

## Hen Gwestiynau Arholiad

## Dulliau Iterus

(Haf 2006)

6.



Mae'r diagram yn dangos y llinell gychwynnol, y llinell  $\theta = \frac{\pi}{2}$  a'r gromlin  $C$  â hafaliad

$$r = \sinh \theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}).$$

- (a) Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. [5]
- (b) Mae'r tangiad i  $C$  yn y pwynt  $P$  yn berpendicwlar i'r llinell gychwynnol.
- (i) Dangoswch fod cyfesuryn- $\theta P$  yn bodloni'r hafaliad

$$\tanh \theta = \cot \theta.$$

- (ii) Gan ddechrau gyda'r brasamcan cychwynnol  $\theta_0 = 1$  ar gyfer gwreiddyn yr hafaliad hwn, defnyddiwch y dull Newton-Raphson **unwaith** i ddarganfod gwell brasamcan  $\theta_1$ . Rhowch eich ateb yn gywir i bedwar ffigur ystyrlon. [10]

(Haf 2007)

2. Diffinnir y ffwythiant  $f$  gan

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 5.$$

- (a) Dangoswch fod  $f$  yn ffwythiant cynyddol caeth (*strictly increasing*) ar gyfer pob gwerth o  $x$ . Diddwythwch nifer gwreiddiau real yr hafaliad  $f(x) = 0$ . [4]
- (b) (i) Dangoswch fod i'r hafaliad  $f(x) = 0$  wreiddyn yn y cyfwng  $[0, 1]$ .
- (ii) Defnyddiwch y dull Newton-Raphson i ddarganfod gwerth y gwreiddyn hwn yn gywir i bedwar lle degol. [7]

(Haf 2008)

1. (a) Trwy fraslunio graffiau priodol, dangoswch fod i'r hafaliad

$$\cosh x = 1 + \sin x$$

ddau wreiddyn, un ohonynt yn bositif.

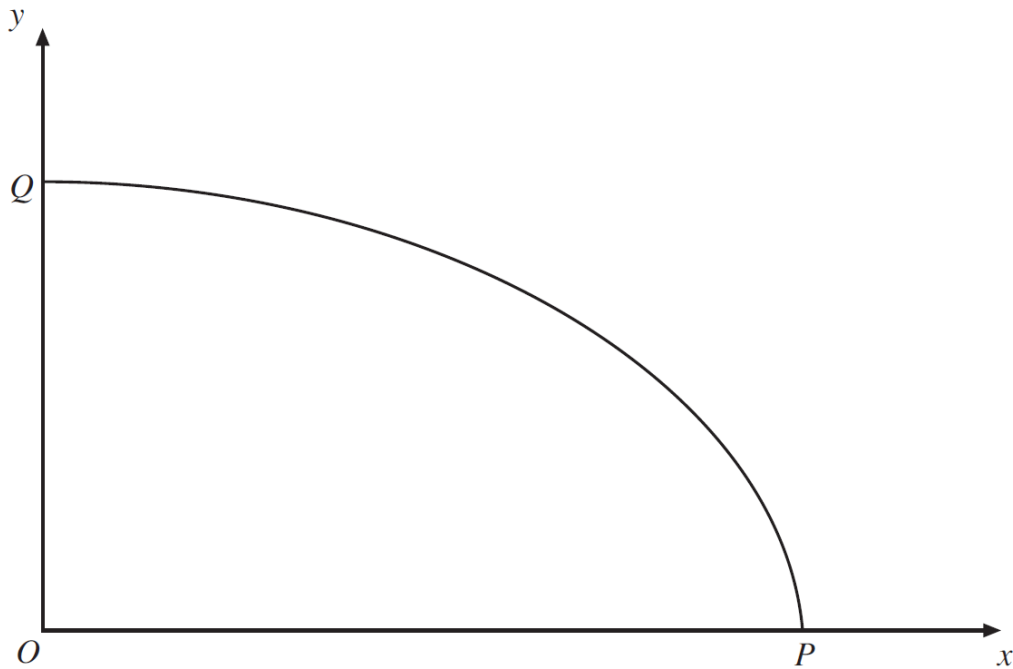
[3]

- (b) Defnyddiwch y dull Newton-Raphson, gyda gwerth cychwynol  $x_0 = 1.5$ , i ddarganfod gwerth y gwreiddyn positif yn gywir i bedwar lle degol.

