ar gyfer $x \leq 2$
$f(x) = x^3 - bx$ ar gyfer $x > 2$

$f'(x) = 2ax$ ar gyfer $x \leq 2$
$f'(x) = 3x^2 - b$ ar gyfer $x > 2$

Mae $f(x)$ yn ddi-dor yn $x = 2$.

o'r chwith: $f(2) = a(2^2) - 8$
$f(2) = 4a - 8$

o'r dde: $f(2) = 2^3 - 2b$
$f(2) = 8 - 2b$

Di-dor felly $4a - 8 = 8 - 2b$
$4a = 16 - 2b$
$2a = 8 - b$
$b = 8 - 2a$ —— (1)

Mae $f'(x)$ yn ddi-dor yn $x = 2$.

o'r chwith: $f'(2) = 2a(2)$
$f'(2) = 4a$

o'r dde: $f'(2) = 3(2^2) - b$
$f'(2) = 12 - b$

Di-dor felly $4a = 12 - b$
$b = 12 - 4a$ —— (2)

Mae (1) a (2) yn awgrymu bod $8 - 2a = 12 - 4a$
$2a = 4$
$\underline{a = 2}$

Yn amnewid yn ôl yn (1): $b = 8 - 2 \times 2$
$\underline{b = 4}$

⑤ (a) $f(x) = x^2 \sin x$

$f(-x) = (-x)^2 \sin(-x)$

$= x^2 \sin(-x)$

$= x^2(-\sin x)$

$= -(x^2 \sin x)$

$f(-x) = -f(x)$

Felly mae $f(x)$ yn od-ffwythiant.

(b) $g(x) = x^n \sin x$

$g(-x) = (-x)^n \sin(-x)$

$= (-1 \times x)^n (-\sin x)$

$= (-1)^n x^n (-\sin x)$

$= (-1)(-1)^n x^n \sin x$

$g(-x) = (-1)^{n+1} x^n \sin x$.

Os yw n yn odrif yna mae $n+1$ yn eilrif ac mae $(-1)^{n+1} = 1$. Felly $g(-x) = g(x)$ os yw n yn odrif.

Os yw n yn eilrif yna mae $n+1$ yn odrif ac mae $(-1)^{n+1} = -1$. Felly $g(-x) = -g(x)$ os yw n yn eilrif.

(i) n yn odrif neu $n = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

(ii) n yn eilrif neu $n = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

⑥ $f(x) = \dfrac{2}{x-3} + x - 6$

(a) Croesi'r echelin-x: $f(x) = 0$

$0 = \dfrac{2}{x-3} + x - 6$

$6 - x = \dfrac{2}{x-3}$

$(6-x)(x-3) = 2$

$6x - 18 - x^2 + 3x = 2$

$0 = x^2 - 9x + 20$

$0 = (x-4)(x-5)$

Unai $x - 4 = 0$ neu $x - 5 = 0$

$\underline{x = 4}$ $\underline{x = 5}$

$\left(f(x) = \dfrac{2}{4-3} + 4 - 6 \quad f(x) = \dfrac{2}{5-3} + 5 - 6 \right.$

$\left. f(x) = 0 \ \checkmark \quad f(x) = 0 \ \checkmark \right)$

Croesi'r echelin-y: $x = 0$

$f(x) = \dfrac{2}{0-3} + 0 - 6$

$f(x) = -\frac{2}{3} - 6$

$f(x) = -\frac{20}{3}$

Felly mae $f(x)$ yn croestorri'r echelinau cyfesurynnol yn $(4, 0)$, $(5, 0)$ a $(0, \frac{-20}{3})$.

(b) $f(x) = 2(x-3)^{-1} + x - 6$

$f'(x) = 2(-1)(x-3)^{-2} + 1$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-3)^2} + 1$

Pwyntiau arhosol: $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{-2}{(x-3)^2} + 1$$

$$-1 = \frac{-2}{(x-3)^2}$$

$$-1(x-3)^2 = -2$$

$$(x-3)^2 = 2$$

$$x-3 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{2}$$

Unai $x = 3+\sqrt{2}$ neu $x = 3-\sqrt{2}$

$f(x) = \frac{2}{3+\sqrt{2}-3} + 3+\sqrt{2}-6$ $\qquad$ $f(x) = \frac{2}{3-\sqrt{2}-3} + 3-\sqrt{2}-6$

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2}} + 3+\sqrt{2}-6$ $\qquad$ $f(x) = \frac{2}{-\sqrt{2}} + 3-\sqrt{2}-6$

$f(x) = 2\sqrt{2}-3$ $\qquad$ $f(x) = -2\sqrt{2}-3$

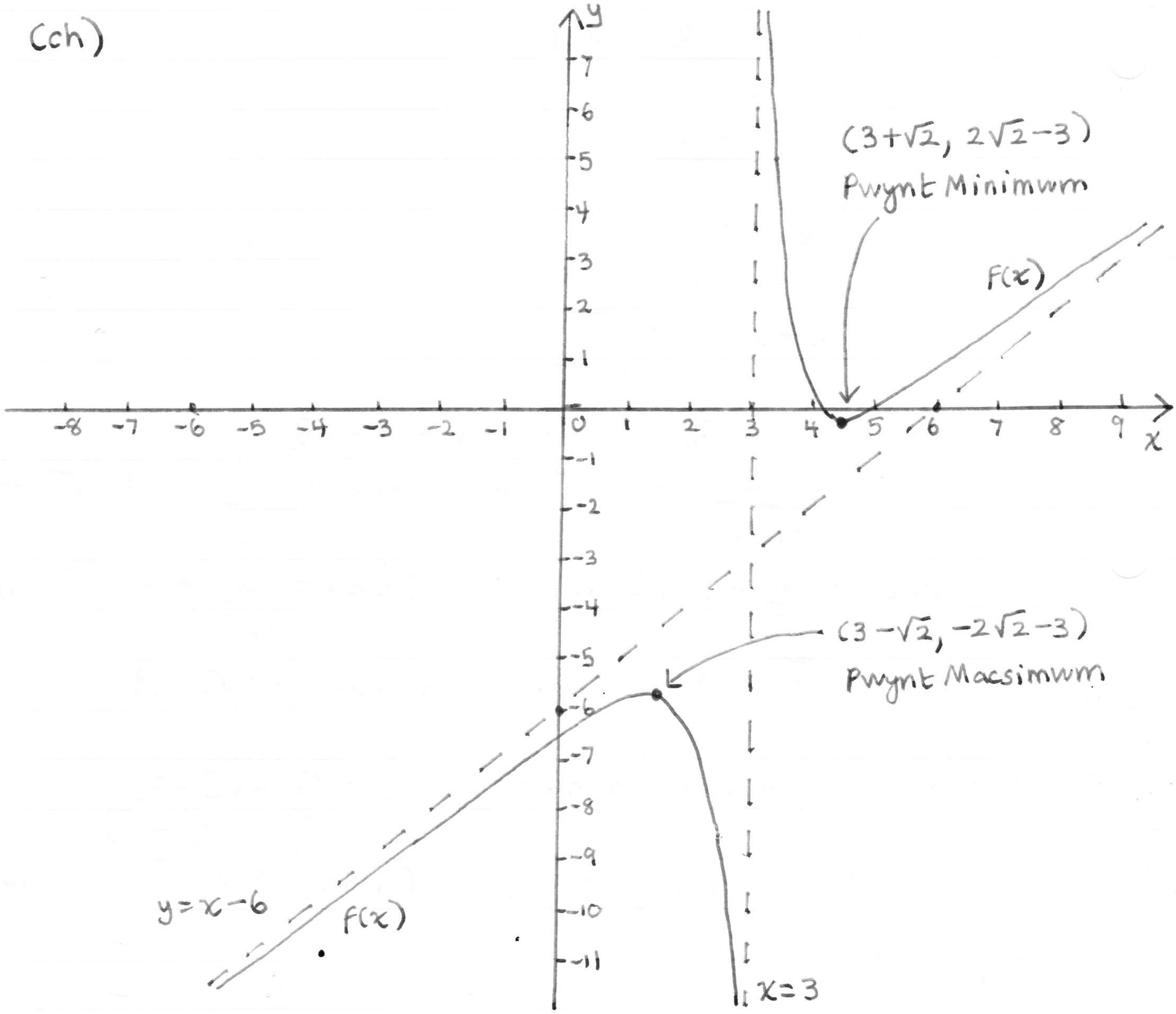
Cyfesurynnau y pwyntiau arhasol yw $(3+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-3)$
a $(3-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}-3)$
[$\approx (4.41, -0.17)$ a $(1.59, -5.83)$ i 2 le degol.]

