C4: Prawf

Itaf 2005

(10) Tybiwch fod $x + \frac{25}{x} < 10$, lle mae x yn real a phositif.
Oherwydd bod x yn bositif, mae lluosi dwy ochr yr anhafaledd ag x yn rhoi $x^2 + 25 < 10x$.

Tynnu $10x$ o bob ochr: $x^2 - 10x + 25 < 0$

Ffactorio: $(x-5)(x-5) < 0$

$(x-5)^2 < 0$

Does dim gwerth real a phositif ar gyfer x fel bod $(x-5)^2$ yn llai na sero. (Mae sgwario unrhyw werth real yn rhoi rhif sy'n fwy na neu'n hafal i sero).
Felly rhaid bod $x-5$ yn rif cymhlyg (ddim yn real), sy'n golygu bod x yn gorfod bod yn rif cymhlyg.
Mae hwn yn wrthddywediad i'r dybiaeth bod x yn real a phositif, felly rhaid bod $x + \frac{25}{x} \geqslant 0$

ar gyfer gwerthoedd real a phositif o x.

Haf 2006

(11) Tybiwch fod $\sqrt{2}$ yn gymarebol. Yna gellir ysgrifennu $\sqrt{2}$ yn y ffurf $\frac{a}{b}$, lle mae a, b yn gyfanrifau positif sydd heb ffactor cyffredin.

$\therefore a^2 = 2b^2$

$\therefore$ mae 2 yn ffactor o a^2

$\therefore$ mae 2 yn ffactor o a, ac felly mae $a = 2K$, lle mae K yn gyfanrif.

Yn amnewid $a = 2K$ i mewn i $a^2 = 2b^2$, cawn

$$(2K)^2 = 2b^2$$
$$4K^2 = 2b^2$$
$$2K^2 = b^2$$

$\therefore$ mae 2 yn ffactor o b^2

$\therefore$ mae 2 yn ffactor o b.

Ond os yw 2 yn ffactor o a a b, yna mae hyn yn gwrth-ddweud y dybiaeth gynt bod a, b yn gyfanrifau positif sydd heb ffactor cyffredin. (Rydym wedi darganfod ffactor cyffredin, sef 2.)

Felly nid yw $\sqrt{2}$ yn gymarebol.

Haf 2007

(10) Mae'n hysbys bod $3n + 2n^3$ yn odrif.
Tybiwch fod n yn eilrif ac felly mae $n = 2K$.

Yn amnewid $n = 2K$ i mewn i $3n + 2n^3$:

$$\begin{aligned} & 3(2K) + 2(2K)^3 \\ = \; & 6K + 2(8K^3) \\ = \; & 6K + 16K^3 \\ = \; & 2(3K + 8K^3) \end{aligned}$$

Felly mae 2 yn ffactor o $3n + 2n^3$.
Felly mae $3n + 2n^3$ yn eilrif.
Mae hyn yn gwrth-ddweud y dybiaeth gynt bod $3n + 2n^3$ yn odrif.

Felly os yw $3n + 2n^3$ yn odrif, rhaid bod n yn odrif.

Itaf 2008

(10) Tybiwch fod gwerth real a phositif o x yn bodloni fel bod

$$x + \frac{49}{x} < 14.$$

Oherwydd bod x yn bositif, mae lluosi dwy ochr yr anhafaledd ag x yn rhoi $x^2 + 49 < 14x$.

Tynnu $14x$ o bob ochr: $x^2 - 14x + 49 < 0$

Ffactorio: $(x-7)(x-7) < 0$

$(x-7)^2 < 0$.

Does dim gwerth real a phositif ar gyfer x fel bod $(x-7)^2$ yn llai na sero. (Mae sgwario unrhyw werth real yn rhoi rhif sy'n fwy na neu'n hafal i sero.) Felly rhaid bod $x-7$ yn rif cymhlyg (ddim yn real), sy'n golygu bod x yn gorfod bod yn rif cymhlyg. Mae hwn yn wrthddywediad i'r dybiaeth gynt fod x yn real a phositif, felly rhaid bod $x + \frac{49}{x} \geq 14$

ar gyfer gwerthoedd real a phositif o x.

Haf 2009

(10) Tybiwch fod $\sqrt{3}$ yn gymarebol. Yna gallwn ysgrifennu $\sqrt{3}$ yn y ffurf $\frac{a}{b}$ lle mae a, b yn gyfanrifau sydd heb ffactorau cyffredin.