[6]

(Haf 2009)

7.



Mae'r diagram uchod yn dangos braslun o ran o graff y ffwythiant

$$f(x) = 2\cosh x - x\sinh x.$$

Mae'r graff yn torri'r echelin- $x$  yn  $P$  a'r echelin- $y$  yn  $Q$ .

- (a) (i) Dangoswch fod  $f'(0)$  a  $f''(0)$  ill dau yn sero.  
(ii) Gan roi rheswm, nodwch a yw  $Q$  yn bwynt ffurfdro (*inflection*) arhosol ai peidio. [5]

(b) Mae cyfesuryn- $x$   $P$  wedi'i ddynodi gan  $\alpha$ .

- (i) Dangoswch fod  $\alpha \tanh \alpha = 2$ .  
(ii) Dangoswch fod  $\alpha$  rhwng 2 a 2.1.  
(iii) Ystyriwch y dilyniant iterus canlynol sy'n seiliedig ar yr hafaliad uchod yn  $\alpha$ .

$$\alpha_{n+1} = \frac{2}{\tanh \alpha_n}; \quad \alpha_0 = 2.05.$$

Trwy enrhifo deilliad (*derivative*) priodol, dangoswch fod y dilyniant hwn yn cydgyfeirio (*converge*).

- (iv) Defnyddiwch y dilyniant hwn i ddarganfod gwerth  $\alpha$  yn gywir i bedwar lle degol. [9]  
(c) Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i amgáu rhwng y graff a'r ddwy echelin gyfesurynnol. [6]

(Haf 2010)

3. (a) Dangoswch fod

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1 + \ln x). \quad [2]$$

(b) Mae i'r hafaliad  $x^x - 2 = 0$  un gwreiddyn positif  $\alpha$ .

(i) Gan ddechrau gyda brasamcan cychwynnol o 1.5, defnyddiwch y fformiwla Newton-Raphson un waith i ddarganfod gwell brasamcan ar gyfer  $\alpha$ . Rhowch eich ateb yn gywir i ddau le degol.

(ii) Profwch mai'r ateb i (b)(i) yw gwerth  $\alpha$  yn gywir i ddau le degol. [5]

(c) (i) Mae'n bosibl ad-drefnu'r hafaliad sydd wedi'i roi yn (b) yn y ffurf

$$x = e^{\frac{\ln 2}{x}}.$$

Trwy enrhifo deilliad (*derivative*) priodol, dangoswch fod y broses iterus sy'n seiliedig ar yr ad-drefniant hwn yn cydgyfeirio (*converge*).

(ii) Gan ddechrau gyda brasamcan cychwynnol sy'n hafal i'ch ateb i (b)(i), defnyddiwch y broses iterus hon i ddarganfod gwerth  $\alpha$  yn gywir i bedwar lle degol. [5]

(Haf 2011)

5. Ystyriwch yr hafaliad  $x \sin x - 0.5 = 0$ .

(a) Dangoswch fod i'r hafaliad hwn wreiddyn  $\alpha$  rhwng 0.6 a 0.8. [2]

(b) (i) Dangoswch ei bod yn bosibl ysgrifennu fformiwla iterus Newton-Raphson ar gyfer darganfod gwerth  $\alpha$  yn y ffurf

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 \cos x_n + 0.5}{x_n \cos x_n + \sin x_n}.$$

(ii) Gan ddechrau gydag  $x_0 = 0.7$ , darganfyddwch werth  $\alpha$  yn gywir i bum lle degol. [6]

(c) Mae ad-drefniant o'r hafaliad yn arwain at y dilyniant iterus

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ lle mae } f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{0.5}{x}\right).$$

(i) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer  $f'(x)$ .