(c) $f(x) = \frac{2}{x-3} + x - 6$

Os yw $x \to 3$, yna $\frac{2}{x-3} \to \infty$ Felly $f(x) \to \infty$.
Mae $x=3$ yn asymptot.

Os yw $x \to \infty$, yna $\frac{2}{x-3} \to 0$
Felly $f(x) \to 0 + x - 6$
$f(x) \to x - 6$
Felly mae $y = x - 6$ yn asymptot.

(ch)


y
x
$(3+\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-3)$
Pwynt Minimwm
$f(x)$
$(3-\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}-3)$
Pwynt Macsimwm
$y=x-6$
$f(x)$
$x=3$

Haf 2013

(4) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ ar gyfer $x > 1$

Rhannu Hir:

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ x-1 & 2x+3 \\ & 2x-2 \\ \hline & 5 \end{array}$$

Felly $f(x) = 2 + \frac{5}{x-1}$

(a) $f(x) = 2 + 5(x-1)^{-1}$
$f'(x) = 5(-1)(x-1)^{-2}$
$= \frac{-5}{(x-1)^2}$

Gan fod $x > 1$ mae'r enwadur wastad yn bositif. Mae'r -5 yn y rhifiadur yn sicrhau felly bod $f'(x)$ bob amser yn negatif. Felly mae graddiant $f(x)$ bob amser yn negatif, sy'n golygu bod $f(x)$ yn ffwythiant lleihaol caeth.

(b) $S = [4, 5]$

(i) $f(4) = 2 + \frac{5}{4-1}$
$= 2 + \frac{5}{3}$
$= \frac{11}{3}$

$f(5) = 2 + \frac{5}{5-1}$
$= 2 + \frac{5}{4}$
$= \frac{13}{4}$

Felly $f(S) = [\frac{13}{4}, \frac{11}{3}]$.

(ii) $f^{-1}(S)$

Pa werthoedd ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $[4, 5]$?

$f(x) = 4$

$$4 = 2 + \frac{5}{x-1}$$

$$2 = \frac{5}{x-1}$$

$$2(x-1) = 5$$

$$2x - 2 = 5$$

$$2x = 7$$

$$x = 3.5$$

$f(x) = 5$

$$5 = 2 + \frac{5}{x-1}$$

$$3 = \frac{5}{x-1}$$

$$3(x-1) = 5$$

$$3x - 3 = 5$$

$$3x = 8$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Felly $f^{-1}(S) = [\frac{8}{3}, 3.5]$.

7 $f(x) = \dfrac{(2x^2+1)^2}{x^3}$

(a) $$f(-x) = \frac{(2(-x)^2+1)^2}{(-x)^3}$$

$$= \frac{(2x^2+1)^2}{-x^3}$$

$$= -\left(\frac{(2x^2+1)^2}{x^3}\right)$$

$f(-x) = -f(x)$.

Felly mae x yn od-ffwythiant.

b) $f(x) = \dfrac{(2x^2+1)^2}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{x^3(2)(2x^2+1)'(4x) - (2x^2+1)^2(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{8x^4(2x^2+1) - 3x^2(2x^2+1)^2}{x^6}$$

$$= \frac{8x^2(2x^2+1) - 3(2x^2+1)^2}{x^4}$$

$$= \frac{(2x^2+1)[8x^2 - 3(2x^2+1)]}{x^4}$$

$$= \frac{(2x^2+1)(2x^2-3)}{x^4}.$$

Pwyntiau arhasol: $f'(x) = 0$

$$\frac{(2x^2+1)(2x^2-3)}{x^4} = 0$$

$$(2x^2+1)(2x^2-3) = 0$$

Unai $2x^2+1=0$ neu $2x^2-3=0$

$2x^2 = -1$ $\qquad$ $2x^2 = 3$

$x^2 = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x^2 = \frac{3}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{-1}{2}}$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad$ ($\approx \pm 1.22$)

Dim datrysiadau real

c) Fel mae $x \to 0$, mae $f(x) \to \dfrac{(2(0)^2+1)^2}{0^3} = \dfrac{1}{0}$

$= \infty$

Felly mae $x=0$ yn asymptot.

$$f(x) = \frac{(2x^2+1)^2}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{4x^4+4x^2+1}{x^3}$$

$$f(x) = 4x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3}$$

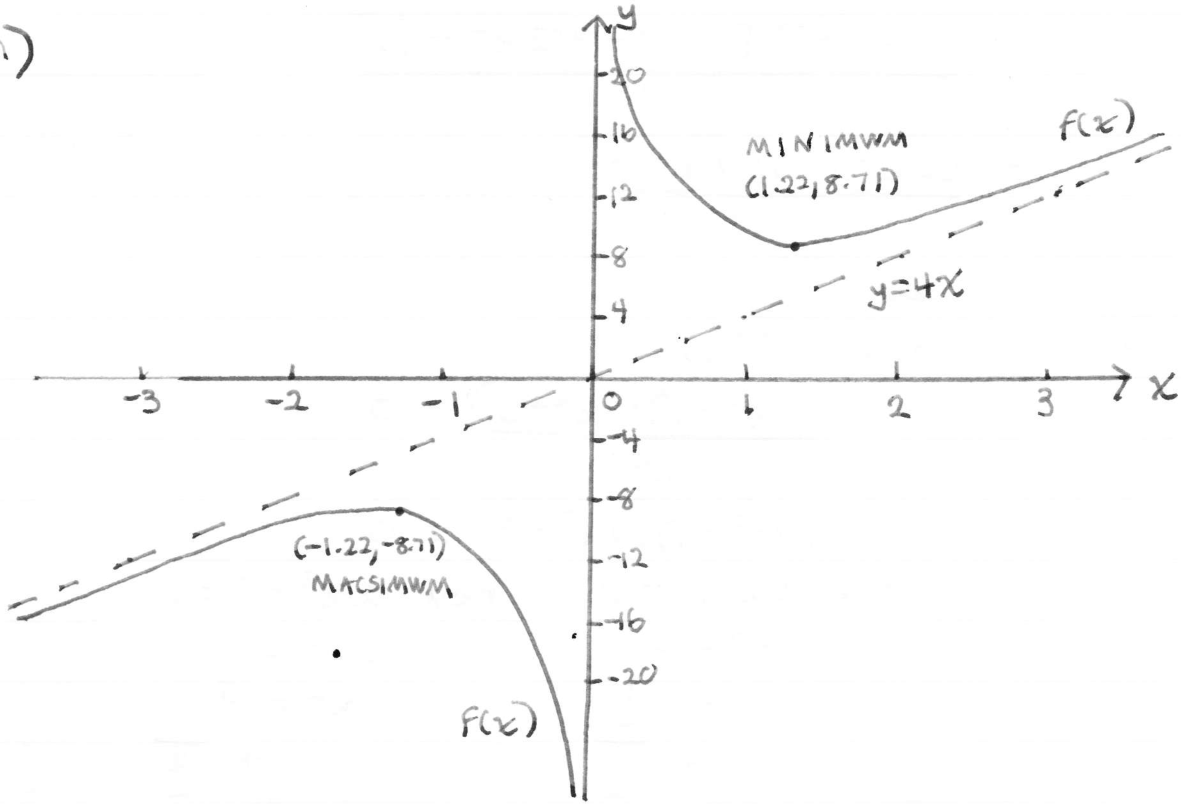
Os yw $x \to \infty$ mae $\frac{4}{x} \to 0$ a $\frac{1}{x^3} \to 0$.

