CBAC
WJEC

MATHEMATEG

Mathemateg Bur
Uned P1

Dr H Thomas

SAFON UG/UWCH

Cyhoeddwyd gan Uned Iaith Genedlaethol Cymru,
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru,
245 Rhodfa'r Gorllewin,
Caerdydd
CF5 2YX

Mae Uned Iaith Genedlaethol Cymru
yn rhan o WJEC CBAC Cyf.,
cwmni a gyfyngir gan warant
ac a reolir gan awdurdodau unedol Cymru.

Mathemateg Safon UG/Uwch CBAC
Mathemateg Bur
Uned P1

Cyhoeddwyd dan nawdd Cynllun Cyhoeddiadau
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru

Cyhoeddwyd gyntaf 2001

Argraffwyd gan gwmni Hackman Cyf.,
Cwm Clydach, Tonypandy, Rhondda CF40 2XX

ISBN: 1 86085 489 3

RHAGYMADRODD

Dyma'r gyntaf o dair cyfrol a fydd yn cwmpasu gyda'i gilydd y rhan fwyaf o'r dulliau mathemateg sy'n angenrheidiol ar gyfer cwrs modylol Safon Uwch mewn mathemateg. Yn benodol, seilir y cynnwys ar Faes Llafur P1 Cyd-bwyllgor Addysg Cymru a gyflwynwyd ym mis Medi 2000.

Cymerir yn ganiataol y bydd y darllenydd wedi cwblhau'n llwyddiannus gwrs TGAU mewn mathemateg ac y bydd cyfrifiannell wrth law sy'n cynnwys ffwythiannau mathemategol.

Ar derfyn y gyfrol ceir chwech o bapurau adolygu. Credir y dylai'r profion hyn gael eu cwblhau mewn oddeutu awr o amser gan fyfyrwyr sy'n barod i sefyll eu harholiadau Safon Uwch.

Gallai darllenwyr hepgor Adrannau 2.2 a 2.5 gan y dylai'r deunydd fod wedi ei drin ar gyfer TGAU. Gellir hefyd hepgor y deunydd a geir yn Adran 3.2 heb i hynny beri anawsterau ym Mhennod 3.

CYNNWYS

Tudalen

Pennod 1

Indecsau, Syrdiau a Pholynomialau

1.1 Indecsau

Boed i b gynrychioli unrhyw rif. Ystyriwch yr enghreifftiau canlynol.

Enghraifft 1.1

$$\begin{aligned} b^4 \times b^3 &= (b \times b \times b \times b) \times (b \times b \times b) \\ &= b \times b \times b \times b \times b \times b \times b \\ &= b^7 = b^{4+3}. \end{aligned}$$

Gellir cysylltu'r ffactorau trwy ddileu'r cromfachau.

Enghraifft 1.2

$$\begin{aligned} b^8 \div b^3 &= \frac{b^8}{b^3} \\ &= \frac{b \times b \times b \times b \times b \times b \times b \times b}{b \times b \times b} \\ &= b \times b \times b \times b \times b = b^5 \end{aligned}$$

Gellir canslo 3 *b* gan adael 5 *b* ar dop y ffracsiwn.

ac felly $b^8 \div b^3 = b^{8-3}.$

Enghraifft 1.3

$$\begin{aligned} b^3 \div b^5 &= \frac{b^3}{b^5} = \frac{b \times b \times b}{b \times b \times b \times b \times b} \\ &= \frac{1}{b \times b} = \frac{1}{b^2}. \end{aligned}$$

Os dywedwn fod $\frac{1}{b^2}$ yn b^{-2} yna

$$b^3 \div b^5 = b^{3-5}.$$

Enghraifft 1.4

$$\begin{aligned} (b^2)^3 &= (b^2) \times (b^2) \times (b^2) \\ &= b^2 \times b^2 \times b^2 \\ &= b^{2+2+2} = b^6 = b^{3\times 2}. \end{aligned}$$

ffactor b^2 3 gwaith

Mae'r ymarferion hyn yn darlunio'r rheolau canlynol ar gyfer indecsau pan fo m ac n yn gyfanrifau positif m ac n :-

$$\boxed{\begin{aligned} b^{\mathrm{m}} \times b^{\mathrm{n}} &= b^{\mathrm{m+n}} \\ b^{\mathrm{m}} \div b^{\mathrm{n}} &= b^{\mathrm{m-n}} \\ (b^{\mathrm{m}})^{\mathrm{n}} &= b^{\mathrm{mn}} \end{aligned}}$$

Rheolau I

***m, n* yn gyfanrifau positif**

Gellir defnyddio'r rheolau hyn hyd yn oed pan fo llythrennau yn ogystal â rhifau yn bresennol.

Enghraifft 1.5

(a) $3a^2b^2 \times 4a^3b^6 \times 2a^4b^3 = 3 \times 4 \times 2 \times a^{2+3+4}\, b^{2+6+3}$
$= 24a^9b^{11}.$

(b) $(3b^2a^3)^2 \times 6b^3a^2 \times 4b^2a = 3^{1\times 2}\, b^{2\times 2}a^{3\times 2} \times 6b^3a^2 \times 4b^2a$
$= 3^2 \times 6 \times 4 \times b^{4+3+2}\, a^{6+2+1}$
$= 216b^9a^9.$

Gellir defnyddio'r ail o blith Rheolau I er mwyn rhoi ystyr i b^0.

Enghraifft 1.6

$$\frac{b^6}{b^6} = b^{6-6} = b^0.$$

Ond $\dfrac{b^6}{b^6} = 1.$

Mae unrhyw beth a rennir ag ef ei hun yn rhoi 1, heblaw 0/0.

Felly $\boxed{b^0 = 1, \text{ beth bynnag fo } b.}$ Rheol II

Gellir estyn Rheolau I i achosion lle mae'r indecsau yn rhifau cymarebol, yn bositif ac yn negatif.

Enghraifft 1.7

Boed i $b^x = \sqrt{b}$.

Yna mae $b^x \times b^x = b$.

A bwrw bod y gyntaf o blith Rheolau I yn ddilys, ceir bod

$b^{2x} = b^1$

ac felly mae $2x = 1$ ac mae $x = \frac{1}{2}$.

Rhif cymarebol yw rhif ar ffurf *p/q* lle mae *p* a *q* yn gyfanrifau.

Felly $\boxed{\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}.}$ Rheol III

Yn yr un modd ar gyfer unrhyw gyfanrif <u>positif</u> n,

$\boxed{\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}.}$ Rheol III$'$

Yn fwy cyffredinol, ar gyfer unrhyw gyfanrif positif neu negatif m ac unrhyw gyfanrif positif n, gan fod $\underbrace{b^{\frac{m}{n}} \times b^{\frac{m}{n}} \times \ldots \times b^{\frac{m}{n}}}_{(n \text{ ffactor})} = b^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}} = b^{\frac{m}{n}.n} = b^m,$

gellir ysgrifennu $\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}.$ (i)

Gellir canfod ffurf arall ar $b^{\frac{m}{n}}$, oherwydd bod

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^m = (b^{\frac{1}{n}})^m = \underbrace{b^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times b^{\frac{1}{n}}}_{(m \text{ ffactor})}$$

$$= b^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

$$= b^{\frac{m}{n}}$$

a bwrw bod Rheol I yn gymwys

Felly $b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m.$ (ii)

Gellir cyfuno (i) ac (ii) gan roi

$$\boxed{b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m \text{ neu } \sqrt[n]{b^m}} \quad \text{Rheol IV}$$

Gellir dehongli indecsau negatif yn hawdd fel cilyddion priodol.

Enghraifft 1.8
A bwrw bod b^{-4} yn bodloni

$$b^{-4} \times b^4 = b^{-4+4} = b^0 = 1,$$

gellir dehongli b^{-4} fel $\dfrac{1}{b^4}$.

Yn yr un modd, $\qquad b^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

Yn fwy cyffredinol, ar gyfer unrhyw rifau cymarebol $\dfrac{k}{l}$,

$$\boxed{b^{-\frac{k}{l}} = \frac{1}{b^{\frac{k}{l}}}} \quad \text{Rheol V}$$

Gellir crynhoi'r rheolau fel a ganlyn.

Rheolau I
$$\boxed{\begin{aligned} b^k \times b^l &= b^{k+l} \\ b^k \div b^l &= b^{k-l} \\ (b^k)^l &= b^{kl} \end{aligned}}$$

k ac l yn gyfanrifau neu yn gymarebol, yn bositif neu yn negatif

gyda Rheol II, Rheol III, Rheol IV, Rheol V
$$\boxed{\begin{aligned} b^0 &= 1 \\ \sqrt[n]{b} &= b^{\frac{1}{n}} \\ b^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{b^m} \\ b^{\frac{m}{n}} &= \left(\sqrt[n]{b}\right)^m \\ b^{-\frac{k}{l}} &= \frac{1}{b^{\frac{k}{l}}} \end{aligned}}$$

m yn gyfanrif positif neu negatif, n yn gyfanrif positif

Ymarferion 1.1

1. Ysgrifennwch gydag indecsau positif:-

(i) a^{-2} (ii) $x^{-\frac{1}{2}}$ (iii) $(b^{-3})^2$ (iv) $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-1}$ (v) $\left(\dfrac{1}{b}\right)^{-2}$.

2. Symleiddiwch (i) $a^3 \div a^2$ (ii) $b^6 \div b^{-2}$ (iii) $x^3 \div (-x)^4$ (iv) $(16a^4b^6)^{\frac{1}{2}}$

(v) $(4x^2y^5)^{\frac{3}{2}} \div 16xy^{\frac{1}{2}}$ (vi) $(64)^{\frac{1}{3}}$ (vii) $(8)^{-\frac{1}{3}}$ (viii) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$ (ix) $\left(\dfrac{36}{64}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

3. Ysgrifennwch yn eu ffurfiau symlaf:
(i) ail israddd positif $49a^2b^6$ (ii) trydydd israddd $64x^9y^6$

4. Os yw $x = 64^{\frac{3}{2}}$ ac $y = 4^{-4}$ darganfyddwch xy^2 heb ddefnyddio cyfrifiannell.

Yn aml mae angen defnyddio'r rheolau i symleiddio mynegiadau mwy cymhleth.

Enghraifft 1.9

Symleiddiwch $\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}} - 2(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{(x+2)^{\frac{1}{2}}}$.

Nawr $\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}} - 2(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{(x+2)^{\frac{1}{2}}} \times \dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - 2(x+2)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{(x+2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(x+2)^1 - 2(x+2)^0}{(x+2)^1}$$

$$= \frac{x+2-2}{x+2} = \frac{x}{x+2}.$$

Nid yw lluosi â $\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^{\frac{1}{2}}} = 1$ yn newid gwerth y mynegiad ond mae'n dileu'r indecs negatif

Ymarferion 1.2

Symleiddiwch y mynegiadau canlynol:

(i) $\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - x^2(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+1}$ (ii) $\dfrac{3(a+1)^{\frac{1}{3}} - a(a+1)^{-\frac{2}{3}}}{(a+1)^{\frac{1}{3}}}$

(iii) $\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}(b^2+2)^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}(b^2+2)^{-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}(b^2+2)^{\frac{3}{2}}}$ (iv) $\dfrac{(x+y)^{\frac{1}{2}} - (x-y)^{-\frac{1}{2}}}{x^2-y^2-1}$

(v) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}$ (vi) $\dfrac{(2x^2+3)^{\frac{4}{5}} - 2x^2(2x^2+3)^{-\frac{1}{5}}}{(2x^2+3)^{\frac{4}{5}}}$.

1.2 Syrdiau

Cyflwynir syrdiau trwy nifer o ymarferion.

Ymarferion 1.3

Darganfyddwch yr ail israddau canlynol, gan ddefnyddio'r allwedd $\sqrt{}$ ar eich cyfrifiannell lle bo angen.

(a) $\sqrt{4}$, (b) $\sqrt{36}$, (c) $\sqrt{12.25}$, (d) $\sqrt{3}$, (e) $\sqrt{13}$.

Mae gwahaniaeth rhwng ymarferion (a), (b), (c) ac ymarferion (d), (e).

Mae gan yr achosion cyntaf atebion union: 2, 6, 3.5; tra nad oes gan achosion (d), (e) atebion union : 1.732050808 . . . and 3.605551275 . . .
Mae'r cyfrifiannell wedi rhoi atebion (d), (e) i 10 ffigur ond nid yw'r atebion hyn yn union. Gelwir rhifau megis $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$, na ellir eu cyfrifo yn union, yn **syrdiau**. Mae syrdiau yn digwydd yn aml mewn cyfrifiadau ac mae rhwyddineb wrth eu trin yn aml yn fuddiol.

Enghraifft 1.10

(a) Mynegwch $\sqrt{54}$ fel y swrd symlaf posibl.

$$\sqrt{54} = \sqrt{9\times 6} = \sqrt{9}\times\sqrt{6} = 3\sqrt{6}.$$

(b) Mynegwch fel ail isradd rhif unigol:

(i) $4\sqrt{5}$ (ii) $3\sqrt{3}$ (iii) $6\sqrt{2}$

(i) $4\sqrt{5} = \sqrt{16}\times\sqrt{5} = \sqrt{16\times 5} = \sqrt{80}$.

(ii) $3\sqrt{3} = \sqrt{9}\times\sqrt{3} = \sqrt{9\times 3} = \sqrt{27}$.

(iii) $6\sqrt{2} = \sqrt{36}\times\sqrt{2} = \sqrt{72}$.

(c) Ehangwch a symleiddiwch $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$.

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right) &= 2\times 3 - 2\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{6}\times\sqrt{3}-6\\ &= 6-2\sqrt{18}+\sqrt{18}-6\\ &= -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Noder bod $\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 3$.

(d) Symleiddiwch y mynegiad canlynol trwy ddileu pob swrd o'r enwadur:-

$$\frac{5-\sqrt{3}}{9+2\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{5-\sqrt{3}}{9+2\sqrt{3}} &= \frac{(5-\sqrt{3})(9-2\sqrt{3})}{(9+2\sqrt{3})(9-2\sqrt{3})}\\ &= \frac{45-10\sqrt{3}-9\sqrt{3}+6}{81-18\sqrt{3}+18\sqrt{3}-12}\\ &= \frac{51-19\sqrt{3}}{69} = \frac{17}{23}-\frac{19\sqrt{3}}{69}.\end{aligned}$$

Eto nid yw lluosi ag 1 yn effeithio ar werth y mynegiad.

Yn fwy cyffredinol, gellir dileu $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ o unrhyw enwadur trwy luosi'r mynegiad gwreiddiol ag

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Trwy ddileu swrd o enwadur dywedwn ein bod yn **cymarebu** y mynegiad.

Enghraifft 1.11

Cymarebwch y mynegiadau canlynol (i) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{5}{\sqrt{8}}$

(i) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5+\sqrt{10}-\sqrt{10}-2}$

$= \dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$.

(ii) $\dfrac{5}{\sqrt{8}} = \dfrac{5}{\sqrt{8}}\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \dfrac{5\sqrt{8}}{8}$.

Ymarferion 1.4

1. Mynegwch yn nhermau'r syrdiau symlaf posibl:
   (i) $\sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{18}$ (iii) $\sqrt{72}$ (iv) $\sqrt{180}$ (v) $\sqrt{250}$

2. Symleiddiwch
   (i) $\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ (ii) $\sqrt{2}(5-2\sqrt{2})$ (iii) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
   (iv) $(2\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)$ (v) $(3\sqrt{6}-2)^2$ (iv) $(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)$.

3. Symleiddiwch y mynegiadau canlynol trwy gymarebu'r enwadur:
   (i) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{18}}$ (iii) $\dfrac{3}{\sqrt{54}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$
   (vi) $\dfrac{5}{\sqrt{5}-2}$ (vii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (viii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$.

1.3 Ffwythiannau polynomaidd

Gyda mynegiadau megis (i) x^2+2x-3, (ii) $\sqrt{x^2+2}$, (iii) $\dfrac{1}{x+3}$, gellir darganfod eu gwerthoedd trwy roi rhif yn lle x.

Enghraifft 1.12

Darganfyddwch y gwerthoedd yn (i), (ii) a (iii) pan fydd $x = -1$:-

(i) $(-1)^2+2(-1)-3 = 1-2-3 = -4$.

(ii) $\sqrt{(-1)^2+2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$
neu 1.7321 i 4 lle degol.

(iii) $\dfrac{1}{(-1)+3} = \dfrac{1}{-1+3} = \dfrac{1}{2} = 0.5$.

Defnyddiwch gromfachau lle bo'r rhifau yn negatif.

Gelwir mynegiadau fel y rhain sy'n cymryd gwerthoedd pan roddir gwerthoedd yn lle x yn **ffwythiannau**. Cawn weld llawer o enghreifftiau o ffwythiannau eto, ond ar hyn o bryd byddwn yn ystyried rhai fel x^2+2x-3 yn unig.

Ysgrifennir $f(x) = x^2+2x-3$.

Yna gellir crynhoi canlyniad enghraifft (i) fel bod $f(-1) = -4$.

Eto, $f(2) = 2^2+2(2)-3 = 4+4-3 = 5$.

Mae'r ffwythiannau arbennig a ystyrir yma yn cynnwys termau sy'n cynnwys indecsau positif x a/neu rifau. Gelwir y ffwythiannau hyn yn **bolynomialau**. Indecs positif x sy'n diffinio gradd y polynomial.

Enghraifft 1.13
Mae $x^3 - 3x^2 + 4$, $x^7 - 6x + 4$, ac x^5 yn bolynomialau gradd 3, 7, 5 yn ôl eu trefn ond nid yw

$$\sqrt{x+2}, \quad \frac{1}{2x^2+4x+5}, \quad x^2+\frac{1}{x}-3 \quad \text{na} \quad 4$$

yn bolynomialau.

Mae rhai yn ystyried fod $4 = 4x^0$ yn bolynomial, ond mae angen pweroedd positif yma.

1.4 Adio a thynnu polynomialau

Wrth adio (neu dynnu) polynomialau sy'n cynnwys yr un llythyren, ceir y canlyniad trwy adio (neu dynnu) termau cyfatebol. Yn aml mae'r ateb yn bolynomial ond nid bob amser (gall fod yn rhif pur).

Enghraifft 1.14

Adiwch $\quad \mathrm{f}(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 9x - 7$

a $\quad \mathrm{g}(x) = x^3 - 7x^2 - 9x + 2.$

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x) &= x^4 + (3+1)x^3 + (-7+2)x^2 + (9-9)x - 7 + 2 \\ &= x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 5, \end{aligned}$$

sef polynomial gradd 4.

Enghraifft 1.15

Tynnwch $\quad \mathrm{f}(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 9$

o $\quad \mathrm{g}(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 4.$

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(x) - \mathrm{f}(x) &= x^3 + 3x^2 - 7x + 4 \\ &\quad - (x^3 + 3x^2 - 7x + 9) \\ &= (1-1)x^3 + (3-3)x^2 + (-7+7)x + 4 - 9 \\ &= -5\text{, nad yw'n bolynomial.} \end{aligned}$$

Mae defnyddio cromfachau wrth dynnu yn helpu.

1.5 Lluosi polynomialau

Gellir lluosi dau bolynomial trwy luosi pob term yn yr un cyntaf â phob term yn yr ail.

Enghraifft 1.16
Lluoswch $3x^2 - 2x + 5$ a $2x^3 - 6x^2 + 4x - 9$.
Mae'n gyfleus cyflwyno cromfachau wrth luosi polynomialau.

$$\begin{aligned} &(3x^2 - 2x + 5)(2x^3 - 6x^2 + 4x - 9) \\ &\quad = 6x^5 - 18x^4 + 12x^3 - 27x^2 - 4x^4 + 12x^3 \\ &\qquad - 8x^2 + 18x + 10x^3 - 30x^2 + 20x - 45 \\ &\quad = 6x^5 - 22x^4 + 34x^3 - 65x^2 + 38x - 45. \end{aligned}$$

Lluoswch y termau yn yr ail gromfach ag (i) $3x^2$, (ii) $-2x$, (iii) 5.

Enghraifft 1.17

Lluoswch $2x + 1$, $3x + 2$, $x - 3$.

$$\begin{aligned}(2x+1)(3x+2)(x-3) &= (6x^2+4x+3x+2)(x-3)\\ &= (6x^2+7x+2)(x-3)\\ &= 6x^3-18x^2+7x^2-21x+2x-6\\ &= 6x^3-11x^2-19x-6.\end{aligned}$$

Lluoswch y ddau derm cyntaf i ddechrau.

Ymarferion 1.5

Lluoswch y canlynol :

(i) $(x+4)(x-4)$ (ii) $(2x+1)(x+2)$ (iii) $(x+1)(x+2)(2x-3)$

(iv) $(x^2+4x+9)(x^2-3x-2)$ (v) $(3x-4y)(3x+5y)$

(vi) $(x+2)^2$ (vii) $(3x-2)^2$ (viii) $(x+3)^3$ (ix) $(x-1)^2(x+2)$.

1.6 Ffactorau

Uchod rydym wedi cyfuno nifer o bolynomialau trwy luosi a chael polynomial yn ganlyniad. Y broblem a ystyrir nawr yw'r cyfdro: pa bolynomialau y mae angen eu lluosi â'i gilydd er mwyn cael polynomial a roddir? Efallai, wrth gwrs, y bydd mwy nag un ateb.

Enghraifft 1.18

Gellir ysgrifennu $6x^3 - 11x^2 - 19x - 6$

fel $(2x+1)(3x^2-7x-6)$

neu $(2x+1)(3x+2)(x-3)$ ymhlith atebion eraill, er enghraifft.

Gelwir dadelfeniad polynomial i bolynomialau gradd is yn **ffactorio**; a gelwir y polynomialau cydrannol yn **ffactorau**.

Ystyrir yma ffactorio polynomialau gradd gyntaf (llinol) ac ail radd (cwadratig). Weithiau, gelwir polynomialau ail radd (cwadratig) yn **ffwythiannau cwadratig**.

Enghraifft 1.19

Ffactoriwch $3x - 9$.

Yn yr achos hwn mae 3 yn ffactor sy'n gyffredin i'r ddau derm ac felly

$$3x - 9 = 3(x-3).$$

Cymerwch bob ffactor cyffredin i ystyriaeth.

Enghraifft 1.20

Ffactoriwch $4x^2 - 16x$.

Mae gan y ddau derm yma ffactor cyffredin, sef $4x$.

Felly $4x^2 - 16x = 4x(x-4)$.

Yn y ddwy enghraifft ddiwethaf, gwnaed y ffactorio trwy sylwi bod gan y ddau derm ffactorau cyffredin. Pan fo gan y mynegiad cwadratig 3 therm, nid yw ffactorio trwy ddefnyddio ffactorau cyffredin yn bosibl.

Enghraifft 1.21
Ffactoriwch $x^2 + 8x + 12$.

Yn yr achos hwn nid oes ffactorau sy'n gyffredin i bob term. Os $x + a$, $x + b$ yw'r ffactorau, y lluoswm yw

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Ceir y lluoswm $\quad x^2 + 8x + 12$
os yw $\quad a + b = 8,$
ac $\quad ab = 12.$

Felly mae angen dau rif a, b, gyda'u lluoswm (ab) yn 12 a'u swm ($a + b$) yn 8.
Mae'n hawdd gweld mai 2 a 6 yw'r rhifau ac felly

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6).$$

Enghraifft 1.22
Ffactoriwch $x^2 - 8x - 48$.

Yma mae $ab = -48$ ac $a + b = -8$.
Mae angen dau ffactor ar gyfer -48 sydd yn adio i -8.
Gan fod lluoswm y ddau rif yn negatif mae angen un ffactor positif, ac un ffactor negatif ar gyfer -48.

Rhaid i'r ffactorau hyn adio i −8.

Ysgrifennwch ffactorau −48.

	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4
	−48	48	−24	24	−16	16	−12	12
Adiwch	−47	47	−22	22	−13	13	−8	8

Mae'r ffactorau 4 a −12 yn addas.
Felly mae $\quad x^2 - 8x - 48 = (x + 4)(x - 12).$

Gellir cyflymu'r dull.

Enghraifft 1.23
Ffactoriwch $x^2 - 19x + 48$.

Mae angen dau ffactor ar gyfer +48 sy'n adio i −19. Mae'r ddau ffactor yn negatif.
Fel o'r blaen, ysgrifennwch ffactorau +48.

	−1	−2	−3
	−48	−24	−16
Adiwch	−49	−26	−19
			Arhoswch yma

Felly $x^2 - 19x + 48 = (x - 3)(x - 16)$.
Mae'r dull yn fwy cymhleth pan nad yw cyfernod x^2 yn y cwadratig yn hafal i 1.

Enghraifft 1.24
Ffactoriwch $6x^2 + 7x + 2$.

Rhaid darganfod *a, b, c, d.*

Os yw $6x^2 + 7x + 2 = (ax + b)(cx + d)$
yna $6x^2 + 7x + 2 \equiv acx^2 + (ad + bc)x + bd$.
Er mwyn i'r ddau fynegiad gyfateb, yna mae'n rhaid bod

$$ac = 6, \quad bd = 2 \text{ ac } ad + bc = 7.$$

***abcd* = 12**

Noder bod $\quad 12 = \underset{(\text{cyfernod } x^2)}{6} \times \underset{(\text{cysonyn})}{2}.$

Nawr, *ad*, *bc* yw ffactorau *abcd* (12) ac maent yn adio i 7.
I gychwyn, ceisiwn ddarganfod dau ffactor i 12 sy'n adio i 7, sef darganfod *ad* a *bc* mewn geiriau eraill. Mae'n hawdd gweld mai + 3 a + 4 yw'r ffactorau.

Holltwch y 7*x* yn 3*x* + 4*x*.

$$\begin{aligned} \text{Felly} \quad 6x^2 + 7x + 2 &= 6x^2 + 3x + 4x + 2 \\ &= 3x\underbrace{(2x + 1) + 2(2x + 1)}_{\text{ffactor cyffredin}} \\ &= (3x + 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

Gan grynhoi, gwelwn mewn gwirionedd mau'r dull yw'r canlynol :-

Dull

Er mwyn ffactorio cwadratig mewn *x* :-

(i) Lluoswch gyfernod x^2 (6) â'r cysonyn (2).
(ii) Darganfyddwch ddau ffactor canlyniad (i) sy'n adio i gyfernod y term *x* (3 + 4 = 7).
(iii) Holltwch y term *x* yn ddau derm, i gael cyfanswm o bedwar term.
(iv) Yn gyntaf, ffactoriwch y pedwar term yn barau ac yna grwpiwch y ffactorau.

Efallai y bydd llythyren arall yn y cwadratig, wrth gwrs.

Enghraifft 1.25
Ffactoriwch $5y^2 - 8y - 4$.
Cwadratig mewn *y* yw'r mynegiad.

Cam (i)

Nawr $\quad \underset{(\text{cyfernod } y^2)}{5} \times \underset{(\text{cysonyn})}{-4} = -20.$

Mae angen dau ffactor –20 sy'n adio i –8 . Mae'r naill ffactor yn bositif, a'r llall yn negatif.
Dyma ffactorau –20 :-

Cam (ii)

	1	–1	2	
	– 20	20	– 10	
Adiwch	– 19	19	– 8	ac ati.

Felly, y ffactorau yw 2 a –10.

Cam (iii)

$$\begin{aligned} \text{Yna} \quad 5y^2 - 8y - 4 &= 5y^2 + 2y - 10y - 4 \\ &= y(5y + 2) - 2(5y + 2) \\ &= (y - 2)(5y + 2). \end{aligned}$$

Cam (iv)

Enghraifft 1.26
Ffactoriwch $6x^2 - 16x + 10$.

Nawr $6 \times 10 = 60$ ac mae angen dau ffactor i 60 sy'n adio i -16. Felly mae'r ddau ffactor i 60 yn negatif. Dyma ffactorau:

	-1	-2	-3	-4	-5	-6
	-60	-30	-20	-15	-12	-10
Adiwch	-61	-32	-23	-19	-17	-16

Nid oes angen rhestru'r posibiliadau i gyd os gallwch weld yr ateb.

$$\begin{aligned} \text{Yna}\quad 6x^2 - 16x + 10 &= 6x^2 - 6x - 10x + 10 \\ &= 6x(x-1) - 10(x-1) \\ &= (6x-10)(x-1) \ \text{ neu } \ 2(3x-5)(x-1). \end{aligned}$$

Y nodwedd bwysig yn y dull a ddefnyddir yn enghreifftiau 1.25 ac 1.26 yw y gellir hollti'r term yn y canol yn ddau derm. Dylid nodi nad yw'n bwysig ym mha drefn yr holltir y term. Felly, wrth gyfeirio at enghraifft 1.25, dyweder, gellir ysgrifennu hefyd

$$\begin{aligned} 5y^2 - 8y - 4 &= 5y^2 - 10y + 2y - 4 \\ &= 5y(y-2) + 2(y-2) = (5y+2)(y-2) \end{aligned}$$

sef yr ateb a gafwyd o'r blaen pan oedd y ffactorau yn y drefn arall.

Ymarferion 1.6

1. Ffactoriwch

   (i) $x^2 + 5x + 4$ (ii) $x^2 - 5x + 4$ (iii) $x^2 - 3x - 4$
   (iv) $x^2 + 23x + 90$ (v) $x^2 - 23x + 90$ (vi) $x^2 + 13x - 90$ (vii) $l^2 + l - 6$
   (viii) $l^2 - l - 6$ (ix) $p^2 + 2p - 63$ (x) $x^2 - 3x - 28$.

2. Ffactoriwch

   (i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $3t^2 + 7t + 4$ (iii) $4x^2 - 15x - 4$
   (iv) $4x^2 - 7x - 2$ (v) $4x^2 - 15x - 25$ (vi) $6x^2 - x - 2$ (vii) $3y^2 - 5y - 2$
   (viii) $8y^2 - 30y + 7$ (ix) $10x^2 - 9x - 9$ (x) $7x^2 + 17x - 12$.

Pennod 2

Datrys Hafaliadau

Mae llawer o waith mathemategol yn ymwneud â datrys hafaliadau.

2.1 Hafaliadau ac unfathiannau

Ar sail ein gwybodaeth am luosi cromfachau, mae'n hawdd gweld bod

$$(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15.$$

Mae'r canlyniad yn wir am bob gwerth x.
Er mwyn pwysleisio hyn, ysgrifennir

$$(x+3)(x+5) \equiv x^2 + 8x + 15,$$

ac mae'r llinell ychwanegol yn $\equiv$ yn nodi mai unfathiant yw'r berthynas a roddir. Unfathiannau eraill yw

$$3(x+5) \equiv 3x^2 + 15$$

ac

$$x(x-3) \equiv x^2 - 3x.$$

Diffiniad
Unfathiant yw perthynas sy'n cynnwys llythyren ac sy'n ddilys pa rif bynnag a roddir yn lle'r llythyren.

Nid yw'r berthynas $x^2 + 8x + 15 = 2x + 7$ yn unfathiant : nid yw'n ddilys oni bai fod gwerthoedd penodol yn cael eu rhoi yn lle x. Felly os yw $x = -2$, mae'r ddwy ochr yn hafal i 3 ac os yw $x = -4$, mae'r ddwy ochr yn hafal i -1. Mewn geiriau eraill, mae'r berthynas yn ddilys pan fo $x = -2$ neu -4.
Fodd bynnag, os yw $x = 1$, gwerth yr ochr chwith yw 24 a gwerth yr ochr dde yw 9. Felly nid yw'r berthynas yn ddilys pan fo $x = 1$ ac felly ni all fod yn unfathiant.
(Cofiwch fod unfathiant yn wir ar gyfer **pob** gwerth x.)
Eto nid yw'r berthynas

$$x + 9 = 2x + 5$$

yn ddilys oni bai fod $x = 4$, pan fydd y ddwy ochr yn hafal i 13.

Gwiriwch nad yw'n ddilys pan fo $x = 1$.

Mae'r perthnasoedd diwethaf hyn yn enghreifftiau o **hafaliadau**.

Diffiniad
Hafaliad yw perthynas sy'n cynnwys llythyren (llythrennau) sydd ond yn ddilys pan roddir gwerthoedd penodol i'r llythyren (llythrennau).

Ymarferion 2.1

Dosbarthwch y perthnasoedd canlynol yn unfathiannau neu hafaliadau.

(i) $(x+3)(x^2+3x+4) = x^3+6x^2+13x+12$

(ii) $2x-7 = x+3$

(iii) $x^2 = -3x-2$

(iv) $3x(x+6) = 3x^2+18x$

(v) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

(vi) $3x+2(4y+5x) = 3(2x+10y)$

(vii) $(x+1)^2 = x^2+3x+2$

(viii) $(x-1)(x+1) = x^2-1$

Byddwn yn ymwneud â hafaliadau yn y bennod hon.
Os yw rhif x o'r fath fel bod

$$6x = 54$$

nid yw'n anodd gweld bod yr hafaliad yn ddilys pan fydd $x = 9$, ac nad yw'n ddilys gydag unrhyw werth arall x. Dywedir bod yr hafaliad yn cael ei fodloni gan $x = 9$ neu mai 'datrysiad' yr hafaliad yw $x = 9$. Wrth benderfynu bod $x = 9$ yn bodloni'r hafaliad, h.y. ein bod wedi darganfod gwerth x, dywedwn ein bod wedi 'datrys' yr hafaliad.

Diffiniad
Mae darganfod y gwerth(oedd) i'w rhoi i'r llythyren (llythrennau) er mwyn i berthynas fod yn ddilys yn cael ei alw yn **ddatrys yr hafaliad**.

Byddwn yn datrys gwahanol fathau o hafaliadau yn y bennod hon. Cyn gwneud hynny, mae'n werth nodi rhai o'r rheolau algebraidd a all ein cynorthwyo.

Rheolau Trin a Thrafod i'w defnyddio gyda hafaliadau
Yn yr adran ganlynol, mae a, b, c, d yn rhifau real.

(i) Os $ba = bc$ yna $a = c$; h.y. gellir rhannu'r ddwy ochr â'r un rhif; mae rheol debyg ar gyfer lluosi.

$2a = 6$
$a = 6/2 = 3$
$c/3 = 4$ ac felly
$c = 4 \times 3 = 12$

(ii) Os $a + c = a + d$ yna $c = d$;
h.y. gellir tynnu'r un rhif o'r ddwy ochr.
Mae rheol debyg ar gyfer adio.

$a + 3 = 6$
$a = 6 - 3 = 3$
$b - 4 = 5$
$b = 5 + 4 = 9$

(iii) Os yw $ab = 0$ yna naill ai mae $a = 0$ neu mae $b = 0$ neu mae'r ddau yn sero.

Serch hynny,
os yw $ab = 6$
nid yw'n dilyn fod
$a = 6$ na $b = 6$.

(iv) Mae $a(b+c) = ab + ac$ ac mae $-d(a-b) = -da + db$.

2.2 Hafaliadau llinol

Y math symlaf o hafaliad yw'r hafaliad **llinol** sydd â llythrennau ar eu pen eu hunain ac i'r gradd o un. Dyma ddwy enghraifft i ddangos dull o'u datrys.

Enghraifft 2.1

Datryswch $2(x-1) = 6(x-5) - 2(x-3)$

Dilëwch y cromfachau gan nodi unrhyw newidiadau yn yr arwydd (Rheol (iv))

$$2x - 2 = 6x - 30 - 2x + 6$$

ac felly $\quad 2x - 2 = 4x - 24.$

Casglwch bob term sy'n cynnwys x i'r naill ochr, a phob term arall i'r ochr arall. Mae Rheol (ii) yn ein galluogi i wneud hyn trwy adio $-2x$ a $+24$ at y ddwy ochr :

$\therefore \quad -2 + 24 = 4x - 2x.$

$\therefore \quad 22 = 2x.$

$\therefore \quad x = \dfrac{22}{2} = 11 \quad$ (Rheol (i))

Enghraifft 2.2

Mewn cinio clwb roedd 10 yn fwy o aelodau nag o westeion. Talodd yr aelodau £7.00, talodd y gwesteion £5.00 a chyfanswm y taliadau oedd £310. Faint o aelodau a gwesteion oedd yn bresennol?

Boed i x ddynodi nifer yr aelodau. Felly nifer y gwesteion yw $x - 10$. Felly mae'r aelodau yn talu £$7x$ ac mae'r gwesteion yn talu £$5(x - 10)$, a chyfanswm y taliadau yw £310.

Felly $\quad 7x + 5(x - 10) = 310.$

$\therefore \quad 7x + 5x - 50 = 310 \quad$ (Rheol (iv))

$12x - 50 = 310.$

$12x = 310 + 50 = 360 \quad$ (Rheol (ii), trwy adio 50 at y ddwy ochr)

$\therefore \quad x = \dfrac{360}{12} = 30. \quad$ (Rheol (i))

$\therefore$ Nifer yr aelodau yw 30; nifer y gwesteion yw 20.

(Gwiriad: $7 \times 30 + 5 \times 20 = 310$.)

Ymarferion 2.2

1. Datryswch yr hafaliadau hyn:

   (i) $4(2y - 5) = 3(2y + 8)$

   (ii) $\dfrac{2a-5}{3} - \dfrac{3a-1}{4} = \dfrac{3}{2}$

   (iii) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{(1-x)}{5} = x - 22.$

Rheol (ii), cliriwch ffracsiynau trwy luosi â $3 \times 4 = 12$ trwy'r hafaliad.

Lluoswch â $7 \times 5 = 35$ trwy'r hafaliad.

2. Perimedr cae petryalog yw 500 m.
   Os yw un o'r ochrau cyfagos 20 m yn hirach na'r llall, darganfyddwch arwynebedd y cae.

3. Ar hyn o bryd, rwyf yn deirgwaith oedran fy mab. Bum mlynedd yn ôl roeddwn yn bedair gwaith oedran fy mab. Faint yw oedran fy mab nawr?

4. Mae llyfrwerthwr yn prynu 120 copi o lyfr clawr meddal. Mae'n gwerthu rhai ar y pris cyhoeddi, sef £5.50, a'r gweddill mewn arwerthiant am £2.50 yr un. Os £510 yw'r cyfanswm a gaiff am y llyfrau, darganfyddwch y nifer a werthwyd am bob pris.

5. Mae dyn yn cerdded o un pentref i bentref arall ar fuanedd cyfartalog o 4 km yr awr. Ar y ffordd yn ôl mae'n cerdded ar fuanedd cyfartalog o 5 km yr awr. Yr amser a gymerodd i deithio yn ôl ac ymlaen oedd 2 awr 15 munud. Darganfyddwch y pellter rhwng y ddau bentref.

6. Mae dau ddyn sy'n gweithio mewn ffatri yn ennill £180 a £244 yr wythnos. Penderfynwyd rhoi yr un faint o godiad cyflog i'r ddau fel bod y cyflog uchaf yn 4/3 o'r cyflog isaf. Faint oedd y codiad cyflog?

7. Mae bws yn cludo 28 teithiwr, rhai â thocynnau 80c a'r gweddill â thocynnau 95c. Os cyfanswm yr arian a dalwyd yw £25.85, sawl tocyn 95c a werthwyd?

2.3 Hafaliadau cwadratig

Gelwir hafaliad ar ffurf

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

lle mae a, b ac c yn rhifau real, yn hafaliad **cwadratig**.

Felly mae $2x^2 + 3x + 5 = 0$ a $4x^2 - 9x + 7 = 0$ yn hafaliadau cwadratig ond nid felly $2x + 9 = 0$ (hafaliad llinol yw hwnnw, wrth gwrs).

Gan eu bod yn hafaliadau, nid yw hafaliadau cwadratig yn ddilys oni bai fod gwerthoedd rhifiadol arbennig yn cael eu rhoi i x. Mewn gwirionedd, mae hafaliadau cwadratig yn ddilys gyda dau werth x ar y mwyaf.

Cyn gweithio trwy rai enghreifftiau, noder Rheol (iii) a roddwyd eisoes mewn nodiant gwahanol :-

Os yw $\alpha\beta = 0$, yna mae naill ai $\alpha = 0$ neu $\beta = 0$ neu mae α a β yn sero.

Enghraifft 2.3

Datryswch $2x^2 - 11x + 12 = 0$.

Mae'r ochr chwith yn ffactorio i

$$(2x - 3)(x - 4) = 0 \quad \text{(gwiriwch).}$$

Yna dan Reol (iii), $2x - 3 = 0$ neu $x - 4 = 0$.

Os yw $\alpha\beta = 0$ yna $\alpha = 0$ neu $\beta = 0$.

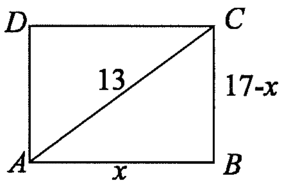
(Noder na all y ddwy gromfach fod yn hafal i sero ar yr un pryd.)

Felly $\quad 2x = 3$ ac felly $x = \dfrac{3}{2}$,

neu $\quad x - 4 = 0$ ac felly $x = 4$.

$\therefore$ y datrysiad yw $\quad x = \dfrac{3}{2}$ neu 4.

Enghraifft 2.4



Canlyniad Theorem Pythagoras yw bod y sgwâr ar groeslin petryal yn hafal i swm y sgwariau ar ddwy ochr gyfagos. Croeslin petryal arbennig yw 13 cm a swm hyd dwy ochr gyfagos yw 17 cm. Darganfyddwch werthoedd posibl x, sef hyd AB mewn cm, fel a ddangosir yn y diagram.

Yn ôl Theorem Pythagoras,

$$x^2 + (17 - x)^2 = 13^2.$$

$\therefore \quad x^2 + (17 - x)(17 - x) = 169$

ac felly $\quad x^2 + 289 - 34x + x^2 = 169.$

Trwy osod y termau mewn grwpiau, ceir dan Reol (i)

$$2x^2 - 34x + 120 = 0$$

neu $\quad x^2 - 17x + 60 = 0.$

Cofiwch rannu <u>pob</u> term â rhif.

Ar ôl ei ffactorio, mae hyn yn dod yn

$$(x - 5)(x - 12) = 0. \quad \text{(Gwiriwch.)}$$

$\therefore \quad x - 5 = 0$ neu $x - 12 = 0$

ac felly $\quad x = 5$ neu $x = 12.$

Mae $\alpha\beta = 0$ yn rhoi $\alpha = 0$ neu $\beta = 0$.

Pan nad yw'r cwadratig yn ffactorio, rydym yn **cwblhau'r sgwâr** yn gyntaf er mwyn datrys yr hafaliad.

Enghraifft 2.5

Datryswch yr hafaliad $x^2 + 3x + 1 = 0.$

Nid yw'r mynegiad yn ffactorio. Fodd bynnag, noder bod

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 1 &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

a gellir gwireddu hyn yn hawdd trwy luosi i ddiddymu'r cromfachau. Gelwir y dull arbennig hwn o ailysgrifennu hafaliad yn **gwblhau'r sgwâr**.

Felly dyma'r hafaliad:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0,$$

$\therefore \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

ac felly $\quad x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}},$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

Cofiwch fod gan unrhyw rif positif ddau ail isradd, + a −.

$\therefore \quad x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$ neu $-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ ar ffurf swrd,

neu $\quad x = -0.382$ neu -2.618, yn gywir i 3 lle degol.

Ymchwiliwn yn fanylach i'r broses o gwblhau'r sgwâr.
Nawr

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Noder bod $\frac{b}{2a}$ yn y cromfachau $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ yn hanner cyfernod x yn y cromfachau, a bod angen tynnu $\frac{b^2}{4a^2}$ oherwydd bod $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ yn cyflwyno term $\frac{b^2}{4a^2}$ wrth ehangu, a bod angen canslo'r term hwn.

Enghraifft 2.6

Datryswch yr hafaliad cwadratig

$$ax^2+bx+c = 0,$$

gan roi'r ateb yn nhermau a, b ac c.

Gallwch rannu â'r rhif a gan fod $a \neq 0$.

$$ax^2+bx+c = 0$$

neu

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0.$$

Wrth gwblhau'r sgwâr ceir fod

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = 0.$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore \quad x = -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

felly dyma'r ddau ddatrysiad

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Crynodeb

Rhoddir dau ddatrysiad

$$ax^2+bx+c = 0 \qquad (a\neq 0)$$

gan $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Y canlyniad hwn yw'r fformiwla gwadratig a gellir defnyddio'r fformiwla hon yn uniongyrchol er mwyn datrys hafaliadau cwadratig.

Gelwir datrysiadau hafaliad yn **wreiddiau** yr hafaliad.

Enghraifft 2.7

Datryswch yr hafaliadau cwadratig canlynol gan ddefnyddio'r fformiwla.

(i) $x^2 + 3x - 2 = 0$

(ii) $x^2 + 4.5x + 5.0625 = 0$

(iii) $2x^2 + 3x + 2 = 0$

(i) $x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad a=1,\ b=3,\ c=-2 \right)$$

ac felly dyma'r ddau wreiddyn:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \text{ a } \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$ ar ffurf syrdiau.

Ystyr 'gwreiddiau' yw 'datrysiadau'.