$\therefore \quad a^2 = 3b^2$

$\therefore$ mae 3 yn ffactor o a^2.

$\therefore$ mae 3 yn ffactor o a, ac felly mae $a = 3K$, lle mae K yn gyfanrif.

Yn amnewid $a = 3K$ i mewn i $a^2 = 3b^2$, cawn

$$(3K)^2 = 3b^2$$
$$9K^2 = 3b^2$$
$$3K^2 = b^2$$

$\therefore$ mae 3 yn ffactor o b^2

$\therefore$ mae 3 yn ffactor o b.

Ond os yw 3 yn ffactor o a a b, yna mae hyn yn gwrth-ddweud y dybiaeth gynt bod a, b yn gyfanrifau positif sydd heb ffactor cyffredin. (Rydym wedi darganfod ffactor cyffredin, sef 3.)

Felly nid yw $\sqrt{3}$ yn gymarebol.

Haf 2010

(10) Tybiwch fod rhifau real positif a, b yn bodloni fel bod $a + b < 2\sqrt{ab}$.

Sgwario bob ochr: $(a+b)^2 < (2\sqrt{ab})^2$

$(a+b)(a+b) < 4ab$

$a^2 + ab + ab + b^2 < 4ab$

$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab$

$a^2 - 2ab + b^2 < 0$

Ffactorio $(a-b)^2 < 0$

Does dim gwerthoedd real a phositif ar gyfer a, b fel bod $(a-b)^2$ yn llai na sero. (Mae sgwario unrhyw werth real yn rhoi rhif sy'n fwy na neu'n hafal i sero.) Felly rhaid bod $a-b$ yn rif cymhlyg (ddim yn real). Felly rhaid i o leiaf un allan o a, b fod yn rif cymhlyg. Mae hyn yn wrthddywediad i'r dybiaeth gynt fod a a b yn rifau real positif, felly rhaid bod $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ar gyfer gwerthoedd real a phositif o a, b.

Haf 2011

(10) Tybiwch fod gwerth real a phositif o x yn bodloli fel bod

$$4x + \frac{9}{x} < 12.$$

Ohermydd bod x yn bositif, mae lluosi dwy ochr yr anhafaledd ag x yn rhoi $4x^2 + 9 < 12x$

Tynnu $12x$ o bob ochr: $4x^2 - 12x + 9 < 0$

Ffactoria: $(2x-3)(2x-3) < 0$

$(2x-3)^2 < 0$

Does dim gwerth real a phositif ar gyfer x fel bod $(2x-3)^2$ yn llai na sero. (Mae sgwario unrhyw werth real yn rhoi rhif sy'n fwy na neu'n hafal i sero.)
Felly rhaid bod $2x-3$ yn rif cymhlyg (ddim yn real), sy'n golygu bod x yn gorfod bod yn rif cymhlyg.
Mae hwn yn wrthddywediad ir dybiaeth gynt bod x yn real a phositif, felly rhaid bod $4x + \frac{9}{x} \geq 12$

ar gyfer gwerthoedd real a phositif o x.

Haf 2012

(18) Tybiwch fod $\sqrt{5}$ yn gymarebol. Yna mae'n bosib ysgrifennu $\sqrt{5}$ yn y ffurf $\frac{a}{b}$, lle mae a, b yn gyfanrifau sydd heb ffactorau cyffredin.

$\therefore a^2 = 5b^2$

$\therefore$ mae 5 yn ffactor o a^2

$\therefore$ mae 5 yn ffactor o a ac felly mae $a = 5K$, lle mae K yn gyfanrif.

Yn amnewid $a = 5K$ i mewn i $a^2 = 5b^2$, cawn

$$(5K)^2 = 5b^2$$
$$25K^2 = 5b^2$$
$$5K^2 = b^2$$

$\therefore$ mae 5 yn ffactor o b^2

$\therefore$ mae 5 yn ffactor o b.

Ond os yw 5 yn ffactor o a a b, yna mae hyn yn gwrth-ddweud y dybiaeth gynt bod a, b yn gyfanrifau sydd heb ffactorau cyffredin. (Rydym wedi darganfod ffactor cyffredin, sef 5.)

Felly nid yw $\sqrt{5}$ yn gymarebol.