Felly mae $f(x) \to 4x + 0 + 0$

$$f(x) \to 4x$$

Felly mae $\underline{y = 4x}$ yn asymptot.

(ch)



$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx 8.71$ $\qquad$ $f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx -8.71$

FP2 Haf 2014

① $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x(x^2+2)}$

(a) $$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)((-x)^2+2)}$$
$$= \frac{x^2+1}{(-x)(x^2+2)}$$
$$= \frac{x^2+1}{(-1)x(x^2+2)}$$
$$= -\frac{x^2+1}{x(x^2+2)}$$

$f(-x) = -f(x)$

Felly mae $f(x)$ yn od-ffwythiant.

(b) $$\frac{x^2+1}{x(x^2+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$
$$\frac{x^2+1}{x(x^2+2)} \equiv \frac{A(x^2+2) + (Bx+C)x}{x(x^2+2)}$$
$$x^2+1 \equiv A(x^2+2) + (Bx+C)x$$

Amnewid $x=0$:
$$0^2+1 = A(0^2+2) + (B\times 0 + C)\times 0$$
$$1 = 2A$$
$$A = \tfrac{1}{2}$$

Yn cymharu cyfernodau x^2:
$$1 = A + B$$
$$1 = \tfrac{1}{2} + B$$
$$B = \tfrac{1}{2}$$

Yn cymharu cyfernodau x:

$0 = C$

$C = 0$

Felly
$$\frac{x^2+1}{x(x^2+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}x+0}{x^2+2}$$
$$\frac{x^2+1}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2(x^2+2)}$$

FP2 Haf 2014

(3) $f(x) = e^{2x}$ ar gyfer $x < 0$
$f(x) = (x+1)^2$ ar gyfer $x \geq 0$

(a) A yw $f(x)$ yn ddi-dor pan fydd $x = 0$?
o'r ochr chwith, fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to 1$.
o'r ochr dde, fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to 1$.
Felly mae $f(x)$ yn ddi-dor gan fod y ffwythiant yn tueddu i 1 o'r ddwy ochr ac mae $f(0) = (0+1)^2$
$= 1^2$
$= 1$.

(b) $f'(x) = 2e^{2x}$ ar gyfer $x < 0$
$f'(x) = 2(x+1)$ ar gyfer $x \geq 0$.

A yw $f'(x)$ yn ddi-dor pan fydd $x = 0$?
o'r ochr chwith, fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to 2$.
o'r ochr dde, fel mae $x \to 0$ mae $f(x) \to 2$.
Felly mae $f'(x)$ yn ddi-dor gan fod y ffwythiant yn tueddu i 2 o'r ddwy ochr ac mae $f'(0) = 2(0+1)$
$= 2 \times 1$
$= 2$.

FP2 Haf 2014

(8) $$f(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{(x-4)}$$

(a) Croestorri'r echelin-x pan fo $x=-4$ neu $x=2$.

$$F(0) = \frac{4 \times -2}{-4}$$
$$= 2$$

Ateb: $(-4, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$.

(b) (i) $x = 4$

(ii) $$\frac{(x+4)(x-2)}{(x-4)} = \frac{x^2+2x-8}{x-4}$$

$$\begin{array}{r|l} & x+6 \\ \hline x-4 & x^2+2x-8 \\ & x^2-4x \\ \hline & 6x-8 \\ & 6x-24 \\ \hline & 16 \end{array}$$

Felly $f(x) = x + 6 + \dfrac{16}{x-4}$.

Fel mae $x \to \infty$ mae $\dfrac{16}{x-4} \to 0$

Felly mae $f(x) \to x + 6 + 0$

$f(x) \to x + 6$

Felly mae $\underline{y = x + 6}$ yn asymptot.

(c) $f(x) = x + 6 + \dfrac{16}{x-4}$

$f(x) = x + 6 + 16(x-4)^{-1}$

$f'(x) = 1 + 16(-1)(x-4)^{-2}(1)$

$f'(x) = 1 - \dfrac{16}{(x-4)^2}$

Pwyntiau arhosol: $f'(x) = 0$

$$1 - \frac{16}{(x-4)^2} = 0$$

$$1 = \frac{16}{(x-4)^2}$$

$$(x-4)^2 = 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = 16$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x-8) = 0$$