(ii) $x^2 + 4.5x + 5.0625 = 0.$

$$x = \frac{-4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 4(1)(5.0625)}}{2}$$

$a = 1, b = 4.5, c = 5.0625$

$$= \frac{-4.5 \pm \sqrt{0}}{2} = -2.25$$ (ddwywaith).

Mae'r ddau wreiddyn yn gyfartal.

(iii) $2x^2 + 3x + 2 = 0.$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(2)}}{4} \qquad (a = 2, b = 3, c = 2)$$

ac felly $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}.$

Nid oes atebion yn bodoli yn ein system arferol o rifau ('rhifau real') oherwydd na ellir darganfod $\sqrt{-7}$ yn y system honno o rifau. Yn wir, ni ellir darganfod ail isradd unrhyw rif – yn y system honno. Os nad ydych wedi'ch darbwyllo, ceisiwch ddarganfod $\sqrt{-7}$ ar eich cyfrifiannell.

Wrth sgwario unrhyw rif real, + neu –, + yw'r canlyniad.

Mae achosion (i), (ii), (iii) yn dangos bod o leiaf dri phosibilrwydd (mewn gwirionedd, dim ond tri sydd) pan geisir datrys hafaliadau cwadratig, sef

(i) bod dau ateb real gwahanol yn bodoli, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

(ii) bod un ateb real yn bodoli, h.y. bod y ddau ateb yn cyd-daro (– 2.25).

(iii) nad oes atebion real yn bodoli, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}$.

Wrth edrych yn ôl gwelir bod yr achosion hyn yn codi pan fydd

(i) y rhif dan yr ail isradd yn +,

(ii) y rhif dan yr ail isradd yn 0,

(iii) y rhif dan yr ail isradd yn –.

Ymchwiliwn yn fanylach i'r broses o gwblhau'r sgwâr.
Nawr

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Noder bod $\frac{b}{2a}$ yn y cromfachau $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ yn hanner cyfernod x yn y cromfachau, a bod angen tynnu $\frac{b^2}{4a^2}$ oherwydd bod $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ yn cyflwyno term $\frac{b^2}{4a^2}$ wrth ehangu, a bod angen canslo'r term hwn.

Enghraifft 2.6
Datryswch yr hafaliad cwadratig

$$ax^2+bx+c = 0,$$

gan roi'r ateb yn nhermau a, b ac c.

Gallwch rannu â'r rhif a gan fod $a \neq 0$.

$$ax^2+bx+c = 0$$

neu $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0.$$

Wrth gwblhau'r sgwâr ceir fod

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = 0.$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore \quad x = -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

felly dyma'r ddau ddatrysiad

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Crynodeb
Rhoddir dau ddatrysiad

$$ax^2+bx+c = 0 \quad (a\neq 0)$$

gan $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Y canlyniad hwn yw'r fformiwla gwadratig a gellir defnyddio'r fformiwla hon yn uniongyrchol er mwyn datrys hafaliadau cwadratig.
Gelwir datrysiadau hafaliad yn **wreiddiau** yr hafaliad.

Enghraifft 2.7
Datryswch yr hafaliadau cwadratig canlynol gan ddefnyddio'r fformiwla.
(i) $x^2 + 3x - 2 = 0$
(ii) $x^2 + 4.5x + 5.0625 = 0$
(iii) $2x^2 + 3x + 2 = 0$

(i) $x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-2)}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad a=1,\ b=3,\ c=-2 \right)$$

ac felly dyma'r ddau wreiddyn:

$$x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \text{ a } \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$$ ar ffurf syrdiau.

Ystyr 'gwreiddiau' yw 'datrysiadau'.

(ii) $x^2 + 4.5x + 5.0625 = 0.$

$$x = \frac{-4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 4(1)(5.0625)}}{2}$$

$a = 1, b = 4.5, c = 5.0625$

$$= \frac{-4.5 \pm \sqrt{0}}{2} = -2.25 \text{ (ddwywaith).}$$

Mae'r ddau wreiddyn yn gyfartal.

(iii) $2x^2 + 3x + 2 = 0.$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(2)}}{4} \qquad (a = 2, b = 3, c = 2)$$

ac felly $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}$.

Nid oes atebion yn bodoli yn ein system arferol o rifau ('rhifau real') oherwydd na ellir darganfod $\sqrt{-7}$ yn y system honno o rifau. Yn wir, ni ellir darganfod ail isradd unrhyw rif – yn y system honno. Os nad ydych wedi'ch darbwyllo, ceisiwch ddarganfod $\sqrt{-7}$ ar eich cyfrifiannell.

Wrth sgwario unrhyw rif real, + neu –, + yw'r canlyniad.

Mae achosion (i), (ii), (iii) yn dangos bod o leiaf dri phosibilrwydd (mewn gwirionedd, dim ond tri sydd) pan geisir datrys hafaliadau cwadratig, sef

(i) bod dau ateb real gwahanol yn bodoli, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

(ii) bod un ateb real yn bodoli, h.y. bod y ddau ateb yn cyd-daro (– 2.25).

(iii) nad oes atebion real yn bodoli, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}$.

Wrth edrych yn ôl gwelir bod yr achosion hyn yn codi pan fydd

(i) y rhif dan yr ail isradd yn +,

(ii) y rhif dan yr ail isradd yn 0,

(iii) y rhif dan yr ail isradd yn –.

Natur gwreiddiau hafaliad cwadratig

Gyda'r hafaliad cwadratig cyffredinol

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ceir $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a

naill ai (i) gwreiddiau real anhafal $\quad (b^2 - 4ac > 0)$
neu (ii) gwreiddiau hafal $\quad (b^2 - 4ac = 0)$
neu (iii) dim gwreiddiau real $\quad (b^2 - 4ac < 0)$
sy'n bodoli yn ôl a yw $\sqrt{b^2 - 4ac}$ yn fwy na, yn hafal i, neu yn llai na 0.

Yr enw ar y gwerth $b^2 - 4ac$ yw **gwahanolyn** y ffwythiant cwadratig a roddir gan $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Enghraifft 2.8

Dangoswch, os oes gan $4x^2 + (k + 3)x + 5 = 0$ ddau wreiddyn anhafal, fod $k^2 + 6k - 71$ yn bositif.

Yn yr achos hwn $a = 4$, $b = k + 3$, $c = 5$.

gwahanolyn > 0

Yna mae achos (i) yn gymwys os yw
$(k + 3)^2 - 4(4)(5)$ yn bositif neu os yw $(k + 3)^2 - 80$ yn bositif.
Felly mae $k^2 + 6k + 9 - 80$ yn bositif
ac felly mae $k^2 + 6k - 71$ yn bositif.

Enghraifft 2.9

Darganfyddwch werthoedd k os oes gan yr hafaliad $x^2 + kx + k + 3 = 0$ wreiddiau hafal. Darganfyddwch werthoedd x ar gyfer y gwerthoedd k hynny.

Yr amod am wreiddiau hafal (cyd-drawol) yw bod

gwahanolyn = 0

$$k^2 - 4(1)(k + 3) = 0 \qquad (a = 1, b = k, c = k + 3)$$

neu $\quad k^2 - 4k - 12 = 0.$

Hafaliad cwadratig ar gyfer k yw hwn y gellir ei ddatrys trwy ffactorio neu trwy ddefnyddio'r fformiwla. Yna mae ffactorio

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

yn rhoi $(k + 2)(k - 6) = 0$

ac felly $\quad k = -2, 6.$

Neu mae'r fformiwla yn rhoi

$$k = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-12)}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$$

a $\quad k = \dfrac{4 + 8}{2}$ neu $\dfrac{4 - 8}{2}$.

$\therefore \quad k = 6$ neu -2 fel o'r blaen.

Rhoddir gwerthoedd k yn eu tro yn yr hafaliad cwadratig gwreiddiol.
Pan fydd $k = 6$, bydd yr hafaliad cwadratig yn

$$x^2 + 6x + 9 = 0,$$

sy'n ffactorio i

$$(x+3)^2 = 0$$

ac $\qquad x = -3$ (ddwywaith) (neu gellir defnyddio'r fformiwla).

Pan fydd $k = -2$ mae'r hafaliad cwadratig yn dod yn

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

ac felly $\qquad (x-1)^2 = 0$

ac $\qquad x = 1$ (ddwywaith) (neu gellir defnyddio'r fformiwla).

Ymarferion 2.3

1. Datryswch yr hafaliadau cwadratig trwy ffactorio yn gyntaf :

   (i) $x^2 - 6x - 7 = 0$ $\qquad$ (ii) $x^2 - 13x + 12 = 0$

   (iii) $2x^2 - 17x + 8 = 0$ $\qquad$ (iv) $x^2 + 9x + 20 = 0$

   (v) $3x^2 - 7x - 20 = 0$ $\qquad$ (vi) $5x^2 + 32x + 12 = 0$.

2. Defnyddiwch fformiwla'r cwadratig i ddatrys yr hafaliadau canlynol, gan roi eich atebion yn gywir i ddau le degol :

   (i) $x^2 - 3x - 2 = 0$ $\qquad$ (ii) $x^2 + 5x + 2 = 0$

   (iii) $2x^2 - 5x = 2$ $\qquad$ (iv) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

   (v) $17.64x^2 - 21x + 6.25 = 0$ $\qquad$ (vi) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

3. Darganfyddwch ba rai o'r hafaliadau canlynol sydd â (i) dau wreiddyn anhafal 'real' (ii) gwreiddiau hafal (iii) dim gwreiddiau 'real'.

   (a) $3x^2 + 3x - 4 = 0$ $\qquad$ (b) $6x^2 + 3x + 4 = 0$

   (c) $2x^2 - 3x - 1 = 0$ $\qquad$ (d) $2.5x^2 + 4x + 1 = 0$

   (e) $3.5x^2 + 7.5x + 4 = 0$ $\qquad$ (f) $4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = 0$.

4. Darganfyddwch werth a os oes gan yr hafaliad $(2a-1)x^2 - 2ax + 1 = 0$ wreiddiau hafal. Datryswch yr hafaliad ar gyfer y gwerth x unigol hwnnw.

5. Dangoswch, os nad oes gwreiddiau real gan yr hafaliad cwadratig
$$(2b+1)x^2 - 3bx + b = 0,$$
fod $b^2 - 4b$ yn negatif.

6. Y fformiwla ar gyfer yr n rhif positif cyntaf yw $\frac{1}{2}n(n+1)$. Darganfyddwch n, nifer y rhifau, os yw'r swm yn 528.

7. Arwynebedd petryal yw A a swm dwy ochr gyfagos yw S. Dangoswch fod S^2 yn fwy na neu yn hafal i $4A$. <u>Awgrym:</u> boed i'r ochrau fod yn x ac $S - x$.

I gwblhau ein trafodaeth ar hafaliadau cwadratig gadewch i ni ystyried un defnydd arall a wneir o'r dull cwblhau'r sgwâr.

2.4 Gwerth mwyaf a gwerth lleiaf ffwythiannau cwadratig

Yma ystyriwn ffwythiannau cwadratig,
h.y. y rhai a ddiffinnir gan

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{lle bo } a \neq 0.$$

e.e.
$f(x) = 3x^2 + 2x + 5$,
$f(x) = -x^2 + 2$,
$f(x) = 6x^2$.

Gwelsom yn gynharach, wrth drafod cwblhau'r sgwâr, fod

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Gallwn rannu ag *a* gan fod $a \neq 0$.

$4ac$-b^2 = – (gwahanolyn), wrth gwrs.

Gellir darganfod gwerthoedd mwyaf a lleiaf ffwythiannau cwadratig yn hawdd trwy gwblhau'r sgwâr.

Enghraifft 2.10

Trwy gwblhau'r sgwâr yn $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, darganfyddwch ei werth mwyaf.

Gwnewch gyfernod x^2 yn un.

Nawr $f(x) = 2x^2 - 3x + 5 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)$

$$= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{2} - \frac{9}{16}\right]$$

$$= 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right]$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}.$$

Hanner cyfernod *x* yn y cromfachau sgwâr.

Nodwn fod $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0$ a bod gan $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}$

ei werth lleiaf pan fo $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 0$, h.y. pan fo $x = \frac{3}{4}$.

Y gwerth lleiaf cyfatebol yw $\frac{31}{8}$.

Nid yw byth yn gallu bod yn < 0 oherwydd bod $2 > 0$ ac $(x - \frac{3}{4})^2 \geq 0$.

Enghraifft 2.11
Trwy gwblhau'r sgwâr yn $f(x) = -3x^2 - 5x + 7$, darganfyddwch ei werth mwyaf.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 - 5x + 7 \\ &= -3\left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}\right) \\ &= -3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{7}{3} - \frac{25}{36}\right] \\ &= -3\left[\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{109}{36}\right] \\ &= -3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{109}{12}. \end{aligned}$$

Sylwch fod yn rhaid i gyfernod x^2 yn y cromfachau fod yn +1. Gwyliwch eich arwyddion!

Gan fod $-3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 < 0$, mae gwerth <u>mwyaf</u> $f(x)$ yn digwydd pan fo

$$-3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = 0, \quad \text{h.y. pan fo } x = -\frac{5}{6}.$$

Y gwerth mwyaf cyfatebol yw $\frac{109}{12}$.

Roedd yr achosion a ystyriwyd yn enghreifftiau 2.10 a 2.11 yn achosion arbennig o

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Sylwch na ddefnyddiwyd y fformiwla hon ond, yn hytrach, cyfrifwyd pob achos.

Yn enghraifft 2.10, roedd $a > 0$ a chawsom werth <u>lleiaf</u>.

$2x^2 - 3x - 5$, $a = 2 > 0$

Yn enghraifft 2.11, roedd $a < 0$ a chawsom werth <u>mwyaf</u>.

$-3x^2 - 5x + 7$, $a = -3 < 0$

Mae'r enghreifftiau hyn yn dangos canlyniad cyffredinol.

Ar gyfer y ffwythiant cwadratig $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ (i) pan fo $a > 0$, mae gan $f(x)$ werth lleiaf, (ii) pan fo $a < 0$, mae gan $f(x)$ werth mwyaf.

Ymarferion 2.4
Darganfyddwch pa werthoedd o x yn y ffwythiannau cwadratig canlynol sydd â gwerth mwyaf neu werth lleiaf, gan roi'r gwerthoedd mwyaf a lleiaf hynny.

(i)	x^2+4x+7	(ii)	$-x^2+4x+7$
(iii)	$-x^2-3x+1$	(iv)	$4x^2+6x-9$
(v)	$2x^2-x+7$	(vi)	$-4x^2+3x+1$
(vii)	$9+x-x^2$	(viii)	$2x-x^2$
(ix)	x^2+4	(x)	$9-x^2$.

2.5 Hafaliadau llinol cydamserol

Dim ond un llythyren oedd yn yr hafaliadau llinol a chwadratig a ystyriwyd uchod, a'r broblem oedd darganfod y rhif(au) i'w r(h)oi yn lle'r llythyren er mwyn bodloni'r hafaliad. Mae problemau yn codi'n aml lle mae dau neu ragor o lythrennau, ac mae dau neu ragor o hafaliadau mewn problemau o'r fath. Mae'n wir bod angen cynifer o hafaliadau ag sydd o lythrennau anhysbys er mwyn eu datrys e.e. dau hafaliad ar gyfer dwy lythyren ac yn y blaen. Yn yr adran hon ystyrir dau hafaliad llinol gyda dau anhysbysyn. Oherwydd bod angen bodloni'r ddau hafaliad gan y gwerthoedd rhifiadol sydd i'w darganfod, cyfeirir atynt fel **hafaliadau (llinol) cydamserol**. Dangosir yma nifer o enghreifftiau i esbonio'r dull.

Enghraifft 2.12
Datryswch yr hafaliadau

$$3x+y = 29, \quad (1)$$
$$4x+3y = 47. \quad (2)$$

Hafaliadau llinol yw'r rhain oherwydd bod x ac y yn digwydd ar wahân ac i'r pŵer 1.

Trefnwn fod yr un cyfernod yn gysylltiedig â'r un llythyren, sef y yn yr achos hwn, yn y ddau hafaliad. Felly lluoswn hafaliad (1) â 3 ac ailysgrifennu'r hafaliadau fel

Gellid gwneud cyfernodau x yn hafal trwy luosi (1) â 4, (2) â 3. Yna, cyfernod cyffredin x yw 12.

$$9x+3y = 87, \quad (1')$$
$$4x+3y = 47. \quad (2)$$

Pan fydd cyfernodau llythyren yn hafal, <u>tynnwch</u>.

Tynnwn hafaliad (2) o hafaliad (1'), gan ddileu y.

$\therefore \quad 5x = 40$

ac felly $\quad x = \dfrac{40}{5} = 8. \qquad$ (Rheol (i), Adran 2.1)

Rhoddir $x = 8$ yn un o'r hafaliadau uchod, (1) dyweder. Yna mae (1) yn

$3 \times 8 + y = 29$

ac felly $\quad y = 29 - 24 = 5. \qquad$ (Rheol (ii), Adran 2.1)

Mae'n fuddiol gwirio gwerthoedd x ac y trwy eu rhoi yn yr hafaliad arall na ddefnyddiwyd i ddarganfod x. Defnyddiwyd hafaliad (1) ac felly defnyddir hafaliad (2) i wirio'r canlyniad.
Yna gydag $x = 8$, $y = 5$, mae (2) yn rhoi

$4 \times 8 + 3 \times 5 = 47$ (sy'n gywir).

Enghraifft 2.13

Datryswch $3x + 2y = 8, \quad (1)$

$2x - 3y = -3. \quad (2)$

Gellid trefnu bod gan x yr un cyfernod yn hafaliadau (1) a (2). Fodd bynnag, yn yr enghraifft hon, gwneir cyfernodau y yn hafal eu maint ond yn ddirgroes eu harwydd. Lluosir (1) â 3, (2) â 2 i gael

$$9x + 6y = 24, \quad (1')$$

$$4x - 6y = -6. \quad (2')$$

Pan fydd cyfernodau llythyren yn hafal ond ag arwydd dirgroes, adiwch yr hafaliadau.

Trwy adio (1') a (2') gellir dileu y.

Yna $13x = 18.$

$\therefore \quad x = \dfrac{18}{13}.$

Rhoddir y gwerth hwn am x yn hafaliad (1). Yna $3 \times \dfrac{18}{13} + 2y = 8.$

$\therefore \quad 2y = 8 - 3 \times \dfrac{18}{13} = \dfrac{50}{13}.$

$\therefore \quad y = \dfrac{25}{13}.$

Peidiwch â chael eich temtio i fynegi x ac y fel degolion oni ofynnir am werthoedd degol.

Amnewid yn hafaliad (2):

$$2 \times \frac{18}{13} - 3 \times \frac{25}{13} = \frac{36}{13} - \frac{75}{13} = -3 \quad \text{(sy'n gywir).}$$

Mae'r dull o wneud cyfernodau llythrennau yn hafal (ond o bosibl gydag arwydd dirgroes) yn cael ei ddefnyddio yn aml i ddatrys hafaliadau llinol.

Dull poblogaidd arall (y bydd arnom ei angen hefyd yn yr adran nesaf) yw amnewid.

Enghraifft 2.14

Datryswch $\dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{5} = 1, \quad (1)$

$a - \dfrac{b}{3} = 8. \quad (2)$

Darganfyddir a yn nhermau b o hafaliad (2).

Darganfyddwch un lythyren yn nhermau'r llall.

Yna $a = 8 + \dfrac{b}{3}.$

Rhoddir y gwerth a hwn yn hafaliad (1). Felly

$$\frac{1}{2}\left(8 + \frac{b}{3}\right) - \frac{b}{5} = 1.$$

$\therefore \quad 4 + \dfrac{b}{6} - \dfrac{b}{5} = 1.$

$\therefore \quad \dfrac{b}{6} - \dfrac{b}{5} = -3.$

Diddymir y ffracsiynau trwy luosi popeth â 30 (gwna unrhyw rif y gellir ei rannu â 5 a 6 y tro).

$\therefore \quad 5b - 6b = -90$

ac felly $\quad -b = -90$

ac $\quad b = \dfrac{-90}{-1} = 90.$

Mae amnewid y gwerth am b yn hafaliad (2) yn rhoi

$$a - \frac{90}{3} = 8$$

neu $\quad a = 8 + 30 = 38.$

Defnyddir hafaliad (1) i wirio'r canlyniad:

$$\frac{38}{2} - \frac{90}{5} = 19 - 18 = 1 \quad \text{(sy'n gywir).}$$

Enghraifft 2.15

Yn yr hafaliad $y = mx + c$ mae'n hysbys y bodlonir yr hafaliad gan ddau bâr o x ac y, sef $\quad x = 3, \quad y = 10$

ac $\quad x = -5, \quad y = 2.$

Darganfyddwch werthoedd m ac c.

Pan fydd $x = 3,\ y = 10.$

$\therefore \quad 10 = 3m + c. \qquad (1)$

Pan fydd $x = -5,\ y = 2.$

$\therefore \quad 2 = -5m + c. \qquad (2)$

Gellir datrys yr hafaliadau yn rhwydd drwy'r ddau ddull a ystyriwyd uchod.

<u>Dull y cyfernodau hafal</u>

Mae cyfernodau c yn hafaliadau (1) a (2) yn hafal.

Tynnir (2) o (1).

Yna $\quad 8 = 3m - (-5m)$

ac felly $\quad 8 = 8m.$

$\therefore \quad m = 1.$

Amnewidir y gwerth hwn am m yn hafaliad (1)

$$10 = 3 \times 1 + c.$$

$\therefore \quad c = 7.$

Defnyddir (2) i wirio:

$$-5m + c = -5 \times 1 + 7 = 2 \quad \text{(sy'n gywir).}$$

<u>Dull amnewid</u>

Ar sail (1), $c = 10 - 3m.$

Amnewidir yn hafaliad (2):

$$2 = -5m + 10 - 3m.$$

$\therefore \quad -8 = -8m$

ac felly $\quad m = \dfrac{-8}{-8} = 1$

a darganfyddir c trwy amnewid fel o'r blaen.

Er ei fod yn ymddangos mai dull y cyfernod hafal yw'r gorau yn Enghraifft 2.15, mae'n fuddiol gallu defnyddio'r ddau ddull yn rhwydd.

Ymarferion 2.5

1. Datryswch yr hafaliadau llinol cydamserol:-

   (i) $3x - 2y = 7$ (ii) $5x + 3y = 4$

   $4x + 3y = 15$ $3x + 5y = -4$

   (iii) $a - b = 5$ (iv) $4(1 - x) = 7x + 8y$

   $4a - b = 2a + 13$ $6x + y + 18 = 0.$

2. Mae gwerth dau rif a a b yn peri bod swm $3a$ a $2b$ yn 26, tra bo swm a a $2b$ yn 14. Beth yw'r rhifau?

3. Perimedr lawnt betryalog yw 64 m. Mae ei maint yn cael ei leihau fel bod yr hyd yn $\frac{3}{4}$ yr hyd gwreiddiol a'r lled yn $\frac{4}{5}$ y lled gwreiddiol. Y perimedr nawr yw 50 m. Beth oedd yr hyd a'r lled gwreiddiol?

4. Darganfyddwch m ac c os yw $y = mx + c$, ac os $y = 4$ pan yw $x = 3$, ac $y = 9$ pan yw $x = 5$.

5. Rhoddir ffwythiant polynomaidd gan $ax^2 + bx + 2$, lle mae a a b yn anhysbys. O wybod bod gwerthoedd y ffwythiant yn 16 a 4 pan fo $x = 2$ a 3 yn ôl eu trefn, darganfyddwch werthoedd a a b.

6. Rhoddir dau bolynomial gan (i) $ax^2 + bx + 4$ a (ii) $2ax^2 - bx + 1$. O wybod bod (i) a (ii) yn hafal pan yw $x = 2, 3$, darganfyddwch werthoedd a a b.

7. Os yw $s = ut + \frac{1}{2}at^2$, lle mae u ac a yn gysonion ac $s = 60$ a 32 pan yw $t = 1$ a 4 yn ôl eu trefn, darganfyddwch u ac a.

8. Os yw $v = u + at$, lle mae u ac a yn gysonion a $v = 13$ a 29 pan yw $t = 3$ ac 8 yn ôl eu trefn, darganfyddwch u ac a.

2.6 Datrys hafaliadau cydamserol: un yn llinol, un yn gwadratig

Gelwir termau sydd â'r anhysbysion x ac y ar ffurf x^2, xy, y^2 yn dermau gradd dau. Dangosir gradd term naill ai gan ei indecs, (os yw'n un llythyren) neu, os yw'n cynnwys dwy lythyren, gan swm yr indecsau.

Yn yr adran hon ystyrir un hafaliad llinol sy'n cynnwys termau gradd un, a hafaliad cwadratig sy'n cynnwys termau gradd 2 ac o bosibl dermau gradd un.

Enghraifft 2.16

Datryswch yr hafaliadau

$$2x + 3y = 1, \quad (1)$$
$$3x^2 + 4y^2 + 6xy = 5. \quad (2)$$

Y dull yw defnyddio'r hafaliad cyntaf (yr un llinol) i ddileu un o'r newidynnau.

Felly, o'r hafaliad cyntaf, $x = \dfrac{1-3y}{2}.$

Rhoddir hyn yn hafaliad (2).

$$3\left(\frac{1-3y}{2}\right)^2 + 4y^2 + 6\left(\frac{1-3y}{2}\right)y = 5.$$

$$\therefore \quad 3\left(\frac{1-6y+9y^2}{4}\right) + 4y^2 + 3(1-3y)y = 5.$$

Diddymir y ffracsiynau trwy luosi'r cyfan â 4.

$$3(1-6y+9y^2) + 4 \times 4y^2 + 4 \times 3(1-3y)y = 4 \times 5.$$

Diddymir y cromfachau:

$$\therefore \quad 3 - 18y + 27y^2 + 16y^2 + 12y - 36y^2 = 20.$$

Ac felly $\quad 7y^2 - 6y - 17 = 0.$

$$\therefore \quad y = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \times 7 \times 17}}{14} = \frac{6 \pm \sqrt{512}}{14} = \frac{6 \pm 16\sqrt{2}}{14} = \frac{3}{7} \pm \frac{8\sqrt{2}}{7}.$$

Pan fo $y = \dfrac{3}{7} + \dfrac{8\sqrt{2}}{7}$,

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3\left(\frac{3}{7} + \frac{8\sqrt{2}}{7}\right) = \frac{1}{2} - \frac{9}{14} - \frac{12\sqrt{2}}{7} = -\frac{1}{7} - \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

Pan fo $y = \dfrac{3}{7} - \dfrac{8\sqrt{2}}{7}$,

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3\left(\frac{3}{7} - \frac{8\sqrt{2}}{7}\right) = -\frac{1}{7} + \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

Y datrysiadau'r yw'r parau o rifau

$$x = -\frac{1}{7} - \frac{12\sqrt{2}}{7}, \quad y = \frac{3}{7} + \frac{8\sqrt{2}}{7},$$

$$x = -\frac{1}{7} + \frac{12\sqrt{2}}{7}, \quad y = \frac{3}{7} - \frac{8\sqrt{2}}{7}.$$

Nid oes angen mynegi'r ateb ar ffurf degolion oni ofynnir i chi wneud hynny, ond efallai y byddwch yn dymuno ei wneud.

Enghraifft 2.17

Darganfyddwch werthoedd k fel bod

$$2y - x = 2 \quad (1)$$

a $\quad x^2 + y^2 + kx - 10y + 29 = 0 \quad (2)$

yn cael eu bodloni gan un pâr o werthoedd x ac y ar gyfer pob gwerth k. Darganfyddwch y parau o x ac y ar gyfer y gwerthoedd k hynny.

O hafaliad (1), $x = 2y - 2.$

Rhoddir hyn yn hafaliad (2).

$\therefore \quad (2y-2)^2 + y^2 + k(2y-2) - 10y + 29 = 0.$

$\therefore \quad 4y^2 - 8y + 4 + y^2 + 2ky - 2k - 10y + 29 = 0.$

$\therefore \quad 5y^2 + (2k-18)y + 33 - 2k = 0. \quad (2')$

Nid oes ond un gwerth y os yw

$$(2k-18)^2 = 4 \times 5(33-2k)$$

$b^2 = 4ac$

neu $(k-9)^2 = 5(33-2k).$

$\therefore \quad k^2 - 18k + 81 = 165 - 10k$

ac felly $k^2 - 8k - 84 = 0.$

$\therefore \quad (k+6)(k-14) = 0$

a $k = -6$ neu $k = 14.$

Pan fydd $k = -6$, hafaliad (2') ar gyfer y yw

$$5y^2 + (2\times -6 - 18)y + 33 - 2(-6) = 0.$$

$\therefore \quad 5y^2 - 30y + 45 = 0$

neu $y^2 - 6y + 9 = 0.$

$(y-3)^2 = 0$

ac $y = 3$ (ddwywaith).

O hafaliad (1), $x = 2y - 2 = 2 \times 3 - 2 = 4.$

Pan fydd $k = 14$, hafaliad (2') ar gyfer y yw

$$5y^2 + (2 \times 14 - 18)y + 33 - 2(14) = 0$$

neu $5y^2 + 10y + 5 = 0.$

$\therefore \quad y^2 + 2y + 1 = 0$

ac felly $(y+1)^2 = 0$

ac $y = -1$ (ddwywaith).

O hafaliad (1), $x = 2y - 2 = 2\times(-1) - 2 = -4.$

Felly os yw $k = -6$, y pâr yw (4, 3)

os yw $k = 14$, y pâr yw $(-4, -1)$.

Ymarferion 2.6

1. Datryswch yr hafaliadau cydamserol canlynol :

(i) $x + y = 2$, $x^2 - xy = 60$

(ii) $a - b = 7$, $3a^2 - ab - b^2 = 81$

(iii) $2x + y = 30$, $xy = 52$

(iv) $2a - b = 5$, $5a^2 + 3ab = 14$

(v) $2x^2 - 5x - 4xy = 60, \quad 3x + y = 9$

(vi) $x - 2y = 8, \quad \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 5$

(vii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{3}{4}, \quad x - 3y = 2$ (Awgrym: lluoswch yr hafaliad cyntaf ag xy).

2. Darganfyddwch werthoedd k os bodlonir y setiau canlynol o hafaliadau cydamserol gan barau unigol o x ac y :

(i) $x + ky = 3, \quad x^2 + y^2 + xy - 9 = 0$

(ii) $x + y = 5, \quad x^2 + y^2 + 2x + k = 0$

(iii) $2x + y = 4, \quad x^2 + y^2 + 4kx + 4 = 0.$

3. Darganfyddwch a oes gan y setiau canlynol o hafaliadau cydamserol ddatrysiadau 'real':

(i) $3x + y = 4, \quad x^2 + y^2 + xy + 5 = 0$

(ii) $x = 3y + 2, \quad x^2 + xy + 9 = 0$

(iii) $2x + 3y + 7 = 0, \quad x^2 - 6x + y^2 - 8y - 24 = 0.$

Pennod 3

Dilyniannau a Chyfresi

Wrth ddod o hyd i ganlyniadau mathemategol, rhaid yn aml wneud symiant cyfres. Yn y bennod hon ystyrir symiant dwy gyfres arbennig. Cyn ystyried symiant, ystyriwn yn gyntaf ddilyniannau.

3.1 Dilyniannau

Ystyriwn y rhesi canlynol o rifau :-

(i) 3, 9, 27, 81 (ii) 1, 3, 5, 7, ...

(iii) $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, \ldots$ (iv) 1, −1, 1, −1, ...

(v) −10, 11, −12, 13, ...

Mae'r rhes yn (i) yn wahanol i'r lleill gan ei bod yn terfynu. Mewn cyferbyniad, mae'r dotiau yn (ii) - (v) yn nodi nad yw'r rhesi hynny byth yn terfynu. Mae llawer o'r drafodaeth yn y bennod hon yn ymwneud â rhesi anfeidraidd, h.y. y rhai sydd byth yn terfynu.

Mae gan y rhesi i gyd briodwedd gyffredin: Caiff y gwerth sy'n ymddangos mewn unrhyw safle ei bennu gan ryw reol bendant. Felly gwerth y pumed safle yn (ii) yw 9, y 6ed gwerth yn (iii) yw $1\frac{1}{7}$, a'r 9fed gwerth yn (iv) yw 1.

Ymarfer 3.1

Beth yw'r chweched gwerth yn (v)?

Diffiniad

Dilyniant yw rhes o rifau lle mae pob aelod wedi ei bennu gan ryw reol bendant. Gelwir dilyniant annherfynus yn ddilyniant anfeidraidd, fel arall dilyniant meidraidd ydyw.

Mae'n gyfleus defnyddio fformiwlâu i grynhoi rheolau dilyniant lle bynnag y bo'n bosibl. Mae rheolau o'r fath yn ein galluogi i ysgrifennu'r *n*fed term (y term cyffredinol) mewn dilyniant.

O ddynodi'r dilyniant cyffredinol fel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

gwelir yn (i) bod $a_1 = 3$, $a_2 = 3^2$, ac $a_n = 3^n$ $(n \le 4)$

(ii) bod $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, ac $a_n = 2n - 1$

(iii) bod $a_1 = 1\frac{1}{2}$, $a_2 = 1\frac{1}{3}$, ac $a_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$

(iv) bod $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, ac $a_n = (-1)^{n+1}$

(v) bod $a_1 = -10$, $a_2 = 11$, ac $a_n = (-1)^n(n+9)$

Mae'r dilyniannau hyn yn dangos mathau gwahanol o ymddygiad wrth i ni ystyried mwy a mwy o dermau.

Enghraifft 3.1

Yn (ii), mae $a_n = 2n - 1$.

Os bydd n yn cynyddu yn ddiderfyn, bydd a_n yn cynyddu yn ddiderfyn.

$a_{1000} = 1999$
$a_{10000} = 19999$

Ysgrifennir hyn fel $n \to \infty$, $a_n \to \infty$, lle mae '$\to \infty$' yn llaw fer am 'mae'n cynyddu yn ddiderfyn'.

Enghraifft 3.2

Yn (iii), mae $a_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

$a_{999} = 1.001$
$a_{9999} = 1.0001$

Os bydd n yn cynyddu yn ddiderfyn yna bydd $\dfrac{1}{n+1}$ yn mynd yn llai ac yn llai ac felly bydd a_n yn dod yn nes ac yn nes at 1.

Ysgrifennir hyn fel $n \to \infty$, $a_n \to 1$.

Enghraifft 3.3

Yn (iv), mae $a_n = (-1)^{n+1}$.

Wrth i n gynyddu yn ddiderfyn, y termau yw -1 ac 1 bob yn ail.

Enghraifft 3.4

Yn (v), $a_n = (-1)^n(n + 9)$.

Wrth i $n \to \infty$, mae'r termau yn newid arwydd bob yn ail ond, yn wahanol i Enghraifft 3.3, mae eu maint yn cynyddu.

Gellir tynnu'r amrywiol batrymau hyn ynghyd i ffurfio diffiniadau.

Diffiniad

(a) Gelwir dilyniant $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ yn ddargyfeiriol os $a_n \to \infty$ (neu $-\infty$) wrth i $n \to \infty$.

(b) Gelwir dilyniant yn gydgyfeiriol os $a_n \to l$ (rhyw rif sefydlog unigryw) wrth i $n \to \infty$. Gelwir y rhif l yn derfan y dilyniant. Yn enghraifft 3.2, $l = 1$.

(c) Gelwir dilyniant nad yw'n gydgyfeiriol nac yn ddargyfeiriol yn osgiliadol.
Mae enghraifft 3.3 yn ymwneud â dilyniant osgiliadol y mae ei werthoedd $(-1,1)$ yn ailymddangos ar ôl cyfyngau penodol. Mae dilyniant o'r fath yn gyfres osgiliadol cyfnodol.
Mae enghraifft 3.4 yn rhoi dilyniant y mae ei arwyddion yn dod bob yn ail ac nad yw'n cydgyfeirio (nid oes terfan unigryw) ac nad yw'n dargyfeirio i un o $+\infty$ neu $-\infty$. Mae dilyniant o'r fath yn gyfres osgiliadol anghyfnodol.

D.S. Mae rhai awduron yn ystyried pob dilyniant nad yw'n cydgyfeirio fel rhai dargyfeiriol. Byddent felly yn disgrifio dilyniannau a ddiffinnir fel rhai osgiliadol yma fel rhai dargyfeiriol.

Crynodeb

Math

1. Cydgyfeiriol: mae'r dilyniant yn tueddu at derfan unigryw sefydlog. e.e. $a_n = 1 + 1/n$

2. Dargyfeiriol: mae'r dilyniant yn tueddu at $+\infty$ neu $-\infty$. e.e. $a_n = 2n - 1$ neu $a_n = 2 - 3n$

3. Osgiliadol cyfnodol: nid yw'n gydgyfeiriol nac yn ddargyfeiriol ac mae rhai termau yn ailymddangos. e.e. $a_n = (-1)^{n+1}$

4. Osgiliadol anghyfnodol: nid yw'n gydgyfeiriol nac yn ddargyfeiriol ac nid yw termau yn ailymddangos. e.e. $a_n = (-1)^n (n+9)$

Ymarferion 3.2

Yn y cwestiynau canlynol, dylid nodi terfannau'r dilyniannau lle bo'n briodol.

1. Ysgrifennwch 5ed, 8fed ac *n*fed term y dilyniant 1, 2, 3, 4, . . .
   A yw'r dilyniant hwn yn gydgyfeiriol, yn ddargyfeiriol neu yn osgiliadol?
2. Ysgrifennwch 6ed ac *n*fed term y dilyniant
   $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$
   A yw'r dilyniant hwn yn gydgyfeiriol, yn ddargyfeiriol neu yn osgiliadol?
3. Ysgrifennwch *n*fed term y dilyniant
   $4, 16, 64, 256, \ldots$
   A yw'r dilyniant hwn yn gydgyfeiriol?
4. A yw'r dilyniant $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$ yn osgiliadol?
5. Dosbarthwch y dilyniant canlynol
   $-1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$
   yn un dargyfeiriol, cydgyfeiriol neu osgiliadol.
6. A yw'r dilyniant osgiliadol
   $1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ \ldots$ yn gyfnodol?
7. Diffinnir dilyniant yn nhermau dau rif positif a a d fel
   $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$
   A yw'r dilyniant hwn yn gydgyfeiriol, yn ddargyfeiriol neu yn osgiliadol?
8. A yw'r ateb i gwestiwn 7 yn wahanol os yw un o blith a a d (neu'r ddau) yn negatif?
9. Yr *n*fed term mewn dilyniant yw
   $$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$
   Nodwch a yw'r dilyniant yn gydgyfeiriol, yn ddargyfeiriol neu yn osgiliadol.
10. Ysgrifennwch *n*fed term y dilyniant
    $x,\ x^2,\ x^3, \ldots$
    Nodwch a yw'r dilyniant yn gydgyfeiriol, dargyfeiriol neu osgiliadol pan fo
    (i) $x = \frac{1}{2}$ (ii) $x = -\frac{1}{2}$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = -2$ (v) $x = 0$.
11. Ysgrifennwch *n*fed term y dilyniant
    $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$
    A yw'r dilyniant yn gydgyfeiriol?

Fel y soniwyd eisoes, y maen prawf i ddilyniant fod yn cydgyfeirio yw bodolaeth terfan feidraidd, unigryw. Yn yr adran nesaf ystyrir ymhellach y cysyniad o derfan.

3.2 Terfannau a sut i'w trin a'u trafod

Gyda dilyniannau cymharol syml, mae'n hawdd darganfod y terfannau.

Enghraifft 3.5

Ysgrifennwch y terfannau unigryw wrth i $n \to \infty$, lle maent yn bodoli, ar gyfer y dilyniannau :-

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ (b) $b_n = 3n + 1$ (c) $c_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

(a) Gellir gweld yn hawdd fod terfan $\dfrac{1}{n^2}$ yn 0 oherwydd gellir gwneud $\dfrac{1}{n^2}$ mor fach (h.y. mor agos at 0) ag y dymunir trwy gymryd n sy'n ddigon mawr. Felly

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Fel arfer dynodir terfan gan 'lim'.

(b) Mae $3n + 1$ yn cynyddu yn amhenodol wrth i $n \to \infty$

h.y. $3n + 1 \to \infty$ wrth i $n \to \infty$.

Felly nid oes terfan unigryw yn bodoli.

Nid gwerth yw ∞, ond mae'n dynodi'r broses o gynyddu yn ddiderfyn.

(c) Terfan $1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ yw 1 oherwydd bod y term $\dfrac{(-1)^n}{n}$ yn mynd yn llai ac yn llai wrth i $n \to \infty$.

h.y. $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} = 1.$

Er mwyn enrhifo terfannau dilyniannau mwy cymhleth defnyddiwn nifer o ganlyniadau a rheolau safonol (heb eu profi).

Canlyniadau safonol ar gyfer terfannau

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$ os yw $a > 0$.

Mae'r derfan yn 1 os yw $a = 0$ ond nid oes terfan os yw $a < 0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}$ (unrhyw gysonyn C) $= C$.

(iii) Nid yw $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ yn bodoli.

Rheolau ar gyfer trin terfannau

Os yw $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = m$ ac mae α a β yn unrhyw gysonion, yna

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + m.$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = l - m.$

Er bod y canlyniadau hyn yn ymddangos yn amlwg, nid yw eu profi yn dasg syml.

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha l.$

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha l + \beta m.$

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = lm.$

(ix) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{l}{m}$ cyn belled â bod $m \neq 0$.

Enghraifft 3.6

Darganfyddwch $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+6}{2n+8}$.

$$\text{Nawr } \lim_{n\to\infty} \frac{n+6}{2n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{6}{n}}{2+\frac{8}{n}} \quad \left(\begin{array}{c}\text{rhannu'r top a'r}\\ \text{gwaelod ag } n\end{array}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{8}{n}\right)} \qquad \text{(Rheol ix)}$$

$$= \frac{1}{2}. \qquad \text{(Rheolau iv, ii ac i ddwywaith).}$$

Enghraifft 3.7

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+4}{4n^2+5n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)$$

Bob amser dylech rannu'r top a'r gwaelod â phwer mwyaf n, sef n^2 yn yr achos hwn.

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} \qquad \text{(Rheol ix)}$$

$$= \frac{0}{4} = 0. \quad \text{(Rheolau iv ac i ar gyfer y top a'r gwaelod)}$$

Enghraifft 3.8

Nid yw $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6}{n} + 3(-1)^n$ yn bodoli, oherwydd tra bo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6}{n} = 0$, nid yw $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ yn bodoli.

Ymarferion 3.3

1. Darganfyddwch y terfannau yn yr achosion canlynol, lle maent yn bodoli:

(i) $\dfrac{1}{n+1}$ (ii) $\dfrac{n-1}{n+1}$ (iii) $\dfrac{n-1}{n^2+1}$ (iv) $\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

(v) $\dfrac{n^3+3n^2+5}{n^4+4n^2+3n+6}$ (vi) $\dfrac{n^4+3n^2+6}{n^3+2n^2+4n+9}$

(vii) $\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$ (viii) $\dfrac{(-1)^n n^2+1}{n^2-1}$ (ix) $\dfrac{(-1)^n n^2-1}{(-1)^n n^2+1}$.

2. Penderfynwch a yw'r dilyniannau gyda'r termau cyffredinol a roddir yn cydgyfeirio:

(a) $\dfrac{3n+2}{n^2+3n-4}$ (b) $\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n-4}$ (c) $\dfrac{n^3+3n^2+2}{n^2+3n-4}$

(d) $\dfrac{(-1)^n+n^2}{n^2+n+1}$ (e) $\dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)}$ (f) $\dfrac{(n+10)(n+9)}{(n+1)(n+2)}$

(g) $\dfrac{(n^2+10)(n^2+9)}{(n^2+1)(n+2)}$ (h) $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$

3.3 Cyfresi

Wrth adio neu dynnu termau dilyniant, gelwir y mynegiad a geir yn gyfres.
Ar gyfer y dilyniant

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

gellir llunio cyfres megis

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \text{ neu } 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}-\ldots,$$

neu $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Y nodiant Σ

Pan fo term cyffredinol cyfres yn hysbys, gellir cynrychioli'r gyfres yn fwy cryno. Felly os yw $a_r = \frac{1}{r}$, gellir cynrychioli'r gyfres $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ fel $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}$.

Mae'n gyfleus defnyddio'r llythyren *r* yn lle *n*.

Mae'r llythyren Roeg Σ (sigma) yn cyfateb i S, sy'n dynodi swm ac mae $r = 1, \infty$ yn golygu bod r yn gallu cymryd y gwerthoedd 1, 2, 3, . . .

Os yw'r gyfres yn terfynu, e.e. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{20}$, gellir ei chynrychioli gan $\sum_{r=1}^{20}\frac{1}{r}$, sy'n golygu bod r yn cymryd y gwerthoedd 1, 2, 3, . . ., 20.

Gelwir y ffurf hon o gynrychioli cyfres yn **ffurf sigma**.

Mae Σ yn cael ei ynganu fel 'sigma'.

Ymarferion 3.4

1. Ysgrifennwch $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ ar ei ffurf sigma.
2. Ysgrifennwch $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ ar ei ffurf sigma.