(ii) **Trwy hyn**, darganfyddwch a yw'n bosibl ai peidio defnyddio'r dilyniant i ddarganfod gwerth  $\alpha$ . [4]

(Haf 2012)

7. Mae gan yr hafaliad  $x = 2 \tanh x$  wreiddyn  $\alpha$  rhwng 1.5 a 2.

- (a) Dangoswch ei bod yn bosibl ysgrifennu fformiwla iterus Newton-Raphson ar gyfer darganfod gwerth  $\alpha$  yn y ffurf

$$x_{n+1} = \frac{\sinh 2x_n - 2x_n}{\cosh^2 x_n - 2}. \quad [5]$$

- (b) Gan ddechrau gydag  $x_0 = 2$ , ysgrifennwch y gwerthoedd ar eich cyfrifiannell ar gyfer  $x_1$  a  $x_2$ . Dangoswch fod talgrynnu (*rounding*)  $x_2$  i dri lle degol yn rhoi gwerth  $\alpha$  yn gywir i dri lle degol. [4]

(Haf 2013)

2. Mae Siôn am enrhifo trydydd isradd real nifer o rifau positif ond yr unig weithrediadau sydd ganddo ar ei gyfrifiannell yw'r gweithrediadau rhifyddol sylfaenol, sef adio, tynnu, lluosu, rhannu.

- (a) Felly, mae'n penderfynu darganfod  $\sqrt[3]{a}$  trwy gymhwyso dull Newton-Raphson i'r hafaliad  $x^3 - a = 0$  lle mae  $a > 0$ .

- (i) Dangoswch fod hyn yn rhoi'r dilyniant iterus

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}.$$

- (ii) Gan gymryd  $x_0 = 2$ , defnyddiwch y dull hwn i ddarganfod  $\sqrt[3]{10}$  yn gywir i bedwar lle degol. [5]

- (b) Mae Huw yn awgrymu mai dull arall o ddarganfod  $\sqrt[3]{a}$  fyddai ad-drefnu'r hafaliad  $x^3 - a = 0$  yn y ffurf

$$x = \frac{a}{x^2}$$

ac yna diffinio'r dilyniant iterus

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n^2}.$$

Dangoswch, fodd bynnag, nad yw'r dilyniant hwn yn bodloni'r amod ar gyfer cydgyfeiriant (*condition for convergence*) ar gyfer pob gwerth positif o  $a$ . [4]

(Haf 2014)

2. Mae gan yr hafaliad  $x^3 + x = 3$  wreiddyn  $\alpha$  rhwng 1.2 a 1.3.

- (a) Mae Alun yn awgrymu defnyddio'r dilyniant iterus canlynol sy'n seiliedig ar ad-drefnu'r hafaliad i ddarganfod gwerth  $\alpha$ .

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{3 - x_n} \text{ gydag } x_0 = 1.25$$

Trwy enrhifo deilliad (*derivative*) priodol, dangoswch fod y dilyniant hwn yn cydgyfeirio (*converge*).

Defnyddiwch ef i ddarganfod gwerth  $\alpha$  yn gywir i 4 lle degol. [8]

- (b) Gan ddechrau gydag  $x_0 = 1.25$ , defnyddiwch y dull Newton-Raphson i ddarganfod gwerth  $\alpha$  yn gywir i 6 lle degol. [6]

(Haf 2015)

3. Mae'r ffwythiant  $f$  wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 6x + 4.$$

Gallwch dybio bod gan graff  $f$  union un pwynt arhosol. Mae cyfesuryn- $x$  y pwynt arhosol hwn wedi'i ddynodi gan  $\alpha$ .