Unai $\underline{x=0}$ neu $x - 8 = 0$

$\underline{x = 8}$

$f(0) = 0 + 6 + \dfrac{16}{0-4}$

$f(0) = 6 + -4$

$f(0) = 2$

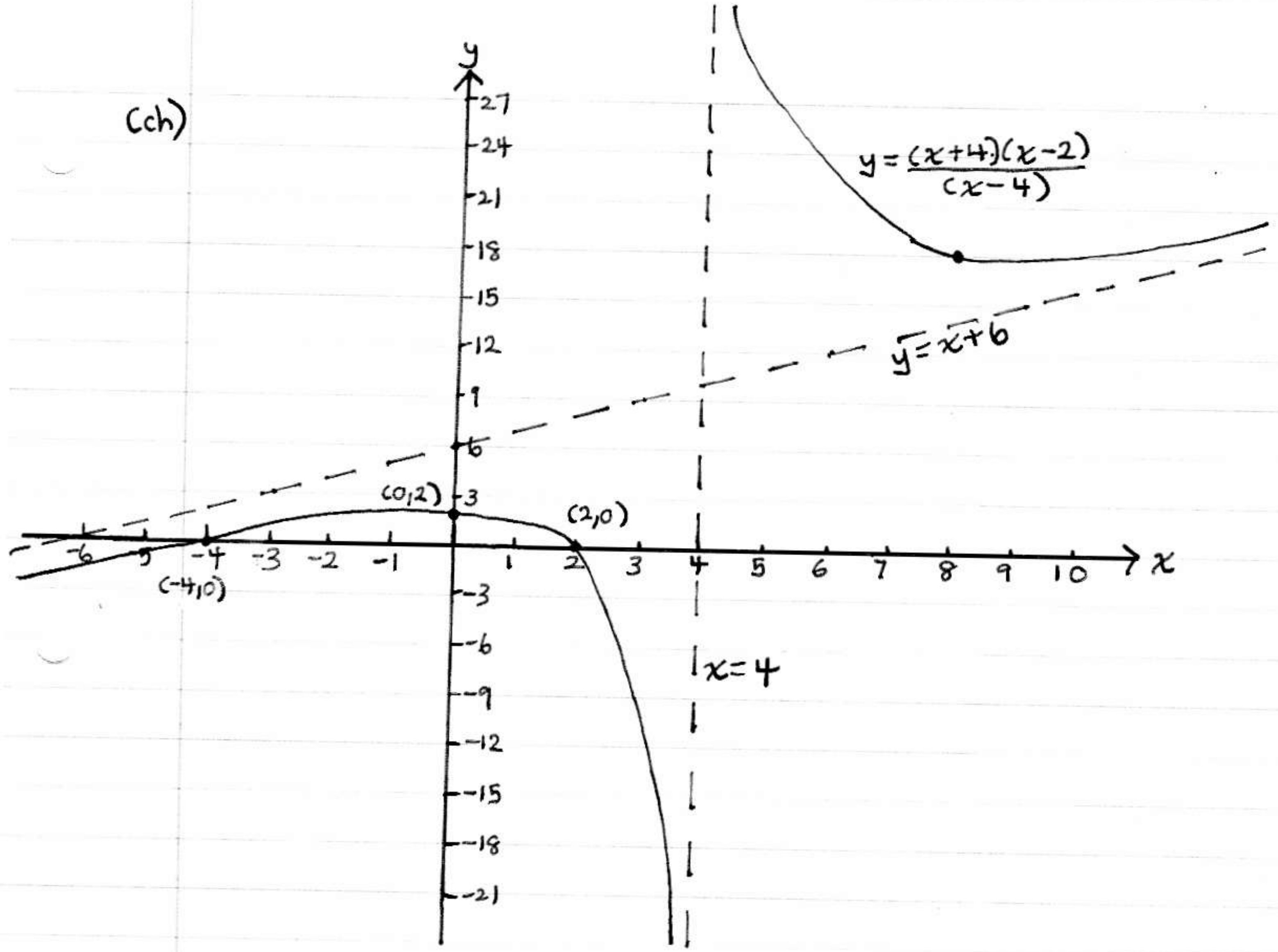
$f(8) = 8 + 6 + \dfrac{16}{8-4}$

$f(8) = 14 + 4$

$f(8) = 18$

Felly cyfesurynnau'r pwyntiau arhosol ar graff f yw $(0,2)$ a $(8,18)$.

(ch)



(d) $f(S)$, ble mae $S = [-7, 3]$

$$f(-7) = \frac{(-7+4)(-7-2)}{(-7-4)} = -\frac{27}{11}$$

$$f(3) = \frac{(3+4)(3-2)}{(3-4)} = -7$$

Macsimwm yn $(0, 2)$
Felly $f(S) = [-7, 2]$.

(ii) $f^{-1}(S)$, ble mae $S = [-7, 3]$
Pa werthoedd ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $[-7, 3]$?

↳ Trosodd

Ble mae $f(x) = -7$?

$$-7 = \frac{(x+4)(x-2)}{(x-4)}$$

$$-7(x-4) = (x+4)(x-2)$$

$$-7x+28 = x^2+2x-8$$

$$0 = x^2+9x-36$$

$$0 = (x+12)(x-3)$$

Unai $x+12=0$ neu $x-3=0$

$\underline{x=-12}$ $\quad$ $\underline{x=3}$

O edrych ar y graff, nid oes unrhyw werth ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $(2,3]$.
Mae'r gwerthoedd x yn y cyfwng $[-12,3]$ yn rhoi gwerthoedd $f(x)$ yn y cyfwng $[-7,2]$.

Felly $f^{-1}(s) = [-12,3]$ ble mae $s = [-7,3]$.

FP2 Haf 2015

② $f(x) = ax^3 + bx$ ar gyfer $x \le -1$,
$f(x) = x^2 - x + 2$ ar gyfer $x > -1$

a) $f'(x) = 3ax^2 + b$ ar gyfer $x \le -1$,
$f'(x) = 2x - 1$ ar gyfer $x > -1$.

O'r ochr chwith, fel mae $x \to -1$ mae $f(x) \to a(-1)^3 + b(-1)$
$f(x) \to -a - b$
O'r ochr dde, fel mae $x \to -1$ mae $f(x) \to (-1)^2 - (-1) + 2$
$f(x) \to 4$
Gan fod $f(x)$ yn ddi-dor pan fydd $x = -1$,
rhaid bod $-a - b = 4$ —— ①

O'r ochr chwith, fel mae $x \to -1$ mae $f'(x) \to 3a(-1)^2 + b$
$f'(x) \to 3a + b$
O'r ochr dde, fel mae $x \to -1$ mae $f'(x) \to 2(-1) - 1$
$f'(x) \to -3$
Gan fod $f'(x)$ yn ddi-dor pan fydd $x = -1$,
rhaid bod $3a + b = -3$ —— ②

② $\Rightarrow$ $b = -3 - 3a$.
Yn amnewid am b i mewn i ①: $-a - (-3 - 3a) = 4$
$-a + 3 + 3a = 4$
$2a = 1$
$\underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$

Yn amnewid yn ôl i ②:
$b = -3 - 3(\frac{1}{2})$
$b = -3 - \frac{3}{2}$
$\underline{\underline{b = \frac{-9}{2}}}$

b) $f(x) = 0$

Ar gyfer $x \leq -1$

$ax^3 + bx = 0$

$\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x = 0$

$\frac{1}{2}x(x^2 - 9) = 0$

$\frac{1}{2}x(x-3)(x+3) = 0$

Unai $\frac{1}{2}x = 0$

$x = 0$ × $(x \leq -1)$

Neu $x - 3 = 0$

$x = 3$ × $(x \leq -1)$

Neu $x + 3 = 0$

$\underline{\underline{x = -3}}$ ✓

Ar gyfer $x > -1$

$x^2 - x + 2 = 0$

~~$(x-2)(\quad) = 0$~~

Gwahanolyn:

$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(2)$

$= 1 - 8$

$= -7.$

∴ felly dim gwreiddiau real.