   Yr *r*fed term yw $\frac{(-1)^{r+1}}{r}$
3. Ysgrifennwch $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ ar ei ffurf sigma.

   Yr *r*fed term yw $\frac{1}{2^{r-1}}$
4. Ysgrifennwch 2 + 4 + 8 + . . . + 128 ar ei ffurf sigma.

5. Ysgrifennwch $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 39$ ar ei ffurf sigma.

6. Ysgrifennwch $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+\ldots$ ar ei ffurf sigma.

3.4 Symiau rhannol cyfresi

Gyda chyfres anfeidraidd megis

$$S = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots$$

gellir llunio yn eu tro symiau'r term cyntaf, y ddau derm cyntaf, y tri therm cyntaf ac yn y blaen.

Yna

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}. \\ S_2 &= \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \\ S_3 &= \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4} = \frac{2}{3}+\frac{1}{12} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

O ganlyniad, rhoddir swm yr n term cyntaf gan

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

Ni ddisgwylir i chi olrhain hyn.

Yn y bôn, dyma ddilyniant a ffurfiwyd gan symiau rhannol y gyfres wreiddiol:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

lle, yn y nodiant sigma, yr $n$fed swm rhannol yw

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{r(r+1)}.$$

Diffiniad
Symiau rhannol cyfres yw'r dilyniant o symiau a ffurfir yn eu tro o'r term cyntaf, y ddau derm cyntaf, y tri therm cyntaf ac yn y blaen.

Enghraifft 3.9
Os rhoddir $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$
gwelir mai'r pedwar swm rhannol cyntaf yw

$$S_1 = 1,\ S_2 = 3,\ S_3 = 6,\ S_4 = 10.$$

Mewn gwirionedd yr $n$fed swm rhannol yw

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Byddwn yn profi hyn yn nes ymlaen.

Y dilyniant o'r symiau rhannol felly yw

$$1, 3, 6, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots$$

Felly o'r canlyniad uchod, mae'n amlwg os oes gennych gyfres y gellir, o leiaf mewn egwyddor, gael dilyniant o symiau rhannol.

Yn adrannau 3.1, 3.2 gwelwyd y gall y dilyniannau ymddwyn yn wahanol wrth fynd ymhellach ac ymhellach: cydgyfeirio, dargyfeirio, osgiliadu.
Nawr rhoddwn ystyriaethau o'r fath i ymddygiad dilyniannau o symiau rhannol.

Enghraifft 3.10

O wybod bod $\quad S = \dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots$

neu fod $\quad S = \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(r+1)},$

gwelwyd mai dilyniant y symiau rhannol cysylltiedig oedd

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots.$$

Mae gan yr $n$fed swm rhannol, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$, derfan a roddir gan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Felly yn yr achos hwn mae dilyniant y symiau rhannol yn cydgyfeirio.

Enghraifft 3.11

Mae'r symiau rhannol ar gyfer

$$S = 1+2+3+\ldots \text{ yn ffurfio'r dilyniant } 1, 3, 6, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots$$

Wrth i $n \to \infty$, mae $S_n \to \infty$ ac felly mae dilyniant y symiau rhannol yn dargyfeirio.

Mae enghreifftiau 3.10 a 3.11 yn dangos mathau eraill o ymddygiad gan ddilyniannau symiau rhannol a ffurfiwyd o gyfresi sy'n ymestyn ymhell.

Diffiniad

Mae cyfres yn gydgyfeiriol (dargyfeiriol, osgiliadol) os yw dilyniant y symiau rhannol a ffurfir yn gydgyfeiriol (dargyfeiriol, osgiliadol).
Felly, o'r diffiniad, mae'r gyfres yn 3.10 yn cydgyfeirio a'r gyfres yn 3.11 yn dargyfeirio.

Ymarferion 3.5

1. Rhoddir $n$fed swm rhannol y gyfres $S = 1+3+5+7+\ldots\ 2n+1+\ldots$ gan $S_n = n^2$. A yw'r gyfres yn gydgyfeiriol?
2. Rhoddir $n$fed swm rhannol y gyfres
$$S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$
gan $S_n = 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$. A yw'r gyfres yn gydgyfeiriol?

3. O wybod bod $S = 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^n + \ldots$
   a bod $n$fed swm rhannol $S_n = \frac{3}{2}\left(3^n - 1\right)$, nodwch a yw'r gyfres yn cydgyfeirio neu yn dargyfeirio.
4. Rhoddir $n$fed swm rhannol y gyfres y mae ei $r$fed term yn $\dfrac{4r}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}$ gan $S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4n+3}{2(2n+1)(2n+3)}$.
   A yw'r gyfres yn gydgyfeiriol?
5. Yn y cwestiwn hwn mae x yn dynodi rhif real sefydlog. Rhoddir $n$fed swm rhannol y gyfres $S = \sum_{r=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+x)[1+(r+1)x]}$ gan $S_n = \dfrac{n}{(1+x)[1+(n+1)x]}$.
   Dangoswch fod y gyfres yn gydgyfeiriol ar gyfer pob gwerth x, ac eithrio $x = 0$ ac $x = -1$.
6. Yn y cwestiwn hwn mae a yn dynodi rhif real sefydlog. O wybod y rhoddir $n$fed swm rhannol y gyfres $S = \sum_{r=1}^{\infty} \dfrac{a^{r-1}}{(1+a^{r-1})(1+a^r)}$ gan
   $$S_n = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{2} - \frac{a^n}{1+a^n}\right]$$
   dangoswch fod y gyfres yn cydgyfeirio gyda phob gwerth a ac eithrio 1.
7. Ar gyfer y gyfres $S = \dfrac{3}{1.2.4} + \dfrac{4}{2.3.5} + \dfrac{5}{3.4.6} + \ldots$
   ysgrifennwch yr $r$fed term a'r $n$fed swm rhannol S_n ar ei ffurf sigma.
   O wybod bod $S_n = \dfrac{29}{30} - \dfrac{1}{n+3} - \dfrac{3}{2(n+2)(n+3)} - \dfrac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$
   darganfyddwch $\lim_{n\to\infty} S_n$. A yw'r gyfres yn gydgyfeiriol?
8. O wybod y rhoddir $n$fed swm rhannol S_n cyfres gan $S_n = \dfrac{n}{n+1}$, darganfyddwch $n$fed term y gyfres $a_n = S_n - S_{n-1}$. Darganfyddwch $\lim_{n\to\infty} a_n$.
9. O wybod bod $n$fed swm rhannol cyfres yn $n^2 + 2n$ darganfyddwch a_n, $n$fed term y gyfres yn nhermau n. A yw $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?
   A yw'r gyfres ac a_n yn cydgyfeirio?
10. O wybod bod $n$fed swm rhannol cyfres, $S_n = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, darganfyddwch a_n, $n$fed term y gyfres. Darganfyddwch $\lim_{n\to\infty} a_n$.
    A yw'r gyfres ac a_n yn cydgyfeirio?

Yn yr adrannau nesaf ystyriwn ddwy gyfres arbennig, sef y cyfresi rhifyddol a geometrig.

3.5 Dilyniant rhifyddol (D.Rh.)

Ystyriwn y dilyniannau canlynol:

(i) $1, 2, 3, 4, \ldots$

(ii) $2, 5, 8, 11, \ldots$

(iii) $3, -1, -5, -9, \ldots$

Mae ganddynt i gyd nodwedd gyffredin: mae'r gwahaniaeth rhwng termau olynol yn gyson. Felly, yn (1) mae'r termau yn cynyddu fesul 1, yn (ii) maent yn cynyddu fesul 3, ac yn (iii), mae'r termau yn lleihau fesul 4.

Diffiniad

Dilyniant rhifyddol (D.Rh.) yw dilyniant lle ffurfir pob term o'r term yn syth o'i flaen trwy adio neu dynnu rhif cyson. Gelwir y rhif cyson hwnnw y **gwahaniaeth cyffredin**.

Yn gyffredinol, os oes gan Dd.Rh. derm cyntaf a a gwahaniaeth cyffredin d, yna y termau yw

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d, \ldots$$

a'r $n$fed term $= a + (n-1)d$.

Gall *a*, *d* fod yn bositif neu yn negatif.

Enghraifft 3.12

5ed term D.Rh. yw 8 a'r 13eg term yw 19. Darganfyddwch y gwahaniaeth cyffredin, y term cyntaf a'r $n$fed term.

Os a yw'r term cyntaf a d yw'r gwahaniaeth cyffredin, y 5ed term yw $a + 4d$, ac felly

$$a + 4d = 8 \qquad (1)$$

a'r 13eg term yw 19, ac felly

$$a + 12d = 19 \qquad (2).$$

Mae cyfernodau *a* yn (1) a (2) yn hafal ac felly nid oes angen lluosi'r hafaliadau.

Trwy dynnu (1) o (2)

$$8d = 11$$

$$\therefore \quad d = \frac{11}{8}.$$

Trwy amnewid d yn (1),

$$\therefore \quad a + 4 \times \frac{11}{8} = 8$$

ac $\quad a = 8 - \frac{11}{2} = \frac{5}{2}.$

Gwiriwch yn (2): $\quad \frac{5}{2} + 12 \times \frac{11}{8} = \frac{5}{2} + \frac{33}{2} = 19$ (mae'n wir)

a'r $n$fed term yw $\quad \frac{5}{2} + (n-1)\frac{11}{8} = \frac{9}{8} + \frac{11n}{8}.$

Enghraifft 3.13

$n$fed term D.Rh. yw $8 - 3n$. Beth yw'r term 1af a'r gwahaniaeth cyffredin?

Yr $n$fed term yw $8 - 3n$. Trwy roi $n = 1$ ceir mai'r term cyntaf yw $8 - 3 = 5$.

Yr ail derm yw $8 - (3 \times 2) = 2$, felly y gwahaniaeth cyffredin yw -3.

Swm n term mewn D.Rh.

O wybod dilyniant termau dilyniant rhifyddol, gellir darganfod swm yr n term cyntaf, h.y. yr $n$fed swm rhannol S_n.

Os l yw'r $n$fed term, gellir ysgrifennu swm y gyfres fel

felly $l = a + (n-1)d$

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots (l-2d) + (l-d) + l.$$

Trwy gildroi'r drefn,

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \ldots (a+2d) + (a+d) + a.$$

Trwy adio $\therefore$ $2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \ldots + (a+l) + (a+l) + (a+l)$

$(a+l)$ n gwaith

a $2S_n = n(a+l)$.

$\therefore$ $S_n = \dfrac{n}{2}(a+l)$. (A)

Gellir ystyried y swm felly fel

(nifer y termau) × (cyfartaledd y term cyntaf a'r term diwethaf).

Gan fod $l = a + (n-1)d$ gellir hefyd ysgrifennu

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$$

neu $S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$. (B)

Gellir defnyddio (A) neu (B) mewn cyfrifiadau.

Enghraifft 3.14

(i) Rhoddir D.Rh. o 15 term; y term cyntaf yw 1 a'r term olaf yw 9.

$a = 1$, $l = 9$, ac $n = 15$.

$\therefore$ $S_n = \dfrac{15}{2}(1+9) = 75.$

(ii) $\displaystyle\sum_{r=1}^{16}(3+2r) = 5 + 7 + 9 + \ldots + 35$

$n = 16, a = 5, l = 35$

$= \dfrac{16}{2}(5+35) = 320.$

(iii) Mewn D.Rh., swm yr ugain term cyntaf yw 60 ac mae'r 8fed term yn 3 gwaith y 4ydd term. Darganfyddwch y term cyntaf a swm y 54 term cyntaf.

$S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, $n = 20$ ac $S_{20} = 60$.

$\therefore$ $\dfrac{20}{2}[2a + 19d] = 60$

neu $2a + 19d = 6$. (1)

Hefyd, gan fod yr 8fed term yn 3 gwaith y 4ydd term,

$a + 7d = 3(a + 3d)$

ac felly $a + d = 0$. (2)

Lluoswch hafaliad (2) â 2 a'i dynnu o hafaliad (1).

$\therefore$ $17d = 6$

ac felly $d = \dfrac{6}{17}$, ac $a = -d = -\dfrac{6}{17}$.

Yna
$$S_{54} = \frac{54}{2}\left[2\times\frac{6}{17}+53\times\frac{6}{17}\right]$$
$$= 27\times 51\times\frac{6}{17} = 486.$$

Ymarferion 3.6

1. Darganfyddwch 7fed term y dilyniant rhifyddol $4, 7, 10, \ldots$
2. Darganfyddwch dri therm nesaf y D.Rh. $a + 3b, a + b, a - b, \ldots$
3. Y 4ydd term mewn D.Rh. yw 12 a'r 6ed term yw 17. Beth yw'r 10fed term?
4. Pa derm yn y dilyniant $3.5, 5.4, 7.3, \ldots$ yw 24.4?
5. Darganfyddwch swm y 50 odrif cyntaf.
6. Swm n term cyntaf cyfres rifyddol yw $S_n = n^2 - 5n$. Darganfyddwch y pedwerydd term a'r $n$fed term.
7. Rhoddir swm n term cyntaf cyfres gan $S_n = 4n^2 - 3n$.
   Darganfyddwch $S_n - S_{n-1}$. Diddwythwch fod termau'r gyfres yn ddilyniant rhifyddol.
8. Sawl term o'r D.Rh. $8, 11,14, \ldots$ y mae eu hangen er mwyn i swm y gyfres fod yn 435?
9. Mae contractwr yn cytuno i gloddio ffynnon 100 metr o ddyfnder am bris o £30 am y metr cyntaf, £50 am yr ail fetr ac £20 ychwanegol am bob metr. Darganfyddwch gost y metr olaf a chyfanswm y gost.
10. Mae rhiant cefnog yn cynilo £50 ar ben-blwydd cyntaf ei ferch, £55 ar ei hail ben-blwydd, £60 ar ei thrydydd pen-blwydd ac ati, gan gynyddu'r swm £5 ar bob pen-blwydd. Faint fydd wedi'i gynilo pan fydd y ferch yn cyrraedd ei 18fed pen-blwydd?
11. A yw'r gyfres $S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots$ yn gydgyfeiriol?
12. Y term cyntaf mewn cyfres rifyddol yw -12, a'r term olaf yw 40. Os 196 yw swm y gyfres, darganfyddwch nifer y termau a'r gwahaniaeth cyffredin.
13. Yr 21ain term mewn cyfres rifyddol yw $5\frac{1}{2}$, a swm y 21 term cyntaf yw $94\frac{1}{2}$.
    Darganfyddwch y term cyntaf, y gwahaniaeth cyffredin a swm y 30 term cyntaf.
14. Ail derm cyfres rifyddol yw 5 a'r chweched term yw -7. Darganfyddwch y term cyntaf, y gwahaniaeth cyffredin a swm yr ugain term cyntaf.
15. Swm yr ugain term cyntaf mewn cyfres rifyddol yw 510, a swm y deugain term cyntaf yw 2220. Darganfyddwch swm 50 term cyntaf y gyfres.

3.6 Dilyniant geometrig (D.G.)

Ystyriwn y dilyniannau canlynol :

(i) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$

(ii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

(iii) $2, -6, 18, -54, \ldots$

(iv) $x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ \ldots$

Mae gan y dilyniannau hyn nodwedd gyffredin: mae'r gymhareb rhwng termau olynol yn gysonyn. Felly yn (i) y gymhareb hon yw 2; yn (ii) y gymhareb yw $\frac{1}{2}$; yn (iii) y gymhareb yw -3; ac yn (iv) y gymhareb yw x.

Diffiniad

Dilyniant geometrig (D.G.) yw dilyniant o dermau lle mae cymhareb unrhyw derm i'r term yn syth o'i flaen yn gyson trwy'r dilyniant cyfan.

Gelwir y gymhareb hon yn **gymhareb gyffredin** y dilyniant. Yn gyffredinol, gyda dilyniant geometrig sydd â therm cyntaf a a chymhareb gyffredin r, dyma'r termau:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots,$$

lle gall a ac r fod yn unrhyw rifau real.

Yr $n$fed term yw ar^{n-1}.

Enghraifft 3.15

Term cyntaf dilyniant geometrig yw a ac mae'r 3ydd term yn hafal i swm y term 1af a'r 2il derm. Beth yw gwerthoedd posibl y gymhareb gyffredin r?

Y termau yw $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

$$ar^2 = a + ar$$

ac felly $\quad ar^2 = a(1+r)$. $\quad$ gan dybio bod $a \neq 0$

$\therefore \quad r^2 = 1 + r$

ac felly $\quad r^2 - r - 1 = 0$.

Datrysir hyn trwy ddefnyddio'r fformiwla gwadratig

$$\therefore \quad r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} \qquad a = 1,\ b = -1,\ c = -1$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ar ffurf syrdiau, gwerthoedd posibl y gymhareb gyffredin yw $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Enghraifft 3.16

Chweched term D.G. yw 24 a'r 3ydd term yw 3. Darganfyddwch y gymhareb gyffredin a'r term cyntaf.

Mae'r 6ed term $= ar^5 = 24$.

Mae'r 3ydd term $= ar^2 = 3$.

Yna $\qquad \dfrac{\text{6ed term}}{\text{3ydd term}} = \dfrac{ar^5}{ar^2} = r^3 = 8.$

$\therefore \qquad r = 2$

Yna, gan mai 3 yw'r 3ydd term,

$$a(2)^2 = 3 \quad \text{ac felly} \quad a = \frac{3}{4}.$$

Ymarferion 3.7

1. Ysgrifennwch ddau derm nesaf y dilyniannau canlynol:-
   (a) 2, 6, 18, . . . (b) 25, 5, 1, . . .
   (c) 12, −18, 27, . . . (d) 0.2, 0.02, 0.002, . . .
2. Darganfyddwch chweched term y dilyniant 2, 4, 8, . . .
3. Darganfyddwch chweched term y dilyniant $6, -4, \frac{8}{3}, \ldots$
4. Darganfyddwch bumed term y dilyniant 1.2, 1.44, 1.728, . . .
5. Term cyntaf dilyniant geometrig (D.G.) yw 1.1 a'r gymhareb gyffredin yw 1.2. Darganfyddwch y chweched term.
6. Penodir person ifanc i swydd ar gyflog o £5000 a'r addewid y bydd y cyflog yn codi bob blwyddyn 10 y cant o gyflog y flwyddyn flaenorol. Beth fydd y cyflog ar ôl chwe blynedd?
7. Costau cynnal busnes yw £2.5 miliwn y flwyddyn. Mae'r cyfarwyddwyr yn penderfynu eu lleihau 3 y cant o gostau'r flwyddyn flaenorol. Beth fydd costau cynnal y busnes yn y bumed flwyddyn, o wybod bod y lleihad cyntaf yn digwydd yn y flwyddyn gyntaf?
8. Pumed term dilyniant geometrig yw 256 a'r ail derm yw 4. Darganfyddwch y term cyntaf a'r gymhareb gyffredin.
9. Trydydd term dilyniant geometrig yw 2, a'r pumed yw 18. Darganfyddwch ddau werth posibl i'r gymhareb gyffredin, a'r ail derm yn y naill achos a'r llall.
10. Y tri rhif $n - 2$, n, ac $n + 3$ yw tri therm cyntaf dilyniant geometrig. Darganfyddwch n, a'r term nesaf ar ôl $n + 3$.
11. Darganfyddwch, yn ei ffurf symlaf, gymhareb gyffredin y dilyniant geometrig
$$\left(\sqrt{2}-1\right), \left(3-2\sqrt{2}\right), \ldots.$$
Darganfyddwch y trydydd term yn y dilyniant hwn.

Swm *n* term D.G.

Os oes gennych ddilyniant geometrig, gellir cyfansymu termau'r dilyniant.
Tybiwch fod

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}. \qquad (1)$$

symud termau i'r dde

Lluoswch (1) ag r $\therefore$ $rS_n = \quad ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n. \quad (2)$

Tynnwch (2) o (1): $S_n(1-r) = a - ar^n = a(1 - r^n).$

$$\therefore \qquad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Enghraifft 3.17
Seithfed term D.G. sydd â chymhareb gyffredin bositif yw 36, a'r trydydd term yw 9. Darganfyddwch y gymhareb gyffredin, a swm yr wyth term cyntaf.

Os a yw'r term cyntaf ac r yw'r gymhareb gyffredin, yna yr $n$fed term yw ar^{n-1}.

Felly $ar^6 = 36, \quad (n = 7)$
ac $ar^2 = 9. \quad (n = 3)$
Mae rhannu'r rhain yn rhoi $r^4 = 4$
ac felly $r^2 = \pm 2$
neu $r = \sqrt{2}$, gan anwybyddu $r = -\sqrt{2}$.

Nid oes gwerth real r lle mae $r^2 = -2$.

Mae amnewid r yn $ar^2 = 9$
yn rhoi $2a = 9$
ac felly $a = \frac{9}{2}$.

Swm wyth term
$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
$$= \frac{\frac{9}{2}\left[1-\left(\sqrt{2}\right)^8\right]}{1-\sqrt{2}} = \frac{\frac{9}{2}\left[1-2^4\right]}{1-\sqrt{2}}$$
$$= \frac{135}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{135}{2}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Gwiriwch y cymarebu.

Enghraifft 3.18
Swm n term cyntaf cyfres yw $5^n - 1$. Dangoswch fod termau'r gyfres hon mewn dilyniant geometrig a darganfyddwch y term cyntaf a'r gymhareb gyffredinol.

Os yw $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
yna
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 5^n - 1 - (5^{n-1} - 1)$$
$$= 5^n - 5^{n-1} = 5^{n-1}(5-1)$$
$$= 4 . 5^{n-1}.$$
Felly $n$fed term $a_n = 4 . 5^{n-1}$ sy'n disgrifio D.G.
Yna $a = 4$, ac $r = 5$.

3.7 Swm cyfres geometrig i anfeidredd

Wrth ystyried $n$fed swm rhannol y gyfres
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots,$$
h.y. swm yr n term cyntaf, ceir bod
$$S_n = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$$

termau D.G. gydag $a = 1$, $r = 1/2$

$$= \frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Yna wrth i $n \to \infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$

ac $S_n \to 2.$

Felly mae'r gyfres $S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ yn gydgyfeiriol.

Mae symiau rhannol yn tueddu at derfan.

Mewn cyferbyniad, mae gan y gyfres $S = 1+2+4+\ldots$

swm rhannol $S_n = \frac{1\left[2^n-1\right]}{2-1} = 2^n - 1.$

Yn yr achos hwn, wrth i $n \to \infty$, mae $S_n \to \infty$.

Mae'r ail gyfres hon yn dargyfeirio.

Mae'n ymddangos felly y gall cyfresi sydd â thermau mewn dilyniant geometrig gydgyfeirio neu ddargyfeirio.

Yn adran 3.6 gwelwyd os yw $S = a + ar + ar^2 + \ldots$, y rhoddir y swm rhannol S_n gan $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

(i) Pan fo $|r| < 1$, h.y. $-1 < r < 1$, $r^n \to 0$ wrth i $n \to \infty$, ac felly

$$S_n \to \frac{a}{1-r}.$$

Ystyr $|r|$ yw gwerth rhifyddol r gan anwybyddu'r arwydd.

(ii) Pan fo $|r| > 1$, h.y. $r > 1$ neu $r < -1$,

$S_n \to \pm\infty$ os yw $r > 0$

neu mae ei arwydd yn dod bob yn ail ($r < 0$).

Felly nid yw S_n yn tueddu at derfan wrth i $n \to \infty$ os yw $|r| > 1$; mewn geiriau eraill, nid yw'r gyfres yn cydgyfeirio gyda'r amrediad hwnnw o r.

Gall a fod yn bositif neu yn negatif.

(iii) Pa fo $r = 1$,

$S_n = a + a + a + \ldots + a$ (n gwaith)

ac felly $S_n = na$ ac $S_n \to \pm\infty$ wrth i $n \to \infty$.

(iv) Pan fo $r = -1$,

$S_n = a - a + a \ \ldots$

ac $S_n = 0$ (n yn eilrif)

$= a$ (n yn odrif).

Crynodeb
Mae'r gyfres geometrig $S = a + ar + ar^2 + \ldots$ yn cydgyfeirio os yw $|r| < 1$.
Mae'n dargyfeirio neu yn osgiliadu gyda gwerthoedd r eraill.
Gyda chyfres geometrig gydgyfeiriol, dywedir mai $\lim_{n\to\infty} S_n$ yw'r **swm i anfeidredd**. Felly, y swm i anfeidredd $= \dfrac{a}{1-r}$.

Enghraifft 3.19
Ysgrifennwch swm i anfeidredd y gyfres

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$$

Yn yr achos hwn $a = \dfrac{1}{4}$, ac $r = \dfrac{1}{4}$.

Felly, y swm i anfeidredd $= \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$.

Enghraifft 3.20
Darganfyddwch derfan y dilyniant
0.1, 0.11, 0.111, 0.111, . . .

$n$fed term y dilyniant yw
0.111 . . . 1

n 1 ar ôl y pwynt.

Mewn gwirionedd y degolyn hwn yw'r gyfres geometrig

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^n}$$

0.1 + 0.01 + 0.001 + ...

Wrth i $n \to \infty$, mae nifer y termau yn cynyddu'n anfeidraidd a'r swm i anfeidredd yw

$$\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}.$$

$$\mathbf{a = \frac{1}{10}, \quad r = \frac{1}{10}}$$

Felly terfan 0.1, 0.11, 0.111, . . . yw $\dfrac{1}{9}$.

Ymarferion 3.8

1. Darganfyddwch swm n term cyntaf y cyfresi
   (i) $S = 2 + 6 + 18 + \ldots$
   (ii) $25 + 5 + 1 + \ldots$
   (iii) $12 - 18 + 27 + \ldots$
   (iv) $0.2 + 0.02 + 0.002 + \ldots$

2. Ysgrifennwch y swm i anfeidredd ar gyfer y gwahanol gyfresi yn (i) - (iv), pan fo'n bodoli.

3. Ysgrifennwch swm i anfeidredd

   (i) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$

   (ii) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$

   (iii) $0.06 + 0.0006 + 0.000006 + \ldots$

4. Darganfyddwch $\sum_{r=1}^{10} (1.1)^r$.

5. Darganfyddwch swm n term y gyfres

   (i) $1 + x + x^2 + \ldots$ **Tybiwch fod $x \neq 1$**

   (ii) $1 - x + x^2 + \ldots$

   (iii) $a + 1 + \frac{1}{a} + \ldots$ **Tybiwch fod $a \neq 0$**

   (iv) $b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{4} + \frac{b^4}{8} + \ldots$

6. Swm 3 therm cyntaf cyfres geometrig yw 15 a'r term cyntaf yw 10. O wybod bod y gyfres yn gydgyfeiriol, darganfyddwch y swm i anfeidredd.

7. Swm i anfeidredd cyfres geometrig yw 15, a'r term cyntaf yw 5. Termau cyfres arall yw sgwariau termau'r gyfres hon. Darganfyddwch swm i anfeidredd yr ail gyfres.

8. Darganfyddwch union werth y degolion cylchol canlynol:

   (i) 0.444 . . . (ii) 0.424242 . . .

   (iii) 0.4232323 . . . (iv) 0.1676676676 . . .

9. Gollyngir pêl rwber o uchder o 3 metr. Bob tro mae'n adlamu mae'n codi i uchder sy'n $\frac{2}{3}$ yr uchder blaenorol. Dangoswch fod cyfanswm y pellter a deithir gan y bêl yn tueddu at 15 metr.

10. Gwelir bod cynnyrch blynyddol glofa fechan yn gostwng 10 y cant o'i gymharu â'r cynnyrch blaenorol. Os oedd gwerth y cynnyrch am y flwyddyn gyntaf yn £100 000, cyfrifwch werth cyfanswm y cynnyrch, ar y prisiau presennol.

11. Swm dau derm cyntaf cyfres geometrig yw 12 a'r trydydd term yw 1. Darganfyddwch

    (a) ddau werth posibl y cymarebau cyffredin,

    (b) swm i anfeidredd y gyfres sydd â chymhareb gyffredin bositif.

12. Swm dau derm cyntaf cyfres geometrig yw 3; y swm i anfeidredd yw 4. Darganfyddwch werthoedd posibl y gymhareb gyffredin.

Pennod 4

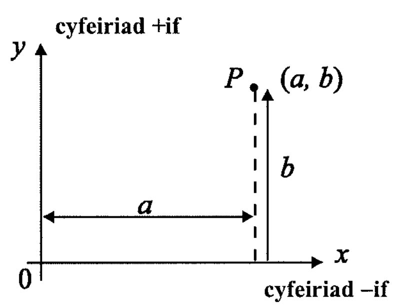
Geometreg Gyfesurynnol Gartesaidd

Mae geometreg gyfesurynnol yn ymwneud â defnyddio dulliau algebraidd i ddatrys problemau geometregol sy'n cynnwys llinellau syth, cromliniau ac arwynebau. Yn y bennod hon a'r bennod nesaf canolbwyntir ar geometreg mewn dau ddimensiwn, h.y. geometreg sy'n ymwneud â ffigurau planar.

4.1 Cyfesurynnau mewn plân

Cymerir yn ganiataol yma bod y darllenydd yn gyfarwydd â phlotio pwyntiau er mwyn llunio graffiau syml. Yn benodol, cymerir yn ganiataol bod gan y darllenydd beth gwybodaeth am gyfesurynnau cartesaidd petryalog.

Dynodir safle pwynt P mewn plân gan ei bellterau perpendicwlar oddi wrth y llinellau perpendicwlar sefydlog $0x$, $0y$. Mae gan bwynt P yn y diagram ei gyfesuryn x yn hafal i a, a'i gyfesuryn y yn hafal i b.

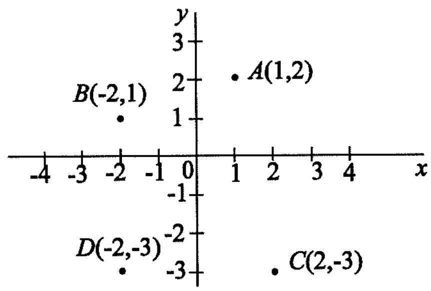


Dylid nodi wrth fynd ymlaen mai *cyfesuryn x* pwynt yw ei bellter perpendicwlar oddi wrth $0y$ (a hefyd yn yr un modd ei gyfesuryn y). Hefyd mae cyfeiriad i'r pellterau fel bod cyfesuryn positif (negatif) yn cyfateb i gyfeiriad positif (negatif) yr echelin.

Rhoddir y cyfesurynnau fel pâr trefnedig gyda'r cyfesuryn x (a elwir yn aml yn *absisa*) yn gyntaf a'r cyfesuryn y (a elwir yn aml yn *fesuryn*) yn ail. Cyfeirir at bwynt P fel (a, b).

Enghraifft 4.1

Cynrychiolir y pwyntiau $A(1,2)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -3)$, $D(-2, -3)$ fel a ddangosir.

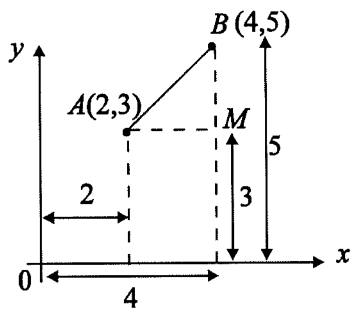


4.2 Y pellter rhwng dau bwynt mewn plân

O wybod cyfesurynnau cartesaidd petryalog dau bwynt gellir darganfod y pellter rhyngddynt.

Enghraifft 4.2

Darganfyddwch y pellter rhwng pwyntiau $A(2, 3)$ a $B(4,5)$



Os cynrychiolir y pwyntiau fel hyn, a thynnu llinell AM yn baralel i $0x$ fel a ddangosir, yna mae triongl ABM yn driongl ongl sgwâr.

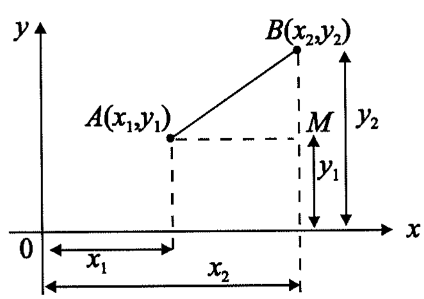
Weithiau defnyddir y symbol Δ er mwyn dynodi triongl.

Yn ôl theorem Pythagoras,

$$\begin{aligned} AB^2 &= AM^2 + MB^2 \\ &= (4-2)^2 + (5-3)^2 \\ &= 2^2 + 2^2 = 8 \end{aligned}$$

ac felly $\qquad AB = \sqrt{8}$.

Yn gyffredinol, os yw $A(x_1,y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ yn ddau bwynt cyffredinol fel hyn,



yna, o theorem Pythagoras, ceir bod

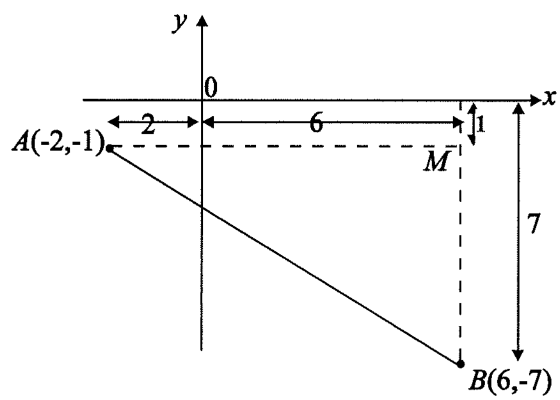
$$AB^2 = AM^2 + MB^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

neu $$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Hynny yw, ceir AB^2 trwy sgwario'r gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau x, sgwario'r gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau y a'u hadio. Mae'r dull hwn yn ddilys hyd yn oed os yw rhai neu'r cyfan o'r cyfesurynnau x ac y yn negatif.

Enghraifft 4.3

Darganfyddwch AB ar gyfer $A(-2, -1)$ a $B(6, -7)$.



$$AM = 2 + 6 = 6 - (-2) = x_2 - x_1,$$
$$MB = 7 - 1 = -1 - (-7) = y_1 - y_2,$$
$$AM^2 = (x_2 - x_1)^2,$$

ac $$MB^2 = (y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$$

ac felly $AB^2 = AM^2 + MB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Gan gofio ystyried arwyddion y cyfesurynnau, mae'r fformiwla flaenorol yn ddilys bob amser.

Rheol

Darganfyddir sgwâr y pellter rhwng dau bwynt trwy sgwario'r gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau x, sgwario'r gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau y ac adio'r sgwariau hynny.

Ymarferion 4.1

1. Darganfyddwch hyd y llinellau sy'n cysylltu'r parau canlynol o bwyntiau :-

   (a) (1, 2), (2, 4) (b) (1, 2), (−1, 3) (c) (2,1), (0, 2)

   (d) (0, 0), (−3, −4) (e) (−2, −3), (−4, −5).

2. O wybod y pwyntiau $A(1, 3)$, $B(12, 10)$, $C(6, 0)$ dangoswch fod y triongl ABC yn driongl ongl sgwâr (defnyddiwch Theorem Pythagoras).

3. Darganfyddwch hyd y llinellau o'r tardd 0 i bwyntiau (i) (4, 5) (ii) (−3, 4) (iii) (−3, −5).

4. Dangoswch fod y triongl ABC yn driongl isosgeles lle mae pwyntiau A, B, C yn $(-1, -2)$, $(10, 5)$ a $(9, -8)$, yn ôl eu trefn.

5. Pwynt A yw $(3, 2)$ a phwynt P yw (x, y) lle mae x ac y yn anhysbys. O wybod bod $AP = 5$, dangoswch fod
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0.$$

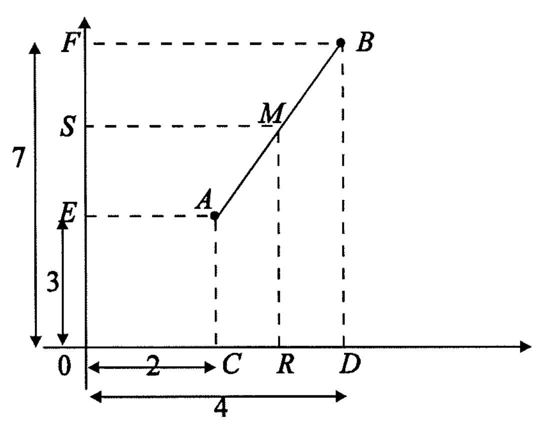
6. A a B yw pwyntiau $(1, 2)$ a $(3, 7)$ yn ôl eu trefn. P yw pwynt (x, y) lle mae x ac y yn anhysbys. O wybod bod $AP = PB$, dangoswch fod $10y + 4x - 53 = 0$.

7. Ar gyfer triongl ABC, profwch fod yr ochrau AB a BC yn berpendicwlar os yw cyfesurynnau'r pwyntiau A, B, ac C yn $(-2, 1)$, $(7, 4)$ a $(9, -2)$ yn ôl eu trefn.

4.3 Canolbwynt y llinell syth sy'n cysylltu dau bwynt a roddir

Enghraifft 4.4

Darganfyddwch gyfesurynnau canolbwynt y llinell AB, os A a B yw'r pwyntiau (2,3) a (4, 7).



Yn y diagram M yw canolbwynt AB. Gellir profi (er na wneir hynny yma) mai R ac S yw canolbwyntiau CD ac EF, yn ôl eu trefn.

Yna cyfesuryn x ar gyfer pwynt M $= OR = OC + CR$
$$= OC + \tfrac{1}{2}CD$$
$$= 2 + \tfrac{1}{2}(4 - 2) = 3.$$

Hefyd cyfesuryn y ar gyfer $M = OS$ $= OE + ES$
$$= OE + \tfrac{1}{2}EF$$
$$= 3 + \tfrac{1}{2}(7 - 3) = 5.$$

Felly M yw'r pwynt (3, 5).

Mae archwilio'r cyfesurynnau gwreiddiol yn dangos bod

$$\text{cyfesuryn } x\ M = 3 = \tfrac{1}{2}(\text{cyfesuryn } x\ A + \text{cyfesuryn } x\ B),$$
$$\text{cyfesuryn } y\ M = 5 = \tfrac{1}{2}(\text{cyfesuryn } y\ A + \text{cyfesuryn } y\ B).$$

Mae hwn yn ganlyniad cyffredinol, mewn gwirionedd. Os A yw pwynt (x_1, y_1), a B yw (x_2, y_2), yna bydd y cyfrifiadau uchod gydag $OC = x_1$, $OD = x_2$, $OE = y_1$, $OF = y_2$ yn rhoi

$$\text{cyfesuryn } x\,M = x_1 + \tfrac{1}{2}CD = x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$$
$$\text{a chyfesuryn } y\,M = y_1 + \tfrac{1}{2}EF = y_1 + \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1) = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Rheol

Mae gan ganolbwynt y llinell sy'n cysylltu pwyntiau (x_1, y_1) ac (x_2, y_2) gyfesurynnau

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Mae'r canlyniad hwn yn ddilys pan fo rhai neu'r cyfan o'r cyfesurynnau yn negatif.

Enghraifft 4.5

Darganfyddwch gyfesurynnau canolbwynt y llinell sy'n cysylltu pwyntiau $(-1, 4)$ a $(3, -8)$.

Yna ar gyfer y canolbwynt

$$x = \frac{(-1)+3}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1,$$
$$y = \frac{4+(-8)}{2} = \frac{4-8}{2} = -2.$$

Ymarferion 4.2

1. Darganfyddwch gyfesurynnau canolbwyntiau'r llinellau sy'n cysylltu'r parau canlynol o bwyntiau :- (a) $(1, 2), (2, 4)$ (b) $(1, 2), (-1, 3)$ (c) $(2, 1), (0, 2)$ (d) $(0, 0), (-3, -4)$ (e) $(-2, -3), (-4, -5)$.

2. A, B, ac C yw'r pwyntiau $(4, 9)$, $(-2, 1)$ a $(6, 7)$ yn ôl eu trefn. Dangoswch fod ΔABC yn isosgeles a darganfyddwch ganolbwynt y sail AC. Trwy hyn darganfyddwch arwynebedd ΔABC.
   [Cymerwch mai arwynebedd triongl yw $\frac{1}{2}$sail × uchder.]

3. Mae A, B, M yn dri phwynt lle mae M yn ganolbwynt AB. Cyfesurynnau A ac M yw $(3, 5)$ a $(-1, 2)$ yn ôl eu trefn. Darganfyddwch gyfesurynnau B.

4. Mae'r llinell sy'n cysylltu $A(1, 4)$ a $B(3, 8)$ yn ddiamedr cylch. Darganfyddwch ganol a radiws y cylch hwn.

5. Cyfesurynnau fertigau P, Q, R, S pedrochr yw $(-1, 2)$, $(5, 4)$, $(7, 0)$ a $(-3, -2)$ yn ôl eu trefn. A, B, C, D yw canolbwyntiau ochrau PQ, QR, RS, SP yn ôl eu trefn. Dangoswch fod canolbwyntiau AC a BD yn cyd-daro.

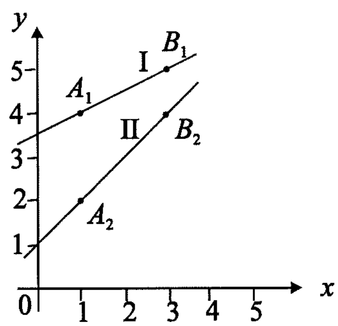
6. Dangoswch fod y triongl sydd â fertigau (–2, 0), (0, 4), a (4, 2) yn isosgeles ac yn driongl ongl sgwâr. Darganfyddwch ei arwynebedd.

7. Dangoswch fod y ffigur sydd â fertigau (3, 6) (5, 4), (7, 6) a (5, 8) yn sgwâr a darganfyddwch ei arwynebedd.
[Cymerwch mai arwynebedd sgwâr yw (hyd yr ochr)^2.]

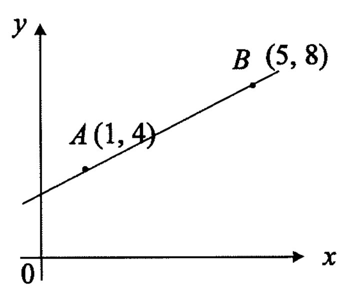
Rydym am barhau ein hastudiaeth o geometreg gyfesurynnol trwy ystyried geometreg llinellau syth

4.4 Graddiant llinell syth

Ystyriwn y ddwy linell syth a roddir yn y diagram. Mae synnwyr cyffredin yn dweud ei bod yn amlwg bod llinell II yn fwy serth na llinell I. Mae'r cysyniad o raddiant yn ein galluogi i ddweud faint yw llinell II yn fwy serth na llinell I.



Diffiniad
Graddiant llinell yw'r cynnydd yn y cyfesuryn y wedi'i rannu â'r cynnydd yn y cyfesuryn x rhwng un pwynt ar y llinell a phwynt arall ar y llinell.



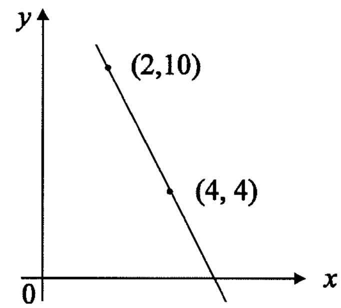
Yna ar gyfer y llinell a ddangosir uchod, y graddiant =

$$\frac{\text{gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau } y \text{ ar gyfer } A \text{ a } B}{\text{gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau } x \text{ ar gyfer } A \text{ a } B} = \frac{8-4}{5-1} = \frac{4}{4} = 1.$$

Enghraifft 4.6

Canfyddwch raddiant y llinell sy'n cysylltu pwyntiau (2, 10) a (4, 4).

$$\text{Yna'r graddiant} = \frac{\text{gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau } y}{\text{gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau } x} = \frac{4-10}{4-2} = \frac{-6}{2} = -3.$$



Mae'r graddiant negatif yn dangos bod y yn lleihau wrth i x gynyddu; mewn geiriau eraill, mae'r llinell yn gostwng wrth fynd i'r dde.
Dylid nodi yma ac yn gyffredinol bod y gwerth a gaiff ei gyfrifo ar gyfer y graddiant yn annibynnol ar y drefn y caiff y cyfesurynnau y neu x eu tynnu.

