

## Hen Gwestiynau Arholiad

## Theorem de Moivre

(Haf 2006)

2. Darganfyddwch dri thrydydd isradd y rhif cymhlyg  $i$ . Rhowch eich atebion yn y ffurf  $x + iy$ . [9]

6. (a) Defnyddiwch anwythiad mathemategol i brofi bod

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

lle mae  $n$  yn gyfanrif positif. [6]

(b) Defnyddiwch y canlyniad yn (a) gyda  $n = 5$  i ddangos bod

$$\sin 5\theta = a\sin^5\theta - b\sin^3\theta + c\sin\theta$$

lle mae  $a, b, c$  yn gyfanrifau positif sydd i'w darganfod. [7]

(Haf 2007)

2. Darganfyddwch ddau ail isradd y rhif cymhlyg  $1 + \sqrt{3}i$ . Rhowch eich atebion yn y ffurf  $x + iy$ . [6]

7. (a) O wybod bod

$$z = \cos\theta + i\sin\theta,$$

defnyddiwch Theorem De Moivre i ddangos bod

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$

ar gyfer pob cyfanrif positif  $n$ . [3]

(b) Trwy hyn, gan ehangu  $\left(z + \frac{1}{z}\right)^5$ , dangoswch fod

$$\cos^5\theta = a\cos 5\theta + b\cos 3\theta + c\cos\theta$$

lle mae  $a, b, c$  yn gysonion sydd i'w darganfod. [5]

(Haf 2008)

6. (a) O wybod bod

$$z = \cos\theta + i \sin\theta,$$

dangoswch fod

$$z^n - z^{-n} = 2i \sin n\theta. \quad [3]$$

- (b) Ehangwch  $(z - z^{-1})^3$  a thrwy hyn dangoswch fod

$$\sin^3\theta = a\sin 3\theta + b\sin\theta$$

lle mae gwerthoedd y cysonion  $a, b$ , i'w darganfod. [5]

8. (a) Darganfyddwch fodwlws ac arg y rhif cymhlyg 8i. [2]

- (b) Trwy hyn, darganfyddwch dri thrydydd isradd 8i, gan roi eich atebion yn y ffurf  $x + iy$ . [8]

(Haf 2009)

3. Gan roi eich atebion yn y ffurf  $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ , darganfyddwch bedwerydd israddau'r rhif cymhlyg  $-8 + 8\sqrt{3}i$ . [8]

7. (a) O wybod bod

$$z = \cos\theta + i\sin\theta,$$

dangoswch fod

$$z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta. \quad [3]$$

- (b) Trwy hyn, datrysych yr hafaliad

$$z^2 - 2z + 3 - 2z^{-1} + z^{-2} = 0. \quad [7]$$

(Haf 2010)

2. (a) O wybod bod  $3 + 4i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ , lle mae  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , darganfyddwch werthoedd  $r$  a  $\theta$ . [2]

- (b) Trwy hyn, darganfyddwch dri thrydydd isradd  $3 + 4i$  yn y ffurf  $x + iy$ . Rhwch werthoedd  $x$  ac  $y$  yn gywir i dri ffigur ystyrlon. [7]

5. Ysgrifennwch Theorem De Moivre ar gyfer  $n = 5$ . Trwy hyn, dangoswch, ar gyfer  $\sin\theta \neq 0$ , fod

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = A\cos^4\theta + B\cos^2\theta + C,$$

lle mae  $A, B, C$  yn gysonion sydd i'w darganfod.

Diddwythwch (*deduce*) werth terfannol (*limiting*)  $\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}$  wrth i  $\theta$  dueddu tuag at sero. [8]

(Haf 2011)

4. O wybod bod  $z = -1 + i$ ,

(a) darganfyddwch fodwlws ac  $\arg z$ , [3]

(b) darganfyddwch dri thrydydd isradd  $z$  yn y ffurf  $x + iy$ , gan roi  $x$  ac  $y$  yn gywir i dri lle degol, [7]

(c) darganfyddwch y cyfanrif positif lleiaf  $n$  fel bod  $z^n$  yn rhif real positif. [2]

5. (a) O wybod bod  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , dangoswch fod

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$$

a darganfyddwch fynegiad tebyg ar gyfer  $z^n + \frac{1}{z^n}$ . [5]

(b) Trwy hyn, gan ehangu  $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ , dangoswch fod

$$\sin^4 \theta = a \cos 4\theta + b \cos 2\theta + c,$$

lle mae  $a, b, c$  yn gysonion y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd. [5]

(Haf 2012)

8. (a) Trwy ddefnyddio anwythiad mathemategol, profwch fod

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

ar gyfer gwerthoedd  $n$  sy'n gyfanrifau positif. [7]

(b) (i) Mae'r rhif cymhlyg  $w$  yn drydydd isradd y rhif cymhlyg  $z$ . Dangoswch fod

$$w \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \text{ hefyd yn drydydd isradd } z.$$

(ii) Ysgrifennwch drydydd isradd real  $-8$ . Gan ddefnyddio'r canlyniad yn (i), neu fel arall, darganfyddwch ddau drydydd isradd cymhlyg  $-8$ , gan roi eich atebion yn y ffurf  $x + iy$ . [7]

(Haf 2013)

3. (a) Darganfyddwch bedwar pedwerydd isradd  $-1$ , gan roi eich atebion yn y ffurf  $x + iy$ . [6]

(b) (i) Plotiwch y pwyntiau sy'n cyfateb i'r israddau hyn ar ddiagram Argand.