FP2 Haf 2015

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{4}{x-2}$

a) Fel mae $x \to 1$ neu $x \to 2$ mae $f(x) \to \infty$ felly mae $x = 1$ ac $x = 2$ yn asymptotau.

b) Os yw $x = 0$ yna $y = \dfrac{1}{0-1} - \dfrac{4}{0-2}$

$$y = \frac{1}{-1} - \frac{4}{-2}$$
$$y = -1 + 2$$
$$y = 1$$

Felly mae'r graff yn mynd trwy'r pwynt $(0, 1)$

Os yw $y = 0$ yna $0 = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{4}{x-2}$

$$\frac{4}{x-2} = \frac{1}{x-1}$$
$$4(x-1) = 1(x-2)$$
$$4x - 4 = x - 2$$
$$3x = 2$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Felly mae'r graff yn mynd trwy'r pwynt $(\frac{2}{3}, 0)$.

c) $f(x) = 1(x-1)^{-1} - 4(x-2)^{-1}$

$$f'(x) = -1(x-1)^{-2} + 4(x-2)^{-2}$$
$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

Pwyntiau arhosol: angen datrys $f'(x) = 0$

$$\frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-2)^2} = 0$$

$$\frac{4}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$4(x-1)^2 = (x-2)^2$$

$$4(x^2-2x+1) = x^2-4x+4$$

$$4x^2-8x+4 = x^2-4x+4$$

$$3x^2-4x = 0$$

$$x(3x-4) = 0$$

Unai $\underline{\underline{x=0}}$ neu $3x-4=0$

$$\underline{\underline{x = \frac{4}{3}}}$$

$\underline{\underline{y=1}}$ (o waith blaenorol)

$$y = \frac{1}{\frac{4}{3}-1} - \frac{4}{\frac{4}{3}-2}$$

$$y = 3 - -6$$

$$\underline{\underline{y = 9}}$$

$$f'(x) = -1(x-1)^{-2} + 4(x-2)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(x-1)^{-3} - 8(x-2)^{-3}$$

$$f''(0) = 2(-1)^{-3} - 8(-2)^{-3}$$

$$= -2 - -1$$

$$= -1$$

Felly mae $\underline{\underline{(0,1)}}$ yn bwynt $\underline{\underline{\text{MACSIMWM}}}$.

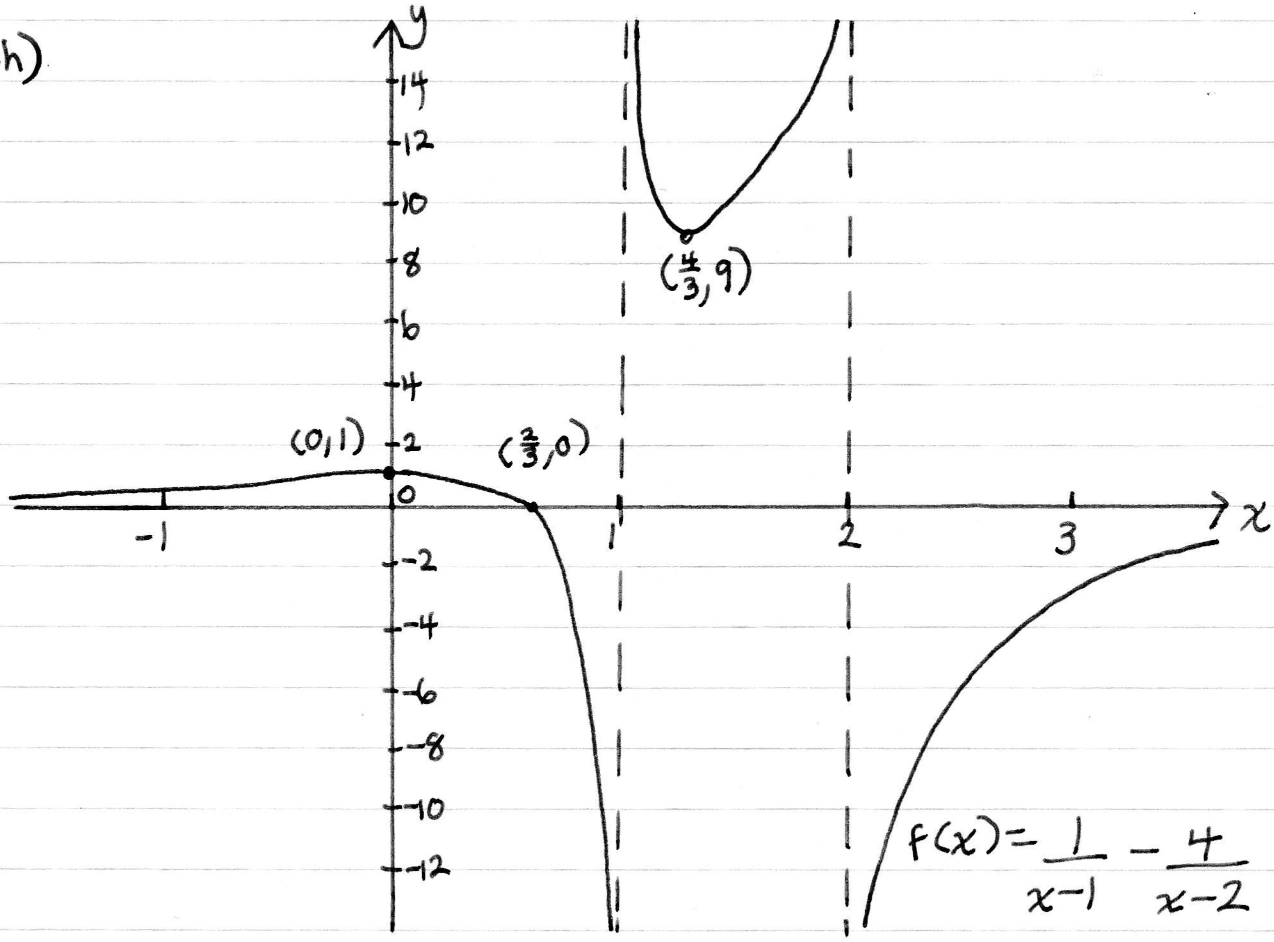
$$f''\left(\tfrac{4}{3}\right) = 2\left(\tfrac{4}{3}-1\right)^{-3} - 8\left(\tfrac{4}{3}-2\right)^{-3}$$

$$= 54 - -27$$

$$= 81$$

Felly mae $\underline{\underline{\left(\tfrac{4}{3}, 9\right)}}$ yn bwynt $\underline{\underline{\text{MINIMWM}}}$.

ch)



d) $S = [-1, 0]$

$f(-1) = \frac{1}{-1-1} - \frac{4}{-1-2}$ $f(0) = 1$ (o waith blaenorol)

$= -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

$= \frac{5}{6}$

Felly $f(S) = [\frac{5}{6}, 1]$

(ii) $f^{-1}(S)$. Pa werthoedd ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $[-1, 0]$?

Rydym angen datrys $f(x) = -1$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} = -1$$

$$x - 2 - 4(x-1) = -1(x-1)(x-2)$$

$$x - 2 - 4x + 4 = -1(x^2 - 2x - x + 2)$$

$$2-3x = -1(x^2-3x+2)$$
$$2-3x = -x^2+3x-2$$
$$\underline{x^2-6x+4=0}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2-4(1)(4)}}{2}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$$
$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$
Unai $x = 3+\sqrt{5}$ neu $x = 3-\sqrt{5}$

Felly $\underline{\underline{f^{-1}(S) = [\tfrac{2}{3}, 3-\sqrt{5}] \cup [3+\sqrt{5}, \infty)}}$

(I dri lle degol,
$f^{-1}(S) = [\tfrac{2}{3}, 0.764] \cup [5.236, \infty)$).

FP2 Haf 2016

(7) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3 - 1}$

a) Fel mae $x \to 1$ mae $f(x) \to \infty$ felly mae
$\underline{x = 1}$ yn asymptot.
Fel mae $x \to \infty$ mae $f(x) \to 1$ felly mae
$\underline{y = 1}$ yn asymptot.

b) Os yw $x = 0$ yna $f(x) = \dfrac{0^3 - 8}{0^3 - 1}$

$$f(x) = \frac{-8}{-1}$$

$$f(x) = 8$$

Felly mae'r graff yn mynd trwy'r pwynt $\underline{(0,8)}$.