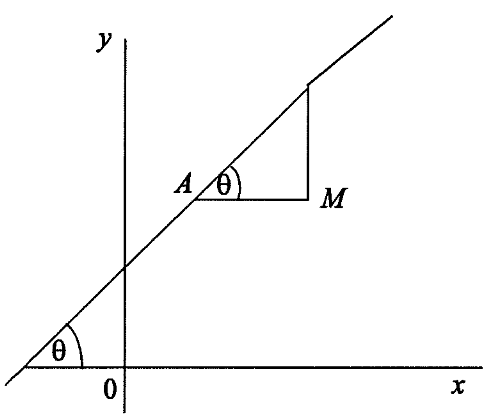
Enghraifft 4.7

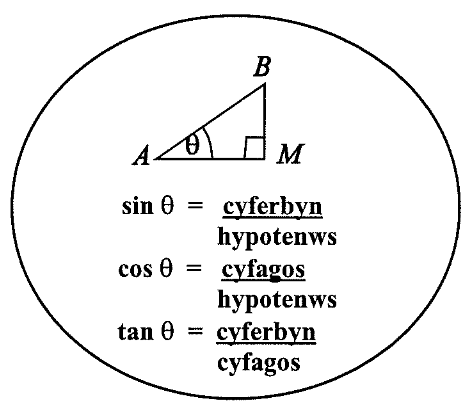
Darganfyddwch oledd y llinell sy'n cysylltu'r pwyntiau (3, –5) a (–4, 9).

$$\text{Y graddiant} = \frac{-5-9}{3-(-4)} = \frac{-14}{7} = -2$$

$$\text{neu} \quad = \frac{9-(-5)}{-4-3} = \frac{14}{-7} = -2.$$

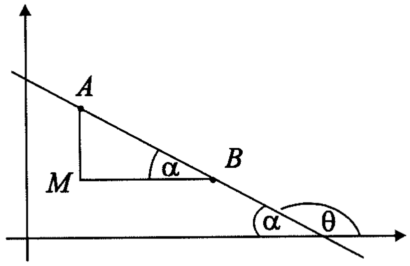
Mae perthynas gref rhwng graddiant llinell a'r ongl y mae'r llinell yn ei gwneud â'r echelin x.





Ar gyfer y llinell a ddangosir uchod,

$$\text{Y graddiant} = \frac{\text{gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau } y}{\text{gwahaniaeth rhwng y cyfesurynnau } x} = \frac{BM}{MA} = \tan\theta.$$



Mae'r diffiniad hwn yn ddilys pa un ai yw'r graddiant yn negatif neu yn bositif. Gyda graddiant negatif, fel a ddangosir uchod,

mae'r graddiant $= \dfrac{-AM}{MB} = -\tan\alpha = \tan\theta$

gan fod $\theta + \alpha = 180°$.

Gofynnir i chi dderbyn bod $\tan(180 - \theta) = -\tan\theta$.

Diffiniad

Graddiant y llinell sy'n mynd trwy bwyntiau $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ yw

$$\frac{\text{gwahaniaeth rhwng cyfesurynnau } y}{\text{gwahaniaeth rhwng cyfesurynnau } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta,$$

lle mae θ yn cynrychioli'r ongl rhwng y llinell ac echelin bositif x.

neu $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Ymarferion 4.3

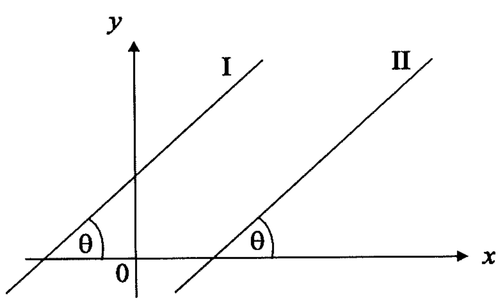
1. Darganfyddwch raddiant y llinell sy'n cysylltu bob pâr o bwyntiau:

   (i) (2, 3), (4, 7) (ii) (−2, 3), (2, 5) (iii) (−2, 3), (2, 4)

   (iv) (8, 9), (10, 7) (v) (−3, 6), (2, −5).

2. Mae $A(1, 5)$, $B(3, 11)$, $C(5, 17)$ yn dri phwynt ar linell syth. Gellir dewis tri phâr o bwyntiau o blith y pwyntiau hyn. Dangoswch nad yw gwerth graddiant y llinell yn dibynnu ar ba bâr o bwyntiau a ddewisir.

4.5 Llinellau paralel



Os yw llinellau I a II yn baralel, mae onglau cyfartal rhyngddynt ac echelin bositif xf. θ yw'r ongl gyffredin a ddangosir yn y diagram. Graddiant = tan θ, felly mae'n dilyn bod gan linellau paralel raddiannau cyfartal.

Enghraifft 4.8

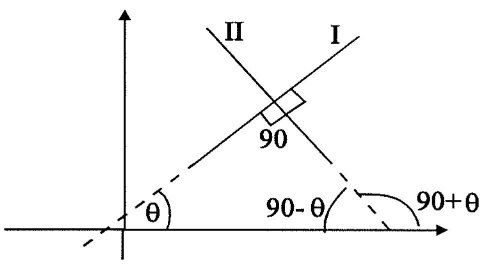
Dangoswch fod y llinell sy'n cysylltu (3, 7) a (5, 15) yn baralel i'r llinell sy'n cysylltu (–6, –8) a (2, 24).

Y graddiant cyntaf $= \dfrac{15-7}{5-3} = \dfrac{8}{2} = 4.$

Yr ail raddiant $= \dfrac{24-(-8)}{2-(-6)} = \dfrac{32}{8} = 4.$

Mae'r graddiannau yn gyfartal ac felly mae'r llinellau yn baralel.

4.6 Llinellau perpendicwlar



Mae dwy linell I a II yn croestorri ar onglau sgwâr fel a ddangosir.

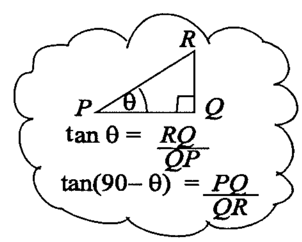
Graddiant I $= \tan\theta$

Graddiant II $= \tan(90+\theta)$

$= -\tan(90-\theta)$

$= -\dfrac{1}{\tan\theta}.$

Mae 90 + θ a 90 – θ yn adio i 180.



Felly graddiant II $= -\dfrac{1}{\text{graddiant I}}$

ac felly graddiant II × graddiant I $= -1$.

Rheol

Lluoswm graddiannau dwy linell berpendicwlar yw –1.

Enghraifft 4.9

Dangoswch fod y llinell sy'n cysylltu (1, 3) a (3, 6) yn berpendicwlar i'r llinell sy'n cysylltu (8,6) a (5, 8).

Y graddiant cyntaf $= \dfrac{6-3}{3-1} = \dfrac{3}{2}.$

Yr ail raddiant $= \dfrac{8-6}{5-8} = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}.$

Lluoswm y graddiannau $= \dfrac{3}{2} \times -\dfrac{2}{3} = -1.$

Trwy hyn mae'r llinellau yn berpendicwlar.

Ymarferion 4.4

1. Penderfynwch a yw AB yn berpendicwlar neu yn baralel i CD, neu beidio:
   (a) $A(1, 0)$ $B(2, 2)$, $C(2, 6)$ $D(0, 2)$
   (b) $A(-2, 0)$ $B(0, 1)$, $C(-4, 0)$ $D(-3, -2)$
   (c) $A(1, 1)$ $B(-5, -1)$, $C(-3, -3)$ $D(-1, -9)$
   (d) $A(3, 7)$ $B(0, -8)$, $C(3, 12)$ $D(1, 2)$.
2. Mae pwyntiau $A(2, 3)$, $B(3, 5)$, $C(2, 2)$, $D(a, b)$ yn ffurfio paralelogram $ABCD$. Darganfyddwch a a b.
3. Dangoswch fod pwyntiau $A(0, 2)$, $B(4, 6)$, $C(3, 7)$, $D(-1, 3)$ yn ffurfio petryal $ABCD$. Darganfyddwch arwynebedd y petryal hwn.
4. Mae pwyntiau $A(3, 7)$, $B(6, 1)$ ac $C(a, -3)$ yn ffurfio triongl ABC gydag ongl $ABC = 90°$. Darganfyddwch a ac arwynebedd y triongl.
5. Mae $A(3, -3)$, $B(-5, -3)$ ac $C(3, 5)$ yn ffurfio triongl ABC. D yw canolbwynt BC. Dangoswch fod AD yn berpendicwlar i BC. Darganfyddwch arwynebedd ΔABC.
6. Dangoswch fod $P(11, 12)$, $Q(33, 34)$, $R(-22, 23)$ ac $S(-44, 1)$ yn ffurfio paralelogram. Yna, dangoswch fod canolbwyntiau PR a QS yn cyd-daro.
7. A, B, C, D yw'r pwyntiau $(0, -4)$, $(3, -3)$, $(4, 0)$ a $(a, -1)$ yn ôl eu trefn ac maent yn ffurfio pedrochr $ABCD$. Os yw'r croesliniau yn croestorri ar onglau sgwâr, darganfyddwch a.

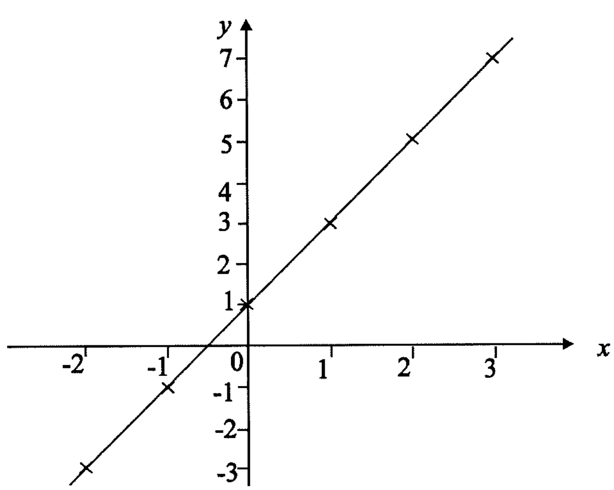
4.7 Hafaliadau llinellau syth

Cychwynnwn trwy ystyried fformiwla sy'n cynnwys x ac y.

Enghraifft 4.10

Os yw $y = 2x + 1$ lluniwch dabl o werthoedd y ar gyfer gwerthoedd x o -2 i 3 mewn camau o 1. Lluniwch graff sy'n dangos y parau o werthoedd x ac y.

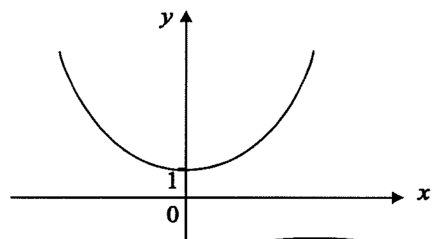
x	-2	-1	0	1	2	3
$2x$	-4	-2	0	2	4	6
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5	7



Gwelir y gellir tynnu llinell syth trwy'r pwyntiau i gyd. Yn wir, gellir gweld pam mae'r graff yn llinell syth. O'r tabl gwelir bob tro y bydd x yn cynyddu 1, y bydd y yn cynyddu 2, neu bob tro y bydd x yn cynyddu 2, bydd y yn cynyddu 4. Y pwynt pwysig yw, pan fydd x yn cynyddu swm cyson, bydd y yn cynyddu swm cyson (nid yr un cynnydd â'r cynnydd yn x fel arfer).
Nid yw'r cynnydd cyson hwn yn y gydag x yn digwydd gydag $y = x^2 + 1$, fel y gellir gweld o'r tabl:

x	-2	-1	0	1	2	3
x^2	4	1	0	1	4	9
$y = x^2+1$	5	2	1	2	5	10

Gallwn weld o'r graff y ceir cromlin, ac nid llinell syth, yn yr achos hwn.



Mewn gwirionedd, ceir graff llinell syth bob tro pan fydd y fformiwla sy'n perthnasu x ac y ar ffurf $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, lle mae α, β, a γ yn gysonion, ac ni cheir llinell syth pan na fydd y fformiwla ar y ffurf hon.

Profir y canlyniad hwn yn nes ymlaen.

Dylid nodi bod y berthynas yn un radd un yn x ac y (sef yn cynnwys x^1 ac y^1 yn unig). Hefyd, gall un neu ddau o'r cysonion fod yn sero mewn rhai achosion, e.e. mae $x = 0, y = \frac{1}{2}, x = -3$ i gyd yn hafaliadau sy'n disgrifio llinellau syth.

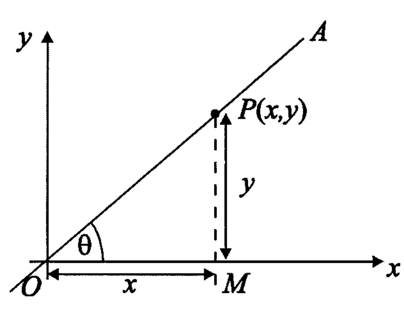
Ymarferion 4.5

1. Pa rai o'r hafaliadau canlynol sy'n cynrychioli llinellau syth?

(a) $y = 2x + 3$, (b) $y = -3x + 2$ (c) $2y = x^2 + 1$
(d) $2y = -x + 3$ (e) $y = x^3$ (f) $y = x$
(g) $x = -4$ (h) $y = 5$ (i) $y = 0$.

Yn y drafodaeth uchod dywedwyd bod hafaliad llinell syth bob tro ar ffurf $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, lle mae α, β, a γ yn gysonion.
Ystyriwn nawr wahanol fathau o linellau syth, gan ddangos y ceir hafaliad ar y ffurf hon bob tro beth bynnag fo math y llinell syth.

(i) Llinellau syth yn goleddu ac yn mynd trwy'r tardd.



Tybiwch fod llinell syth OA yn mynd trwy'r tardd gan ffurfio ongl θ â chyfeiriad echelin bositif x. Mae $P(x, y)$ yn bwynt cyffredinol ar y llinell, ac mae PM yn berpendicwlar i'r echelin x.

$\angle PMO = 90°$ ac yn y ΔPOM;

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

neu $$y = x\tan\theta.$$

$$\textbf{tan} = \frac{\textbf{ochr gyferbyn}}{\textbf{ochr gyfagos}}$$

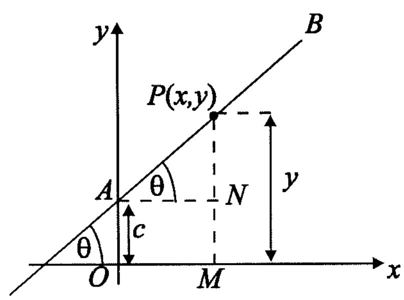
Os ysgrifennir y graddiant $\tan\theta = m$ yna mae y ac x yn bodloni

$$y = mx \text{ neu } y - mx = 0,$$

sef hafaliad y llinell syth OA.

Mae hwn ar ffurf $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, gydag $\alpha = -m$, $\beta = 1$, ac $\gamma = 0$.

(ii) Llinell syth yn goleddu ac yn croestorri'r echelin y ar bwynt a roddir.



Mae'r llinell AB yn ffurfio ongl θ â chyfeiriad echelin bositif x, ac yn croesi'r echelin y yn A lle mae OA yn c. Boed i $P(x, y)$ fod yn bwynt cyffredinol ar y llinell, boed i AN fod yn baralel i'r echelin x a boed i PM fod yn baralel i'r echelin y fel a ddangosir.

$\angle PNA = 90°$ ac $\angle PAN = \theta$.

Yn y ΔPAN,

$$\tan\theta = \frac{\text{llinell gyferbyn}}{\text{llinell gyfagos}} = \frac{PN}{AN} = \frac{y-c}{x}$$

ac felly $y - c = x\tan\theta$

neu $y = x\tan\theta + c$.

Wrth ysgrifennu'r graddiant $\tan\theta = m$, ceir bod

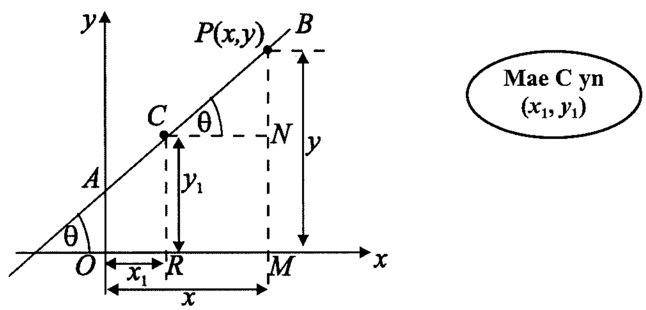
$$y = mx + c$$

neu $y - mx - c = 0$.

Mae hwn ar ffurf $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$

lle mae $\alpha = -m$, $\beta = 1$, $\gamma = -c$.

(iii) Llinell syth yn goleddu ac yn mynd trwy bwynt sefydlog.
Mae'r achos hwn yn gyffredinoliad o achos (ii) : gall y pwynt a roddir beidio â bod ar yr echelin y.



Mae'r llinell AB yn ffurfio ongl θ â chyfeiriad echelin bositif x, ac yn mynd trwy'r pwynt $C(x_1, y_1)$, lle y tybir bod x_1 ac y_1 yn hysbys. Mae $P(x, y)$ yn bwynt cyffredin ar y llinell, mae CR a PM yn baralel i'r echelin y ac mae CN yn baralel i'r echelin x.

Yna $\angle PNC = 90°$ ac $\angle PCN = \theta$. Yn y ΔPCN,

$$\tan\theta = \frac{PN}{NC} = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

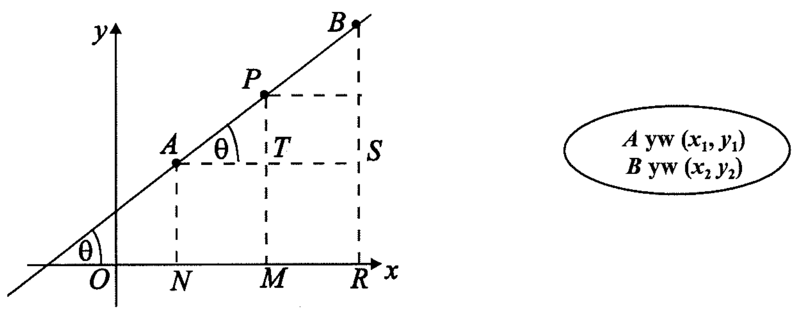
$$\therefore \quad (x - x_1)\tan\theta = y - y_1.$$

Wrth ysgrifennu'r graddiant $\tan\theta = m$, ceir yr hafaliad

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Defnyddir y ffurf hon ar yr hafaliad yn aml.
Fodd bynnag, trwy ei ysgrifennu yn y ffurf $y - mx - y_1 + mx_1 = 0$
gwelir ei fod ar ffurf $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$
lle mae $\alpha = -m$, $\beta = 1$, $\gamma = -y_1 + mx_1$.

(iv) Hafaliad y llinell sy'n mynd trwy ddau bwynt a roddir.



Mae'r llinell AB yn mynd trwy'r ddau bwynt $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$, lle tybir bod x_1, x_2, y_1 ac y_2 yn hysbys. Mae $P(x, y)$ yn bwynt cyffredinol ar AB, tra bo AN, PM, a BR yn baralel i'r echelin y ac ATS yn baralel i'r echelin x. Yr ongl rhwng y llinell AB ac echelin bositif x yw θ, nad yw'n hysbys (heb ei rhoi inni).
Yna $\angle PAT = \theta$ ac $\angle PTA = \angle BST = 90°$.

O'r trionglau ongl sgwâr PAT, BAS :

$$\tan\theta = \frac{PT}{TA} = \frac{BS}{SA}. \qquad (1)$$

Ni ddangosir manylion y gwahanol hydoedd ar y diagram ond gellir yn hawdd weld fod $ON = x_1$, $OM = x$, $OR = x_2$ a bod $AN = y_1$, $PM = y$ a bod $BR = y_2$.

Yna

$$\begin{aligned} PT &= PM - TM = PM - AN = y - y_1, \\ TA &= NM = OM - ON = x - x_1, \\ BS &= BR - SR = BR - AN = y_2 - y_1, \\ SA &= NR = OR - ON = x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Trwy amnewid yn hafaliad (1).

$$\therefore \qquad \underset{\uparrow}{\tan\theta} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gellir anwybyddu hwn nawr.

ac felly

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

sydd ar ffurf

$$y - y_1 = m(x - x_1), \quad (2)$$

lle mae

$$m = \text{graddiant} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Mae y_1, y_2, x_1, x_2 yn hysbys ac felly mae m yn hysbys.

Yna mae hafaliad (2) ar yr un ffurf â'r hafaliad a roddwyd yn achos (iii). Mewn gwirionedd mae (2) ar ffurf

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

lle mae $\alpha = -\left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$, $\beta = 1$, $\gamma = -y_1 + \left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1$.

Crynodeb

Mae'r pedwar achos (i) i (iv) yn dangos bod gan linellau syth hafaliadau ar ffurf

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

lle mae α, β a γ yn gysonion.

Yn ymarferol gellir ystyried bod y rhan fwyaf o linellau syth ar ffurf

$$y = mx + c$$

neu

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Enghraifft 4.11

Darganfyddwch hafaliad y llinell syth sydd â graddiant $\frac{1}{3}$ a rhyngdoriad 4 ar yr echelin y.

O'r hafaliad

$$y = mx + c$$

m yw'r graddiant, c yw'r rhyngdoriad.

gwelir mai'r hafaliad sydd ei angen yw

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{3}x + 4 \\ \text{neu} \qquad 3y &= x + 12 \\ \text{neu} \qquad 3y - x - 12 &= 0. \end{aligned}$$

Enghraifft 4.12

Darganfyddwch hafaliad y llinell syth sydd â graddiant – 2 ac sy'n mynd trwy'r pwynt (2,1).

O $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$ $\quad$ ceir yn syth bod

$$y - 1 = -2(x - 2)$$

ac felly $\quad y - 1 = -2x + 4$

$\therefore \quad y = -2x + 5$

neu $y + 2x - 5 = 0$.

$m = -2,$
$x_1 = 2,$
$y_1 = 1.$

Noder

Gellir ateb y cwestiwn hwn a phob cwestiwn arall sy'n ymwneud â llinellau syth trwy ddefnyddio ffurf arall hafaliad llinell, sef:

$$y = mx + c$$

Yma $\quad m = -2$ (fel a roddir) ond beth yw c?

Yr hafaliad felly yw

$$y = -2x + c$$

Gellir darganfod c trwy nodi bod y llinell yn mynd trwy (2, 1).

Trwy ddefnyddio $x = 2, y = 1$ yn yr hafaliad uchod, ceir bod

$$1 = -2 \times 2 + c.$$

$\therefore \quad c = 5$

ac felly yr hafaliad y mae ei angen yw

$$y = -2x + 5, \quad \text{fel o'r blaen.}$$

Enghraifft 4.13

Darganfyddwch hafaliad y llinell sy'n mynd trwy'r pwyntiau (2, –1) a (–1, 6).

Mae'r pwyntiau a roddwyd yn ein galluogi i ddarganfod graddiant y llinell.

Yna $\quad m = \dfrac{6-(-1)}{-1-2} = \dfrac{7}{-3} = -\dfrac{7}{3}.$

Achos (iv)
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Yna $\quad y - (-1) = -\dfrac{7}{3}(x - 2)$

ac felly $\quad y + 1 = -\dfrac{7}{3}x + \dfrac{14}{3}.$

$\therefore \quad y = -\dfrac{7}{3}x + \dfrac{11}{3}$

neu $\quad 3y + 7x - 11 = 0.$

neu
$y - 6 = -\dfrac{7}{3}(x - (-1)),$
$y - 6 = -\dfrac{7x}{3} - \dfrac{7}{3},$
$3y + 7x - 11 = 0.$

<u>Ffordd arall</u> o ddatrys y broblem yw ysgrifennu

$$y = mx + c$$

lle mae m ac c yn gysonion anhysbys, i'w darganfod fel a ganlyn.

Pan fo $x = 2, y = -1$ a phan fo $x = -1, y = 6$.

Mae'r pwyntiau a roddwyd ar y llinell.

<u>$x = 2, y = -1$</u> $\quad -1 = 2m + c \quad (1)$

<u>$x = -1, y = 6$</u> $\quad 6 = -m + c \quad (2)$

Dau hafaliad cydamserol yw (1) a (2) ar gyfer dau anhysbysyn m ac c.

Tynnir hafaliad (2) o hafaliad (1).

$$-7 = 3m$$

ac felly $\qquad m = -\frac{7}{3}.$

Amnewidir gwerth m yn (1).

$$\therefore \qquad -1 = 2\left(-\frac{7}{3}\right) + c$$

sy'n rhoi $\qquad c = -1 + \frac{14}{3} = \frac{11}{3}.$

Rhowch werthoedd *m* ac *c* yn hafaliad (2) er mwyn gwirio.

Yr hafaliad felly yw

$$y = -\frac{7}{3}x + \frac{11}{3}$$

neu $\qquad 3y + 7x - 11 = 0,$ fel o'r blaen.

Ymarferion 4.6

1. Ysgrifennwch y goledd a'r rhyngdoriad ar yr echelin y ar gyfer y llinellau syth:
(a) $y = 2x$ (b) $y = -x + 1$ (c) $y + 2x - 3 = 0$
(d) $2y = x - 5$ (e) $4y - 3x + 7 = 0$.

2. Ysgrifennwch hafaliadau'r llinellau sy'n mynd trwy'r tardd O (0, 0) ac sydd â'r graddiannau canlynol: - (a) 2 (b) -5 (c) $\frac{7}{2}$ (d) $-\frac{1}{3}$ (e) 0.

3. Darganfyddwch hafaliad y llinell sy'n mynd trwy'r pwynt a roddir ac sydd â'r graddiant a nodir:- (a) $(1, 2), \frac{1}{2}$ (b) $(-1, 2), 3$ (c) $(0, 1), 4$ (d) $(-2, 0), -\frac{1}{2}$.

4. Darganfyddwch hafaliad y llinell sy'n mynd trwy'r pârau o bwyntiau:-
(a) $(1, 2), (3, 4)$ (b) $(-1, 3), (2, 3)$ (c) $(0, 1), (2, 0)$ (d) $(-2, -1), (-3, -4)$.

5. Ysgrifennwch hafaliad y llinell sy'n baralel i'r llinell a roddir ac sydd â'r rhyngdoriad a roddir ar yr echelin y:-
(a) $y = 3x + 2,\ 6$ (b) $y = -\frac{1}{2}x + 1,\ 2$
(c) $2y = x + 5,\ 4$ (d) $3y - 2x - 7 = 0,\ 6$.

6. Darganfyddwch hafaliad y llinell sy'n berpendicwlar i'r llinell a roddir ac sy'n mynd trwy'r pwynt a roddir:-
(a) $y = x + 5,\ (0, 2)$ (b) $y = -\frac{1}{2}x + 4,\ (1, 3)$ (c) $3y = -4x + 9,\ (2, 3)$
(d) $3y + 5x - 7 = 0,\ (1, 2)$ (e) $4y + 7x - 3 = 0,\ (0, 0)$.

7. Darganfyddwch gyfesurynnau canolbwynt M y llinell sy'n cysylltu'r pwyntiau $A(1, 4)$ a $B(3, 2)$. Darganfyddwch hefyd hafaliad y llinell sy'n mynd trwy M sy'n berpendicwlar i AB.
(Gelwir llinell o'r fath yn <u>hanerydd perpendicwlar</u> AB.)

8. Mae dwy linell baralel AP a BQ yn mynd trwy'r pwyntiau $A(3, 0)$ a $B(0, 4)$ yn ôl eu trefn. Os yw'r pwynt $C(2, 1)$ ar y llinell AP, darganfyddwch hafaliadau AP a BQ.

9. O wybod y pwyntiau $A(0, 2)$, $B(4, 6)$, $C(3, 7)$ a $D(1, 5)$, darganfyddwch hafaliadau'r llinellau AC a BD. Trwy amnewid yn y ddau hafaliad, gwiriwch fod y pwynt $\left(2, \frac{16}{3}\right)$ ar y ddwy linell, h.y. bod ei gyfesurynnau yn bodloni'r ddau hafaliad.

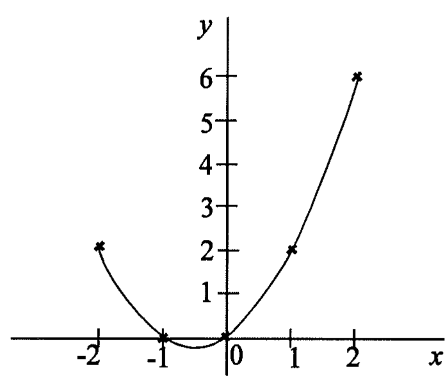
4.8 Hafaliadau cartesaidd cromliniau

Yn yr adran flaenorol ystyriwyd llinellau syth a'u hafaliadau. Beth a olygir pan ddywedir mai hafaliad llinell syth yw $2x + 3y - 5 = 0$?
Yn y bôn golygir hyn: er mwyn i bwynt fod ar y llinell rhaid i'w absisa (x) a'i fesuryn (y) fodloni'r hafaliad. Mewn geiriau eraill, mae'r hafaliad yn gosod cyfyngiad ar x ac y er mwyn i'r pwynt fod ar y llinell syth.

Enghraifft 4.14
A yw'r pwyntiau (3, 5), (6, 10) ar y llinell $y = 2x - 1$?
Gyda (3, 5), $y = 5$ a $2x - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$
ac felly mae'r hafaliad yn cael ei fodloni ac mae (3, 5) ar y llinell.
Gyda (6,10), $y = 10$ a $2x - 1 = 2 \times 6 - 1 = 11$
ac felly nid yw'r hafaliad yn cael ei fodloni ac nid yw'r pwynt ar y llinell.
Er mwyn cynrychioli llinell syth mae'n rhaid i hafaliad fod yn radd un mewn x ac y. Pan nad yw'r hafaliad yn radd un x and y, ni fydd y graff yn llinell syth.

Enghraifft 4.15
Plotiwch $y = x^2 + x$ ar gyfer $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$y = x^2 + x$	2	0	0	2	6



Mae'r cyfyngiad (hafaliad) penodol a roddwyd ar x ac y yn arwain at graff sy'n gromlin.

Rheol

Pan *nad* yw'r hafaliad mewn x ac y ar ffurf

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

mae'r graff bron bob amser yn gromlin.

Ni all rhagor na dau o blith α, β, γ fod yn sero.

Mae ambell i eithriad i'r rheol hon,

e.e. mae'r hafaliad $x^2 - y^2 = 0$

yn arwain at $(x-y)(x+y) = 0$

sy'n rhoi $x - y = 0$ neu $x + y = 0$.

dwy linell syth

Gellir anwybyddu'r eithriadau hyn yma gan na fyddwn yn ystyried hafaliadau sy'n cynnwys termau megis y^2. Yn wir, ar hyn o bryd, ystyriwn hafaliadau (cyfyngiadau) ar ffurf

$$y = \mathrm{f}(x),$$

lle mae f(x) yn ffordd o ysgrifennu rhyw fynegiad cyffredinol mewn x.

Mae y yn digwydd fel y^1 yn unig.

Felly gellid ystyried mynegiadau megis

$$y = x^2 + 2x + 5$$
$$y = \sqrt{x+2}$$
$$y = \frac{1}{x} + x,$$

ond nid mynegiadau megis

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0,$$
$$y^3 = x^2 + 5.$$

O'r blaen, defnyddiwyd f(x) i ddynodi polynomialau cyffredinol. Yma, caniateir mynegiadau eraill.

Ymarferion 4.7

1. Pa rai o'r hafaliadau canlynol fydd yn arwain at graffiau crwm?

(a) $y = (x-1)(x-2)$ (b) $y = 3x - 5$

(c) $y = \dfrac{2}{5x+17}$ (d) $y = \dfrac{1}{2}(x-9)$

(e) $y = x + \dfrac{1}{x}$ (f) $y = x(1-x)$

2. Lluniwch frasluniau o graffiau rhwng $x = -3$ ac $x = 3$ ar gyfer hafaliadau (a), (e) ac (f) yng nghwestiwn 1.

3. Penderfynwch a yw'r pwyntiau a roddir yn gorwedd ar y cromliniau a roddir:

(a) $y = x^2 + 4$, $(-2, 8)$ (b) $y = \dfrac{1}{x+1}$, $(0, 2)$

(c) $y = (x-1)(x-2)$, $(4, 6)$ (d) $y + 3x^2 = 4$, $(1, 1)$

(e) $\dfrac{2}{x} + y = 3$, $(1, 2)$.

4. Darganfyddwch werthoedd y pan fydd $x = 0$ yn yr achosion canlynol:

(a) $y = (x-2)(x+3)$ (b) $y = \dfrac{1}{x+1}$ (c) $x + 2y = 5$

(d) $y + 2x^2 = 18$ (e) $\dfrac{1}{2x+5} + 2y = x \quad \left(x \neq -\dfrac{5}{2}\right)$

5. Darganfyddwch werth x pan fydd $y = 0$ ar gyfer (a) a (d) yng nghwestiwn 4.

4.9 Croestoriad cromliniau

Weithiau mewn geometreg gyfesurynnol byddwch yn dod ar draws cysyniadau lle nad oes angen gwahaniaethu rhwng llinellau syth a chromliniau. Pryd hynny, ceir bod 'cromliniau' yn golygu naill ai gromliniau neu linellau syth.

Mae croestoriad yn gysyniad o'r fath. Gelwir y pwynt lle mae dwy gromlin yn croesi yn groestorfan. Ar groestorfan dwy gromlin, daw cyfesurynnau x ac y y croestorfan o dan ddau gyfyngiad: mae angen iddynt fodloni y ddau hafaliad sy'n disgrifio'r cromliniau. Felly, er mwyn darganfod y cyfesurynnau hynny, datrysir yr hafaliadau yn gydamserol.

Enghraifft 4.16

Darganfyddwch groestorfan y cromliniau

Llinellau syth, fel mae'n digwydd.

$$y + 6x - 3 = 0$$

a

$$2y + 4x + 7 = 0.$$

Os $P(x, y)$ yw'r croestorfan, yna mae angen i x ac y fodloni'r ddau hafaliad gan fod P ar y ddwy gromlin. Datrysir

$$y + 6x - 3 = 0. \quad (1)$$

$$2y + 4x + 7 = 0. \quad (2)$$

Cofiwch bennod 2. Yma gwneir cyfernodau y yn hafal.

$(1) \times 2 - (2)$.

$$12x - 4x - 6 - 7 = 0.$$

$$\therefore \quad 8x = 13$$

ac felly $x = \dfrac{13}{8}$.

Trwy roi'r gwerth hwn ar gyfer x yn (1),

$$y + 6 \times \frac{13}{8} - 3 = 0$$

$$\therefore y = -6 \times \frac{13}{8} + 3 = -\frac{54}{8} = -\frac{27}{4}.$$

Gallech wirio'r atebion trwy amnewid yn (2).

$\therefore$ Y croestorfan yw $\left(\dfrac{13}{8}, -\dfrac{27}{4}\right)$.

Enghraifft 4.17

Darganfyddwch groestorfan $y = x^2 + 8x + 6$ ac $y = 3x$.

Datrysir $y = x^2 + 8x + 6 \quad (1)$

ac $y = 3x \quad (2)$

yn gydamserol.

Amnewidir y o hafaliad (2) i hafaliad (1):

$\therefore \quad 3x = x^2 + 8x + 6$

ac felly $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Byddai amnewid o (1) i (2) yn arwain at yr un canlyniad.

Gellir darganfod x trwy ffactorio neu trwy ddefnyddio'r fformiwla gwadratig (Pennod 2).

Trwy ffactorio, $(x + 3)(x + 2) = 0$.

$\therefore \quad x + 3 = 0$ neu $x + 2 = 0$

ac felly $x = -3$ neu $x = -2$.

Rhoddir y gwerthoedd hyn ar gyfer x i mewn i (2).

Pan fydd $x = -3$, $y = 3 \times (-3) = -9$.

Pan fydd $x = -2$, $y = 3 \times (-2) = -6$.

Mae dau groestorfan, sef $(-3, -9)$ a $(-2, -6)$.

Gallech wirio'r atebion trwy amnewid yn (1).

Ymarferion 4.8

1. Darganfyddwch groestorfannau'r parau canlynol o gromliniau :-
   (a) $y - 2x + 4 = 0,\ 2y + x - 3 = 0$ (b) $x + 3y - 5 = 0,\ 3x + y + 4 = 0$
   (c) $y = 2x + 3,\ y = x^2 + 9x + 9$ (d) $y = x^2 + 4x + 2,\ y = x^2 + 7x + 3$
   (e) $y = x(1 - x),\ y = x(x + 2)$.

2. Dangoswch nad yw'r cromliniau $y = x^2 + 4x - 9$ ac $y = 3x^2 + 5x - 6$ yn croestorri, h.y. nad oes gwerthoedd real i x ac y sy'n bodloni'r ddau hafaliad.

3. Darganfyddwch gyfesurynnau croestorfan $y = 3x^2$ ac $y = 3x^{1/2}$.

4. Ochrau triongl yw'r llinellau $x = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$ a $3x + 2y - 4 = 0$. Darganfyddwch gyfesurynnau fertigau'r triongl.

5. Darganfyddwch werthoedd a a b os yw $ax + 2y = 6$ a $3x + by = 6$ yn croestorri yn y pwynt $(-1, 2)$. Os yw'r llinellau yn torri'r echelin y yn A a B, darganfyddwch hyd AB.

6. Hafaliadau ochrau AB, BC ac CA ΔABC yw $x + y = 4$, $x - y = 6$ a $2x + y = 15$ yn ôl eu trefn, a D yw canolbwynt BC. Darganfyddwch gyfesurynnau A, B, C, D a chadarnhewch fod $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$.

7. Fertigau ΔPQR yw $P(0, 2)$, $Q(4, 0)$ ac $R(6, 8)$. Darganfyddwch hafaliadau haneryddion perpendicwlar ochrau PQ a QR. Dangoswch fod croestorfan yr haneryddion perpendicwlar yr un pellter o P, Q ac R.

8. Darganfyddwch hafaliad y perpendicwlar o'r pwynt $A(2, 1)$ i'r llinell $y - 3x + 2 = 0$. Trwy hyn darganfyddwch bellter perpendicwlar A o'r llinell.

9. Profwch fod croesliniau paralelogram ag ochrau a roddir gan $2x + y = 3$, $x + 2y = 3$, $2x + y = 6$, ac $x + 2y = 6$ ar onglau sgwâr i'w gilydd.

Byddwn yn dychwelyd at groestorfannau ym Mhenodau 6 a 10.

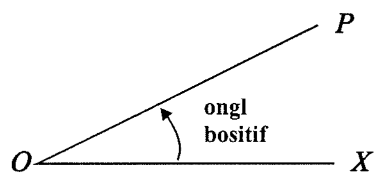
Pennod 5

Onglau a Mesur Onglau

Rydym yn gyfarwydd iawn â defnyddio graddau i fesur onglau. Mae defnyddio radianau i fesur onglau yn llai cyfarwydd. Ystyrir y ddau fesur yn y bennod hon.

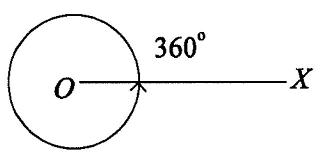
5.1 Graddau a radianau

Caiff yr ongl rhwng dwy linell OX ac OP sy'n croestorri ei diffinio fel maint y cylchdro sydd ei angen er mwyn mynd â'r naill linell at y llall. Os yw'r cylchdro sydd ei angen yn wrthglocwedd, cymerir bod yr ongl yn bositif.

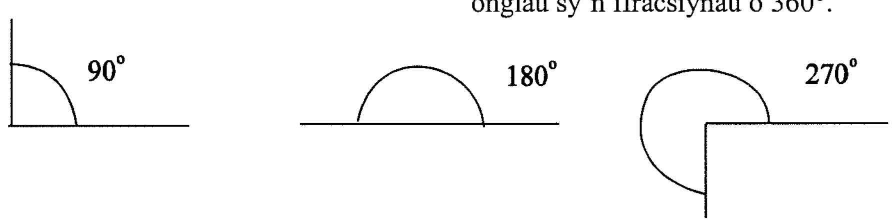


Gellir mesur onglau mewn graddau neu radianau.

Graddau



Diffinnir cylchdro cyfan, gyda'r llinell OX yn teithio trwy gylch cyfan, fel ongl 360 gradd, a ysgrifennir fel 360°. Mae ffracsiynau o gylchdro yn cyfateb i onglau sy'n ffracsiynau o 360°.



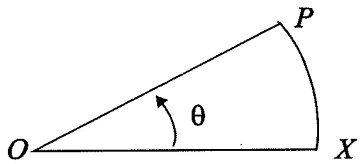
$\frac{1}{4}$ cylchdro $\qquad$ $\frac{1}{2}$ cylchdro $\qquad$ $\frac{3}{4}$ cylchdro

Mae israniadau pellach yn bosibl wrth ddefnyddio graddau. Felly

$$1 \text{ munud} = 1' = \frac{1}{60}\text{fed o radd}$$

ac
$$1 \text{ eiliad} = 1'' = \frac{1}{60}\text{fed o funud} = \frac{1}{3600}\text{fed o radd.}$$

Radianau



Tybiwch fod OX yn cylchdroi trwy ongl θ fel a ddangosir. Yn ystod y cylchdro hwn mae X yn symud ar hyd arc gron i P.

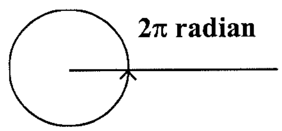
Diffiniad
Mae mesuriad radian yr ongl yn cael ei ddiffinio gan

$$\theta \;=\; \frac{\text{arc } PX}{OX} \quad \text{neu} \quad \frac{\text{arc } PX}{OP}.$$

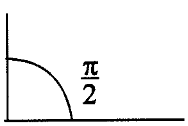
Yna 1 radian yw'r ongl a gynhelir ar bwynt O pan fo hyd yr arc yn hafal i OX neu OP.

Mewn cylchdro cyfan, mae X yn symud ar hyd cylch bellter $2\pi \times OX$ (h.y. cylchedd y cylch). Felly mewn un cylchdro cyfan yr ongl a gynhelir yw

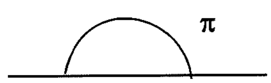
$$\frac{2\pi \times OX}{OX} = 2\pi.$$



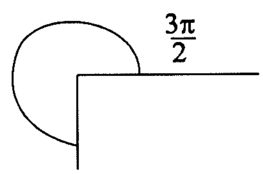
Mae ffracsiynau cylchdro cyfan yn cyfateb i onglau sy'n ffracsiynau o 2π.



$\frac{1}{4}$ cylchdro



$\frac{1}{2}$ cylchdro



$\frac{3}{4}$ cylchdro

Er mwyn trawsnewid o raddau i radianau (ac yn ôl):
Mae 2π radian yn cyfateb i 360°
ac felly mae 1 radian yn cyfateb i $\dfrac{360°}{2\pi}$ 57.296°
ac mae x radian yn cyfateb i $x \times \dfrac{360°}{2\pi}$.
Hefyd mae 1° yn cyfateb i $\dfrac{2\pi}{360}$ radian
ac felly mae y° yn cyfateb i $y \times \dfrac{2\pi}{360}$ radian.

D.S. Er mwyn trawsnewid onglau a fesurir mewn graddau i radianau, mae angen mynegi'r ongl ar ffurf degolyn; er enghraifft i drawsnewid ongl 113° 33' i radianau dylid ei mynegi fel 113.55°.

Ymarferion 5.1

1. Lluniwch ddiagramau er mwyn dangos pob un o'r onglau canlynol, gan labelu'r onglau mewn graddau ac mewn radianau:

(i) $\frac{1}{8}$ cylchdro (ii) $\frac{1}{6}$ cylchdro (iii) $\frac{1}{9}$ cylchdro

(iv) $\frac{1}{12}$ cylchdro (v) $\frac{1}{4}$ cylchdro (vi) $\frac{2}{15}$ cylchdro.

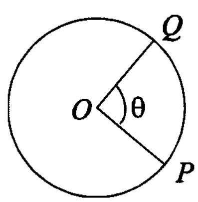
2. Trawsnewidiwch bob un o'r canlynol i radianau:

(i) 36° (ii) 54° (iii) 156° (iv) 192° (v) 288° (vi) 119.5°.

3. Trawsnewidiwch bob un o'r canlynol i raddau:

(i) $\frac{3\pi}{8}$ radian (ii) $\frac{\pi}{7}$ radian (iii) 1 radian (iv) 0.75 radian.

5.2 Hyd arc ac arwynebedd sector cylch



Tybiwch fod yr arc PQ yn cynnal ongl θ radian ar ganol y cylch. Gan fod ongl 2π radian yn cyfateb i gylchdro cyfan, mae θ yn cyfateb i ffracsiwn cylchdro, $\frac{\theta}{2\pi}$.

Cylchedd y cylch yw $2\pi r$.

Yna rhoddir hyd arc PQ gan $\frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r = r\theta.$

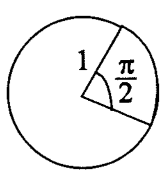
Arwynebedd y cylch yw πr^2.