(ii) Mae'r pwyntiau yn cael eu cysylltu â'i gilydd i ffurfio sgwâr. Darganfyddwch arwynebedd y sgwâr. [3]

8. Gan ddefnyddio Theorem de Moivre, dangoswch fod

$$\cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cos \theta,$$

lle mae  $a, b, c$  yn gysonion y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd. [6]

(Haf 2014)

4. Mae'r rhif cymhlyg  $z$  wedi'i roi gan  $1 + i\sqrt{3}$ .

(a) Darganfyddwch fodwlws ac  $\arg z$ . [2]

(b) Darganfyddwch dri thrydydd isradd  $z$ , gan roi eich atebion yn y ffurf  $x + iy$  gydag  $x$  ac  $y$  yn gywir i dri lle degol. [6]

6. Gan ddefnyddio Theorem de Moivre, dangoswch, ar gyfer  $\sin \theta \neq 0$ , fod

$$\frac{\sin 6\theta}{\sin \theta} = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cos \theta,$$

lle mae  $a, b, c$  yn gysonion y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd.

Trwy hyn, darganfyddwch werth terfannol (*limiting*)  $\frac{\sin 6\theta}{\sin \theta}$  wrth i  $\theta$  dueddu tuag at  $\pi$ . [8]

(Haf 2015)

3. Mae'r rhif cymhlyg  $z = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ .

(a) Darganfyddwch dri thrydydd isradd  $z$ , gan roi eich atebion yn y ffurf  $x + iy$ , gydag  $x$  ac  $y$  yn gywir i dri lle degol. [6]

(b) Darganfyddwch y cyfanrif positif lleiaf  $n$  fel bod  $z^n$

(i) yn real,

(ii) yn ddychmygol (*imaginary*). [3]

(Haf 2016)

2. (a) (i) Enrhifwch  $(3 - i)^2$ , gan roi eich ateb yn y ffurf  $a + ib$ .

(ii) Gan ddefnyddio eich canlyniad, dangoswch fod

$$(3 - i)^4 = 28 - 96i. \quad [3]$$

(b) Trwy hyn, ysgrifennwch bedwar pedwerydd isradd  $28 - 96i$ . [3]

3. (a) Defnyddiwch Theorem de Moivre i brofi, ar gyfer  $\sin \theta \neq 0$ , bod

$$\frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} = 4 \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta). \quad [4]$$

(b) Trwy hyn enrhifwch

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Rhowch eich ateb yn gywir i dri ffigur ystyrlon. [4]

(Haf 2017)

3. Darganfyddwch dri thrydydd isradd y rhif cymhlyg  $-8i$ . Rhowch eich atebion ar y ffurf  $x + iy$  lle mae  $x, y$  yn gyfanrifau neu yn syrdiau. [8]

4. (a) O wybod bod  $z = \cos\theta + i\sin\theta$ , dangoswch fod

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$

a darganfyddwch fynegiad tebyg ar gyfer  $z^n - \frac{1}{z^n}$ . [4]

(b) Trwy ehangu  $\left(z + \frac{1}{z}\right)^5$ , dangoswch fod

$$\cos^5\theta = a\cos 5\theta + b\cos 3\theta + c\cos\theta,$$

lle mae  $a, b, c$  yn gysonion y dylai eu gwerthoedd gael eu darganfod. [5]

(c) Trwy hyn enrhifwch yr integryn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d\theta. [4]$$

(Haf 2018)

1. Darganfyddwch dri thrydydd isradd y rhif cymhlyg  $3 + 4i$ . Rhowch eich atebion ar ffurf Gartesaidd gyda'r rhannau real a dychmygol (*imaginary*) yn gywir i ddau le degol. [8]

6. (a) O wybod bod  $z = \cos\theta + i\sin\theta$ , dangoswch fod

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$$

a darganfyddwch fynegiad tebyg ar gyfer  $z^n + \frac{1}{z^n}$ . [4]

(b) Trwy hyn dangoswch fod

$$\sin^3\theta \cos\theta = a\sin 4\theta + b\sin 2\theta,$$

lle mae  $a, b$  yn gysonion y mae eu gwerthoedd i'w darganfod. [5]