Os yw $f(x) = 0$ yna $0 = \dfrac{x^3 - 8}{x^3 - 1}$

$$0 = x^3 - 8$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Felly mae'r graff yn mynd trwy'r pwynt $\underline{(2,0)}$.

c) $f'(x) = \dfrac{(x^3-1)(3x^2) - (x^3-8)(3x^2)}{(x^3-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{3x^5 - 3x^2 - 3x^5 + 24x^2}{(x^3-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{21x^2}{(x^3-1)^2}$

Pwynt arhosol $\Rightarrow f'(x) = 0$

$$\frac{21x^2}{(x^3-1)^2} = 0$$

$$21x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$\underline{x = 0}$$

Os yw $x=0$ mae $f(x) = 8$ felly mae $\underline{(0,8)}$ yn bwynt arhosol.

Os yw $x = -0.1$ yna $f'(x) = \dfrac{21(-0.1)^2}{((-0.1)^3-1)^2}$

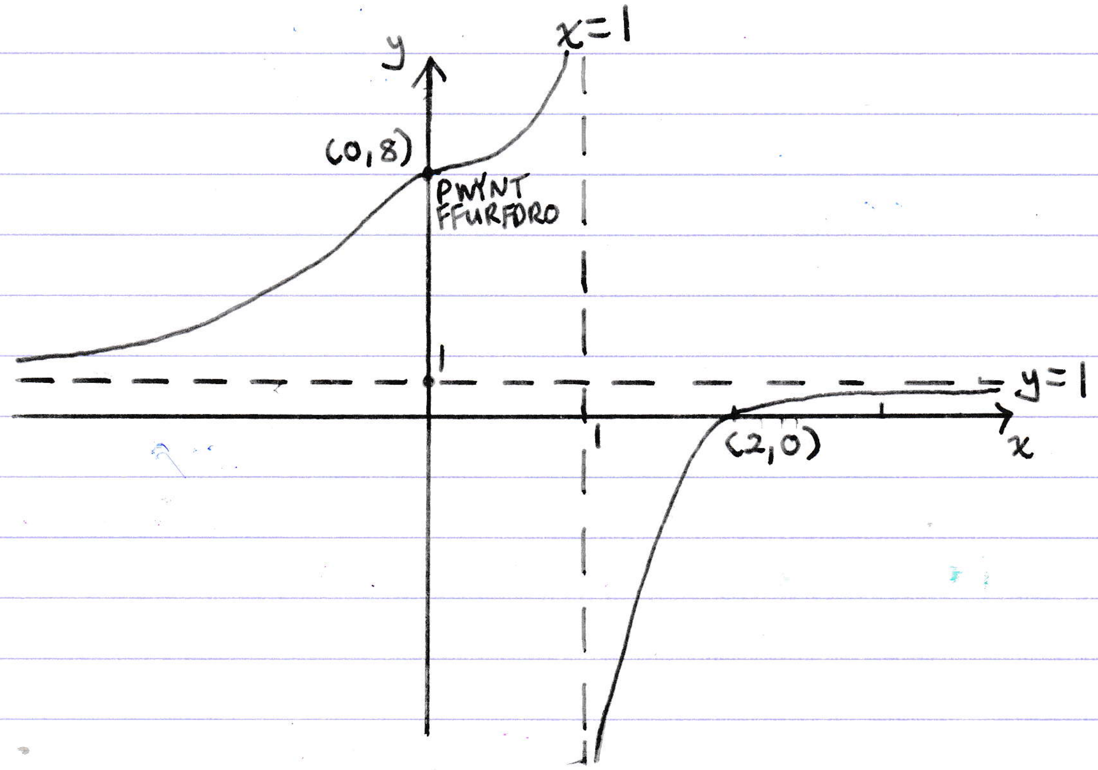
$$f'(x) = 0.2095806292$$

Os yw $x = 0.1$ yna $f'(x) = \dfrac{21(0.1)^2}{((0.1)^2-1)^2}$

$$f'(x) = 0.2142638506$$

Mae'r graddiant yn bositif bob ochr i'r pwynt arhosol felly mae'n <u>bwynt ffurfdro</u>.

ch)



d) $S = [-2, 2]$

i) $f(-2) = \dfrac{(-2)^3 - 8}{(-2)^3 - 1}$

$= \dfrac{-8-8}{-8-1}$

$= \dfrac{-16}{-9}$

$= \dfrac{16}{9}$

Felly $f(S) = (-\infty, 0] \cup [\frac{16}{9}, \infty)$

ii) $f^{-1}(S)$ ble mae $S = [-2, 2]$

Pa werthoedd ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $[-2, 2]$?

Ble mae $f(x) = -2$?

$-2 = \dfrac{x^3-8}{x^3-1}$

$-2(x^3-1) = x^3-8$

$-2x^3+2 = x^3-8$

$10 = 3x^3$

$x = \sqrt[3]{\frac{10}{3}}$

Ble mae $f(x) = 2$?

$2 = \dfrac{x^3-8}{x^3-1}$

$2(x^3-1) = x^3-8$

$2x^3-2 = x^3-8$

$x^3 = -6$

$x = \sqrt[3]{-6}$

Felly, ac o gymharu efo'r graff, mae

$f^{-1}(S) = (-\infty, \sqrt[3]{-6}] \cup [\sqrt[3]{\frac{10}{3}}, \infty)$

neu

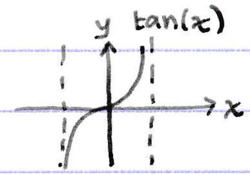
$$f^{-1}(S) = \left(-\infty, -\sqrt[3]{-6}\,\right] \cup \left[\sqrt[3]{\frac{10}{3}}, \infty\right)$$

FP2 Haf 2017

1) $f(x) = \sec x + x \tan x$ ar gyfer $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(-x) = \sec(-x) + (-x)\tan(-x)$

$f(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} - x\tan(-x)$



Mae graff $\cos(x)$ yn gymesur o amgylch yr echelin-y, felly. mae $\cos(-x) = \cos(x)$ [mae $\cos(x)$ yn eil-ffwythiant]

Mae $\tan(x)$ yn od-ffwythiant felly $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Felly $f(-x) = \dfrac{1}{\cos(x)} - x(-\tan x)$

$f(-x) = \dfrac{1}{\cos(x)} + x\tan x$

$f(-x) = \sec x + x \tan x$

$f(-x) = f(x)$ Felly mae $f(x)$ yn <u>eil-ffwythiant</u>.

FP2 Haf 2017

8) $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$

a) (i) Os yw $x \to -1$, yna $\dfrac{1}{x+1} \to \infty$ Felly $f(x) \to \infty$.

Mae $\underline{x = -1}$ yn asymptot fertigol.