Rhoddir arwynebedd y sector POQ gan $\frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta.$

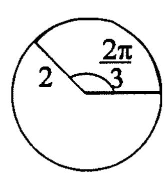
Ymarferion 5.2

1. Darganfyddwch arwynebedd pob sector sydd ag ongl wedi ei nodi:

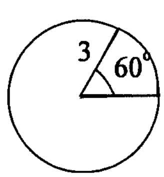
(i)



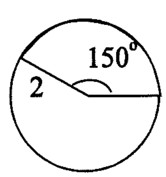
(ii)



(iii)

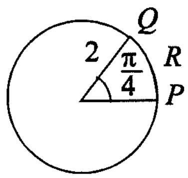


(iv)

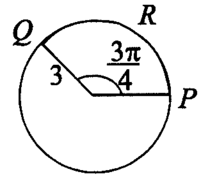


2. Darganfyddwch hyd yr arc PRQ ym mhob un o'r achosion canlynol:

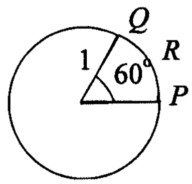
(i)



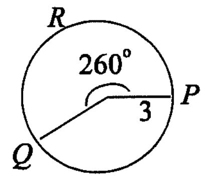
(ii)



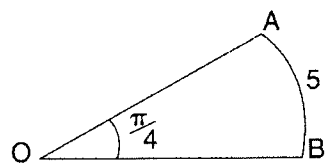
(iii)



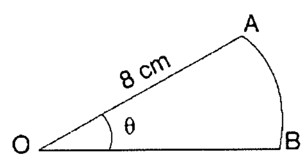
(iv)



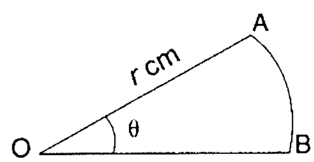
3. O wybod mai hyd yr arc yn y diagram gyferbyn yw 5 cm, darganfyddwch arwynebedd y sector *AOB.*



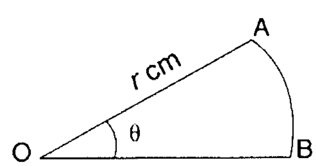
4. O wybod mai arwynebedd y sector AOB yw 50 cm^2, darganfyddwch berimedr y sector.



5. O wybod mai hyd yr arc AB yw 12 cm ac mai arwynebedd y sector AOB yw 48cm^2, darganfyddwch werthoedd r a θ.



6. Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer arwynebedd A cm^2 a pherimedr P cm y sector AOB gyferbyn yn nhermau r a θ.

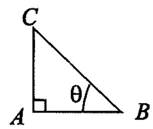


O wybod bod $P = 20$,
dangoswch fod $A = 10r - r^2$.
Darganfyddwch, trwy gwblhau'r sgwâr, werth mwyaf A.

5.3 Cymarebau trigonometrig ar gyfer onglau rhwng 0° a 90°

Diffinnir cymarebau trigonometrig ar gyfer onglau llym yn nhermau cymhareb ochrau trionglau ongl sgwâr.

Tybiwch fod $\angle CAB$ yn nhriongl $ABC = 90°$.
Dywedir bod $\angle CAB$ yn **ongl sgwâr**.



Bydd y diffiniadau a roddir isod yn gyfarwydd.

Nawr gydag ongl $\angle CBA = \theta$,
labelir AC fel yr 'ochr gyferbyn',
AB fel yr 'ochr gyfagos'.

Fel rheol gelwir ochr BC yn 'hypotenws'.
Yna, gan ddefnyddio'r geiriau 'cyferbyn' a 'chyfagos' er mwyn dynodi 'ochr gyferbyn' ac 'ochr gyfagos' yn ôl eu trefn, diffinnir

$$\sin\theta = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} = \frac{AC}{BC}\ \left(\frac{\text{O}}{\text{H}}\right),$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} = \frac{AB}{BC}\ \left(\frac{\text{A}}{\text{H}}\right),$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{cyfagos}} = \frac{AC}{AB}\ \left(\frac{\text{O}}{\text{A}}\right).$$

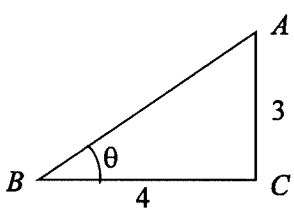
Dyma hefyd gymarebau eraill:-

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

Noder nad yw cosec θ yn golygu $\frac{1}{\cos\theta}$.

Enghraifft 5.1

Defnyddiwch y triongl ongl sgwâr er mwyn darganfod cos θ.



$$\text{Nawr } \cos\theta = \frac{\text{cyfagos}}{\text{hypotenws}}\ \left(\frac{\text{A}}{\text{H}}\right)$$

$$= \frac{BC}{BA} = \frac{4}{BA}.$$

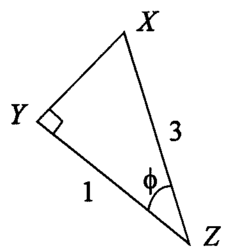
Nid yw'r hypotenws AB yn hysbys ond gellir ei gael o theorem Pythagoras.

$$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

$\therefore \quad AB = 5.$

Yna $\quad \cos\theta = \frac{4}{5} = 0.8.$

Enghraifft 5.2
Defnyddiwch y triongl ongl sgwâr er mwyn darganfod sin ϕ.



$$\text{Sin}\,\phi = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} = \frac{XY}{XZ} = \frac{XY}{3}.$$

Yn ôl Pythagoras,

$$3^2 = 1^2 + XY^2$$

ac felly $XY^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8.$

$\therefore \quad XY = \sqrt{8}$

a $\sin\phi = \dfrac{\sqrt{8}}{3} = 0.9428$, yn gywir i bedwar lle degol.

Mae cyfrifianellau ag allweddau ffwythiant priodol yn ateb cwestiynau megis: Beth yw sin 55.6° neu cos 0.361 radian neu ba ongl sydd â thangiad 4.1? Mae angen pwyso'r allwedd wrthdro (*inv*) neu 2il ffwythiant (*2nd F*) neu gyfnewid (*shift*) er mwyn ateb y cwestiwn diwethaf a'i fath.

Enghraifft 5.3
Defnyddiwch eich cyfrifiannell i ddarganfod
(i) sin 0.3 (ii) cos 63° 46' (iii) cosec 69°3'.

(i) Mewn mathemateg pan na nodir unedau'r ongl, dylid cymryd y mesurir yr ongl mewn radianau. Felly, trwy sicrhau bod eich cyfrifiannell yn y modd radianau, bwydo 0.3 a phwyso'r allwedd sin, dylid cael sin 0.3 = 0.2955, yn gywir i bedwar lle degol.

(ii) Nawr 63° 46' $\approx$ 63.7667°
Felly, trwy sicrhau bod eich cyfrifiannell yn y modd graddau, bwydo 63.7667 a phwyso'r allwedd cos, dylid cael cos 63.7667° = 0.4420, yn gywir i 4 lle degol.

Dylid trawsnewid y munudau yn raddau.

(iii) Nid oes gan y rhan fwyaf o gyfrifianellau allwedd cosec.
Fodd bynnag, cosec $\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$. Felly dylid

1. trawsnewid 69° 3' i 69.05°,
2. sicrhau bod y cyfrifiannell yn y modd graddau,
3. bwydo 69.05 a phwyso'r allwedd sin er mwyn cael sin 69.05°
4. pwyso $\dfrac{1}{x}$ (efallai bydd angen pwyso'r allwedd 2ail ffwythiant (*2nd F*) neu wrthdro (*inv*) neu gyfnewid (*shift*) yn gyntaf) er mwyn darganfod cosec 69.05° = 1.0708, yn gywir i bedwar lle degol.

Enghraifft 5.4
Defnyddiwch gyfrifiannell i ddarganfod yr onglau mewn graddau a radianau sydd ag (i) cosin yn 0.6357, (ii) sin yn 0.1361, (iii) tangiad yn 0.5369.

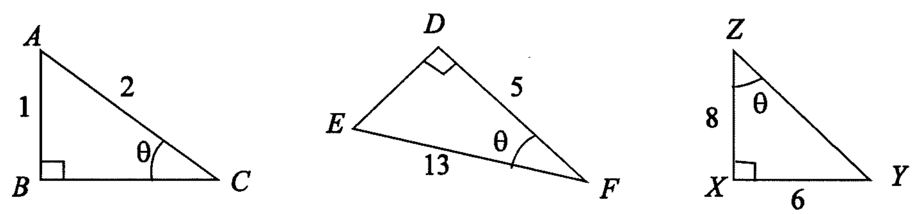
(i) Mae gan eich cyfrifiannell allwedd cosin a ddylai eich galluogi i ddarganfod yr ongl sy'n cyfateb i gosin a roddir. Gellir ystyried y gweithrediad sydd ei angen yma fel dadwneud y cosin, a chyfeirir ato fel darganfod y **cosin gwrthdro** neu $\cos^{-1}$. Gelwir y cosin gwrthdro hefyd yn **arccos**.
Mae angen darganfod $\cos^{-1}$ (0.6357) neu arccos (0.6357). Mae $\cos^{-1}$ neu arccos wedi'i nodi ar allweddell llawer o gyfrifianellau. Y drefn arferol yw
(a) bwydo 0.6357,
(b) pwyso'r allwedd 2ail ffwythiant (*2nd F*) neu wrthdro (*inv*) neu gyfnewid (*shift*) ac yna'r allwedd cos.
Arddangosir y canlyniad fel 50.5281° neu 0.8819 radian.

(ii) Yma dylid bwydo 0.1361, pwyso'r allwedd 2ail ffwythiant (*2nd F*) neu wrthdro (*inv*) neu gyfnewid (*shift*) ac yna pwyso'r allwedd sin. Y canlyniad yw 0.1365 radian neu 7.8222°.

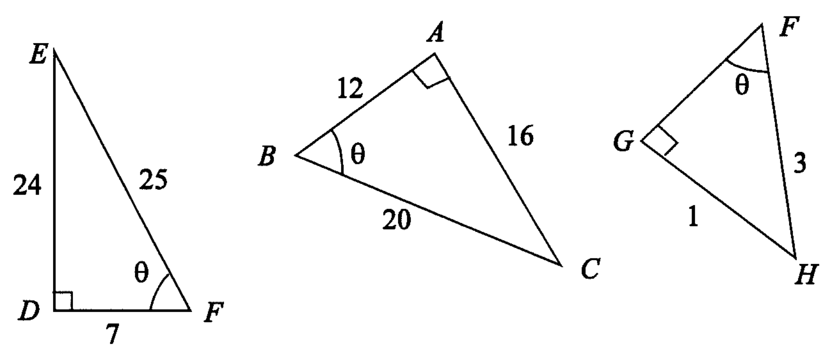
(iii) Yn yr un ffordd, $\tan^{-1}$ (0.5369) = 28.2314° neu 0.4927 radian.

Ymarferion 5.3

1. (i) Darganfyddwch sin θ ym mhob un o'r trionglau canlynol:



(ii) Darganfyddwch cos θ ym mhob un o'r trionglau canlynol:

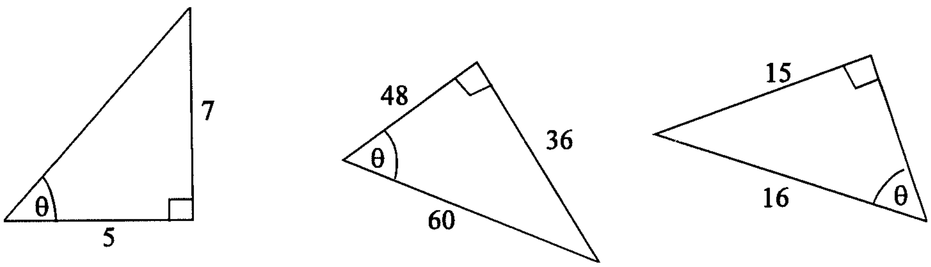


2. Darganfyddwch werthoedd tan θ yng Nghwestiwn 1.

3. Darganfyddwch:
(i) sin 36.31° (ii) cos 26.52° (iii) tan 15°37' (iv) tan 0.6315 (v) sin 0.7128.

4. Darganfyddwch (i) $\sin^{-1}(0.7071)$ (ii) $\tan^{-1}(2)$ (iii) $\cos^{-1}(0.9161)$, gan roi'r atebion mewn graddau a radianau.

5. Darganfyddwch yr onglau θ mewn graddau yn y trionglau canlynol:



Er ei bod yn hawdd cael yr atebion â chyfrifiannell, mae gwybod cymarebau trigonometrig rhai onglau arbennig yn ddefnyddiol yn aml wrth gyfrifo.

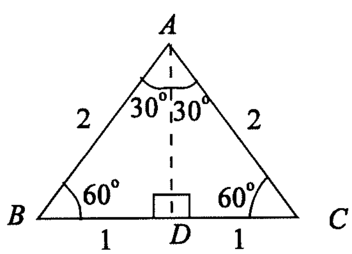
5.4 Cymarebau trigonometrig onglau arbennig

Ystyriwn ar hyn o bryd $30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$, $45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$, a $60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Yn nes ymlaen ystyriwn onglau $\theta = 0°$ (0 radian) a $90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(i) $30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$

Ystyriwn driongl hafalochrog *ABC* gydag ochrau 2 uned fel a ddangosir, ac *AD* yn haneridd perpendicwlar *BC*.



Mae'r hanerydd perpendicwlar hefyd yn haneru'r ongl yn *A*.

Mae triongl *BAD* yn driongl ongl sgwâr ac yn ôl theorem Pythagoras,

$$2^2 = AD^2 + 1^2$$

ac felly $\quad AD^2 = 4 - 1 = 3$

ac $\quad AD = \sqrt{3}$.

cyferbyn ar gyfer BÂD
hypotenws

Yna $\quad \sin B\hat{A}D = \dfrac{BD}{BA}$

felly $\quad \boxed{\sin 30° = \frac{1}{2}}$

neu $\quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.}$

Hefyd $\quad \cos B\hat{A}D = \dfrac{AD}{AB}$

$\dfrac{\text{cyfagos}}{\text{hypotenws}}$ ar gyfer $B\hat{A}D$

felly
$$\boxed{\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
neu
$$\boxed{\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Yn olaf, $\quad \tan B\hat{A}D = \dfrac{BD}{AD}$

felly
$$\boxed{\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$
neu
$$\boxed{\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

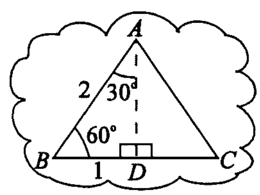
(ii) $60° \left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Ystyriwch $A\hat{B}D$, sy'n hafal i 60°, yn nhriongl BAD.

Yna $\quad \sin A\hat{B}D = \dfrac{AD}{AB}$

$\dfrac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}}$

felly
$$\boxed{\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
neu
$$\boxed{\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$



Hefyd $\quad \cos A\hat{B}D = \dfrac{BD}{AB}$

$\dfrac{\text{cyfagos}}{\text{hypotenws}}$

felly
$$\boxed{\cos 60° = \frac{1}{2}}$$
neu
$$\boxed{\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.}$$

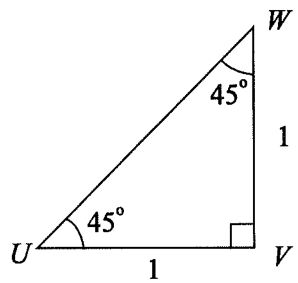
Yn olaf, $\quad \tan A\hat{B}D = \dfrac{AD}{BD}$

$\dfrac{\text{cyferbyn}}{\text{cyfagos}}$

felly
$$\boxed{\tan 60° = \sqrt{3}}$$
neu
$$\boxed{\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.}$$

(iii) $45° \left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Ystyriwn driongl isosgeles ongl-sgwâr UVW fel a ddangosir.



Mae ochrau UV, VW ill dwy yn 1 uned ac mae $W\hat{U}V = U\hat{W}V = 45°$.

Yna $\quad UW^2 = UV^2 + VW^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$

$\therefore \quad UW = \sqrt{2}$

Yna $\quad \sin W\hat{U}V = \dfrac{VW}{UW}$ $\qquad$ $\dfrac{\textbf{cyferbyn}}{\textbf{hypotenws}}$

felly $\quad \boxed{\sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

neu $\quad \boxed{\sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.}$

Hefyd $\quad \cos W\hat{U}V = \dfrac{UV}{UW}$ $\qquad$ $\dfrac{\textbf{cyfagos}}{\textbf{hypotenws}}$

felly $\quad \boxed{\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

neu $\quad \boxed{\cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.}$

Yn olaf, $\quad \tan 45° = \dfrac{WV}{VU}$ $\qquad$ $\dfrac{\textbf{cyferbyn}}{\textbf{cyfagos}}$

felly $\quad \boxed{\tan 45° = 1}$

neu $\quad \boxed{\tan \dfrac{\pi}{4} = 1.}$

Gadewir y gymhareb drigonometrig uchod ar ffurf ffracsiynau a syrdiau er mwyn hwyluso ei thrin.

Mae crynodeb o'r canlyniadau a roddwyd yn (i), (ii), (iii) yn y tabl canlynol.

Er mwyn cwblhau'r tabl, dangosir hefyd ganlyniadau 0°, 90°, 180°, 270° a 360° er nad ydynt wedi'u profi yma. Ystyrir onglau megis 180° a 270° trwy ddulliau eraill, wrth gwrs, oherwydd mae'n amhosibl llunio triongl ongl sgwâr (neu yn wir, unrhyw driongl) gydag un o'i onglau yn hafal i 180° neu 270°.

sin, cos, tan rhai onglau arbennig			
θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
* $0°\ (0)$	0	1	0
$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
* $90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	dim diffiniad
* $180°(\pi)$	0	-1	0
* $270°\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	-1	0	dim diffiniad
* $360°\ (2\pi)$	0	1	0

*** i'w profi**

Gellir hefyd ysgrifennu sec θ, cosec θ a cot θ.

Ymarferion 5.4

Darganfyddwch yr ongl lem θ yn y canlynol, heb ddefnyddio cyfrifiannell.

1. $\sin 3\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$
2. $\cos\left(\theta + 30^0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $\tan\left(\theta - 15^0\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
4. $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1$
5 $\cos\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
6. $\sin\left(8\theta + 12^0\right) = \frac{1}{2}$
7. $\sin\left(5\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
8. $\tan\left(4\theta + 23^0\right) = 1$.

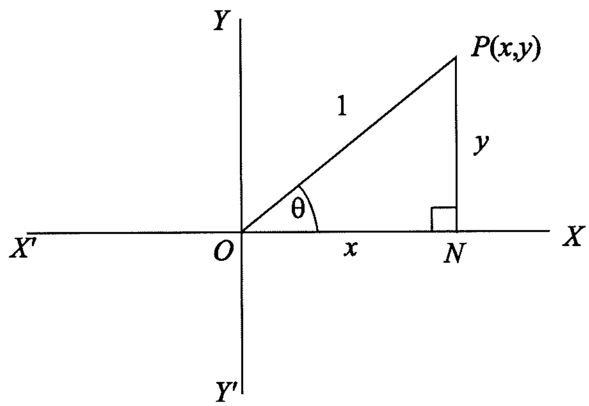
Pennod 6

Trigonometreg Bellach

Ym Mhennod 5, cyflwynwyd diffiniadau o sin, cos a tan ar gyfer onglau llym.
Yma byddwn:

(a) yn estyn y diffiniadau i onglau ar wahân i onglau llym;
(b) yn defnyddio trigonometreg i ddarganfod arwynebedd nifer o ffigurau plân geometrig;
(c) yn cyflwyno unfathiant trigonometrig; ac
(ch) yn datrys rhai hafaliadau trigonometrig syml.

6.1 Cymarebau trigonometrig onglau cyffredinol



Yn y diagram, mae $X'OX$ a $Y'OY$ yn ddwy echelin berpendicwlar. Mae OP yn llinell y tybir sy'n cylchdroi yn wrthglocwedd o amgylch O; hyd OP yw 1 uned. Os yw P yn y pedrant cyntaf fel a ddangosir, yna mae $P\hat{O}X = \theta$ yn ongl lem. Trwy lunio PN er mwyn cwblhau triongl ongl sgwâr PON, gwelwn fod

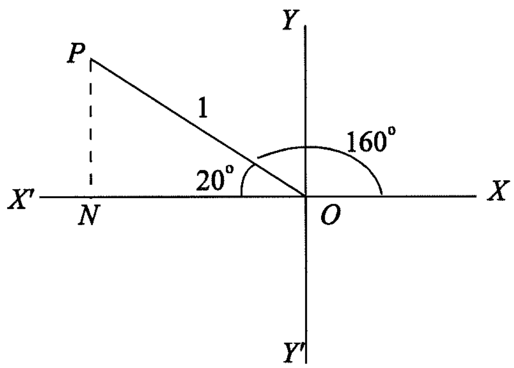
$$\sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{y}{1} \text{ ac felly } y = \sin\theta.$$

Hefyd $$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{x}{1} \text{ ac felly } x = \cos\theta.$$

Felly pan fo OP yn 1 a P yn y pedrant cyntaf gyda $P\hat{O}X = \theta$, cyfesurynnau P yw $(\cos\theta, \sin\theta)$.
Nawr, estynnir y syniad hwn i onglau o unrhyw faint.

Diffiniad
Os yw $P\hat{O}X = \theta$ ac $OP = 1$, beth bynnag yw gwerth θ, cyfesurynnau P yw $(\cos\theta, \sin\theta)$ a $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Enghraifft 6.1
Darganfyddwch werthoedd cos 160°, sin 160° a tan 160°.



Yn yr achos hwn, mae P yn yr ail bedrant.
Ar gyfer P, $x < 0$ ac felly $\cos 160° < 0$,
$y > 0$ ac felly $\sin 160° > 0$,
gan y diffinnir cyfesurynnau P fel (cos 160°, sin 160°). Nawr os gollyngir y perpendicwlar PN o P i $X'OX$,

$$\cos 160° = -ON,$$
$$\sin 160° = PN.$$

Nawr $P\hat{O}X' = 20°$ ac

$$\frac{ON}{1} = \cos 20°, \quad \frac{PN}{1} = \sin 20°.$$

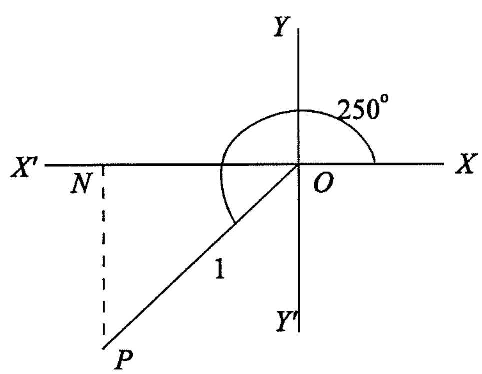
Triongl ongl sgwâr yw *PON*.

$$\therefore \quad ON = \cos 20°, \quad PN = \sin 20°.$$
$$\therefore \quad \cos 160° = -ON = -\cos 20° = -0.9397,$$
$$\sin 160° = PN = \sin 20° = 0.3420$$

yn gywir i 4 lle degol

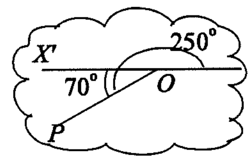
a
$$\tan 160° = \frac{\sin 160°}{\cos 160°} = \frac{\sin 20°}{-\cos 20°} = -\tan 20° = -0.3640.$$

Enghraifft 6.2
Darganfyddwch werthoedd sin 250°, cos 250° a tan 250°.



Cyfesurynnau *P* yw cos 250°, sin 250°.

Mae P yn y trydydd pedrant. Yna ar gyfer pwynt P,
$$x < 0, \; y < 0$$
ac felly $\cos 250° < 0$, $\sin 250° < 0$.
Yna os N yw troed y perpendicwlar o P i $X'OX$,



$$\cos 250° = -ON,$$
$$\sin 250° = -PN.$$

Nawr $P\hat{O}N = 70°$ ac

$$\frac{ON}{1} = \cos 70°, \quad \frac{PN}{1} = \sin 70°$$

ac felly $\quad ON = \cos 70°$ a $PN = \sin 70°$.

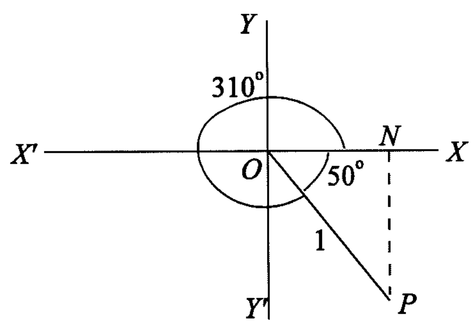
Yna $\quad \cos 250° = -ON = -\cos 70° = -0.3420,$

$$\sin 250° = -PN = -\sin 70° = -0.9397,$$

a $\quad \tan 250° = \dfrac{-\sin 70°}{-\cos 70°} = \tan 70° = 2.7475.$

Enghraifft 6.3

Darganfyddwch werthoedd sin 310°, cos 310° a tan 310°.



Yma mae P yn y pedwerydd pedrant ac $x > 0$, $y < 0$

ac felly $\quad \cos 310° > 0$, $\sin 310° < 0$.

Yna, fel o'r blaen, os PN yw'r perpendicwlar oddi ar P i $X'OX$,

$$\cos 310° = ON,$$
$$\sin 310° = -PN.$$

Nawr $P\hat{O}N = 50°$ ac

$$\frac{ON}{1} = \cos 50°, \quad \frac{PN}{1} = \sin 50°,$$

ac felly $\quad ON = \cos 50°$, $PN = \sin 50°$.

Yna $\quad \cos 310° = ON = \cos 50° = 0.6428,$

$$\sin 310° = -PN = -\sin 50° = -0.7660,$$

a $\quad \tan 310° = \dfrac{\sin 310°}{\cos 310°} = \dfrac{-\sin 50°}{\cos 50°} = -\tan 50° = -1.1918.$

Mae enghreifftiau 6.1 – 6.3 yn darlunio'r rheolau canlynol ar gyfer dyrannu gwerthoedd sin, cos a tan i onglau cyffredinol.

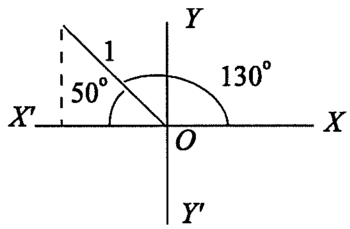
Rheolau ar gyfer darganfod sin, cos a tan onglau cyffredinol

(i) Penderfynwch ym mha bedrant y mae'r ongl a dyrannwch arwyddion i sin a cos trwy gyfeirio at arwyddion x ac y.

(ii) Darganfyddwch yr ongl lem rhwng OP ac $X'OX$ ac ysgrifennwch gwerth sin, cos yr ongl; yna defnyddiwch (i). Yn olaf, os oes angen, $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$.
Gydag ymarfer, gallwch ddarganfod y pedrant a'r ongl lem yn eich pen.
Gellir cynnwys onglau sy'n fwy na 360° yn hawdd gyda'r rheol hon.

Enghraifft 6.4

Darganfyddwch sin 490°, cos 490° a tan 490°.



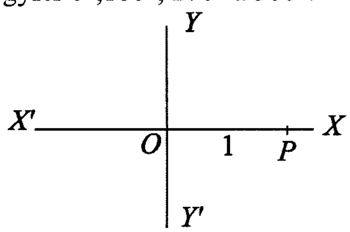
Mae 490° yn cyfateb i un cylchdro (360°) adio 130°. Mae'r ongl 130° yn yr ail bedrant a'r ongl lem yw 50°.

Yna cos 490° = cos 130° = – cos 50°,

sin 490° = sin 130° = sin 50°,

$$\tan 490° = \frac{\sin 490°}{\cos 490°} = \frac{\sin 50°}{-\cos 50°} = -\tan 50°.$$

Yn olaf, mae'r dull yn ein galluogi i ddarganfod y cymarebau trigonometrig ar gyfer 0°,180°, 270° a 360°.



Yn achos $\theta = 0°$, mae pwynt P ar yr echelin x, gydag $OP = 1$.

Yna $\cos\theta = \cos 0° = 1$,

$\sin\theta = \sin 0° = 0$,

a $$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0.$$

ar gyfer P, $x = 1$
$y = 0$.

Cewch olrhain y canlyniadau eraill fel ymarferion.

Ymarferion 6.1

1 Nodwch a yw'r gwerthoedd canlynol yn bositif neu negatif.
(i) sin 162° (ii) sin 325° (iii) cos 279° (iv) tan 220° (v) cos (–33.6°)
(vi) sin 600° (vii) cot 195° (vii) sin (–135°) (ix) sec 140° (x) tan (–158°)

2 Mynegwch y meintiau canlynol fel cymarebau trigonometrig ongl lem gyda'r arwydd cywir.
(i) cos 256° (ii) sin 114° (iii) sin (–10°) (iv) tan 183°6' (v) sin 345°
(vi) cos (–248°) (vii) tan 93.1° (viii) cos 585° (ix) tan (–460°)

3 Darganfyddwch, lle mae'r meintiau wedi eu diffinio: sin 90°, cos 90°, tan 90°, sin 180°, cos 180°, tan 180°, sin 270°, cos 270°, tan 270°, sin 360°, cos 360° a tan 360°.

4 Ym mha bedrant y mae'r ongl θ yn gorwedd os yw
(i) $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$, (ii) $\tan\theta > 0$, $\cos\theta < 0$.

5 I unrhyw ongl lem, defnyddiwch fraslun i ddangos bod $\sin(180 - \theta) = \sin\theta$ a bod $\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$ ac ysgrifennwch $\tan(180 - \theta)$ yn nhermau $\tan\theta$.

6 Ar gyfer unrhyw ongl lem θ, dangoswch fod
$$\sin(180 + \theta) = -\sin\theta,$$
$$\cos(180 + \theta) = -\cos\theta$$
a darganfyddwch tan $(180 + \theta)$ yn nhermau $\tan\theta$.

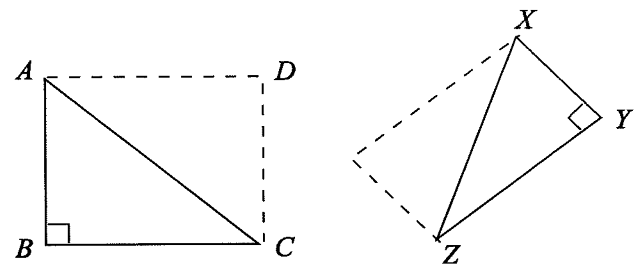
7 Dangoswch, os yw θ yn ongl lem, fod
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \ \cos(-\theta) = \cos\theta$$
a darganfyddwch tan $(-\theta)$ yn nhermau $\tan\theta$.

Ar ôl diffinio'r cymarebau trigonometrig ar gyfer onglau cyffredinol, gallwn ysgrifennu fformiwlâu ar gyfer arwynebeddau trionglau a pharalelogramau.

6.2 Arwynebeddau trionglau a pharalelogramau

(a) Trionglau

Ystyriwn yn gyntaf arwynebeddau trionglau onglau sgwâr megis ABC ac XYZ.



Gellir ystyried arwynebeddau'r trionglau fel union hanner arwynebeddau'r petryalau a ddangosir.

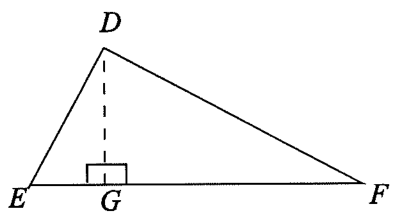
Arwynebedd petryal $ABCD = AB \times BC$ ac felly arwynebedd triongl ABC yw $\frac{1}{2}AB \times BC.$

Yn yr un modd, arwynebedd triongl $XYZ = \frac{1}{2}ZY \times XY.$

Ar gyfer triongl ongl sgwâr, arwynebedd $= \dfrac{1}{2}$ sail × uchder.

Noder nad oes sôn am yr hypotenws yma.

Gellir adeiladu trionglau nad ydynt yn rhai ongl sgwâr trwy gyfuno trionglau ongl sgwâr.



Yn nhriongl DEF, gollyngwch berpendicwlar DG ar EF.

Yna triongl DEF

$= $ triongl $DEG +$ triongl DGF

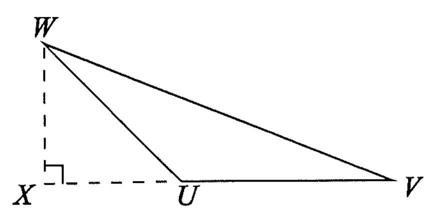
ac felly arwynebedd DEF

$$= \frac{1}{2}EG \times DG + \frac{1}{2}GF \times DG$$

$$= \frac{1}{2}(EG + GF) \times DG$$

$$= \frac{1}{2}EF \times DG$$

$$= \frac{1}{2} \text{ sail} \times \text{uchder.}$$



Yn nhriongl UVW, gollyngwch berpendicwlar WX ar VU wedi ei hestyn.

Yna triongl WUX

$= $ triongl $WXV -$ triongl WXU

$$= \frac{1}{2}XV \times WX - \frac{1}{2}XU \times WX$$

$$= \frac{1}{2}(XV - XU) \times WX$$

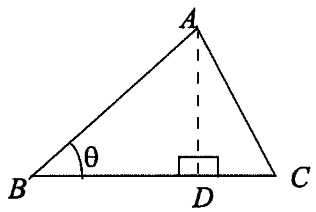
$$= \frac{1}{2}UV \times WX$$

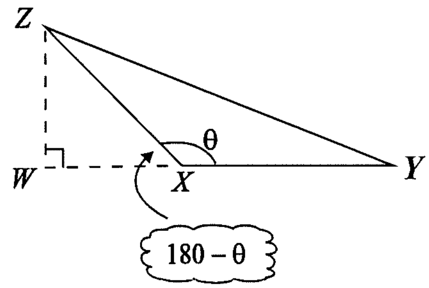
$$= \frac{1}{2} \text{ sail} \times \text{uchder.}$$

I grynhoi,

ar gyfer unrhyw driongl, arwynebedd $= \frac{1}{2}$ sail × uchder.

Gellir mynegi arwynebedd triongl yn nhermau un o onglau'r triongl.





Gyda thriongl ABC,

arwynebedd $= \frac{1}{2} BC \times AD$

$= \frac{1}{2} BC \times BA \sin\theta$

$= \frac{1}{2}$ lluoswm dwy ochr

× sin (ongl rhwng yr ochrau hynny).

Gyda thriongl XYZ,

arwynebedd $= \frac{1}{2} XY \times WZ$

$= \frac{1}{2} XY \times ZX \sin(180 - \theta)$

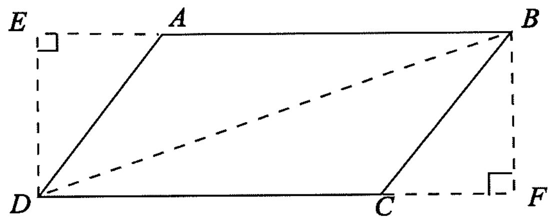
$= \frac{1}{2} XY \times ZX \sin\theta$

$= \frac{1}{2}$ lluoswm dwy ochr

× sin(ongl rhwng yr ochrau hynny).

Felly gydag unrhyw driongl, arwynebedd $= \frac{1}{2} \times$ lluoswm dwy ochr × sin (ongl gynwysedig).

Arwynebedd paralelogram



Arwynebedd paralelogram $ABCD$

$= $ arwynebedd triongl ABD + arwynebedd triongl BCD

$= \frac{1}{2} AB \times DE + \frac{1}{2} DC \times BF$

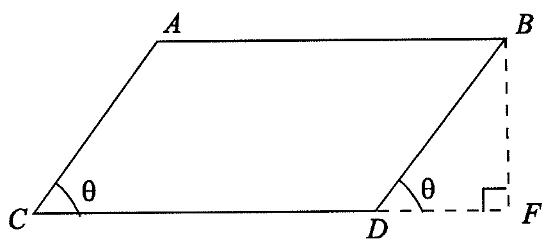
$= \frac{1}{2} DC \times BF + \frac{1}{2} DC \times BF$ $\quad$ $AB = DC$, $DE = BF$

$= DC \times BF$

$=$ sail $\times$ uchder

Arwynebedd paralelogram $=$ sail $\times$ uchder.

Gellir hefyd fynegi'r arwynebedd yn nhermau sin un o'r onglau.



Yna os yw $A\hat{C}D = \theta$ yna $B\hat{D}F = \theta$ $\quad$ **onglau cyfatebol**

a $\quad \dfrac{BF}{BD} = \sin\theta$

ac felly $\quad BF = BD \sin\theta$.

Yna arwynebedd paralelogram $ABCD = DC \times BF$

$= DC \times BD \sin\theta$

$= DC \times AC \sin\theta$

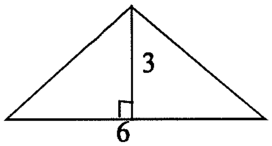
$=$ lluoswm dwy ochr gyfagos $\times$ sin (ongl gynwysedig rhwng yr ochrau).

Arwynebedd paralelogram = lluoswm dwy ochr gyfagos $\times$ sin (ongl gynwysedig).

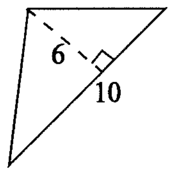
Ymarferion 6.2

1 Darganfyddwch arwynebedd pob un o'r trionglau canlynol :

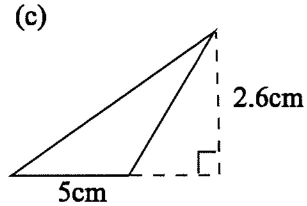
(a)



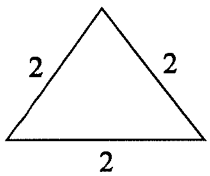
(b)



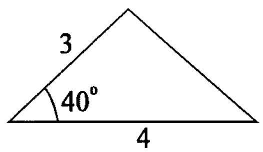
(c)



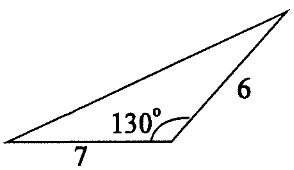
(d)



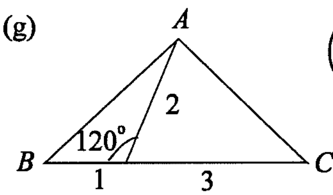
(e)



(f)

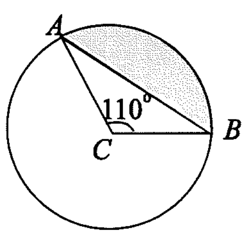


(g)



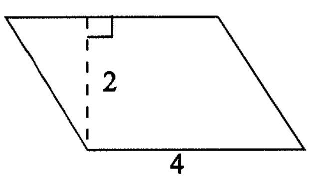
Darganfyddwch arwynebedd *ABC.*

2 Mewm cylch gyda chanol C, radiws 2 cm ac $\angle ACB = 110°$, darganfyddwch yr arwynebedd tywyll.(Byddwch yn ofalus!)

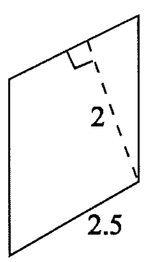


3 Darganfyddwch arwynebedd pob un o'r siapiau canlynol.

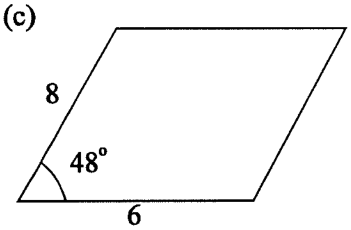
(a)



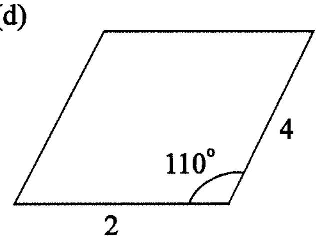
(b)



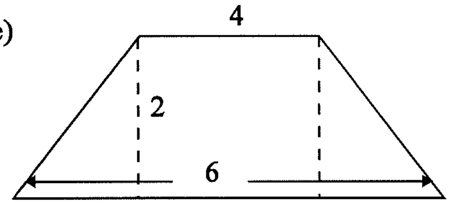
(c)



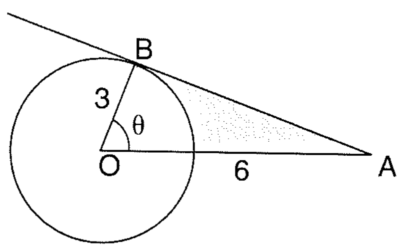
(d)



(e)

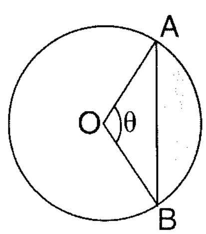


4



Yn y diagram, mae AB yn dangiad i'r cylch, canol O a radiws 3cm; mae hyd OA yn 6cm ac mae $A\hat{O}B = \theta$ radian. Darganfyddwch yr arwynebedd a dywyllwyd, yn nhermau θ.

5 Yn y diagram, mae AB yn gord cylch, canol O a radiws r; ac mae $A\hat{O}B = \theta$ radian. Darganfyddwch yr arwynebedd a dywyllwyd, yn nhermau r a θ .



D.S. Mae hwn yn ganlyniad pwysig a welir yn aml mewn cwestiynau'n ymwneud â mesur mewn radianau.

6.3 Graffiau ffwythiannau trigonometrig

Yn Adran 6.1, diffiniwyd gwerthoedd sin, cos a tan ar gyfer unrhyw ongl. Trwy ddefnyddio'r gwerthoedd hyn, gallwn lunio graffiau'r ffwythiannau.

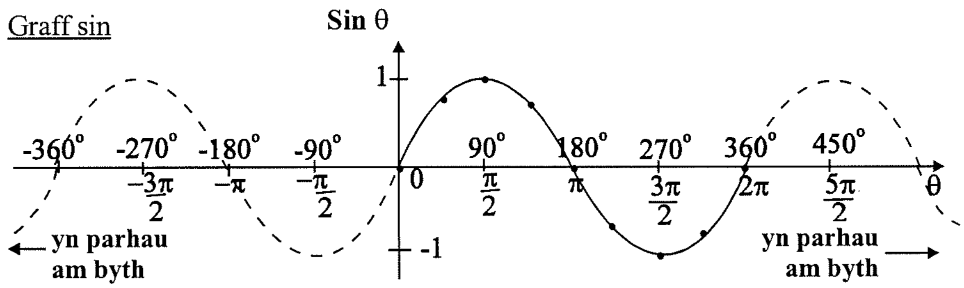
Enghraifft 6.5

Cwblhewch y tabl canlynol a phlotiwch y pwyntiau hyn ar graff.

θ (graddau)	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
sin θ	0	0.7071							

Gellir darganfod y gwerthoedd trwy ddefnyddio cyfrifiannell neu trwy ddefnyddio'r cysyniadau a gyflwynwyd yn adran 6.1.
Felly sin 90° = 1, sin 135° = sin 45° ≈ 0.7071, sin 180° = 0,
sin 225° = – sin 45° ≈ – 0.7071, sin 270° = – 1,
sin 315° = – sin 45° ≈ – 0.7071 a sin 360° = 0.
Dangosir y pwyntiau hyn isod ar y graff.

Graff sin



Gellir cysylltu'r pwyntiau hyn â chromlin lefn fel a ddangosir, gan ddarlunio'r graff ar gyfer Sin θ yn yr amrediad 0° – 360° (neu 0 i 2π radian).
Yn gyffredinol, gellir perthnasu sin unrhyw ongl i sin ongl yn yr amrediad 0° – 360° trwy adio neu dynnu lluosrifau 360°. Dangosir estyniad y graff ar gyfer onglau y tu hwnt i'r amrediad 0° – 360° gan y llinellau toredig.
Gellir nodi prif nodweddion y ffwythiant sin θ trwy astudio'r graff.

(i) Gwerth uchaf sin θ yw 1 ac mae'n digwydd ar . . . –270°, 90°, 450°, . . . a fesul cyfwng o 360°.

. . ., $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, . . . ar gyfyngau o 2π radian

(ii) Gwerth isaf sin θ yw –1 ac mae'n digwydd ar . . . –90°, 270°, 630°, . . . a fesul cyfwng o 360°.

. . ., $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, . . . ar gyfyngau o 2π radian

(iii) Sin θ = 0 pan fo θ = . . . –180°, 0, 180°, . . . a fesul cyfwng o 180°.

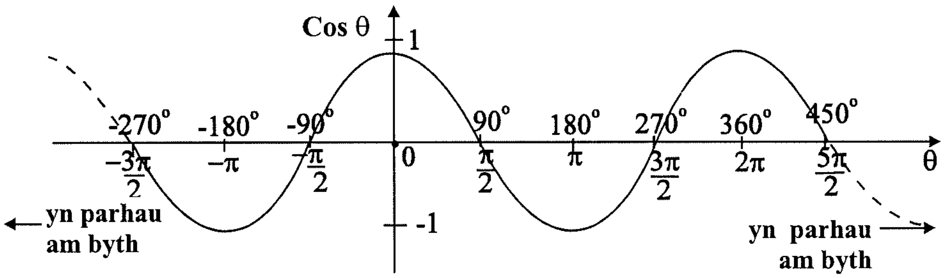
. . ., –π, 0, π, . . . ar gyfyngau o π radian

(iv) Ailadroddir ffurf graff sin θ o θ = 0° (0) i 360° (2π) dros gyfyngau o 360° (2π). Dywedir bod y ffwythiant yn <u>gyfnodol</u> neu <u>gylchol</u>. Dywedir bod cyfnod y graff yn 360° neu, yn amlach, 2π (radian). Mae'r graff yn dangos natur donnog ac yn aml fe gyfeirir ato fel ton sin.

Graff cos

Gellir plotio graff y ffwythiant cosin, cos θ, yn yr un modd ac mae ganddo'r ffurf a ddangosir ar y dudalen nesaf

Gwiriwch rai gwerthoedd
cos 45° = 0.7071
cos 135° = –0.7071
cos 180° = –1 .



Gellir nodi prif nodweddion y ffwythiant cos θ trwy astudio'r graff.