Haf 2013

(10) Tybiwch fod gwerth real o x fel bod

$$(5x-3)^2+1 < (3x-1)^2$$
$$(5x-3)(5x-3)+1 < (3x-1)(3x-1)$$
$$25x^2-15x-15x+9+1 < 9x^2-3x-3x+1$$
$$25x^2-30x+10 < 9x^2-6x+1$$
$$16x^2-24x+9 < 0$$
$$(4x-3)(4x-3) < 0$$
$$(4x-3)^2 < 0$$

Does dim gwerth real ar gyfer x fel bod $(4x-3)^2$ yn llai na sero. (Mae sgwario unrhyw werth real yn rhoi rhif sy'n fwy na neu'n hafal i sero.)
Felly rhaid bod $4x-3$ yn rif cymhlyg (ddim yn real), sy'n golygu bod x yn gorfod bod yn rif cymhlyg.
Mae hwn yn wrthddywediad i'r dybiaeth gynt bod x yn real, felly rhaid bod $(5x-3)^2+1 \geq (3x-1)^2$ ar gyfer gwerthoedd real o x.

C4 Haf 2014

(10) Tybiwch fod gwerth ar gyfer θ fel bod $\sin\theta + \cos\theta > \sqrt{2}$

Yna, mae sgwario'r ddwy ochr yn rhoi:

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 > (\sqrt{2})^2$$
$$(\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta) > 2$$
$$\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta > 2$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta > 2$$

Mae $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (unfathiant trigonometreg)

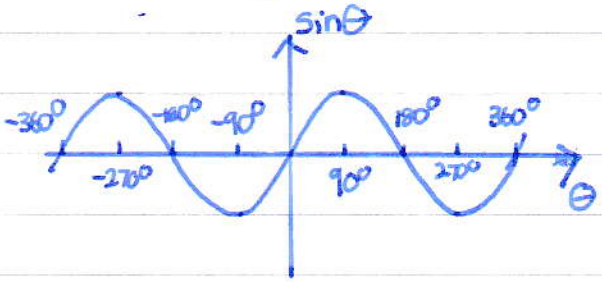
Felly $1 + 2\sin\theta\cos\theta > 2$

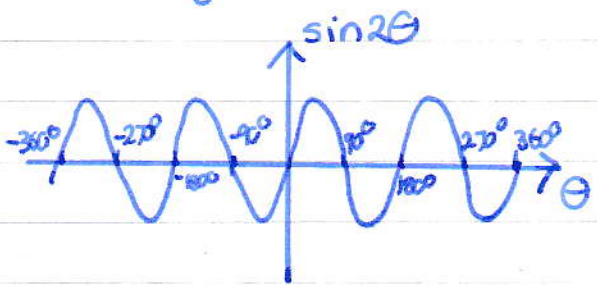
$$2\sin\theta\cos\theta > 1$$

Mae $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ (unfathiant trigonometreg)

Felly $\sin 2\theta > 1$

Ond mae graff $\sin\theta$ yn amrywio rhwng -1 ac 1;
felly bydd graff $\sin 2\theta$ hefyd yn amrywio rhwng -1 ac 1.





Felly mae'n amhosib ffeindio gwerth ar gyfer θ fel bod $\sin 2\theta > 1$.

Mae hwn yn wrthddywediad i'r dybiaeth bod $\sin\theta + \cos\theta > \sqrt{2}$. Felly rhaid bod $\sin\theta + \cos\theta \leq 2$ ar gyfer pob gwerth o θ.

C4 Ebrill 2015

10) 'Os yw a a b yn odrifau fel bod 4 yn ffactor o $a-b$, yna nid yw 4 yn ffactor o $a+b$'.

Tybiwch fod 4 yn ffactor o $a+b$.
Yna, mae cyfanrif c yn bodoli fel bod $a+b=4c$.

Gwyddom hefyd fod 4 yn ffactor o $a-b$.
Felly, mae cyfanrif K yn bodoli fel bod $a-b=4K$.

$a+b=4c$
$a=4c-b$

$a-b=4K$
$a=4K+b$

$4c-b=4K+b$
$4c-4K=b+b$
$4(c-K)=2b$
$2(c-K)=b$.