(ii) Os yw $x \to \infty$, yna $\dfrac{1}{x+1} \to 0$

Felly $f(x) \to x + 3 + 0$

$f(x) \to x + 3$

Felly mae $\underline{y = x + 3}$ yn asymptot.

b) $f(x) = x + 3 + (x+1)^{-1}$

$f'(x) = 1 + (-1)(x+1)^{-2}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Pwyntiau arhosol: $f'(x) = 0$

$0 = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$\dfrac{1}{(x+1)^2} = 1$

$1 = (x+1)^2$

$\pm\sqrt{1} = x + 1$

$\pm 1 = x + 1$

Naill ai $x + 1 = 1$ neu $x + 1 = -1$

$\underline{x = 0}$ $\underline{x = -2}$

$f(x) = 0 + 3 + (0+1)^{-1}$ $f(x) = -2 + 3 + (-2+1)^{-1}$

$\underline{f(x) = 4}$ $\underline{f(x) = 0}$

Cyfesurynnau y pwyntiau arhosol yw $\underline{\underline{(0, 4)}}$ a $\underline{\underline{(-2, 0)}}$

c) $f'(x) = 1 - (x+1)^{-2}$

$f''(x) = 0 - (-2)(x+1)^{-3}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

ii) Os yw $x = 0$, mae $f''(x) = \dfrac{2}{(0+1)^3}$

$f''(x) = 2$

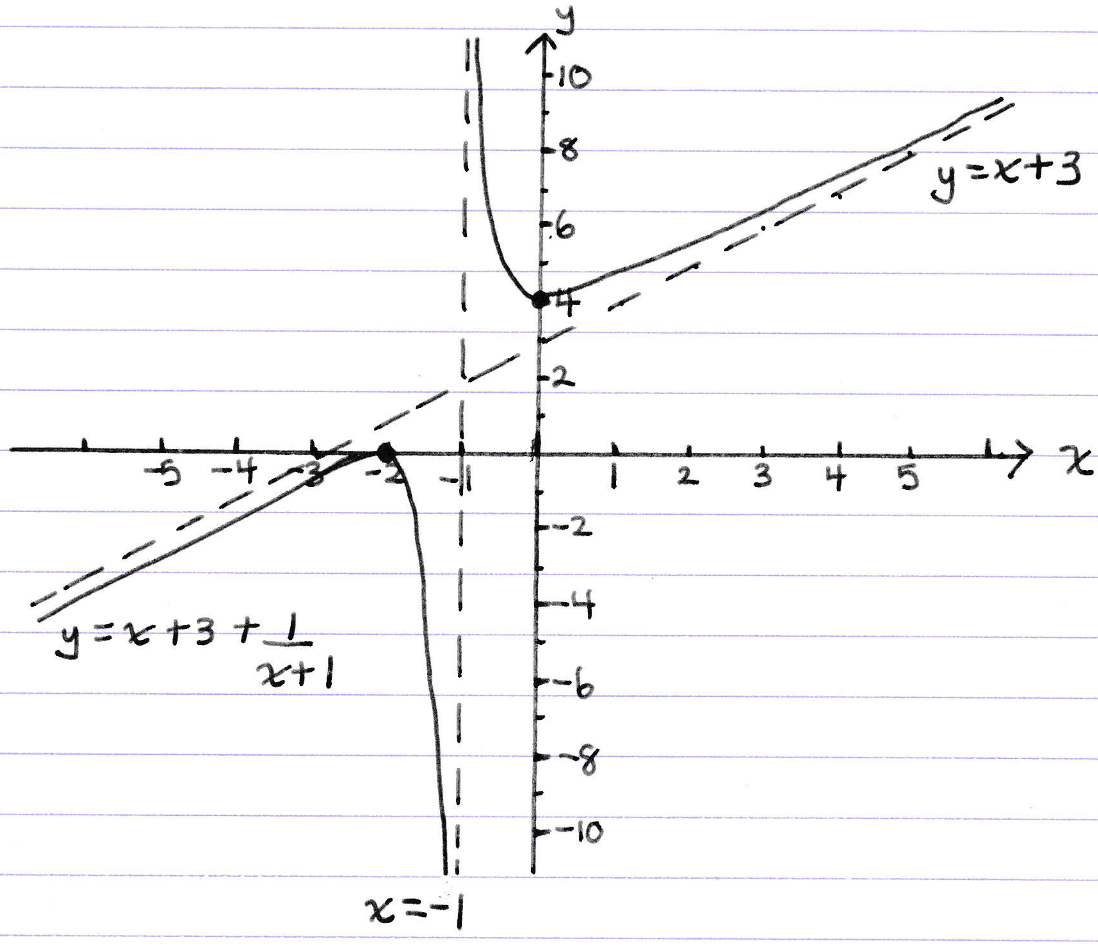
Felly mae'r pwynt $(0, 4)$ yn bwynt <u>minimwm</u>.

Os yw $x = -2$, mae $f''(x) = \dfrac{2}{(-2+1)^3}$

$f''(x) = -2$

Felly mae'r pwynt $(-2, 0)$ yn bwynt <u>macsimwm</u>.

(ch)



d) $S = [4, 5]$

$f^{-1}(S)$. Pa werthoedd ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $[4,5]$?

$f(x) = 4$

$4 = x + 3 + \frac{1}{x+1}$

$1 = x + \frac{1}{x+1}$

$x+1 = x(x+1) + 1$

$\cancel{x}+\cancel{1} = x^2 + \cancel{x} + \cancel{1}$

$0 = x^2$

$x = \pm\sqrt{0}$

$x = \pm 0$

$x = 0$

(Gallwn hefyd weld hwn o'r graff)

$f(x) = 5$

$5 = x + 3 + \frac{1}{x+1}$

$2 = x + \frac{1}{x+1}$

$2(x+1) = x(x+1) + 1$

$2x + 2 = x^2 + x + 1$

$0 = x^2 - x - 1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2 \times 1}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Naill ai $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ neu $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(1.62 a −0.62 i 2 ledegol)

Felly $f^{-1}(S) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

FP2 Haf 2018

2) $f(x) = \sqrt{-x}$ ar gyfer $x < 0$
$f(x) = -\sqrt{x}$ ar gyfer $x \geqslant 0$.

Os yw $x < 0$ mi fydd $-x > 0$.
Felly $f(-x)$ ar gyfer $x < 0$ fydd $-\sqrt{(-x)}$
$= -\sqrt{-x}$
$= -f(x)$.

Os yw $x > 0$ mi fydd $-x < 0$
Felly $f(-x)$ ar gyfer $x > 0$ fydd $\sqrt{-(-x)}$
$= \sqrt{x}$
$= -f(x)$.

Os yw $x = 0$ mi fydd $-x = 0$.
Felly $f(-x)$ ar gyfer $x = 0$ fydd $-\sqrt{(-0)}$
$= -\sqrt{0}$
$= -0$
$= -(-0)$
$= -f(x)$

Felly mae $f(-x) = -f(x)$ ar gyfer bob gwerth o x.
Felly mae $f(x)$ yn od-ffwythiant.

FP2 Haf 2018

8) $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$

a) Fel mae $x \to \infty$, mae $f(x) \to \dfrac{\infty}{\infty} = 1$.

Fel mae $x \to -\infty$, mae $f(x) \to \dfrac{\infty}{\infty} = 1$.