(i) Gwerth uchaf cos θ yw 1 ac mae'n digwydd ar . . . 0°, 360°, . . ., a fesul cyfwng o 360°.

. . ., 0, π, . . . ar gyfyngau o 2π radian

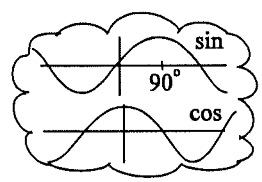
(ii) Gwerth isaf cos θ yw −1 ac mae'n digwydd ar . . . −180°, 180°, . . . , a fesul cyfwng o 360°.

. . ., −π, π, . . . ar gyfyngau o 2π radian

(iii) Cos θ = 0 pan fo θ = . . . − 90°, 90°, . . . , a fesul cyfwng o 180°.

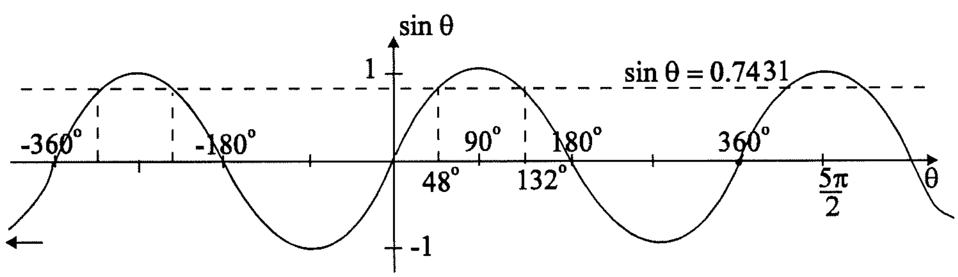
. . ., $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, . . . ar gyfyngau o π radian

(iv) Ailadroddir ffurf graff cos θ o 0 i 360° (0 i 2π) dros gyfyngau o 360° (2π). Mae'r ffwythiant cos θ hefyd yn gyfnodol neu gylchol gyda chyfnod 360° neu 2π radian, ac mae ei graff yn dangos natur donnog debyg i graff y ffwythiant sin. Yn wir, gellir gweld trwy edrych ar graff sin θ a cos θ bod modd cael graff cos θ trwy symud graff sin θ i'r chwith trwy 90° (neu $\frac{\pi}{2}$ radian). Oherwydd hynny, cyfeirir yn aml at graff cos θ fel ton sin.



Enghraifft 6.6

O'r graff sin θ ac o wybod bod sin 132° = 0.7431, yn gywir i 4 lle degol, darganfyddwch bob ongl rhwng −360° a 360° sydd â sin yn hafal i 0.7431, yn gywir i 4 lle degol.



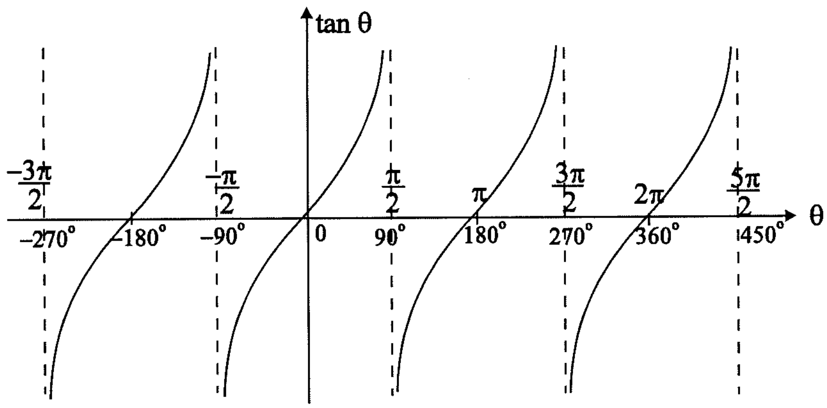
O'r graff, yr onglau yw

− 360° + 48°, −360° + 132°, 48°, 132°, h.y. −312°, −228°, 48°, 132°.

<u>Graff tan θ</u>
Er mwyn llunio graff tan θ adeiledir yn gyntaf dabl o werthoedd ar gyfer θ rhwng 0° a 360° (neu 0 i 2π radian).

θ	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
tan θ	0	1	dim diffiniad	−1	0	1	dim diffiniad	−1	0

Dangosir y graff isod.



Mae toriadau yn y graff ar θ = . . , −270°, −90°, 90°, .., ac ar gyfyngau o 180° (2π radian). Dywedir bod y ffwythiant yn <u>doredig</u> ar y pwyntiau hyn. Tra bo graffiau sin θ a cos θ (sy'n ffwythiannau di-dor) yn gyfan gwbl rhwng gwerthoedd −1 ac 1, mae graff tan θ yn estyn yn anfeidraidd i fyny ac i lawr.

Wrth i θ ddod yn agos at 90° (neu $\frac{\pi}{2}$ radian) o'r chwith, h.y. fesul gwerth sy'n cynyddu'n raddol, mae tan θ yn cynyddu yn ddiderfyn, e.e. tan 88°30' ≈ 38.19, tan 89° ≈ 57.29, tan 89.9° ≈ 572.96; a rhwng 89.9° a 90° mae tan θ yn cynyddu heb derfyn. Dywedir bod tan θ → ∞ wrth i θ → 90° ($\frac{\pi}{2}$ radian) oddi tano neu o'r chwith.

Ar y llaw arall, wrth i θ nesau at 90° oddi uchod neu o'r dde; mae tan θ yn lleihau yn ddiderfyn: tan 91.5° ≈ − 38.19, tan 90.1° ≈ − 572.96. Dywedir bod tan θ → − ∞ wrth i θ → 90° ($\frac{\pi}{2}$ radian) o'r dde neu oddi uchod.

Felly pan fo θ ychydig yn llai na 90°, mae tan θ yn rhif positif mawr iawn; pan fo θ ychydig yn fwy na 90°, mae tan θ yn rhif negatif mawr iawn. Ni ellir rhoi gwerth pendant i tan 90° neu tan $\frac{\pi}{2}$: mae'n anniffiniedig.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
a sin 90° = 1
cos 90° = 0

Gellir nodi prif briodweddau ffwythiant tan θ o'i graff fel a ganlyn:

(i) nid oes gan tan θ werth uchaf na gwerth isaf;
(ii) tan θ = 0 pan θ = . . ., −180°, 0, 180°, . . . ar gyfyngau o 180° neu π radian;
(iii) mae ffurf y graff o −90° i 90° yn ailymddangos dros gyfyngau o 180°: mae'r ffwythiant yn gyfnodol gyda chyfnod o 180° (π radian), yn wahanol i'r ffwythiannau sin a cosin sydd â chyfnodau o 360° (2π radian).

tan 210° = tan 30°, er enghraifft.

Ym Mhennod 4, archwiliwyd y cyswllt rhwng croestorfannau graffiau a datrysiad hafaliadau. Yno, darganfuwyd y croestorfannau trwy ddatrys hafaliadau.
Yma, byddwn yn ystyried y cyswllt o'r safbwynt arall: defnyddio croestorfannau i wneud diddwythiadau ynghylch gwreiddiau hafaliadau.

Enghraifft 6.7
Dangoswch trwy fraslunio graffiau

$$y = \theta - \frac{\pi}{2} \text{ ac } y = \sin\theta$$

fod gan yr hafaliad

$$2\sin\theta - \theta + \pi = \theta$$

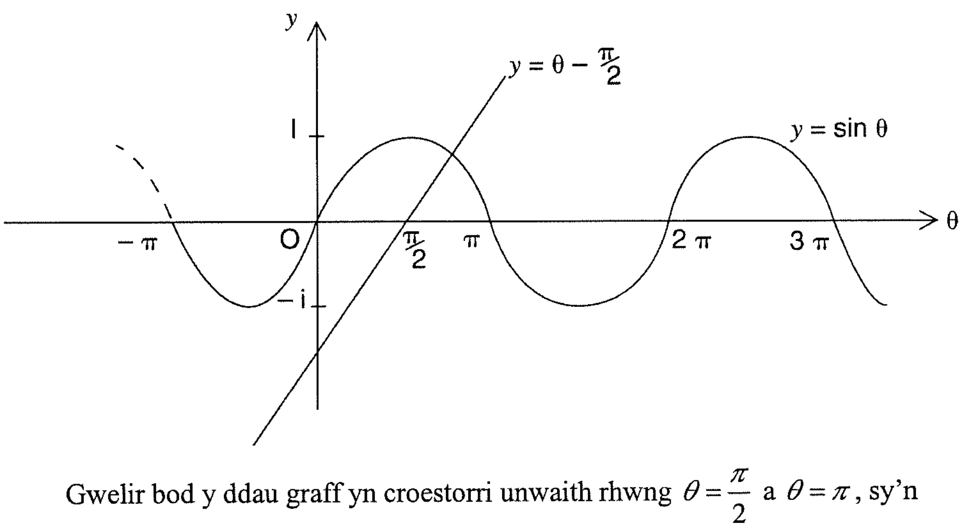
wreiddyn rhwng $\frac{\pi}{2}$ a π.
Nodwn, lle mae'r graffiau yn croestorri, fod

$$\theta - \frac{\pi}{2} = \sin\theta$$

neu $\quad 2\sin\theta - \theta + \pi = \theta. \qquad (1)$

trwy wneud y ddau *y* yn hafal

Dangosir y ddau graff isod.



Gwelir bod y ddau graff yn croestorri unwaith rhwng $\theta = \frac{\pi}{2}$ a $\theta = \pi$, sy'n dangos bod gan yr hafaliad (1) wreiddyn yn yr amrediad hwn o θ.

Ymarferion 6.3

1 Darganfyddwch bob ongl rhwng 0 ac 360° yn gynwysedig sy'n bodloni'r hafaliadau canlynol :-

(a) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ (c) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $\cos\theta = 1$ (f) $\tan\theta = 0$ (g) $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(h) $\cos\theta = -1$ (i) $\tan\theta = -1$.

2 Darganfyddwch werthoedd θ rhwng 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ sy'n bodloni $\sin 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3 Heb ddefnyddio cyfrifiannell, darganfyddwch
(i) $\tan 180°$ (ii) $\tan 360°$ (iii) $\tan 60°$ (iv) $\tan 240°$
(v) $\sin 330°$ (vi) $\cos 420°$ (vii) $\sin 480°$ (viii) $\cos 570°$.

4 Darganfyddwch werthoedd θ rhwng $-\pi$ a π sy'n bodloni $\tan 3\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5 Darganfyddwch werthoedd θ rhwng $-180°$ a $180°$ sy'n bodloni

(i) $\sin(\theta + 60°) = \dfrac{1}{2}$

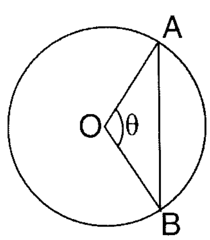
(ii) $\cos(\theta - 45°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\tan(\theta - 30°) = 1$.

6 Datryswch yr hafaliadau canlynol ar gyfer gwerthoedd θ o 0^0 i 360^0 yn gynhwysol:

(a)	$\sin^2\theta = \dfrac{1}{4}$	(b)	$\tan^2\theta = \dfrac{1}{3}$
(c)	$\sin 3\theta = -1$	(d)	$2\cos 2\theta = 1$
(e)	$\tan^2\theta + \tan\theta = 0$	(f)	$2\cos^2\theta = \cos\theta$
(g)	$3\sin^2\theta + \sin\theta = 0$	(h)	$4\cos^3\theta = \cos\theta$
(i)	$\tan\theta = 2\sin\theta$.		

7



Mae cord *AB* yn cynnal ongl θ yng nghanol cylch, radiws *r*. O wybod bod y cord yn haneru'r sector *OAB*, dangoswch fod

$$\theta = 2\sin\theta.$$

Trwy fraslunio graffiau $y = \dfrac{\theta}{2}$ ac $y = \sin\theta$, dangoswch bod gan yr hafaliad hwn wreiddyn rhwng $\dfrac{\pi}{2}$ a π.

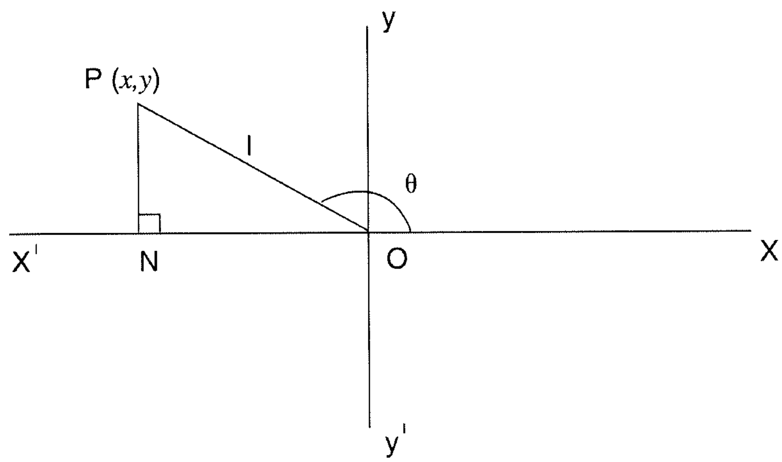
8 Trwy fraslunio graffiau $y = \tan\theta$ ac $y = 1 + \theta$, dangoswch fod gan yr hafaliad

$$\tan\theta = 1 + \theta$$

wreiddyn rhwng $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$.

6.4 Unfathiant trigonometrig

Diffiniwyd cymarebau trigonometrig ar gyfer onglau cyffredinol yn Adran 6.1. Gadewch i ni atgoffa ein hunain o'r diffiniad.



Yn y diagram, *X'OX* ac *Y'OY* yw'r echelinau perpendicwlar arferol ac mae $P\hat{O}X = \theta$.
O'r diffiniadau, mae gan *P* gyfesurynnau

$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta.$

Bydd hyn yn wir ym mha bedrant bynnag y lleolir *P*.

Yna, os yw *PN* yn berpendicwlar i *X'OX*, mae'r triongl *PNO* yn driongl ongl sgwâr.
Gadewch i ni ddefnyddio Theorem Pythagoras.

Yna $\quad ON^2 + NP^2 = 1$

Gan fod $x = -ON$ ac $y = NP$, cawn

$$x^2 + y^2 = 1$$

neu
$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1}$$

Defnyddir yr arwydd $\equiv$ i bwysleisio bod y berthynas yn unfathiant, h.y. mae'n dal ar gyfer <u>pob</u> gwerth θ.

Bydd dau unfathiant arall yn cael eu cyflwyno yn yr Uned **P3.**

Enghraifft 6.8
Datryswch yr hafaliad

$$1 + \sin\theta = 2\cos^2\theta,$$

ar gyfer gwerthoedd o θ rhwng 0° a 360°.

Dengys y term yn $\cos^2\theta$ ar yr ochr dde y gellir ysgrifennu'r hafaliad yn nhermau $\sin\theta$ yn unig.

Mae $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Felly pryd bynnag y gwelwch $\cos^2\theta$, meddyliwch am $\sin^2\theta$, ac i'r gwrthwyneb.

Yna o $\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, cawn

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

ac mae'r hafaliad a roddwyd yn newid yn

$$1 + \sin\theta = 2(1 - \sin^2\theta).$$

$$\therefore \quad 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0.$$

neu defnyddiwch y fformiwla gwadratig

Yna $\quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$

felly mae $\quad \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ neu -1.

Felly mae $\quad \theta = 30°, 150°$ neu $270°$.

Cofiwch fod –90° o'ch cyfrifiannell yn gywerth â 270° ar ôl adio 360°.

Enghraifft 6.9

Dangoswch fod

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 = 2.$$

Nawr mae $\quad (\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2$

$$= \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + 2\cos\theta\sin\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} - 2\cos\theta\sin\theta$$

$$= 2.$$

Nodwch fod yma chwe therm, nid pedwar.

Enghraifft 6.10
Os yw $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ darganfyddwch, heb ddefnyddio cyfrifiannell, werthoedd posibl $\cos\theta$ a $\tan\theta$.

Nawr mae $\quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

felly mae $\quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}.$

Felly $\quad \cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \pm\dfrac{4}{5}.$

Hefyd mae $\quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\pm\frac{4}{5}} = \mp\dfrac{3}{4}.$

Ymarferion 6.4

1 Darganfyddwch bob un o werthoedd θ rhwng $0°$ a $360°$ sy'n bodloni'r hafaliadau canlynol:

(i) $\sin^2\theta + \cos\theta + 1 = 0$ (ii) $3 - 3\sin\theta = 2\cos^2\theta$

(iii) $1 - \sin\theta = \cos^2\theta$ (iv) $\sin^2\theta - \cos^2\theta = 3\cos\theta - 2$.

2 Os yw $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ac os yw θ yn ongl aflem (h.y. $90° < \theta < 180°$), darganfyddwch, heb ddefnyddio cyfrifiannell, werthoedd (i) sin θ, (ii) tan θ.

3 Os yw cos $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $180° < \theta < 270°$ darganfyddwch, heb ddefnyddio cyfrifiannell, werthoedd (i) $\sin\theta$, (ii) tan θ.

4 Os yw $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $270° < \theta < 360°$, darganfyddwch, heb ddefnyddio cyfrifiannell, werth cos θ.

5 Os yw $x = a \sin\theta$, ysgrifennwch y canlynol yn nhermau θ:

(i) $\sqrt{a^2 - x^2}$ (ii) $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

6 Os yw $y = b \cos\theta$, ysgrifennwch y canlynol yn nhermau θ:

(i) $\sqrt{b^2 - y^2}$ (ii) $\frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y}$.

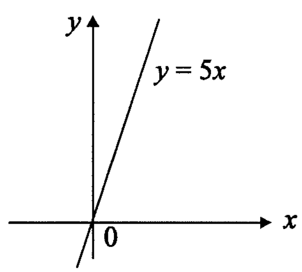
Pennod 7

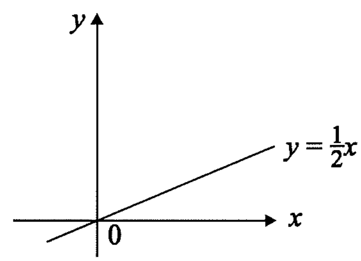
Differu

Proses sy'n perthyn i gyfradd newid ffwythiant yw differiad. Dechreuwn trwy ystyried enghreifftiau sy'n ymwneud â pha mor serth yw graffiau ffwythiannau.

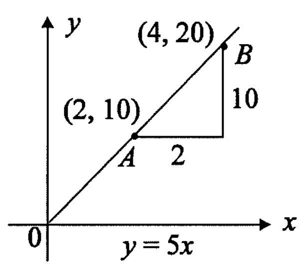
7.1 Graddiant graff llinell syth

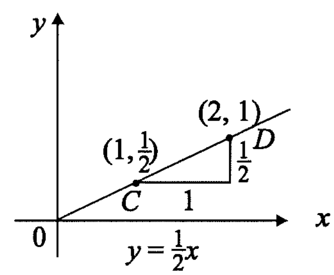
Enghraifft 7.1
Cymharwch graffiau'r ffwythiannau $f(x) = 5x$ ac $g(x) = \frac{1}{2}x$.





Nodir bod y ddau graff yn llinellau syth a bod y graff cyntaf yn fwy serth na'r ail graff. Er mwyn dadansoddi serthni graff, a'i gymharu a'r ffordd y byddwn yn disgrifio bryn neu riw, ystyriwn raddiant y llinell.
Un ffordd yw cymharu'r gyfradd y mae y yn newid o'i gymharu ag x wrth symud ar hyd y llinell.





Cymerir pwyntiau $A(2, 10)$, $B(4, 20)$ ar y llinell gyntaf, a phwyntiau $C(1, \frac{1}{2})$, $D(2, 1)$ ar yr ail linell. Gellir mesur y graddiannau fel hyn:

$$\text{Graddiant (neu oledd)} = \frac{\text{gwahaniaeth yn } y \text{ rhwng } A(C) \text{ a } B(D)}{\text{gwahaniaeth yn } x \text{ rhwng } A(C) \text{ a } B(D)}.$$

Mae'r rhain yn rhoi $\dfrac{20-10}{4-2}$ a $\dfrac{1-\frac{1}{2}}{2-1}$,

h.y. 5 a $\dfrac{1}{2}$.

Dylid nodi rhai pwyntiau yma.

(i) Mae'r graddiant (neu oledd) a gyfrifwyd yn fwy gyda'r graff cyntaf, fel y byddem yn disgwyl o edrych arnynt.

(ii) Mae'r rhifau 5 a $\frac{1}{2}$ yn digwydd yn $y = 5x$ ac $y = \frac{1}{2}x$.

(iii) Ceir yr un rhifau os cymerir pwyntiau gwahanol ar y llinell.
Felly mae $A'(5, 25)$, $B'(12, 60)$ ar y llinell gyntaf ac yn rhoi

$$\text{graddiant} = \frac{\text{gwahaniaeth yn } y}{\text{gwahaniaeth yn } x} = \frac{60-25}{12-5} = 5.$$

Gwiriwch fod *C*'(6,3), *D*'((20,10) ar yr ail linell ac yn rhoi graddiant = ½.

Mae'r atebion 5 a $\frac{1}{2}$ ar gyfer graddiannau $y = 5x$ ac $y = \frac{1}{2}x$ yn ôl eu trefn yn dangos mai m yw goledd y llinell a ddisgrifir gan $y = mx$.

Weithiau defnyddir y gair 'goledd' yn lle graddiant.

Enghraifft 7.2

Beth yw goledd y llinell a roddir gan $y = 7x + 3$?
Gellir darganfod goledd y llinell syth yn yr un modd ag o'r blaen. Cymerir dau bwynt ar y llinell, dyweder (2,17) a (9, 66).

Ffurf gyffredinol yr hafaliad yw $y = mx + c$.

$$\text{Yna goledd} = \frac{66-17}{9-2} \quad \left(\frac{\text{gwahaniaeth yn } y}{\text{gwahaniaeth yn } x}\right)$$

Gwiriwch fod y rhain yn bodloni $= 7x + 3$.

$$= \frac{49}{7} = 7.$$

Ceir yr un canlyniad os dewisir unrhyw ddau bwynt arall ar y llinell.
Goledd neu raddiant y llinell
$y = 7x + 3$ yw 7.

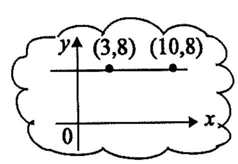
Gwiriwch (15, 108) a (28, 199).

Yn fwy cyffredinol, os $y = mx + c$, y goledd yw m, pa un ai positif, sero neu negatif yw m.

<u>Byddwch yn ofalus â'r arwyddion</u>
Ar gyfer $y = -3x + 2$ gwiriwch gyda'r pwyntiau (4, −10) a (10, −28) fod y goledd yn −3.

Gydag $y = 8$ (cysonyn), mae'r goledd yn sero, oherwydd bod (3, 8), (10, 8) ar y llinell a'r

$$\text{goledd} = \frac{8-8}{10-3} = \frac{0}{7} = 0.$$



Ymarferion 7.1

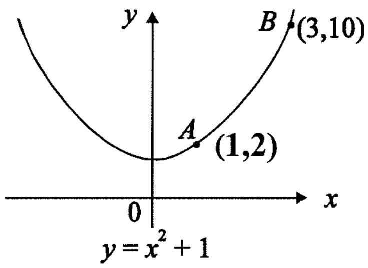
1 Ysgrifennwch raddiant (neu oledd) pob un o'r rhain:

(i) $y = 56x + 3$ (ii) $y = -\frac{10}{11}x + 11$ (iii) $y = -7$

(iv) $y = 13 - 6x$ (v) $y = \frac{1}{1000}x + 1000$

(vi) $3y = x + 6$ (vii) $7y = -3x + 1$

7.2 Graddiant cromlin



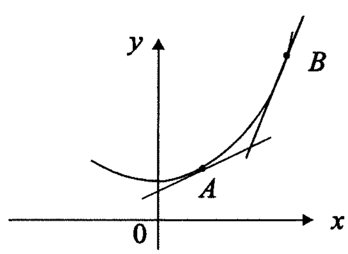
Mae cyfrifo goledd cromlin yn broblem fwy dyrys. Er enghraifft, ystyriwn graff $f(x) = x^2 + 1$ neu $y = x^2 + 1$.

Wrth edrych ar y ddau bwynt A a B ar y gromlin mae'n amlwg bod y gromlin yn fwy serth yn B nag yn A.

Er mwyn mynd ymlaen i ymchwilio i oledd y gromlin, defnyddiwn ein gwybodaeth am oledd llinell syth. Mabwysiadwn y diffiniad canlynol.

Diffiniad

Goledd (neu raddiant) cromlin ar bwynt yw goledd y tangiad i'r gromlin yn y pwynt hwnnw. Mae'r goledd yn nodweddu cyfradd newid y gydag x.
Mae defnyddio'r tangiad i'r gromlin er mwyn nodweddu goledd y gromlin yn ymddangos yn rhesymol wrth edrych ar ddiagram.



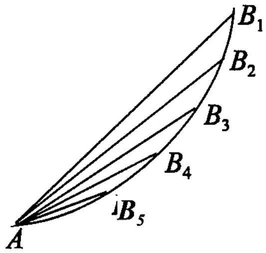
Yn y diagram, mae'r gromlin yn fwy serth yn B nag yn A, ac mae'r tangiad yn B hefyd yn fwy serth na'r tangiad yn A.
Felly, un ffordd o fesur goledd cromlin ar bwynt yw llunio'r tangiad i'r gromlin a chyfrifo goledd y tangiad hwn trwy ddarganfod $\dfrac{\text{gwahaniaeth yn } y}{\text{gwahaniaeth yn } x}$ ar gyfer dau bwynt ar y tangiad. Ni chaiff y dull hwn ei argymell gan ei bod yn anodd llunio tangiadau yn fanwl gywir. Gwell yw defnyddio dull mwy gwrthrychol.
Astudiwn dangiadau trwy ystyried <u>cordiau'r</u> gromlin yn gyntaf.

Enghraifft 7.3

Mae hon yn cyfeirio at y gromlin $y = x^2 + 1$. Darganfyddwch oleddau'r cordiau sy'n cysylltu'r pwyntiau

(a) $A(1, 2), B_1(2, 5)$ (b) $A(1, 2), B_2(1.7, 3.89)$ (c) $A(1, 2), B_3(1.5, 3.25)$
(d) $A(1, 2), B_4(1.2, 2.44)$ (e) $A(1, 2), B_5(1.01, 2.0201)$.

Mae'r braslun (nad yw wedi'i luniadu wrth raddfa) yn dangos safleoedd cymharol A a B_1 i B_5.



Gellir ystyried y cordiau $AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5$, fel brasamcanion i'r tangiad i'r gromlin yn A; AB_5 yw'r brasamcan mwyaf manwl gywir. Mae goleddau cordiau $AB_1, AB_2, \ldots AB_5$ yn frasamcanion dilynol ar gyfer goledd y tangiad yn A, ac felly trwy'r diffiniad, ar gyfer goledd y gromlin yn A, ac mae'r brasamcanion hyn yn dod yn fwy manwl gywir wrth fynd o AB_1 i AB_5.

Darganfyddwn oleddau'r pum cord (llinell syth). Cofiwn gyda dau bwynt ar linell syth fod

$$\text{goledd} = \frac{\text{gwahaniaeth yn } y}{\text{gwahaniaeth yn } x}.$$

$\underline{AB_1}$ $A(1, 2), B_1(2, 5)$

$$\text{goledd } AB_1 = \frac{5-2}{2-1} = 3$$

$\underline{AB_2}$ $A(1, 2), B_2(1.7, 3.89)$

$$\text{goledd } AB_2 = \frac{3.89-2}{1.7-1} = 2.7$$

$\underline{AB_3}$ $A(1, 2), B_3(1.5, 3.25)$

$$\text{goledd } AB_3 = \frac{3.25-2}{1.5-1} = 2.5$$

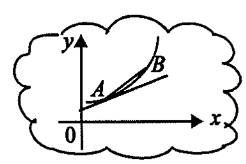
$\underline{AB_4}$ $A(1, 2), B_4(1.2, 2.44)$

$$\text{goledd } AB_4 = \frac{2.44-2}{1.2-1} = 2.2$$

$\underline{AB_5}$ $A(1, 2), B_5(1.01, 2.0201)$

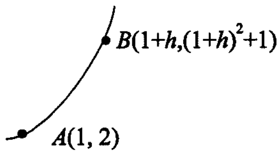
$$\text{goledd } AB_5 = \frac{2.0201-2}{1.01-1} = 2.01$$

Byddai goledd y cord sy'n cysylltu A â phwynt <u>sy'n agos iawn</u> at A yn frasamcan da ar gyfer goledd y tangiad yn A.



Yn lle rhagor o enghreifftiau rhifiadol tebyg i'r rhai uchod, gwell fyddai cyffredinoli ac ystyried pwynt B sy'n agos at $(1, 2)$ ac â chyfesurynnau $(1 + h, (1 + h)^2 + 1)$.

Cofiwch fod y pwyntiau ar y gromlin yn bodloni $y = x^2 + 1$.



Goledd cord AB yw

$$\frac{\text{gwahaniaeth yn } y}{\text{gwahaniaeth yn } x} = \frac{(1+h)^2+1-2}{1+h-1}$$

$$= \frac{1+2h+h^2+1-2}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = 2+h,$$

gan newid trefn y termau er mwyn hwylustod.

D.S.
Ni ellir cymryd $h = 0$ oherwydd roedd rhannu ag h yn un cam wrth gael y goledd.

Mae'r enghraifft algebraidd hon yn cyfleu mwy o wybodaeth nag y mae enghreifftiau rhifiadol, sef fod goledd y cord sy'n cysylltu'r pwyntiau $A(1, 2)$ a $B(1 + h, (1 + h)^2 + 1)$ yn $2 + h$, a pho agosaf at sero y mae h, agosaf at 2 yw'r goledd hwn. Trwy osod h yn ddigon agos at sero, gellir gwneud goledd y cord mor agos at 2 ag y dymunwn. Gellir casglu bod goledd y tangiad i'r gromlin $y = x^2 + 1$ ar y pwynt $(1, 2)$ yn 2. Nid yw canlyniad Enghraifft 7.3 yn ddiddorol iawn gan ei fod yn cyfeirio at y pwynt penodol $(1, 2)$; canlyniad mwy buddiol fyddai goledd y gromlin ar unrhyw bwynt.

Enghraifft 7.4

Gan ddilyn y dull yn Enghraifft 7.3, darganfyddwch oledd y tangiad (ac felly oledd y gromlin) yn y pwynt $(a, a^2 + 1)$ ar y gromlin $y = x^2 + 1$.
Cymerwn y pwynt $(a, a^2 + 1)$ a phwynt agos $(a + h, (a + h)^2 + 1)$ ar y gromlin.
Goledd y gromlin sy'n cysylltu'r pwyntiau hyn yw

$$\frac{\text{gwahaniaeth yn } y}{\text{gwahaniaeth yn } x} = \frac{(a+h)^2+1-(a^2+1)}{a+h-a}$$

$$= \frac{a^2+2ah+h^2+1-a^2-1}{h}$$

$$= \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.$$

Defnyddiwch gromfachau o gwmpas $a^2 + 1$ er mwyn osgoi gwallau yn yr arwyddion.

Yna, wrth i $h \to 0$, mae goledd y cord yn agosau at y gwerth $2a$.
Felly goledd y tangiad i'r gromlin $y = x^2 + 1$ ar unrhyw bwynt yw
$2 \times$ cyfesuryn x y pwynt.
Gellir yn rhwydd gymhwyso'r dull ar gyfer polynomialau o radd uwch, **er na fydd gofyn i chi wneud hynny yn yr arholiad P1**.
I gymhwyso'r dull ar gyfer polynomial gradd 3, bydd arnom angen gwybodaeth o'r ehangiad canlynol:-

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Nid oes angen hyn ar gyfer yr arholiad.

Gofynnwn i chi dderbyn y canlyniad hwn;
os yw'n well gennych beidio, gellir ei ddiddwytho o
$(a+b)^3 = (a+b)(a=b)^2 = (a=b)(a^2+2ab+b^2)$
ac ati.

Enghraifft 7.5
Darganfyddwch y goledd yn $(a, a^3 + 3a + 2)$ ar y gromlin $y = x^3 + 3x + 2$.
Ystyriwn y pwynt a roddwyd $(a, a^3 + 3a + 2)$ a phwynt agos
$(a + h, (a + h)^3 + 3(a + h) + 2)$.
Yna, goledd y cord sy'n cysylltu'r pwyntiau hyn yw

$$\frac{\text{gwahaniaeth yn } y}{\text{gwahaniaeth yn } x} = \frac{(a+h)^3+3(a+h)+2-(a^3+3a+2)}{a+h-a}$$

$$= \frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+3a+3h+2-a^3-3a-2}{h}$$

$$= \frac{3a^2h+3ah^2+h^3+3h}{h}$$

$= 3a^2 + 3 + 3ah + h^2$, wrth ad-drefnu'r termau.

Galwch i gof y mynegiad ar gyfer $(a + b)^3$ ac yna gadewch i $b = h$.

Wrth i $h \to 0$, mae goledd y cord $\to 3a^2 + 3$.
$\therefore$ Goledd y gromlin = goledd y tangiad = $3a^2 + 3$, ar y pwynt $(a, a^3 + 3a + 2)$,
neu goledd y gromlin ar unrhyw bwynt = 3(cyfesuryn $x)^2 + 3$.

Mae'r broses uchod o ddarganfod goledd y gromlin yn darlunio proses a elwir yn **ddifferiad**.
Mewn gwirionedd, differiad o egwyddorion sylfaenol yw'r broses. Yn nes ymlaen byddwn yn byrhau'r broses ddifferu ac yn cyflwyno rheolau sy'n ein galluogi i'w wneud bron yn syth. Am y tro, edrychwn eto ar y syniadau yn Enghreifftiau 7.4 a 7.5.
Yn y ddau achos, cawsom hafaliadau cromliniau yn y ffurf $y = f(x)$ a darganfuwyd goledd y gromlin ar $(a, f(a))$. Mewn gwirionedd, dechreuwyd trwy ystyried goledd cord sy'n cysylltu $(a, f(a))$ â phwynt agos $(a+ h, f(a + h))$:

Eng. 7.4, $f(x) = x^2 + 1$
Eng. 7.5, $f(x) = x^3 + 3x + 2$

$$\frac{\text{gwahaniaeth yn } y}{\text{gwahaniaeth yn x}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

e.e. yn Ymarfer 7.5, $\dfrac{(a+h)^3+3(a+h)+2-(a^3+3a+2)}{h}$

Ar ôl tacluso rhywfaint, dychmygwyd fod h yn lleihau a lleihau (yn tueddu at sero) a gwelwyd mai'r canlyniad terfynol oedd goledd y gromlin ar $(a, f(a))$.

Dyma rai sylwadau pellach ar y broses.

(i) Nid oes angen cyflwyno'r llythyren 'a' er mwyn dynodi pwynt cyffredinol: mae'r llythyren x yr un mor ddilys. Felly yn Enghraifft 7.4 y goledd ar y pwynt $(x, x^2 + 1)$ yw $2x$; ac yn Enghraifft 7.5 y goledd ar y pwynt $(x, x^3 + 3x + 2)$ yw $3x^2 + 3$. Felly gellir ystyried y gymhareb $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ yn lle $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

(ii) Ffordd gyfleus o ysgrifennu goledd y ffwythiant $f(x)$ yw defnyddio'r symbol $f'(x)$. Felly rydym wedi dangos
os $f(x) = x^2 + 1$ yna $f'(x) = 2x$,
ac os $f(x) = x^3 + 3x + 2$ yna $f'(x) = 3x^2 + 3$.
Gelwir y ffwythiant $f'(x)$ yn <u>ddeilliad</u> $f(x)$ neu <u>ffwythiant deilliadol</u> $f(x)$.

(iii) Mae'r broses o ddifferu yn cynnwys y cam olaf o adael i $h \to 0$ a phenderfynu ar derfyn y mynegiad terfynol.
Gan gyfuno'r pwyntiau a ystyriwyd yn (i), (ii), (iii), dywedwn fod ffwythiant deilliadol f '(x) f(x) yn cael ei roi gan

$$\boxed{\mathrm{f}'(x) = \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{\mathrm{f}(x+h) - \mathrm{f}(x)}{h}.}$$

Defnyddir y canlyniad blaenorol yn yr enghraifft hon:

Enghraifft 7.6 *(Ni chaiff hyn ei arholi ond mae'n bwysig iawn)*
O wybod bod $\mathrm{f}(x) = x^3 - 4x + 1$ darganfyddwch f '(x), h.y. darganfyddwch ffwythiant deilliadol f '(x) neu differwch f(x).

Gweler yr ehangiad ar gyfer $(a + b)^3$ gydag $a = x$ a $b = h$.

Nawr
$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{\mathrm{f}(x+h) - \mathrm{f}(x)}{h} \\
&= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{(x+h)^3 - 4(x+h) + 1 - (x^3 - 4x + 1)}{h} \\
&= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h + 1 - x^3 + 4x - 1}{h} \\
&= \underset{h \to 0}{\text{limit}} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4h}{h} \\
&= \underset{h \to 0}{\text{limit}}\ 3x^2 + 3xh + h^2 - 4 \\
&= 3x^2 - 4.
\end{aligned}$$

Felly os $\mathrm{f}(x) = x^3 - 4x + 1$
yna $\mathrm{f}'(x) = 3x^2 - 4$.

Ymarferion 7.2

1 Darganfyddwch oledd y cord sy'n cysylltu'r pwyntiau (2, 8) a (2.1, 9.261) ar y gromlin $y = x^3$.

2 Darganfyddwch oledd y cord sy'n cysylltu'r ddau bwynt (2, 16) a $(2 + h, 3(2 + h)^2 + 4)$ ar y gromlin $y = 3x^2 + 4$.
Trwy adael i $h \to 0$, darganfyddwch oledd y gromlin ar (2, 16).

3 Darganfyddwch oledd y gromlin $y = x^3 - 3x + 1$ ar y pwynt (3, 19).

4 Os $\mathrm{f}(x) = 2x^2 + 3x - 4$, dangoswch fod $\dfrac{\mathrm{f}(x+h) - \mathrm{f}(x)}{h} = 4x + 3 + 2h$
a thrwy hyn darganfyddwch f '(x).

5 O wybod bod $\mathrm{f}(x) = 7x^2 - 3x + 10$, darganfyddwch f '($x$) o egwyddorion sylfaenol.

6 Differwch $\mathrm{f}(x) = x^3 - x^2 + 4$ o egwyddorion sylfaenol.

7 Differwch y ffwythiannau canlynol o egwyddorion sylfaenol:
(i) $3x^3$ (ii) $2x^2$ (iii) $6x$ (iv) $3x^3 + 2x^2 + 6x$.
Beth yw'r berthynas rhwng yr atebion i (i), (ii), (iii) a (iv)?

Nodyn ar derfynau

Mae'r broses o ddarganfod terfyn yn rhan hanfodol o ddifferu ffwythiannau o egwyddorion sylfaenol. Cofiwn, o wybod ffwythiant f(x), yna

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Felly, er enghraifft, os f(x) = x^2,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x+h) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Gwiriwch hyn.

Y ddadl yw: wrth i $h \to 0$, mae $2x + h \to 2x$.

Gofynnir y cwestiwn canlynol yn aml gan fyfyrwyr. Gan ein bod, <u>mewn gwirionedd</u>, yn gosod $h = 0$ yn $2x + h$ er mwyn cael $2x$, pam na osodir $h = 0$ yn gynharach yn y cyfrifiad?

I ateb y cwestiwn hwn, nodir ein bod yn ystyried yn gyntaf oledd y cord sy'n cysylltu'r pwyntiau (x, f(x)) ac ($x + h$, f($x + h$)) a bod ar gord angen dau bwynt terfynol er mwyn ei ddiffinio, ac felly $h \neq 0$. Yn ystod y broses derfannol rydym yn tybio bod h yn mynd yn llai ac yn llai (heb gael cymryd y gwerth sero), ac yn sylwi yn yr enghraifft uchod fod $2x + h$ yn mynd yn <u>nes</u> ac yn <u>nes</u> at $2x$ <u>heb gyrraedd y gwerth $2x$</u>.

Sylwer hefyd os gosodir $h = 0$ yn $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ceir $\dfrac{0}{0}$ sy'n anniffiniedig.

7.3 Nodiant delta

Mae dull arall o gyflwyno differiad yn defnyddio'r rhagddodiad delta.

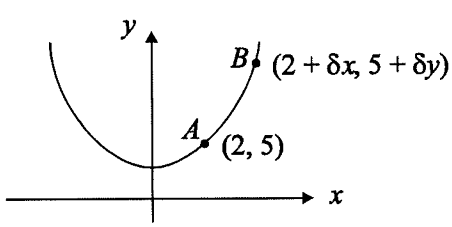
Mewn mathemateg, defnyddir y llythyren δ yn aml er mwyn cyfleu 'cynnydd bach' ac felly

mae δx yn golygu cynnydd bach yn x,

mae δy yn golygu cynnydd bach yn y, ac yn y blaen.

Er mwyn darganfod goledd y gromlin $y = x^2 + 1$ yn y pwynt (2, 5) gan ddefnyddio'r nodiant hwn, defnyddir y dull canlynol.

Boed i A fod y pwynt (2, 5) a boed i δx, δy fod y cynnydd cyfatebol yn x ac y fel bod B yn cynrychioli'r pwynt ($2 + \delta x$, $5 + \delta y$) ar y gromlin.



I berthnasu hyn â'n gwaith blaenorol yn adran 7.2, nodir bod $\delta x = h$ a $\delta y = f(2 + h)$ gydag $f(x) = x^2$.

Gan fod B ar y gromlin $y = x^2 + 1$,

$$5 + \delta y = (2 + \delta x)^2 + 1$$

neu

$$\begin{aligned} \delta y &= (2 + \delta x)^2 - 4 \\ &= 4\delta x + (\delta x)^2. \end{aligned}$$

Yna $\quad \dfrac{\delta y}{\delta x} = 4 + \delta x.$

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4+h$ os $f(x) = x^2$

Darganfyddir y goledd (neu'r graddiant) yn (2, 5) trwy adael i δx fynd yn llai ac yn llai, h.y. trwy adael i $\delta x \to 0$.

Yna $\quad$ goledd $= \lim\limits_{\delta x \to 0}(4 + \delta x)$
$\quad = 4.$

cymharer â $\lim\limits_{h \to 0}(4 + h)$.

Ysgrifennir $\quad \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{dy}{dx},$

Felly os $\quad y = x^2 + 1$ yna

$$\frac{dy}{dx} = 4 \text{ ar } (2, 5).$$

Os $f(x) = x^2 + 1$ yna $f'(2) = 4$.

Fel yn adran 7.2, gellir darganfod y graddiant ar unrhyw bwynt ar y gromlin.

Enghraifft 7.7

Os $y = x^3 - x + 2$, darganfyddwch $\dfrac{dy}{dx}$ yn y pwynt $(x, x^3 - x + 2)$.

Nawr $\quad y = x^3 - x + 2. \qquad (1)$

Boed i δx, δy fod y cynnydd cyfatebol yn x ac y yn ôl eu trefn fel bod

$$y + \delta y = (x + \delta x)^3 - (x + \delta x) + 2. \qquad (2)$$

Noder sut y defnyddir cromfachau wrth dynnu.

Trwy dynnu (1) o (2), ceir

$$\begin{aligned} \delta y &= (x + \delta x)^3 - (x + \delta x) + 2 - (x^3 - x + 2) \\ &= x^3 + 3x^2\delta x + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3 - x - \delta x + 2 - x^3 + x - 2 \end{aligned}$$

$\therefore \quad \delta y = (3x^2 - 1)\,\delta x + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3$

a $\quad \dfrac{\delta y}{\delta x} = 3x^2 - 1 + 3x\delta x + (\delta x)^2.$

Noder yr ehangiad ar gyfer $(a + b)^3$ gydag $a = x$ a $b = \delta x$.

Yna $\quad \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x \to 0}(3x^2 - 1 + 3x\delta x + (\delta x)^2)$
$\quad = 3x^2 - 1.$

Felly os $\quad y = x^3 - x + 2,$

ac yna $\quad \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 1.$

Enghraifft 7.8

Os $y = \dfrac{1}{x}$, darganfyddwch $\dfrac{dy}{dx}$.

Cymerir bod angen $\frac{dy}{dx}$ ar y pwynt cyffredinol.