Mae c a K yn gyfanrifau, felly mae $2(c-K)$ yn eilrif. Felly rhaid bod b yn eilrif.
Ond mae hyn yn gwrth-ddweud y gosodiad yn y cwestiwn bod a a b yn odrifau

Felly os yw a a b yn odrifau fel bod 4 yn ffactor o $a-b$, yna nid yw 4 yn ffactor o $a+b$.

C4 Haf 2016

(10) Prawf: Pan mae x yn real ac $x \neq 0$, mae $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geqslant 2$.

Tybiwch fod gwerth real o x fel bod $\left| x + \frac{1}{x} \right| < 2$.

Wedyn gan sgwario'r ddwy ochr, mae gennym:

$$\left| x + \frac{1}{x} \right|^2 < 2^2$$

Wrth sgwario'r ochr chwith nid oes angen yr arwydd modwlws (negatif × negatif = positif), felly

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 < 4$$

$$x^2 + 2\left(\frac{x}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 < 4$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} < 4$$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} < 0$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 < 0$$

$$(x^2 - 1)^2 < 0$$

Mae'r ochr chwith yn derm sydd wedi'i sgwario, felly ei finimwm yw sero. Ni all fod yn llai na sero, sy'n gwrth-ddweud y gosodiad gwreiddiol (tybiwch....). Felly pan mae x yn real ac $x \neq 0$, mae $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geqslant 2$.

C4 Haf 2017

10) Tybiwch bod $\sqrt{7}$ yn gymarebol. Yna mae'n bosibl ysgrifennu $\sqrt{7}$ ar y ffurf $\frac{a}{b}$, lle mae a, b yn gyfanrifau sydd heb ffactorau cyffredin.

$\therefore$ Mae $a^2 = 7b^2$
$\therefore$ Mae gan a^2 ffactor 7.
$\therefore$ Mae gan a ffactor 7 fel bod $a = 7K$, lle mae K yn gyfanrif.

Yn amnewid $a = 7K$ i mewn i $a^2 = 7K^2$, cawn

$$(7K)^2 = 7b^2$$
$$49K^2 = 7b^2$$
$$7K^2 = b^2$$

$\therefore$ Mae gan b^2 ffactor 7.
$\therefore$ Mae gan b ffactor 7.

ond os yw 7 yn ffactor o a a b, yna mae hyn yn gwrth-ddweud y dybiaeth gynt bod a, b yn gyfanrifau sydd heb ffactor cyffredin.
(Rydym wedi darganfod ffactor cyffredin, sef 7.)

Felly nid yw $\sqrt{7}$ yn gymarebol.

C4 Haf 2018

10) Tybiwch fod gwerth positif a real o x fel bod

$$25x + \frac{4}{x} < 20.$$

Oherwydd bod x yn bositif, mae lluosi dwy ochr yr anhafaledd ag x yn rhoi $25x^2 + 4 < 20x$.

Tynnu $20x$ o bob ochr: $25x^2 - 20x + 4 < 0$

Ffactorio: $25 \times 4 = 100$

A	Ll
-20	100

$25x^2 - 10x - 10x + 4 < 0$

$5x(5x-2) - 2(5x-2) < 0$

$(5x-2)(5x-2) < 0$

$(5x-2)^2 < 0$

Does dim gwerth real a phositif ar gyfer x fel bod $(5x-2)^2$ yn llai na sero. (Mae sgwario unrhyw werth real yn rhoi rhif sy'n fwy na neu'n hafal i sero.) Felly rhaid bod $5x-2$ yn rhif cymhlyg (ddim yn real), sy'n golygu bod x yn gorfod bod yn rhif cymhlyg. Mae hyn yn wrthddywediad ir dybiaeth bod x yn real a phositif, felly rhaid bod $25x + \frac{4}{x} \geq 20$

ar gyfer gwerthoedd real a phositif o x.

C4 Mai 2014

10) Dangoswch fod gwerth neu o x fel bod

$$\left| 4x + \frac{1}{x} \right| < 4$$

Yna yn sgwario y ddau ochr cawn

$$\left(\left| 4x + \frac{1}{x} \right| \right)^2 < 4^2$$

$$16x^2 + 8 + \frac{1}{x^2} < 16$$

$$16x^2 + \frac{1}{x^2} - 8 < 0$$

Yna yn factorio;

$$\left(4x - \frac{1}{x} \right)^2 < 0$$

Nid yw hyn yn bosib oherwydd nid oes modd i sgwar rhif neu fod yn negatif.