Felly mae $\underline{\underline{y = 1}}$ yn asymptot.

b) Rhannu hir:

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2 - x + 1 \,\big)\, \overline{x^2 + x + 1} \\ x^2 - x + 1 \\ \hline 2x \end{array}$$

Felly mae $f(x) = 1 + \dfrac{2x}{x^2 - x + 1}$

Differu: $f'(x) = 0 + \dfrac{(x^2 - x + 1)(2) - 2x(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$

$$= \frac{2x^2 \cancel{- 2x} + 2 - 4x^2 \cancel{+ 2x}}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

Pwyntiau arhosol $\Rightarrow f'(x) = 0$

$$\frac{2(1 - x^2)}{(x^2 - x + 1)^2} = 0$$

Cawn datrysiadau os yw $1 - x^2 = 0$

$1 = x^2$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = \pm 1$

Os yw $x = 1$ mae $f(x) = \dfrac{1+1+1^2}{1-1+1^2}$

$$= \frac{3}{1}$$

$$= 3$$

Os yw $x = -1$ mae $f(x) = \dfrac{1+(-1)+(-1)^2}{1-(-1)+(-1)^2}$

$$= \frac{1-1+1}{1+1+1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Felly'r pwyntiau arhosol yw $\underline{\underline{(1, 3)}}$ a $\underline{\underline{(-1, \frac{1}{3})}}$

ii)

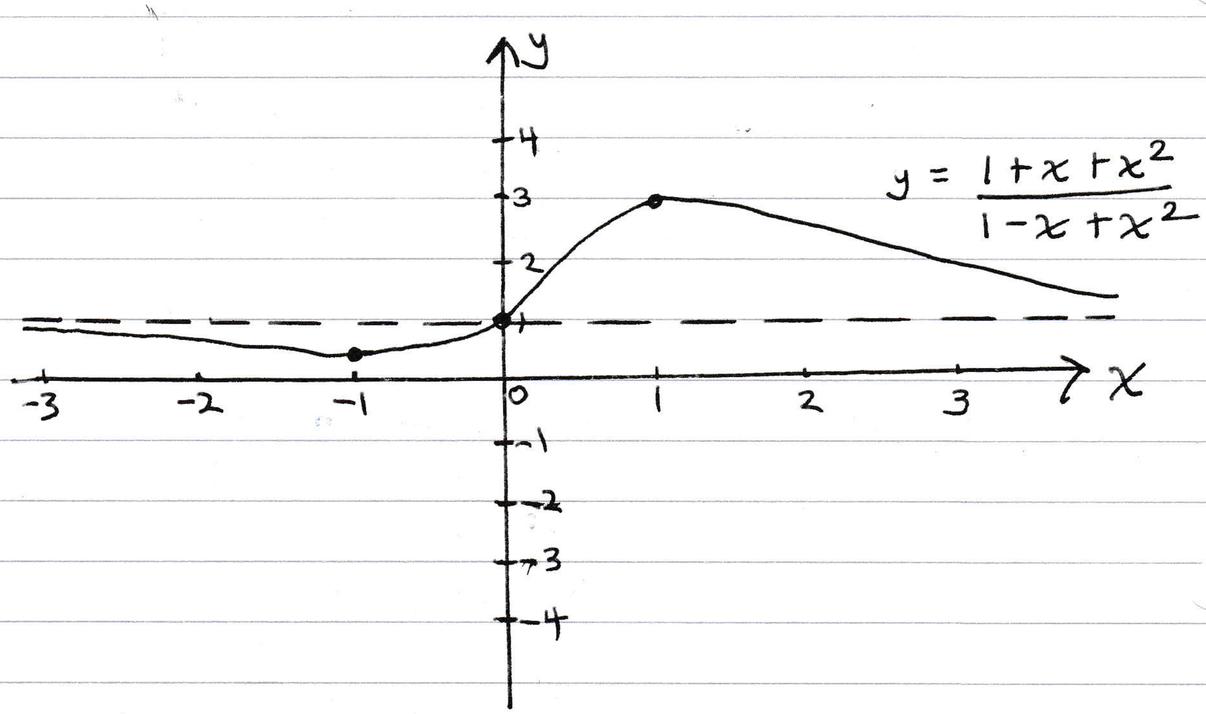
x	$f'(x)$
0.9	0.4588817776
1.1	-0.3408814 22

Felly mae'r pwynt $(1, 3)$ yn bwynt <u>macsimwm</u>

x	$f'(x)$
-1.1	-0.03833480892
-0.9	0.05174221484

Felly mae'r pwynt $(-1, \frac{1}{3})$ yn bwynt <u>minimwm</u>.

c)



ch) $S = (2, 3)$

Beth yw $f^{-1}(S)$?

Pa werthoedd ar gyfer x sy'n rhoi $f(x)$ yn y cyfwng $(2, 3)$?

Ble mae $f(x) = 2$?

$$2 = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$$

$$2(1 - x + x^2) = 1 + x + x^2$$

$$2 - 2x + 2x^2 = 1 + x + x^2$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Naill ai $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ neu $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Ble mae $f(x) = 3$?

O'r graff, gwelwn fod $f(x) = 3$ ar un pwynt yn unig, sef $x = 1$.

Ni chaiff hwn ymddangos yn $f^{-1}(S)$.

Felly $f^{-1}(S) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$

FP2 Haf 2019

2) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

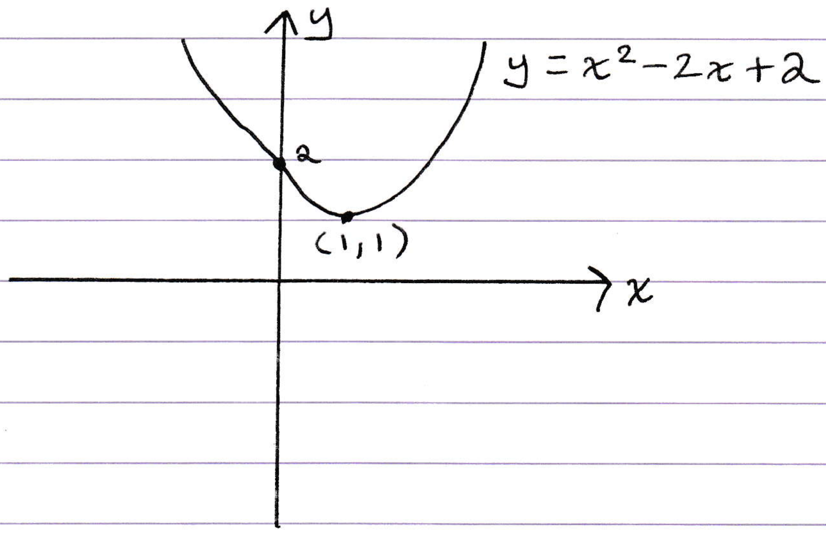
a) $f'(x) = 2x - 2$

Pwyntiau arhosol $\Rightarrow f'(x) = 0$

$$2x - 2 = 0$$
$$x = 1$$

$\rightarrow f(x) = 1^2 - 2(1) + 2$
$= 1$

$f''(x) = 2$ felly mae $(1, 1)$ yn bwynt minimum.



b) $S = [2, 5]$

(i) $f(2) = 2^2 - 2(2) + 2$
$= 2$

$f(5) = 5^2 - 2(5) + 2$
$= 17$

$f(S) = [2, 17]$

(ii) $f^{-1}(S)$. Pa werthoedd o x sy'n rhoi $f(x)$ yn y set $[2,5]$?

Pryd mae $f(x) = 2$?

$x^2 - 2x + 2 = 2$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

Naill ai $x = 0$ neu $x - 2 = 0$

$x = 2$

Pryd mae $f(x) = 5$?

$x^2 - 2x + 2 = 5$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

Naill ai $x - 3 = 0$ neu $x + 1 = 0$

$x = 3$ $\quad$ $x = -1$

Felly $f^{-1}(S) = \underline{[-1, 0] \cup [2, 3]}$