(a) Dangoswch fod

(i)  $\alpha$  rhwng 1.4 a 1.6,

(ii)  $\alpha = \left( \frac{2\alpha^2 + \alpha + 1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}.$  [5]

(b) Mae lle i gredu ei bod yn bosibl defnyddio'r dilyniant canlynol i ddarganfod gwerth  $\alpha$ .

$$x_{n+1} = \left( \frac{2x_n^2 + x_n + 1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}; \quad x_0 = 1.5$$

(i) Trwy ystyried deilliad (*derivative*) priodol, dangoswch fod y dilyniant hwn yn cydgyfeirio (*convergent*).

(ii) Defnyddiwch y dilyniant hwn i ddarganfod gwerth  $\alpha$  yn gywir i dri lle degol. [8]

(Haf 2016)

6. Mae gan yr hafaliad

$$x^5 + \sinh x = 3$$

wreiddyn  $\alpha$  sy'n agos i 1.

(a) Mae'n cael ei awgrymu y gallai dilyniannau iterus yn seiliedig ar yr ad-drefniadau (*re-arrangements*) canlynol o'r hafaliad gael eu defnyddio i ganfod gwerth  $\alpha$ .

I.  $x = (3 - \sinh x)^{\frac{1}{5}}$

II.  $x = \sinh^{-1}(3 - x^5)$

(i) Drwy enrhifo deilliadau priodol, dangoswch fod un o'r dilyniannau hyn yn gydgyfeiriol (*convergent*) a'r llall yn ddargyfeiriol (*divergent*).

(ii) Gan gymryd  $x_0 = 1$ , defnyddiwch y dilyniant cydgyfeiriol i ddarganfod gwerth  $\alpha$  yn gywir i dri lle degol. [12]

(b) Defnyddiwch y dull Newton-Raphson i ddarganfod gwerth  $\alpha$  yn gywir i chwech lle degol. [6]

(Haf 2017)

5. (a) Dangoswch fod gan yr hafaliad  $\tan\theta \tanh\theta = 1$  wreiddyn,  $\alpha$ , rhwng 0.9 ac 1.1. [3]

(b) Ystyriwch y dilyniant sydd wedi'i ddiffinio gan

$$\theta_{n+1} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\tanh\theta_n}\right) \quad \text{gyda } \theta_0 = 1.$$

(i) Dangoswch fod

$$\frac{d}{d\theta}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\tanh\theta}\right)\right) = -\frac{1 - \tanh^2\theta}{1 + \tanh^2\theta}.$$

(ii) Trwy hyn dangoswch fod y dilyniant sydd wedi'i ddiffinio uchod yn gydgyfeiriol (*convergent*). [5]

(c) Gan ddefnyddio'r dilyniant hwn, gyda  $\theta_0 = 1$ ,

(i) ysgrifennwch werth  $\theta_1$ ,

(ii) ysgrifennwch werth  $\alpha$  yn gywir i dri lle degol. [3]

(Haf 2018)

6. Mae gan yr hafaliad  $\sinh\theta = \cos\theta$  wreiddyn sy'n agos i 0.7. Mae rhywun yn cynnig bod un o'r dilyniannau iterus canlynol yn cael ei ddefnyddio er mwyn cael brasamcan manwl gywir i'r gwreiddyn hwn.

$$A : \theta_{n+1} = \sinh^{-1}(\cos\theta_n), \quad \theta_0 = 0.7$$

$$B : \theta_{n+1} = \cos^{-1}(\sinh\theta_n), \quad \theta_0 = 0.7$$

(a) Dangoswch drwy ddifferu bod un o'r dilyniannau hyn yn gydgyfeiriol (*convergent*) a bod y dilyniant arall yn ddargyfeiriol (*divergent*). [8]

(b) Defnyddiwch y dilyniant cydgyfeiriol i ddarganfod gwerth y gwreiddyn yn gywir i dri lle degol. [4]