Nawr $\quad y = \dfrac{1}{x}. \qquad (1)$

Boed i δx, δy fod y cynnydd cyfatebol yn x ac y yn ôl eu trefn fel bod

$$y + \delta y = \frac{1}{x + \delta x}. \qquad (2)$$

Tynnwch (1) o (2).

$$\begin{aligned}
\delta y &= \frac{1}{x+\delta x} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{x-(x+\delta x)}{(x+\delta x)x} \\
&= \frac{-\delta x}{(x+\delta x)x}.
\end{aligned}$$

gan ddefnyddio'r cyfenwadur er mwyn tynnu ffracsiynau

Yna $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{-1}{(x+\delta x)x}$

a $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{limit}} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{limit}} \dfrac{-1}{(x+\delta x)x} = -\dfrac{1}{x.x} = -\dfrac{1}{x^2}.$

Felly os $y = \dfrac{1}{x}$, yna $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ymarferion 7.3

1 O wybod bod $y = x^2$ ac mai δx, δy yw'r cynnydd cyfatebol yn x ac y yn ôl eu trefn, dangoswch fod

$$\delta y = 2x\delta x + (\delta x)^2$$

a thrwy hynny dangoswch fod

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

2 O wybod bod $y = x^3$, defnyddiwch y dull a fabwysiadwyd yng nghwestiwn 1 i ddangos bod

$$\delta y = 3x^2\delta x + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3.$$

Darganfyddwch $\dfrac{dy}{dx}$.

3 O wybod bod $y = x$, defnyddiwch y dull a fabwysiadwyd yng nghwestiwn 1 i ddangos bod

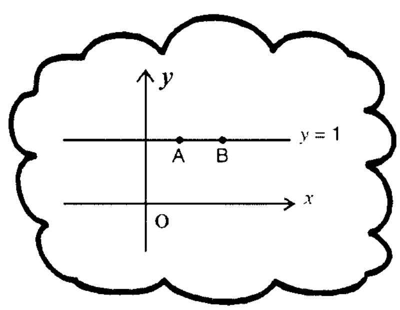
$$\delta y = \delta x.$$

Trwy hyn, darganfyddwch $\dfrac{dy}{dx}$.

4 Os yw $y = 1$, dangoswch fod

$$\delta y = 0.$$

Diddwythwch werth $\dfrac{dy}{dx}$.



5 Os yw $y = 3x^2 - 5x + 7$, dangoswch fod

$$\delta y = (6x - 5)\delta x + 3(\delta x)^2.$$

6 Os yw $y = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, dangoswch fod

$$\delta y = (15x^2 + 6x + 2)\delta x + (15x + 3)(\delta x)^2 + 5(\delta x)^3.$$

Diddwythwch werth $\dfrac{dy}{dx}$.

7 Darganfyddwch $\dfrac{dy}{dx}$ yn yr achosion canlynol:

(i) $y = 6x$ (ii) $y = 2x^2$ (iii) $y = 3x^3$

(iv) $y = 3x^3 + 2x^2 + 6x.$

8 Beth yw'r berthynas rhwng atebion rhannau (i), (ii), (iii) a (iv)?

O wybod bod $y = \dfrac{1}{x^2}$, dangoswch fod

$$\delta y = \frac{-2x\delta x - (\delta x)^2}{(x + \delta x)^2 x^2}.$$

Trwy hyn dangoswch fod

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^3}.$$

9 O wybod bod

Mwy anodd

$$y = \frac{1}{2x + 3}.$$

dangoswch fod

$$\delta y = \frac{-2\delta x}{(2x + 2\delta x + 3)(2x + 3)}.$$

Trwy hyn dangoswch fod

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(2x + 3)^2}.$$

10 O wybod bod

Mwy anodd

$$y = \frac{1}{6x + 1},$$

dangoswch fod $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-6}{(6x + 1)^2}$.

Mae differu ffwythiannau o egwyddorion sylfaenol, pa un ai'r nodiant f neu'r nodiant δ a ddefnyddir, yn aml yn llafurus. Gellir osgoi hynny trwy lunio rhestr o ganlyniadau ar gyfer rhai ffwythiannau sylfaenol a datblygu rheolau i'w defnyddio gyda'r ffwythiannau hyn.

7.4 Differiad rhai ffwythiannau sylfaenol

Trwy grynhoi canlyniadau enghraifft 7.8 a chwestiynau 1, 2, 3, 4 ac 8 yn ymarferion 7.3, cawn

$$D(1) = 0,$$
$$D(x) = 1,$$
$$D(x^2) = 2x,$$
$$D(x^3) = 3x^2,$$
$$D(x^{-1}) = -1x^{-2},$$
$$D(x^{-2}) = -2x^{-3}.$$

Mae D(1) yn golygu $\dfrac{d(1)}{dx}$ ac ati.

Mae pob un o'r canlyniadau hyn yn ufuddhau i'r rheol gyffredinol

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

neu $\quad f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}.$

Cymerwn yn awr, heb brawf, os yw $f(x) = x^n$ yna bod $f'(x) = nx^{n-1}$ yn ddilys ar gyfer pob gwerth n, boed yn gyfanrif, yn ffracsiwn, yn bositif neu yn negatif, neu yn sero.

(I)

Enghraifft 7.9

Os
$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3},$$
$$f'(x) = -3x^{-3-1}$$
$$= -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

$n = -3$

yn ôl Rheol I

Enghraifft 7.10

Os
$$y = x^{\frac{3}{2}},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$$
$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

$\left(n = \frac{3}{2}\right)$

yn ôl Rheol I

Enghraifft 7.11

Os
$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} = x^{-\frac{7}{2}}$$

yna
$$f'(x) = -\frac{7}{2}x^{-\frac{7}{2}-1}$$
$$= -\frac{7}{2}x^{-\frac{9}{2}} = \frac{-7}{2x^{\frac{9}{2}}}.$$

$\left(n = -\frac{7}{2}\right)$

Gellir cymhwyso Rheol I hefyd ar gyfer differu cysonion; oherwydd gellir ysgrifennu

Gweler cwestiwn 4, ymarferion 7.3.

$$f(x) = c \qquad \text{neu} \qquad y = c,$$

lle mae c yn gysonyn, yn y ffurf

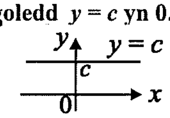
(unrhyw beth)^0 = 1

$$f(x) = x^0 \qquad \text{neu} \quad y = x^0.$$

Yna $\quad f'(x) = 0x^{0-1} \qquad$ neu $\dfrac{dy}{dx} = 0x^{0-1}$

felly $\quad f'(x) = 0 \qquad$ neu $\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Dywed y graff isod fod goledd $y = c$ yn 0.



Mae'n werth dangos y canlyniad hwn fel ail reol.

Os $f(x) =$ cysonyn, $f'(x) = 0$ neu $y =$ cysonyn, $\dfrac{dy}{dx} = 0.$	(II)

Enghraifft 7.12

Darganfyddwch $\dfrac{dy}{dx}$ os $y = 8$.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{yn ôl Rheol II.}$$

Mae'r drydedd reol yn ymwneud â differu ffwythiannau megis $f(x) = 3x^9$.
Ystyriwn $f(x) = 3x^9$,
$$f(x) = -6x^{\frac{3}{2}},$$
neu yn fwy cyffredinol, $f(x) = Cx^n$,
lle mae C ac n yn gysonion.

Dyma'r rheol: os $f(x) = Cx^n$ yna $f'(x) = Cnx^{n-1}$	(III)

Gellir olrhain y rheol oddi ar

Nid ydym am ddilyn hyn ymhellach yma.

$$f'(x) = \operatorname*{limit}_{h\to 0} \frac{C(x+h)^n - Cx^n}{h}.$$

Yna os $\quad f(x) = 3x^9,$
$$f'(x) = 3 \times 9x^8 = 27x^8;$$
ac os $\quad y = -6x^{\frac{3}{2}}$

yna $\quad \dfrac{dy}{dx} = -6 \times \dfrac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = -9x^{\frac{1}{2}}.$

Yma $C = -6.$

Cyn cloi'r adran hon, dyma reol, heb ei phrofi ar hyn o bryd, ar gyfer differu swm ffwythiannau. Yng nghwestiwn 7 yn ymarferion 7.2 gofynnwyd i chi ddifferu $3x^3 + 2x^2 + 6x$. Gellir dangos yn rhwydd o egwyddorion sylfaenol os

$$\mathrm{f}(x) = 3x^3 + 2x^2 + 6x$$

yna $\quad \mathrm{f}'(x) = 9x^2 + 4x + 6.$

Os cymhwysir Rheol II i'r ffwythiannau $3x^3$, $2x^2$, $6x$ ar wahân, ceir $9x^2$, $4x$, 6.

$C = 3, n = 3$
$C = 2, n = 2$
$C = 6, n = 1$

Yna os

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= 3x^3 + 2x^2 + 6x, \\ & \quad\ \downarrow \quad\ \ \downarrow \quad\ \downarrow \\ \mathrm{f}'(x) &= 9x^2 + \ 4x\ + 6. \end{aligned}$$

Felly mae differu $\mathrm{f}(x)$ o egwyddorion sylfaenol yn dangos ar gyfer y ffwythiant polynomaidd hwn y gellir darganfod y canlyniad terfynol trwy ddifferu fesul term. Mae'r rheol hon yn ddilys ar gyfer pob math o ffwythiant, mewn gwirionedd.

Felly os

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + \frac{1}{x} + 9, \\ & \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \ \downarrow \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 6x + (-1)x^{-1-1} + 0 = 6x - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Rheol Adio	
Gellir differu mynegiadau sy'n cynnwys adio neu dynnu termau yn ymwneud â phweroedd x trwy ddifferu pob term ar wahân ac adio neu dynnu pob term fel y bo'n briodol.	(IV)

Enghraifft 7.13

Differwch (i) $3x^7 - 6x^5 + \dfrac{9}{x^2} + 3$ (ii) $(x-1)(x+2)$ (iii) $\dfrac{3x^4 - 2x^{\frac{3}{2}} + 3}{\sqrt{x}}$

(i) Mae differu fesul term yn rhoi

$$3 \times 7x^6 - 6 \times 5x^4 + 9 \times -2 \times x^{-3} + 0$$

↓ rheol III ↓ rheol III ↓ rheol III ↓ rheol II

gydag C=3, n=7 C=–6, n=5 C=9, $n = -2$

$$= 21x^6 - 30x^4 - \frac{18}{x^3}.$$

(ii) Ehangwn $(x-1)(x+2)$ sy'n rhoi

$$x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2.$$

Yna mae differu fesul term yn rhoi

$$2x + 1 - 0 = 2x + 1.$$

(iii) Rhannwn allan y mynegiad yn gyntaf, sy'n rhoi

$$3x^{\frac{7}{2}} - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}, \text{ gan gofio bod } \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Yna mae differu fesul term yn rhoi

$$\begin{array}{ccc} 3 \times \frac{7}{2} \times x^{\frac{5}{2}} & -2 \quad + & 3 \times -\frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}-1} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Rheol III} & \text{Rheol III} & \text{Rheol III} \\ (C = 3, n = \frac{7}{2}) & (C = -2, n = 1) & (C = 3, n = -\frac{1}{2}) \end{array}$$

$$= \frac{21}{2}x^{\frac{5}{2}} - 2 - \frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

Cyn gadael y bennod hon, cofiwn i ni ddechrau gan ofyn sut y gellid nodweddu pa mor serth yw cromlin. Cyflwynwyd y cysyniad o ddifferu er mwyn darganfod graddiant tangiad i'r gromlin. Yna os rhoddir y gromlin gan $y = \mathrm{f}(x)$, diffiniwyd graddiant y gromlin (a graddiant y tangiad) yn $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ neu $\mathrm{f}'(x)$.

I gwblhau'r bennod hon gadewch i ni ddychwelyd at y cysyniad o dangiad i gromlin.

Enghraifft 7.14

Disgrifir cromlin gan yr hafaliad $y = x^3 - 2x^2 + 4$. Darganfyddwch oledd y tangiad i'r cromlin ar y pwynt (2, 4).

Nawr ar gyfer $y = x^3 - 2x^2 + 4$, rhoddir goledd y tangiad ar bwynt gan

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 4x.$$

Pan fo $x = 2$, $\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(2)^2 - 4 \times 2 = 4.$

Enghraifft 7.15

Darganfyddwch werthoedd x lle mae goleddau'r tangiadau i'r gromlin $y = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 2$ yn hafal i 6.

Goledd y tangiad yw $\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2 + 6x - 6.$

Mae gwerthoedd x sydd eu hangen yn bodloni $6x^2 + 6x - 6 = 6$ (a roddwyd)

$$\begin{array}{lrcl} \text{ac felly} & 6x^2 + 6x - 12 & = & 0 \\ \text{neu} & 6(x^2 + x - 2) & = & 0. \\ \text{Yna} & x^2 + x - 2 & = & 0 \\ \text{neu} & (x+2)(x-1) & = & 0. \\ \therefore & x & = & -2 \text{ neu } 1. \end{array}$$

Enghraifft 7.16
Darganfyddwch werthoedd x lle mae tangiadau'r graff

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \text{ yn baralel i echelin } x.$$

Goledd y tangiad yw

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4.$$

Pan fydd y tangiad yn baralel i'r echelin x,

$$f'(x) = 0$$

ac felly $3x^2 - 4x - 4 = 0$.

Mae graddiant neu oledd yr echelin x yn sero.

Mae hyn yn ffactorio gan roi

$$(3x+2)(x-2) = 0$$

ac felly $x = -\frac{2}{3}$ neu 2.

neu defnyddiwch y fformiwla gwadratig

Ymarferion 7.4

1 Differwch mewn perthynas ag x:

(i) $9x^{10}$ (ii) $\frac{3}{x^4}$ (iii) 7 (iv) $2x^{\frac{3}{2}}$ (v) $\frac{9}{x^{\frac{2}{3}}}$ (vi) $2x^2 - 9x$

(vii) $3x^3 + 9x^2 - 4$ (viii) $(x+2)(x-3)$ (ix) $\frac{x^2+2x+4}{x}$ (x) $(x+1)^2$

(xi) $(x-1)(\sqrt{x}+x)$ (xii) $1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}$.

2 Darganfyddwch raddiant y gromlin ar y pwynt a roddir ym mhob un o'r rhain.

(i) $y = x^2 + 9$ lle mae $x = 3$ (ii) $y = 3x^3 - 5$ lle mae $x = 1$

(iii) $y = \frac{1}{x}$ lle mae $x = 2$ (iv) $y = (3x+1)(x-5)$ lle mae $x = 0$

(v) $y = 1 + \frac{2}{x}$ lle mae $x = 2$ (vi) $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 6 + \frac{4}{x}$ lle mae $x = 1$.

3 Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn yr achosion canlynol a thrwy hynny darganfyddwch y pwynt ar y gromlin lle mae gan y tangiad y goledd a roddir.

(i) $y = x^2 + 4$ $(m = -8)$ (ii) $y = x^3 + x + 2$ $(m = 1)$

(iii) $y = 3x^2 - 2x + 4$ $(m = 10)$ (iv) $y = (x+1)(x+3)$ $(m = -18)$

(v) $y = 2x + \frac{1}{x}$ $(m = -2)$ (vi) $y = -\frac{1}{x^3}$ $(m = 27)$

(vii) $y = x^3 + x^2 + x + 4$ $(m = 9)$.

4 Darganfyddwch oledd y tangiad i'r gromlin $y = 2x - x^3$ ar y pwynt $(1, 1)$.

5 Darganfyddwch oledd y tangiad i graff y ffwythiant $f(x) = (x + 2)(x - 3)$ ar y pwynt lle mae $x = 2$.

6 Darganfyddwch raddiannau graff $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ar y pwyntiau lle mae'r graff yn croesi echelin x.

7 Darganfyddwch raddiannau'r tangiadau i'r gromlin $y = x^2 - x$ ar $x = \frac{1}{2}$ ac $x = \frac{3}{2}$. Gyda pha werth x y mae graddiant y gromlin yn hafal i sero?

8 Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwyntiau ar graff $y = x^3 - 3x^2 + 6$ lle mae'r tangiadau yn baralel i echelin x.

Pennod 8

Defnyddio Differiadau

Yn adran 2.4 buom yn ystyried gwerthoedd mwyaf a gwerthoedd lleiaf ffwythiannau cwadratig trwy gwblhau'r sgwâr. Yma byddwn yn defnyddio differiad i ymchwilio i werthoedd mwyaf a gwerthoedd lleiaf ffwythiannau. Cyn gwneud hynny, gadewch i ni ystyried beth yw'r berthynas rhwng deilliad ffwythiant a goledd y tangiad i'r gromlin sy'n gysylltiedig ag ef.

8.1 Ffwythiannau cynyddol a lleihaol

Enghraifft 8.1

O wybod $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

Y gromlin gysylltiedig yw $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$.

gwelir yn syth fod

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x^2 - x - 2) \\ &= 6(x+1)(x-2). \end{aligned}$$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Nawr $f'(x)$ yw goledd y tangiad ar bwynt ar y gromlin.

Nawr pan fo $x < -1$ neu $x > 2$,

$$f'(x) > 0$$

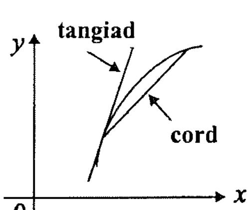
a phan fo $-1 < x < 2$,

$$f'(x) < 0.$$

Gwiriwch y mynegiadau hyn trwy amnewid rhai gwerthoedd am x.

Hefyd $f'(x) = 0$ pan fo $x = -1, 2$.

Cafodd $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ ei ddeillio trwy ystyried goleddau terfannol cordiau.

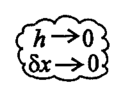


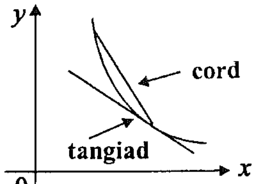
Ffwythiant cynyddol

Gyda <u>ffwythiant cynyddol</u> mae y yn cynyddu gydag x ac felly mae

$$\frac{\text{newid mewn } y}{\text{newid mewn } x} \text{ yn bositif.}$$

Mae'r ffracsiwn hwn yn aros yn bositif yn ystod y broses derfannol ac felly $f'(x) > 0$.





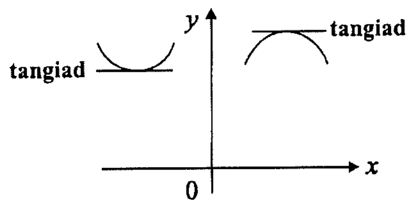
Ffwythiant lleihaol

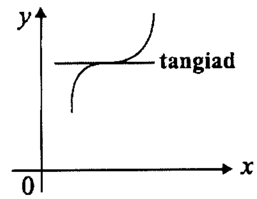
Gyda <u>ffwythiant lleihaol</u>, mae y yn lleihau wrth i x gynyddu.

Felly $\dfrac{\text{newid mewn } y}{\text{newid mewn } x} < 0.$

Mae'r ffracsiwn hwn yn aros yn negatif yn ystod y broses derfannol ac $f'(x) < 0$.

Pan fydd y tangiad yn baralel i echelin x, fel yn y diagramau isod, mae'r goledd yn sero, h.y. $f'(x) = 0$.





I grynhoi,

$f'(x) > 0$ ffwythiant cynyddol,
$f'(x) < 0$ ffwythiant lleihaol,
$f'(x) = 0$ mae'r tangiad yn baralel i'r echelin x.

Enghraifft 8.2

O Enghraifft 8.1, ar gyfer

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6,$$
$$f'(x) = 6(x+1)(x-2).$$

Mae'r ffwythiant yn cynyddu pan fo $x < -1$ neu $x > 2$, ac yn lleihau pan fo $-1 < x < 2$.

Mae'r ffwythiant yn gynyddol ac yn lleihaol dros werthoedd x gwahanol.

Hefyd mae'r tangiad i $y = f(x)$ yn baralel i'r echelin x pan fo $x = -1, 2$.

$\frac{dy}{dx} = 0$

Ymarferion 8.1

1 Darganfyddwch amrediad x lle mae $f(x)$ (a) yn gynyddol (b) yn lleihaol yn yr achosion canlynol.

(i) $f(x) = x^2 - 3x + 6$ (ii) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

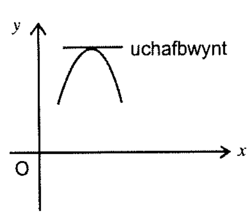
(iii) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (ar gyfer $x > 0$) (iv) $f(x) = 6 - 3x - x^2$

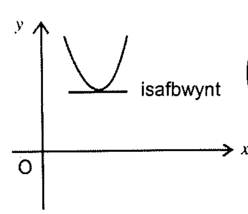
(v) $f(x) = x^4 - 8x + 10$ (vi) $f(x) = x^5 - 15x^3 - 3$

2 Gyda pha werthoedd x y mae'r tangiadau i'r cromliniau cysylltiedig yng nghwestiwn 1 yn baralel i echelin x?

8.2 Pwyntiau sefydlog a'u dosbarthiad

Mae gan ffwythiannau cwadratig graffiau sydd â'r naill neu'r llall o'r siapiau cyffredinol a ddangosir isod.





Gall y safleoedd amrywio, wrth gwrs.

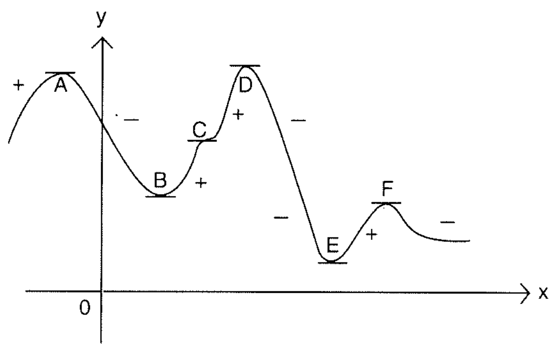
Mae gan y graff ar y chwith un uchafbwynt (brig), ac mae gan y graff ar y dde isafbwynt (cafn).

Nodwedd gyffredin a berthyn i uchafbwyntiau ac isafbwyntiau yw bod y tangiadau ar bwyntiau o'r fath yn baralel i'r echelin x, h.y.

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

$f'(x) = 0$

Yma ystyriwn ffwythiannau sydd efallai â graffiau ychydig yn fwy cymhleth, er enghraifft yr un isod.



Mae'r arwyddion yn cyfeirio at y graddiannau.

Gelwir pwytiau ar graff lle mae $\frac{dy}{dx} = 0$ yn **bwyntiau sefydlog**, a gelwir y gwerth cysylltiedig yn **werth sefydlog**.

Ar y diagram, mae pwyntiau sefydlog yn A, B, C, D, E ac F. Gadewch i ni gategoreiddio'r pwyntiau hyn.

<u>Pwyntiau A, D ac F</u>

Ym mhob un o'r pwyntiau hyn, mae'r graddiant yn newid o bositif i negatif ac mae brig neu **uchafbwynt** gan y graff. Mae gwerthoedd y mewn pwyntiau o'r fath yn **wethoedd mwyaf**.

Mae'r graff yn newid o godi i ddisgyn.

<u>Pwyntiau B ac E</u>

Yn y ddau bwynt hyn, mae'r graddiant yn newid o negatif i bositif ac mae cafn neu **isafbwynt** gan y graff. Mae gwerthoedd y mewn pwyntiau o'r fath yn **werthoedd lleiaf**.

Mae'r graff yn newid o ddisgyn i godi.

D.S.
Uchafbwytiau ac iselbwyntiau **lleol** yn unig yw'r pwyntau hyn. Mae nodi mai 'lleol' ydynt yn ddefnyddiol gan ei fod yn tanlinellu'r ffaith na ddylid ystyried uchafbwynt (isafbwynt) fel yr uchafbwynt (isafbwynt) cyffredinol. Mewn gwirionedd, yn y diagram mae gwerth yr uchafbwynt (lleol) yn y pwynt F yn llai na gwerth yr uchafbwynt (lleol) yn y pwynt B.

Y pwynt C

Yn y pwynt C, mae $\frac{dy}{dx} = 0$ gan fod y tangiad yn baralel i'r echelin x. Serch hynny, mae'n amlwg nad yw C yn uchafbwynt nac yn isafbwynt: nid yw'r graff yn rhoi'r gorau i godi er ei fod yn llorweddol (yn lleol) yn y pwynt C. Mewn gwirionedd, mae

$$\frac{dy}{dx} > 0$$

ar y chwith ac ar y dde i C. Gelwir pwynt fel C lle mae $\frac{dy}{dx} = 0$ ond heb newid yn yr arwydd, yn **bwynt ffurfdro sefydlog (P.Ff.S.).**

Mae mathau eraill o bwyntiau ffurfdro.

Crynodeb

Profi am bwyntiau sefydlog trwy newid arwydd $\frac{dy}{dx}$ (neu $f'(x)$)

Ar bwynt sefydlog,

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

(i) $\frac{dy}{dx}$ yn newid o + i −, uchafbwynt

(ii) $\frac{dy}{dx}$ yn newid o − i +, isafbwynt (I)

(iii) Dim newid yn arwydd $\frac{dy}{dx}$, pwynt ffurfdro sefydlog.

Mae datganiadau tebyg yn addas ar gyfer $f'(x)$.

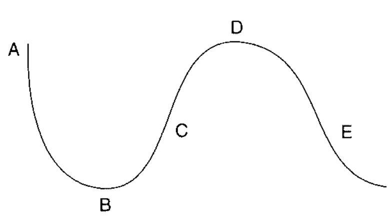
Ymarferion 8.2

1 Ar gyfer pob un o'r diagramau canlynol:-

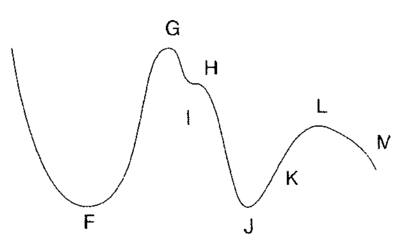
a) nodwch y pwyntai sefydlog ac arwydd $\frac{dy}{dx}$,

b) dosbarthwch y pwyntau sefydlog yn uchafbwyntiau, isafbwyntiau neu bwyntiau ffurfdro.

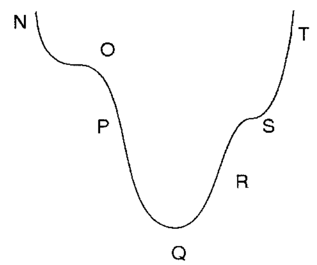
(i)



(ii)



(iii)



8.3 Defnyddio arwydd $\frac{dy}{dx}$ i ddosbarthu pwyntiau sefydlog

Nid yw graffiau ffwythiannau bob amser ar gael i'n cynorthwyo wrth ymchwilio i bwyntiau sefydlog. Serch hynny, gellir defnyddio Rheol I mewn achosion o'r fath.

Enghraifft 8.3

Darganfyddwch a dosbarthwch y pwyntiau sefydlog sydd gan

$$y = x^4 + 4x^3 + 25.$$

Nawr $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$

ac i gael pwynt sefydlog mae

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\therefore 4x^2(x+3) = 0.$$

Yna $x^2 = 0$ neu $x + 3 = 0$

h.y. $x = 0, -3$.

Peidiwch â diddymu x^2 heb ystyried y posibilrwydd fod $x^2 = 0$.

Mae dau bwynt sefydlog.

Nawr gadewch i ni ymchwilio i natur y pwyntiau sefydlog hyn, trwy ystyried arwydd $\frac{dy}{dx}$ ar y naill ochr a'r llall i bob pwynt.

$\underline{x = 0}$

Pan fo x ychydig yn is na 0, dyweder -0.1,

$$\frac{dy}{dx} = 4(-0.1)^2(-0.1+3) = 0.116 > 0.$$

Pan fo x ychydig yn uwch na 0, dyweder 0.1,

$$\frac{dy}{dx} = 4(0.1)^2(0.1+3) = 0.124 > 0.$$

Felly mae $\frac{dy}{dx} > 0$ ar y ddwy ochr i $x = 0$.

<u>$x = -3$</u>

Pan fo x ychydig yn is na –3, dyweder –3.1,

$$\frac{dy}{dx} = 4(-3.1)^2(-3.1+3) = -3.844 < 0.$$

Pan fo x ychydig yn uwch na –3, dyweder –2.9,

$$\frac{dy}{dx} = 4(-2.9)^2(-2.9+3) = 3.364.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} < 0 \text{ ar y chwith i } x = -3,$$

$$> 0 \text{ ar y dde i } x = -3.$$

Mae arwyddion $\frac{dy}{dx}$ wedi eu rhestru yn y tabl isod:

Gwerth x	Ch	-3	De		Ch	0	De
Arwydd $\frac{dy}{dx}$	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$

Felly, ceir isafbwynt pan fo

$$x = -3, y = (-3)^4 + 4(-3)^3 + 25$$
$$= -2$$

a phwynt ffurfdro pan fo

$$x = 0, y = (0)^4 + 4(0)^3 + 25 = 25.$$

Mae'n gyngor doeth ysgrifennu $\frac{dy}{dx}$ mewn ffurf sydd wedi ei ffactorio a dylid bod yn ofalus pan fo $\frac{dy}{dx}$ yn cynnwys ffactor rhifiadol negatif.

Enghraifft 8.4

Darganfyddwch a dosbarthwch werthoedd sefydlog y ffwythiant a roddir gan

$$f(x) = 3 + 12x - 3x^2 - 2x^3.$$

Yna $f'(x) = 12 - 6x - 6x^2$

$$= -6(x^2 + x - 2)$$
$$= -6(x+2)(x-1).$$

Peidiwch â chanslo'r –6: mae ei bresenoldeb yn hanfodol.

I gael pwynt sefydlog,

$$f'(x) = 0$$

fel bod $-6(x+2)(x-1) = 0$

$$\therefore x = -2, 1.$$

Mae dau werth sefydlog.

Gadewch i ni gynnal y prawf arwydd ar $f'(x)$.

<u>$x = -2$</u>

Pan fo x ychydig yn is na -2, dyweder -2.1,

$$\frac{dy}{dx} = -6(-2.1+2)(-2.1-1)$$
$$= -1.86 < 0.$$

Pan fo x ychydig yn uwch na -2, dyweder -1.9,

$$\frac{dy}{dx} = -6(-1.9+2)(-1.9-1)$$
$$= 1.74 > 0.$$

$\therefore \frac{dy}{dx} < 0$ ar y chwith i $x = -2$,

>0 ar y dde i $x = -2$.

<u>$x = 1$</u>

Pan fo x ychydig yn is nag 1, dyweder 0.9,

$$\frac{dy}{dx} = -6(0.9+2)(0.9-1)$$
$$= 1.74 > 0.$$

Pan fo x ychydig yn uwch nag 1, dyweder 1.1,

$$\frac{dy}{dx} = -6(1.1+2)(1.1-1)$$
$$= -1.86 < 0.$$

$\therefore \frac{dy}{dx} > 0$ ar y chwith i $x = 1$,

< 0 ar y dde i $x = 1$.

Mae arwyddion $\frac{dy}{dx}$ wedi eu rhestru yn y tabl isod.

Gwerth x	Ch	-3	De		Ch	0	De
Arwydd $\frac{dy}{dx}$	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$

Isafbwynt

Uchafbwynt

Ceir isafbwynt pan fo $x = -2$
ac mae $f(x) = 3 + 12(-2) - 3(-2)^2 - 2(-2)^3$
$= -17$.
Ceir uchafbwynt pan fo $x = 1$
ac mae $f(x) = 3 + 12(1) - 3(1)^2 - 2(1)^3$
$= 10$.

Ymarferion 8.3

Defnyddiwch y prawf newid arwydd $\dfrac{dy}{dx}$ neu $f'(x)$ i ddosbarthu'r pwyntiau sefydlog yn y canlynol.

1 $y = x^2 - 2x + 3$

2 $f(x) = 9 + 6x - x^2$

3 $y = 5 + 24x - 9x^2 - 2x^3$

4 $f(x) = x^4 - 4x^3$

5 $y = -5x^6 + 6x^5 + 2$

6 $f(x) = x^3(x - 2)$

7 $y = x^2$

8 $y = -x^3$

9 $y = -x^4$.

8.4 Profion yr ail ddeilliad ar gyfer uchafbwyntiau ac isafbwyntiau

Mae deilliad ffwythiant x hefyd yn ffwythiant x. Efallai ei bod yn bosibl differu'r ffwythiant hwn hefyd, ac os felly gelwir deilliad y deilliad cyntaf yn ail ddeilliad y ffwythiant gwreiddiol. Yn yr un modd, gelwir deilliad yr ail ddeilliad yn drydydd deilliad, ac yn y blaen. Felly os

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= 7x^8, \\ \mathrm{f}'(x) &= 7 \times 8x^7 = 56x^7, \\ \mathrm{f}''(x) &= 56 \times 7x^6 = 392x^6, \\ \mathrm{f}'''(x) &= 392 \times 6x^5 = 2352x^5. \end{aligned}$$

neu $y = 7x^8$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 56x^7$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 392x^6$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = 2352x^5.$$

Ymarferion 8.4

Profwch bob un o'r differiadau canlynol.

1 (i) $y = 3x^4 - 2x^3 + 6x, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 36x^2 - 12x$

(ii) $\mathrm{f}(x) = \frac{3+x}{x^2}, \quad \mathrm{f}''(x) = \frac{18}{x^4} + \frac{2}{x^3}$

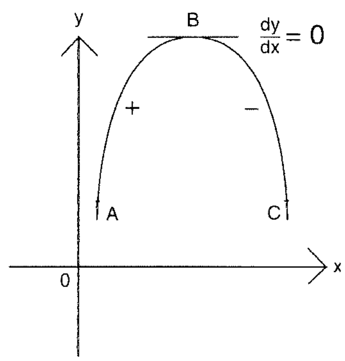
(iii) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{4x^{3/2}} + \frac{3}{4x^{5/2}}$

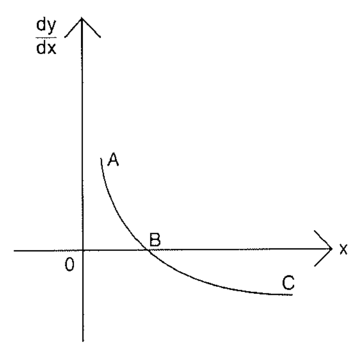
(iv) $\mathrm{f}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad \mathrm{f}'''(x) = 24x + 6$

(v) $y = x^3 - \frac{3}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = -\frac{72}{x^5}$

Gellir defnyddio'r ail ddeilliad i ddosbarthu pwyntiau sefydlog. Gadewch i ni ystyried y gwahanol bosibiliadau'n graffigol.

Uchafbwynt





Mae diagram ar y chwith yn dangos uchafbwynt nodweddiadol gyda phwyntiau A ac C bob ochr iddo. Yn y pwynt A mae $\frac{dy}{dx} > 0$; yn y pwynt C mae $\frac{dy}{dx} < 0$.

Mae'r diagram ar y dde yn dangos graff $\frac{dy}{dx}$ yn erbyn x. Nid yw siâp arbennig y graff $\frac{dy}{dx}$ hwn o bwys: y ffaith bwysig yw fod y graff yn disgyn o A i C, a bod $\frac{dy}{dx} = 0$ yn B. Felly mae gan y graff $\frac{dy}{dx}$ raddiant negatif yn A, B ac C, yn enwedig yn B.

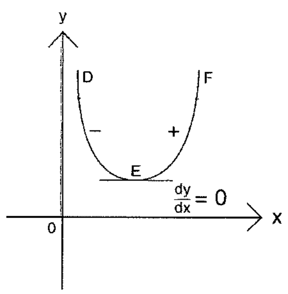
Nawr graddiant $\frac{dy}{dx}$ yw $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

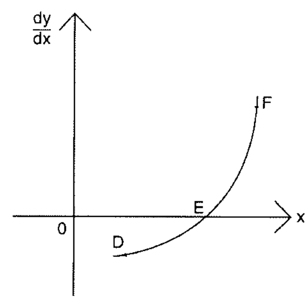
I grynhoi, yn yr uchafbwynt B,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$ **Pwynt sefydlog**

a $$\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$ **Mae graff $\frac{dy}{dx}$ yn disgyn.**

<u>Isafbwynt</u>



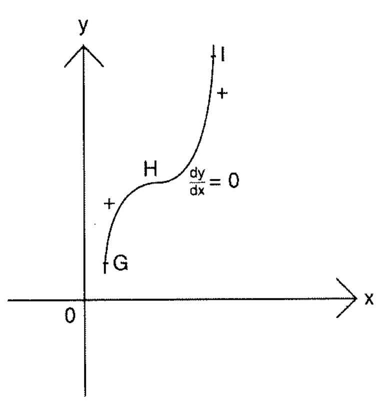


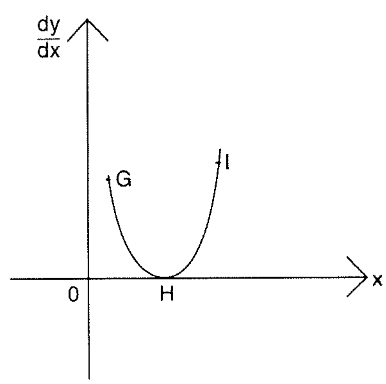
Mae rhesymu tebyg ar gyfer yr isafbwynt E yn arwain at

$$\frac{dy}{dx} = 0$$ **Pwynt sefydlog**

a $$\frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$ **Mae graff $\frac{dy}{dx}$ yn dringo.**

<u>Pwynt ffurfdro sefydlog</u>





Mae'r diagram ar y chwith yn dangos pwynt ffurfdro sefydlog (P.Ff.S.).

Mae'r diagram ar y dde yn dangos ffurf gyffredinol $\frac{dy}{dx}$ yn erbyn x.

Mae math arall o P.Ff.S. yn bosibl pan fo'r graff yn disgyn.

Prif nodweddion y graff $\frac{dy}{dx}$ yw

(i) mae'r graff yn disgyn yn G, fel bod

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$$

h.y. $\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$

Mae gan graff sy'n disgyn raddiant negatif.

(ii) yn H, mae gan $\frac{dy}{dx}$ werth mwyaf,

.h.y. mae H yn bwynt sefydlog i $\frac{dy}{dx}$.

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

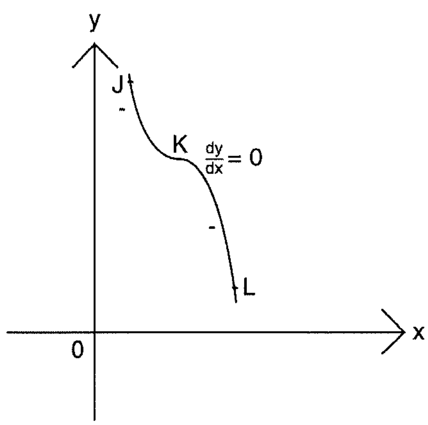
neu $\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

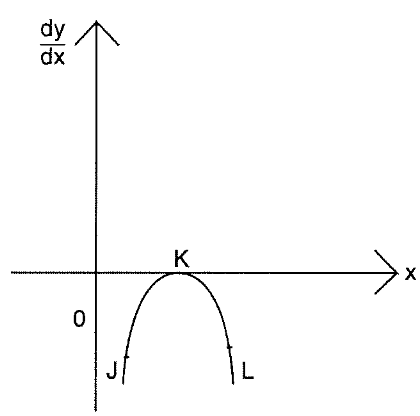
(iii) Mae'r graff yn codi yn I, fel bod

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0$$

neu $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ yn I.

Gellir defnyddio rhesymeg debyg wrth ystyried y math arall o bwynt ffurfdro sefydlog a ddangosir isod.





Yna $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ yn J,

Mae graff $\frac{dy}{dx}$ yn codi.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ yn K,

Uchafbwynt ar gyfer $\frac{dy}{dx}$.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$ yn L.

Mae graff $\frac{dy}{dx}$ yn disgyn.

Gellir cyfuno'r canlyniadau a gafwyd ar gyfer y ddau fath o bwynt ffurfdro sefydlog fel a ganlyn:

$\dfrac{dy}{dx} = 0,$

Pwynt sefydlog

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

ac mae $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ yn newid ei arwydd wrth symud trwy'r pwynt.

Rhestrir isod grynodeb llawn o'r drefn ar gyfer defnyddio ail ddeilliaid i ddosbarthu pwyntiau sefydlog.

Crynodeb

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ (Pwynt sefydlog) $\quad f'(x) = 0$

<u>Uchafbwynt</u>

$\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$ $\quad f''(x) < 0$

yn y pwynt.

<u>Isafbwynt</u>

$\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ $\quad f''(x) > 0$

yn y pwynt.

<u>Pwynt ffurfdro sefydlog</u>

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ yn y pwynt, $\quad f''(x) = 0$

mae $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ yn newid ei arwydd wth symud trwy'r pwynt.

Enghraifft 8.5

Ymchwiliwch i'r ffwythiant

$$f(x) = x^2 + \frac{432}{x} \qquad (x > 0)$$

i ddarganfod uchafbwyntiau ac isafbwyntiau.

Ar gyfer pwynt sefydlog,

$$f'(x) = 0.$$

Nawr $$f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

$\frac{432}{x} = 432x^{-1}$

Yna mae $f'(x) = 0$ yn rhoi

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0$$

neu $$x^3 = \frac{432}{2} = 216.$$

$$\therefore \quad x = 6.$$

Mae angen $f''(x)$ ar gyfer prawf yr ail ddeilliad.

Yna $$f''(x) = 2 + \frac{432 \times 2}{x^3}.$$

Pan fo $x = 6$, $$f''(6) = 2 + \frac{864}{6^3} = 2 + \frac{864}{216} = 6.$$

Felly $$f''(6) > 0$$

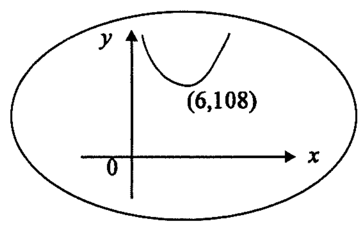
Nid yw union werth f ''(6) yn bwysig, yr arwydd sy'n bwysig.

ac felly mae'r pwynt ar $x = 6$ yn isafbwynt.

Pan fo $x = 6$, gwerth y ffwythiant yw

$$f(6) = 6^2 + \frac{432}{6} = 108.$$

Felly mae gan $y = x^2 + \frac{432}{x}$ isafbwynt ar (6, 108).



Enghraifft 8.6

Darganfyddwch yr uchafbwyntiau ac isafbwyntiau ar y gromlin a roddir gan

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

Ar gyfer pwynt sefydlog,

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Mae angen $\frac{d^2y}{dx^2}$ hefyd er mwyn gallu gwahaniaethu rhwng uchafbwyntiau ac isafbwyntiau.

Yna $$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6.$$

Mae $\frac{dy}{dx} = 0$ yn rhoi $3x^2 - 6x - 9 = 0$.

Cofiwch rannu â 3 trwy'r hafaliad.

$$\therefore \quad 3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

neu $\quad (x-3)(x+1) = 0.$

$\therefore \quad x = 3 \text{ neu } -1.$

Pan fo $x=-1$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 6(-1)-6 = -12 < 0$ sy'n cyfateb i uchafbwynt.

Pan fo $x=3$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 6(3)-6 = 12 > 0$ sy'n cyfateb i isafbwynt.

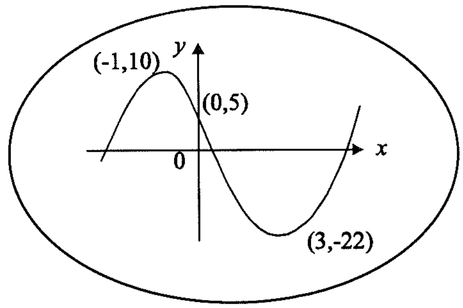
Hefyd, pan fo $x=-1$,

$$y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10.$$

Pan fo $x=3$,

$$y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 5 = -22.$$

Felly mae $(-1, 10)$ yn uchafbwynt a $(3, -22)$ yn isafbwynt ar y gromlin. Yn fras, mae siâp y gromlin fel a ddangosir, wrth nodi bod $y=5$ pan fo $x=0$.



Enghraifft 8.7

Darganfyddwch a dosbarthwch y pwyntiau safydlog ar gyfer

$$y = x^4 - 2x^3 + 3.$$

Mae arnom angen $\dfrac{dy}{dx}$ a $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12x = 12x(x-1).$$

Ar gyfer pwyntiau sefydlog,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

fel bod $2x^2(2x-3) = 0$.

Yna mae $x=0$ neu $x = \dfrac{3}{2}$.

Defnyddiwn $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ i ddosbarthu'r pwyntiau sefydlog.

<u>$x=0$</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(0)(0-1) = 0.$$

Felly gallai $x=0$ gyfateb i bwynt ffurfdro ond mae'n rhaid gwirio nad oes newid yn arwydd $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Mae llawer o fyfyrwyr yn anghofio gwneud hyn.

Gadewch i ni ystyried dau werth yn agos at $x = 0$, un ar bob ochr, dyweder ± 0.1.

<u>$x = -0.1$</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-0.1)(-0.1-1)$$
$$= 1.32 > 0.$$

<u>$x = 0.1$</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(0.1)(0.1-1)$$
$$= -1.08 < 0.$$

Felly mae $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ yn newid ei arwydd o gwmpas $x = 0$

ac mae $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ yn y pwynt $x = 0$.

Felly mae $x = 0$ yn cyfateb i bwynt ffurfdro sefydlog.

Pan fo $x = 0, y = (0)^4 - 2(0)^3 + 3 = 3$.

$\therefore$ Felly mae pwynt ffurfdro sefydlog yn (0, 3).

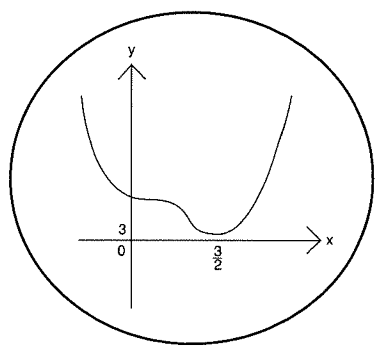
Gadewch i ni ystyried y pwynt sefydlog arall.

<u>$x = \dfrac{3}{2}$</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right) = 9 > 0.$$

Mae yna isafbwynt

pan fo $x = \dfrac{3}{2}, y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 + 3 = \dfrac{21}{16}$.



$\therefore$ Felly mae isafbwynt yn

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{21}{16}.$$

Yn y tair enghraifft olaf, rydym wedi darparu brasluniau o'r cromliniau dan sylw. Braslunio fydd yn cael ei drafod yn yr adran nesaf. Yn y cyfamser, nid oes angen brasluniau yn y cwestiynau canlynol.

Ymarferion 8.5

Ymchwiliwch i'r ffwythiannau canlynol gan ddefnyddio'r ail ddeilliad i ddaosarthu'r pwyntiau.

1 $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + \dfrac{11}{3}$

2 $y = 2 - 4x - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$

3 $\mathrm{f}(x) = x^4 - 8x^2$

4 $\mathrm{f}(x) = 5x - x^5$

5 $y = x^3 + 6x^2$

6 $y = 4 + 3x - x^3$

7 $\mathrm{f}(x) = x^2 + \dfrac{9}{x^2} \quad (x \neq 0)$

8 $y = \dfrac{x^4 + 48}{4x} \quad (x \neq 0)$

8.5 Braslunio cromliniau

Yn yr adran flaenorol, ymchwiliwyd i bwyntiau sefydlog heb luniadu graffiau. Mewn gwirionedd, mae pwyntiau sefydlog yn aml yn gymorth gwerthfawr wrth fraslunio graffiau, yn enwedig lle bo angen y ffurf a'r safle cyffredinol. Mewn achosion o'r fath, nid oes angen dod o hyd i dabl cyflawn o werthoedd. Defnyddiwch y drefn ganlynol i fraslunio graffiau.

Trefn

(a)	Darganfyddwch werth y pan fo $x = 0$.
(b)	Os yw'n bosibl, darganfyddwch werth x pan fo $y = 0$.
(c)	Darganfyddwch a dosbarthwch y pwyntiau sefydlog.
(d)	Brasluniwch y graff.

Enghraifft 8.8

Brasluniwch graff $y = x^4 + 4x^3$.

Gadewch i ni weithio trwy'r drefn uchod.

(a) Pan fo $x = 0, y = (0)^4 + 4(0)^3 = 0$.

(b) Mae $y = 0$ pan fo $x^4 + 4x^3 = 0$,

h.y. $x^3(x+4) = 0$.

$\therefore\ x = 0, -4$.

Trwy ddefnyddio (a) a (b), cawn fod (0, 0) a (−4, 0) ar y gromlin.

(c) <u>Pwyntiau sefydlog</u>

Nawr mae $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 24x = 12x(x+2).$$

Ar gyfer pwyntiau sefydlog,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

fel bod $4x^2(x+3) = 0$.

$$\therefore x = 0, -3.$$

Mae dau bwynt sefydlog yn

$$x = 0, \quad y = 0^4 + 4(0)^3 = 0$$

ac yn $x = -3, y = (-3)^4 + 4(-3)^3 = -27$.

Gadewch i ni ddefnyddio $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ i ddosbarthu'r pwyntiau sefydlog.

(i) $\underline{x = -3}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= 12(-3)(-3+2)\\ &= 36 > 0.\end{aligned}$$

Mae isafbwynt yn $(-3,-27)$.

(ii) $\underline{x = 0}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(0)(0+2) = 0.$$

Mae'n ymddangos fod (0, 0) yn bwynt ffurfdro sefydlog posibl <u>ond mae'n rhaid</u> gwirio arwydd $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ o gwmpas $x = 0$.

Gwiriwn yr arwyddion yn $x = \pm\ 0.1$.

Pan fo $x = -0.1$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= 12(-0.1)(-0.1+2)\\ &= -2.28 < 0.\end{aligned}$$

Pan fo $x = 0.1$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= 12(0.1)(0.1+2)\\ &= 2.52 > 0.\end{aligned}$$

Felly mae $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ yn newid ei arwydd ac mae pwynt ffurfdro sefydlog yn (0, 0).

(d) Nawr rydym yn braslunio'r gromlin.
Gadewch i ni ddefnyddio'r wybodaeth a ddeilliwyd yn (a), (b), (c).

Ymarferion 8.5

Ymchwiliwch i'r ffwythiannau canlynol gan ddefnyddio'r ail ddeilliad i ddaosarthu'r pwyntiau.

1 $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + \dfrac{11}{3}$

2 $y = 2 - 4x - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$

3 $f(x) = x^4 - 8x^2$

4 $f(x) = 5x - x^5$

5 $y = x^3 + 6x^2$

6 $y = 4 + 3x - x^3$

7 $f(x) = x^2 + \dfrac{9}{x^2} \quad (x \neq 0)$

8 $y = \dfrac{x^4 + 48}{4x} \quad (x \neq 0)$

8.5 Braslunio cromliniau

Yn yr adran flaenorol, ymchwiliwyd i bwyntiau sefydlog heb luniadu graffiau. Mewn gwirionedd, mae pwyntiau sefydlog yn aml yn gymorth gwerthfawr wrth fraslunio graffiau, yn enwedig lle bo angen y ffurf a'r safle cyffredinol. Mewn achosion o'r fath, nid oes angen dod o hyd i dabl cyflawn o werthoedd. Defnyddiwch y drefn ganlynol i fraslunio graffiau.

Trefn

(a)	Darganfyddwch werth y pan fo $x = 0$.
(b)	Os yw'n bosibl, darganfyddwch werth x pan fo $y = 0$.
(c)	Darganfyddwch a dosbarthwch y pwyntiau sefydlog.
(d)	Brasluniwch y graff.

Enghraifft 8.8

Brasluniwch graff $y = x^4 + 4x^3$.

Gadewch i ni weithio trwy'r drefn uchod.

(a) Pan fo $x = 0, y = (0)^4 + 4(0)^3 = 0$.

(b) Mae $y = 0$ pan fo $x^4 + 4x^3 = 0$,

h.y. $x^3(x+4) = 0$.

$\therefore \; x = 0, -4$.

Trwy ddefnyddio (a) a (b), cawn fod (0, 0) a (–4, 0) ar y gromlin.

(c) Pwyntiau sefydlog

Nawr mae $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 24x = 12x(x+2).$$

Ar gyfer pwyntiau sefydlog,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

fel bod $4x^2(x+3) = 0$.

$\therefore x = 0, -3$.

Mae dau bwynt sefydlog yn

$x = 0, \quad y = 0^4 + 4(0)^3 = 0$

ac yn $x = -3, y = (-3)^4 + 4(-3)^3 = -27$.

Gadewch i ni ddefnyddio $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ i ddosbarthu'r pwyntiau sefydlog.

(i) $\underline{x = -3}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-3)(-3+2)$$
$$= 36 > 0.$$

Mae isafbwynt yn $(-3, -27)$.

(ii) $\underline{x = 0}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(0)(0+2) = 0.$$

Mae'n ymddangos fod (0, 0) yn bwynt ffurfdro sefydlog posibl ond mae'n rhaid gwirio arwydd $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ o gwmpas $x = 0$.

Gwiriwn yr arwyddion yn $x = \pm\ 0.1$.

Pan fo $x = -0.1$,

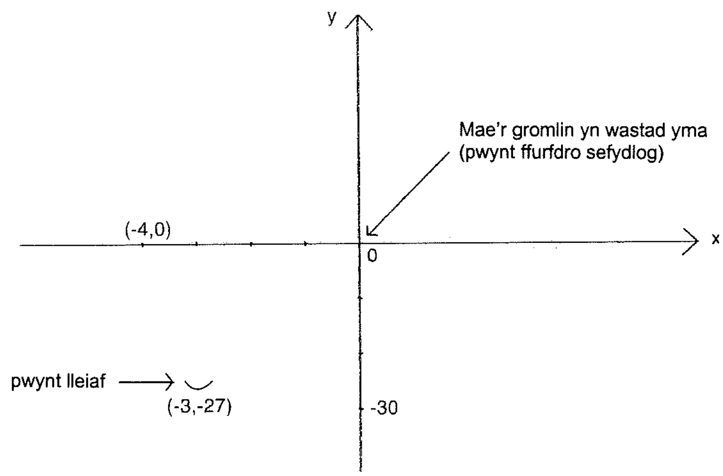
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-0.1)(-0.1+2)$$
$$= -2.28 < 0.$$

Pan fo $x = 0.1$,

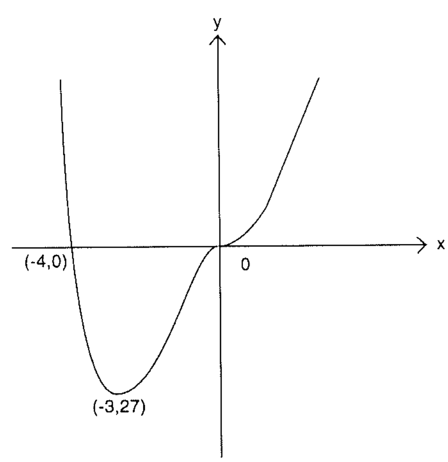
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12(0.1)(0.1+2)$$
$$= 2.52 > 0.$$

Felly mae $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ yn newid ei arwydd ac mae pwynt ffurfdro sefydlog yn (0, 0).

(d) Nawr rydym yn braslunio'r gromlin.
Gadewch i ni ddefnyddio'r wybodaeth a ddeilliwyd yn (a), (b), (c).



Mae ychydig o feddwl yn ein harwain at siâp y graff a ddangosir isod.



Enghraifft 8.9

Dychwelwn at enghraifft 8.4 a oedd yn ymwneud ag $y = 3 + 12x - 3x^2 - 2x^3$.

Gadewch i ni weithio trwy'r derfn o fraslunio graffiau.

(a) Pan fo $x = 0$, mae $y = 3$.

(b) Pan fo $y = 0$, cawn

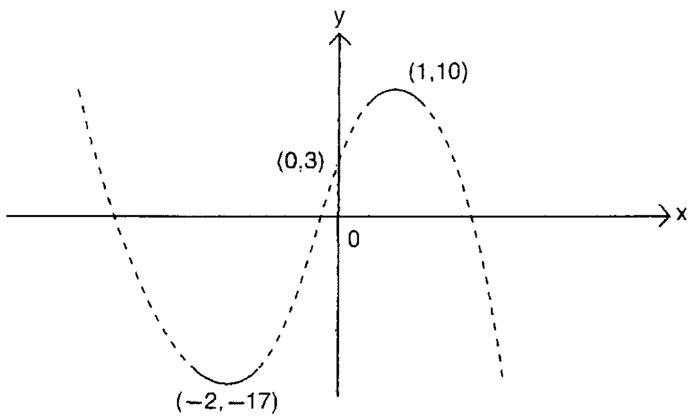
$$3 + 12x - 3x^2 - 2x^3 = 0.$$

Nid yw'n rhwydd darganfod x o'r hafaliad uchod ac felly nid awn ymhellach i lawr y llwybr hwn.

(c) Pwyntiau sefydlog

Sefydlwyd yn gynharach fod isafbwynt yn (–2, –17) a bod uchafbwynt yn (1, 10).

(d) Nawr gallwn fraslunio'r gromlin trwy ddefnyddio'r wybodaeth a ddeilliwyd yn (a), (b) ac (c).
Gellir cwblhau'r gromlin fel a ddangosir isod.



Nodwn wrth fynd heibio fod y graff yn croestorri'r echelin x mewn tri phwynt. Deuwn i'r casgliad fod gan yr hafaliad

$$3+12x-3x^2-2x^3=0$$

Gosod $y=0$

dri gwreiddyn real, dau ohonynt yn negatif.

Ymarferion 8.6

Brasluniwch graffiau'r cromliniau canlynol.

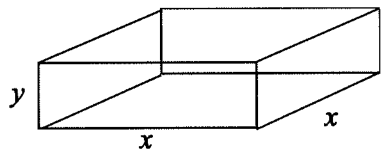
1 $y=3x^2-x^3$	**2** $y=x^3-6x^2$	**3** $y=x^3-2x^2+x+4$
4 $y=3x^4-8x^3+1$	**5** $y=x^4+32x+32$	**6** $y=4x^5-5x^4$.

8.6 Problemau ymarferol ar uchafbwyntiau ac isafbwyntiau

Gellir defnyddio'r dechneg o ddarganfod uchafbwyntiau ac isafbwyntiau (lleol) yn aml er mwyn datrys problemau ymarferol. Gweithiwn trwy enghraifft cyn datgan rhai rheolau a allai gael eu defnyddio i ddatrys problemau o'r fath.

Enghraifft 8.10

Mae blwch pren â chynhwysedd o 4 metr ciwbig i'w adeiladu. Bydd ganddo dop agored a gwaelod sgwâr. Darganfyddwch fesuriadau'r blwch fel bod gan ei wynebau yr arwynebedd lleiaf posibl (isafbwynt).



Boed i x = hyd ochr y sgwâr mewn metrau,
y = uchder y blwch mewn metrau.
Gan y rhoddwyd cyfaint y blwch, gellir darganfod y yn nhermau x.

$$\therefore \quad x^2 y = 4$$

ac felly
$$y = \frac{4}{x^2}.$$

Arwynebedd yr arwynebau A

= arwynebedd y gwaelod + arwynebedd 4 wyneb ochr

$$= x^2 + 4xy = x^2 + 4x.\frac{4}{x^2}.$$

$$\therefore \quad A = x^2 + \frac{16}{x} \quad (x > 0).$$

Mae angen gwerth isaf A wrth i x amrywio o 0 i ∞.
Nawr mae isafbwynt (lleol) yn digwydd pan fo $\dfrac{dA}{dx} = 0$ a $\dfrac{d^2A}{dx^2} > 0$.

Nawr
$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{16}{x^2}$$

a
$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2 + \frac{32}{x^3}.$$

$\therefore$ mae $\dfrac{dA}{dx} = 0$ yn rhoi $2x - \dfrac{16}{x^2} = 0$.

$$\therefore \quad x^3 = 8$$

ac
$$x = 2.$$

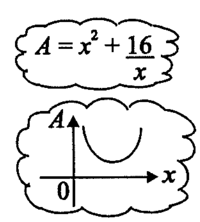
Hefyd
$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2 + \frac{32}{x^3} = 2 + \frac{32}{2^3} = 6 > 0.$$

Felly mae $x = 2$ yn cyfateb i isafbwynt lleol. Nodir hefyd fod

$A \to \infty$ wrth i $x \to 0$

a bod $A \to \infty$ wrth i $x \to \infty$.

Felly yr isafbwynt lleol yw isafbwynt y cyfan.



Pan fydd $x = 2$, $\quad A = 2^2 + \dfrac{16}{2} = 12.$

Yr arwynebedd arwyneb isaf yw 12 m^2, pan fo'r sylfaen yn sgwâr ag ochr 2 m a'r uchder yn $\dfrac{4}{2^2} = 1$ metr.

Y gwerth sefydlog sengl yw gwerth lleiaf y cyfan.

Cyn gweithio enghraifft arall, dyma grynodeb o'r drefn ar gyfer datrys problemau ymarferol gydag uchafbwyntiau ac isafbwyntiau.

Y drefn ar gyfer defnyddio uchafbwyntiau ac isafbwyntiau

1. Darganfyddwch y ffwythiant y mae angen ei werth uchaf neu ei werth isaf yn y broblem.

2. Os yw'r mynegiad yn cynnwys mwy nag un newidyn, ceisiwch ddileu newidynnau fel y gellir ysgrifennu'r mynegiad yn nhermau un newidyn yn unig.

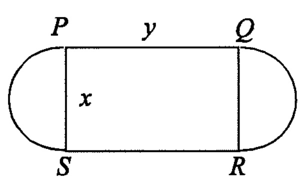
3. Defnyddiwch y rheolau ar gyfer darganfod uchafbwyntiau ac isafbwyntiau.

4. Penderfynwch ai uchafbwynt (neu isafbwynt) y cyfan yw'r uchafbwynt neu isafbwynt lleol trwy ystyried gwerthoedd y ffwythiant ar bennau parth y ffwythiant. Os un gwerth mwyaf neu werth lleiaf yn unig sydd, hwn fydd uchafbwynt neu isafbwynt y cyfan.

5. Os yw'n bosibl, brasluniwch graff er mwyn gwirio'r gwaith.

Enghraifft 8.11

Mae cae chwarae i fod yn betryal *PQRS* gyda hanner cylchoedd o ddiamedr *QR* a *PS* ar y ddau ben. Mae perimedr y cae i fod yn 400 m ac mae arwynebedd y petryal *PQRS* i fod ar ei fwyaf. Darganfyddwch fesuriadau'r petryal.



Os x m ac y m yw dimensiynau'r petryal, ei arwynebedd $A = xy$. (1)
Mae dau newidyn. Rhoddir bod y perimedr $= 400$ m.

$\therefore \quad 2y + \pi\dfrac{x}{2} + \pi\dfrac{x}{2} = 400$

neu $\quad 2y + \pi x = 400.$

Diddymwch y.

$\therefore \quad y = 200 - \dfrac{\pi x}{2}.$

Yna amnewidier am y yn fformiwla (1) ar gyfer A:

$\therefore \quad A = x\left(200 - \dfrac{\pi x}{2}\right).$

Ar gyfer uchafbwynt, $\quad \dfrac{dA}{dx} = 0, \ \dfrac{d^2A}{dx^2} < 0.$

Nawr $\quad \dfrac{dA}{dx} = 200 - \pi x, \ \dfrac{d^2A}{dx^2} = -\pi.$

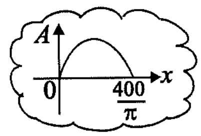
Yna $\quad 200 - \pi x = 0.$

$\therefore \quad x = \dfrac{200}{\pi}.$

Hefyd $\dfrac{d^2A}{dx^2} < 0$

$\therefore$ mae $\quad x = \dfrac{200}{\pi}$ yn cyfateb i uchafbwynt.

Noder $A = 0$ pan fo $x = 0$, neu $x = \dfrac{400}{\pi}$.

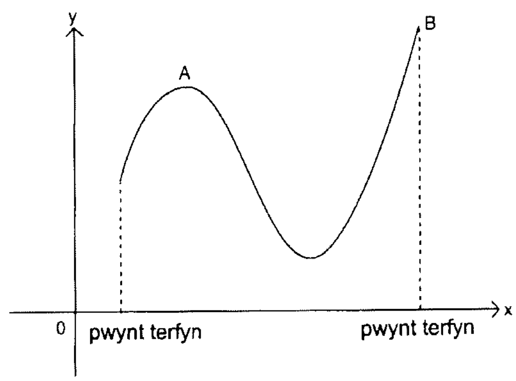


Felly mae'r uchafbwynt lleol yn cyfateb i uchafbwynt y cyfan.

$$\text{Arwynebedd uchaf} = \frac{200}{\pi}\left(200 - \frac{\pi}{2} \times \frac{200}{\pi}\right)$$
$$= \frac{200 \times 100}{\pi}$$
$$= 6366 \text{ m}^2 \text{ (yn fras).}$$

Y gwerth sefydlog sengl yw gwerth mwyaf y cyfan.

Pan fo mwy nag un gwerth sefydlog, mae'n bosibl nad uchafbwynt (isafbwynt) y cyfan yw'r gwerth mwyaf (lleiaf) lleol. Dangosir y posibilrwydd hwn yn y diagram isod.

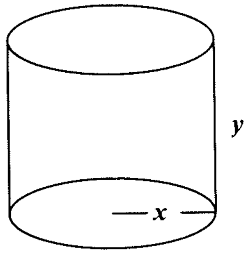


Dros y set o werthoedd x a ystyrir, mae dau werth sefydlog. Tra bo gan y gromlin uchafswm lleol yn A, mae gwerth y yn B yn uwch. Uchafswm y cyfan yw gwerth y yn B.

Felly, pan fo mwy nag un pwynt sefydlog, dylid cymharu'r gwerth mwyaf neu leiaf â'r gwerthoedd terfyn.

Enghraifft 8. 12

Mae silindr crwn union wedi ei adeiladu fel bod swm ei ddiamedr a'i uchder yn 2 m. O wybod bod gan y silindr ei gyfaint mwyaf, darganfyddwch ei uchder a'i radiws.



Os yw'r radiws yn x m a'r uchder yn y m, rhoddir y cyfaint gan

$$V = x^2 y \text{ m}^3 \quad (1)$$

Mae yma ddau newidyn, sef x ac y.
Rhoddir bod

$$2x + y = 2. \quad (2)$$

Amnewidiwn am y o (2) i (1)

$$\therefore V = x^2(2-2x) = 2x^2(1-x)$$

a nodwn fod

$0 \le x \le 1.$

Ar gyfer gwerth mwyaf,

$$\frac{dV}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dx^2} < 0.$$

Nawr $\dfrac{dV}{dx} = 4x - 6x^2 = x(4-6x),$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4 - 12x.$$

Yna mae $\dfrac{dV}{dx} = 0$ yn rhoi

$$x(4-6x) = 0$$

fel bod $x = 0, x = \dfrac{2}{3}.$

Pan fo $x = 0, \dfrac{d^2V}{dx^2} = 4 > 0$

sy'n cyfateb i isafbwynt lleol.

Pan fo $x = \dfrac{2}{3}, \dfrac{d^2V}{dx^2} = 4 - 12\left(\dfrac{2}{3}\right) = -4 < 0$

sy'n cyfateb i uchafbwynt lleol.

Y gwerth mwyaf lleol yw

$$V = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{27}\ \text{m}^3.$$

Ar y pwyntiau terfyn, mae $x = 0$ ac $x = 1$

ac mae $V = 2(0)^2(1-0) = 0$

a $\quad V = 2(1)^2(1-1) = 0.$

Mae'r gwerth mwyaf lleol yn fwy na'r gwerthoedd terfyn ac felly hwn yw uchafbwynt y cyfan.

Felly, y gwerth mwyaf $= \dfrac{8}{27}\text{m}^3$

pan fo'r radiws $= \dfrac{2}{3}\text{m}$, a'r uchder $= 2 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\text{m}.$

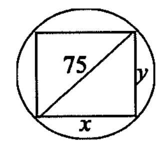
Ymarferion 8.7

1 Mae sector cylch yn amgau arwynebedd o 36 m^2. Darganfyddwch berimedr lleiaf posibl y sector.

2 Mae cynhwysydd silindrog agored i'w ffurfio o ddarn o dun gydag arwynebedd 64π cm^2. Darganfyddwch radiws ac uchder y tun â'r cynhwysedd mwyaf.

3 Mae blwch agored i'w wneud o ddarn sgwâr o gerdyn gydag ochr 24 cm. Mae'r blwch i'w ffurfio trwy dorri sgwariau ag ochrau x cm o'r corneli ac yna blygu'r cerdyn i fyny er mwyn ffurfio'r ochrau. Dangoswch fod cynhwysedd V y blwch yn cael ei roi gan $V = 4(12-x)^2x$. Darganfyddwch y cynhwysedd mwyaf.

4 Os rhoddir cryfder trawst â thrawstoriad petryalog gan y berthynas: cysonyn × lled × (dyfnder)^2, beth yw dimensiynau'r trawst cryfaf y gellid ei lifio o foncyff crwn â diamedr 75 cm?



5 Mae gwneuthurwr setiau radio yn darganfod y gall werthu x radio yr wythnos am £S yr un, lle mae $S = (75 - x)$. Y gost cynhyrchu yw £$(500 + 15x + \frac{1}{5}x^2)$. Dangoswch y caiff yr elw mwyaf trwy gynhyrchu 25 radio yr wythnos.

6 Mae cae petryalog $ABCD$ i gael ei gau gan ffens betryalog ac yna ei rannu yn ddwy ran gan ffens sy'n baralel i ochr AB. Os arwynebedd y cae yw A_1 m^2 dangoswch mai hyd lleiaf y ffens sydd ei angen yw $2\sqrt{6A_1}$ m.

7 Sgwâr yw sylfaen bloc petryalog solid. Swm yr uchder a hyd un o ochrau'r sylfaen yw 30cm. Darganfyddwch gyfaint mwyaf y bloc.

8 Mae ffenestr ar ffurf petryal gyda hanner cylch uwch ei ben. Mae diamedr yr hanner cylch yn hafal i led y ffenestr. Os 4m yw perimedr y ffenestr, darganfyddwch ei harwynebedd mwyaf.

Pennod 9

Integru - Yr Integryn Amhendant

Mae'r ddwy bennod flaenorol wedi ymwneud â differiad ffwythiannau. Felly, er enghraifft, mae'r ffwythiant polynomaidd $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ yn newid yn $3x^2 - 6x + 2$ wrth gael ei ddifferu.
Mae **integriad amhendant** yn ymwneud â'r broblem wrthdro: er enghraifft, wrth ddarganfod y ffwythiant y mae'n rhaid ei ddifferu i gael $x^4 + 3$, dywedwn ein bod yn chwilio am integryn $x^4 + 3$.

9.1 Yr integryn amhendant

Enghraifft 9.1

Trwy ddifferu $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x^5}{5} + 3x + 7$

ac $\mathrm{g}(x) = \dfrac{x^5}{5} + 3x - 2$

ceir $\mathrm{f}'(x) = \dfrac{5x^4}{5} + 3 = x^4 + 3$

ac $\mathrm{g}'(x) = \dfrac{5x^4}{5} + 3 = x^4 + 3.$

Nawr gellir cael $x^4 + 3$ trwy ddifferu $\dfrac{x^5}{5} + 3x +$ unrhyw gysonyn; mewn geiriau eraill, integryn $x^4 + 3$ yw $\dfrac{x^5}{5} + 3x +$ unrhyw gysonyn.

Ysgrifennir hyn $\displaystyle\int x^4 + 3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + 3x + k.$ (1)

(i) Yn (1) 'S' wedi'i hwyhau yw'r symbol '$\int$'.

(ii) Mae dx yn cyfeirio at y newidyn ac yn y bôn mae'n ddull byr o ysgrifennu 'mae'r differiad (a'r integriad) mewn perthynas ag x'.
Cynghorir chi i ddod i'r arfer o ysgrifennu dx (neu dy, neu'r llythyren dan sylw) bob amser wrth ysgrifennu integrynnau.

(iii) k yw unrhyw gysonyn. Caiff ei adael allan yn aml wrth ysgrifennu integrynnau amhendant. Ysgrifennwn ni y cysonyn <u>mympwyol</u> hwn, fel y'i gelwir, bob tro.

(iv) Caiff mynegiadau megis $x^4 + 3$ sydd i'w hintegru eu galw'n integrandau.
Integriad amhendant felly yw'r broses o ganfod pa ffwythiant sydd i'w ddifferu er mwyn cael yr integrand.

Enghraifft 9.2

(i) $\int 7x^6 \mathrm{d}x \;=\; x^7 + k,$

oherwydd $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7 + k) \;=\; 7x^6.$

(ii) $\int x^{10} + 4x^3 \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{11}}{11} + x^4 + k$

oherwydd $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x^{11}}{11} + x^4 + k\right) = \dfrac{11x^{10}}{11} + 4x^3 \;=\; x^{10} + 4x^3.$

Gellir crynhoi felly mai'r broses o integriad amhendant yw darganfod y mynegiad sy'n rhoi'r integrand wrth gael ei ddifferu:

$$\int \text{integrand } \mathrm{d}x \;=\; \text{mynegiad} + k$$

neu $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\text{mynegiad} + k) \;=\; \text{integrand}.$

Gellir defnyddio llythrennau eraill yn ogystal ag *x*, wrth gwrs.

Ymarfer 9.1

Cwblhewch yr hafaliadau canlynol, gan ddifferu eich atebion er mwyn gwirio eu bod yn rhoi'r integrandau a roddwyd:

(i) $\int 3x^2 \mathrm{d}x \;=\; \boxed{} + \boxed{k}$

(ii) $\int 4x^3 \mathrm{d}x \;=\; \boxed{} + \boxed{k}$

(iii) $\int 5x^4 + 6x^5 \mathrm{d}x \;=\; \boxed{} + \boxed{k}$

Gelwir y mynegiad $\int$ f(x) dx + k yn integryn amhendant f(x).
Fel gyda differiad, mae cael catalog o ffwythiannau a thechnegau yn hanfodol er mwyn symud ymlaen gydag integriad amhendant.

9.2 Technegau a rheolau

Enghraifft 9.3

Er mwyn canfod $\int cx^n \,\mathrm{d}x$, lle mae c ac n yn gysonion, rydym yn chwilio am y ffwythiant sy'n rhoi cx^n wrth gael ei ddifferu.

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = 3x^2$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{6}{7}x^5\right) = \dfrac{30x^4}{7}$

Nawr mae differiad yn gwneud y pwerau x un yn llai ac felly, er mwyn darganfod integryn amhendant cx^n , ymchwiliwn i ddifferiad cx^{n+1}.

Nawr gan fod $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^{n+1}) \;=\; (n+1)cx^n$

rhy fawr o ffactor $n + 1$

nodwn fod $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{c}{n+1}x^{n+1}\right) \;=\; \dfrac{(n+1)}{n+1}cx^n \;=\; cx^n.$

Rhannwch i ddiddymu'r ffactor $n + 1$.

ac felly

Rheol I $\boxed{\int cx^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{c}{n+1}x^{n+1} + k \quad (n \neq -1)}$

Gyda phwerau *x* adiwch un at y pŵer a rhannwch â'r pŵer newydd.

D.S. Cynhwysir yr amod $n \neq -1$ er mwyn osgoi rhannu â sero. Ystyrir yr achos hwn yn Uned **P2**.

Enghraifft 9.4

(i) $$\int 3x^7 \mathrm{d}x = \frac{3x^8}{8} + k.$$

(ii) $$\int \frac{4}{x^3}\mathrm{d}x = \int 4x^{-3} = \frac{4x^{-3+1}}{-3+1} + k$$
$$= \frac{4x^{-2}}{-2} + k = -2x^{-2} + k$$
$$= -\frac{2}{x^2} + k.$$

Adiwch un at y pŵer a rhannwch â'r pwer newydd, gan nodi fod –3 + 1 = –2.

(iii) $$\int 5x^{\frac{7}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + k = \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + k$$
$$= \frac{10x^{\frac{9}{2}}}{9} + k.$$

$\frac{1}{9/2} = \frac{2}{9}$

Wrth integru cysonyn, gellir defnyddio'r canlyniad blaenorol gydag $n = 0$ gan fod $cx^0 = c$.

(unrhyw beth)^0 = 1

Yna $$\int c\,\mathrm{d}x = \frac{cx^{0+1}}{1} + k$$
$$= cx + k$$

ac felly

Rheol II $\boxed{\int c\,\mathrm{d}x = cx + k}$

Enghraifft 9.5

$$\int 6\,\mathrm{d}x = 6x + k,$$

$\int \mathrm{d}x = x + k$, gan fod $\int \mathrm{d}x$ yr un peth â $\int 1\,\mathrm{d}x$.

Cofiwn wrth ddifferu swm nifer meidraidd o ffwythiannau, y gellir differu fesul term. Gan fod integriad yn cildroi differiad, gellir integru fesul term.

Enghraifft 9.6

(i) $\int x^2 + 3x + 2 + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + k$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{x^{-1}}{-1} + k$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + k.$

Gyda phob term, adiwch un at y pŵer a rhannwch â'r pŵer newydd (Rheol I).

Yn gyffredinol,

Rheol III $\boxed{\int \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x) + \mathrm{h}(x) + \ldots\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x + \int \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x + \int \mathrm{h}(x)\mathrm{d}x + \ldots k,}$

lle y nodir nad oes angen ond ysgrifennu un cysonyn mympwyol.

Yn olaf, nodir bod y cais 'integrwch y^2 mewn perthynas ag y' yn gywerth â darganfyddwch ? yn

$$\int y^2 \mathrm{d}x = \boxed{?} + \boxed{k}$$

Yr ateb yw $\frac{y^3}{3}$, wrth gwrs, yn ôl Rheol I.

Ymarferion 9.2

Mae'r cwestiynau canlynol yn defnyddio Rheolau, I, II a III. Mewn rhai o'r cwestiynau diweddarach bydd angen ailysgrifennu ambell fynegiad cyn integru. Integrwch y mynegiadau canlynol mewn perthynas â'r llythyren briodol gan adael allan y cysonyn integriad.

(i) x^8 (ii) $x^{\frac{2}{3}}$ (iii) -6 (iv) $\frac{3}{x^3}$ (v) $\sqrt{x}$

(vi) $\frac{1}{x^{10}}$ (vii) $-\frac{9}{x^5}$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (ix) $\frac{1}{y^{\frac{7}{2}}}$ (x) $4 - 6x - x^3$

(xi) $x + \frac{1}{x^2}$ (xii) $\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (xiii) $x(x+1)$ (xiv) $\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^2$

(xv) $\frac{x + \sqrt{x}}{x}$ (xvi) $\sqrt{x}\left(3\sqrt{x} + 1\right)$ (xvii) $\frac{1}{x^4} + 2x^{\frac{1}{4}} + 3x^{-\frac{1}{4}}$

(xviii) $\left(\sqrt{y} + 2\right)\left(\sqrt{y} - 3\right)$ (xix) $\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{\sqrt{x}}$

(xx) $\frac{y^2 + 1}{y^2}$ (xxi) $y^n\,(n \neq -1)$.

Pennod 10

Rhagor o Integru – Yr Integryn Pendant

Yn y bennod hon, rhoddir ystyriaeth bellach i integru a chyflwynir cymhwysiad pwysig o'r broses, sef enrhifo'r arwynebedd o dan gromlin. Mae cyfrifo gwerth arwynebeddau o'r fath yn cynnwys cysyniad yr **integryn pendant**.
Er mwyn paratoi'r tir, dychwelwn yn fyr at y cysyniad o integriad amhendant. Wrth ddarganfod integryn amhendant, cynhwysir cysonyn integriad mympwyol. O dan rai amgylchiadau gellir rhoi gwerthoedd arbennig i'r cysonyn integriad.

10.1 Darganfod y cysonyn integriad

Enghraifft 10.1

O wybod bod $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x$, ac $y = 2$ pan fo $x = 1$, darganfyddwch y.

Nawr mae y yn rhoi x wrth gael ei ddifferu ac felly yn ôl diffiniad integryn amhendant,

$$y = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + k. \quad (1)$$

Mae'r cysonyn k yn fympwyol ar hyn o bryd. Fodd bynnag, gan fod $y = 2$ pan fo $x = 1$, gellir amnewid y gwerthoedd hyn yn (1) a chael

$$2 = \frac{1}{2} + k.$$

$$\therefore \quad k = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Yna mae amnewid am k yn (1) yn rhoi

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 3).$$

Enghraifft 10.2

O wybod bod $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ac $f(9) = 4$, darganfyddwch $f(x)$.

Nawr $f'(x)$ yw'r ffwythiant a ddeilliwyd o $f(x)$. I ddarganfod $f(x)$ rydym yn chwilio am y mynegiad sydd, o'i ddifferu, yn rhoi $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Yna $\quad f(x) = \int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx + k = 2\sqrt{x} + k. \qquad (1)$

Nawr $f(9) = 4$. Mae amnewid $x = 9$ yn (1)

Rheol I, Adran 9.2

yn rhoi $4 = 2\sqrt{9} + k$.

$\therefore k = 4 - 2\sqrt{9} = 4 - 2\times(3) = -2.$

Mae amnewid am k yn (1) yn rhoi

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 2.$$

Ymarferion 10.1

Darganfyddwch y neu $f(x)$ yn yr achosion canlynol.

1 $\quad \dfrac{dy}{dx} = x^3$, o wybod bod $y = 3$ pan fo $x = 2$.

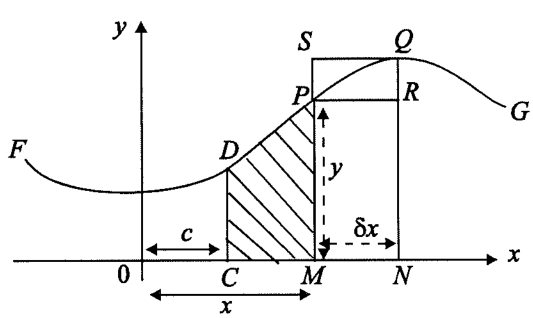
2 $\quad \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x + 1$, o wybod bod $y = 0$ pan fo $x = 2$.

3 $\quad f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$, o wybod bod $f(1) = 0$.

4 $\quad f'(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} + 2$, o wybod bod $f(1) = 6$.

10.2 Yr arwynebedd o dan gromlin

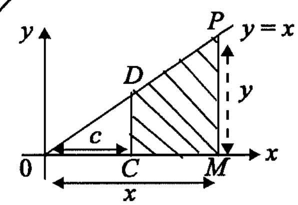
Ystyriwn y gromlin FG a roddir gan yr hafaliad $y = f(x)$ fel a ddangosir.



Cromlin gyffredinol yw hon a rhoddwyd y siâp arbennig hwn iddi er mwyn hwylustod wrth ei llunio.

Yn y ffigur, mae CD yn gyfesuryn y sefydlog sy'n cyfateb i'r gwerth $x = c$ ac mae MP yn gyfesuryn y newidiol.

Nawr os tybiwn fod M yn newid ei safle, yna bydd yr arwynebedd tywyll $CDPM$ yn newid, h.y. mae gwerth yr arwynebedd tywyll yn dibynnu ar $OM = x$.
Felly os A yw'r arwynebedd tywyll, dangosir sut mae'r arwynebedd tywyll hwn yn dibynnu ar x trwy ysgrifennu A fel $A(x)$.
Yn yr achos arbennig lle ystyrir y graff $y = x$ (h.y. $f(x) = x$), $A(x) = \frac{1}{2}(x^2 - c^2)$, er enghraifft.



Gyda'r achos arbennig $y = x$, mae $CDPM$ yn drapesiwm gydag arwynebedd
$\frac{1}{2}(CD + PM)CM$
$= \frac{1}{2}(c+x)(x-c) = \frac{1}{2}(x^2 - c^2)$
ac felly $A(x) = \frac{1}{2}(x^2 - c^2)$.

Os yw N yn bwynt sy'n agos at M fel bod $MN = \delta x$ (h.y. $ON = x + \delta x$) gellir ysgrifennu arwynebedd $CDQN$ fel $A(x) + \delta A(x)$ ac felly arwynebedd $MPQN = \delta A(x)$.

[Gyda llaw, noder ar gyfer y trapesiwm bod

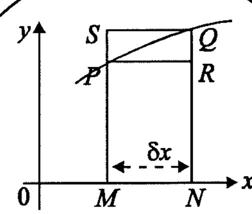
$$A(x) = \frac{1}{2}(x^2 - c^2), \; A(x) + \delta A(x) = \frac{1}{2}\left((x + \delta x)^2 - c^2\right)$$

a

$$\delta A(x) = \frac{1}{2}((x + \delta x)^2 - c^2) - \frac{1}{2}(x^2 - c^2)$$
$$= x\delta x + \frac{(\delta x)^2}{2} \; .]$$

Trwy gwblhau'r petryalau $MNRP$ ac $MNQS$, gwelwn fod arwynebedd $MNRP < \delta A(x) <$ arwynebedd $MNQS$, gan nodi mai $\delta A(x)$ yw'r arwynebedd o dan yr arc PQ.
Felly mae $MP.\, \delta x < \delta A(x) < NQ.\, \delta x$.
Mae rhannu â δx yn rhoi

$$MP < \frac{\delta A(x)}{\delta x} < NQ.$$



Arwynebedd y petryal yw sail × uchder a hyd sail y ddau betryal yw δx.

Nawr wrth i $\delta x \to 0$, mae MP yn aros yn sefydlog ac mae NQ yn nesáu at MP fel terfyn (gan fod $y = f(x)$ yn ddi-dor), a cheir

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta A(x)}{\delta x} = MP$$

$$\text{neu} \quad \frac{dA(x)}{dx} = MP \quad \text{neu} \quad \frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

MP yw gwerth y ar gyfer $y = f(x)$.

[Ar gyfer y trapesiwm o dan y llinell $y = x$,

$$\delta A(x) = x\delta x + \frac{(\delta x)^2}{2} \quad \text{ac felly} \quad \frac{\delta A(x)}{\delta x} = x + \frac{\delta x}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta A(x)}{\delta x} = \frac{dA}{dx} = x = MP \text{ yn yr achos hwn.]}$$

Yn gyffredinol, $\dfrac{dA(x)}{dx} = f(x)$ ac $A(x) = \int f(x)\,d(x)$

trwy ddiffiniad integriad.

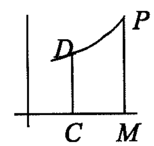
Boed i F(x) fod yn ffwythiant a geir pan gaiff f(x) ei integru.

Yna $\qquad A(x) = F(x) + k. \qquad (1)$

Os $f(x) = x$
yna $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$

Gellir darganfod y cysonyn mympwyol trwy nodi bod gwerth yr arwynebedd tywyll yn sero pan fydd M ac C yn cyd-daro, h.y. $A = 0$ pan fydd $x = c$.

$\therefore \qquad A(c) = 0.$



Mae amnewid $x = c$ yn (1) yn rhoi

$$A(c) = 0 = F(c) + k.$$

$$\therefore \qquad k = -F(c).$$

Yna mae amnewid am k yn (1) yn rhoi

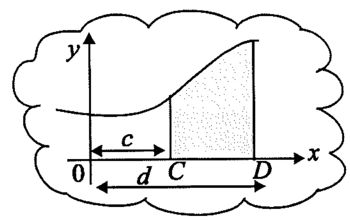
$$A(x) = F(x) - F(c).$$

Gydag $y = x$,
$A(x) = \dfrac{x^2}{2} + k$ a $k = -\dfrac{c^2}{2}$.
Felly $A(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{c^2}{2}$
$= \dfrac{1}{2}(x^2 - c^2)$ fel o'r blaen.

Os gofynnir am yr arwynebedd rhwng y pwyntiau C a D lle mae $OD = d$, yr arwynebedd hwn yw $A(d)$ a roddir gan

$$A(d) = F(d) - F(c),$$

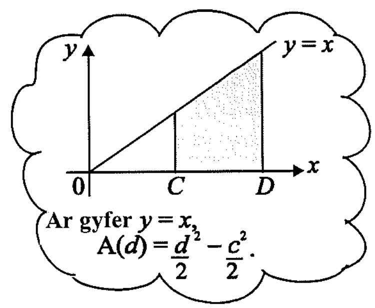
lle mae $\qquad F(x) = \int f(x)\,d(x).$



Yn achos $y = x$, mae'r arwynebedd rhwng x = c, $x = d$ fel a ddangosir yn y swigen.

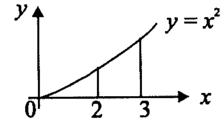
Yma $f(x) = x$, $\quad F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ ac

$$A(d) = F(d) - F(c) = \frac{1}{2}(d^2 - c^2).$$



Enghraifft 10.3

Darganfyddwch yr arwynebedd o dan y gromlin $y = x^2$ rhwng y llinellau $x = 2$, $x = 3$ a'r echelin x.



Yma $f(x) = x^2$ ac

$$F(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$$

Yr arwynebedd y gofynnwyd amdano = F(3) – F(2)

$$= \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

Gadewch yr ateb fel ffracsiwn union.

Enghraifft 10.4

Darganfyddwch yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = x^3 + x$, y llinellau $x = 1$, $x = 2$ a'r echelin x.

Yma $\qquad \mathrm{f}(x) = x^3 + x$

ac $\qquad \mathrm{F}(x) = \int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2}.$

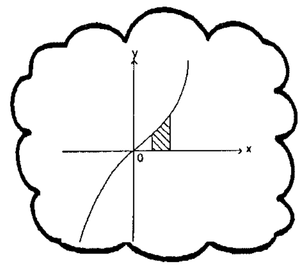
Nid oes angen cysonyn mympwyol yma.

Yr arwynebedd y gofynnwyd amdano

$$= \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(1)$$

$$= \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} - \left(\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}.$$



Gellir cynrychioli'r arwynebedd rhwng $y = \mathrm{f}(x)$, $x = c$, $x = d$ a'r echelin x fel

$$\int_c^d \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{F}(x))_{x=d} - (\mathrm{F}(x))_{x=c}$$

y gellir ei ysgrifennu yn y ffurf

$$\int_c^d \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_c^d.$$

$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$

Enghraifft 14.5

Enrhifwch (i) $\displaystyle\int_1^3 2x + x^2\,\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_4^9 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(i) $$\int_1^3 2x + x^2\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$$= 3^2 + \frac{3^3}{3} - \left(1^2 + \frac{1^3}{3}\right)$$

$$= 18 - 1\frac{1}{3} = \frac{50}{3} \text{ neu } 16\frac{2}{3}.$$

$\mathrm{f}(x) = 2x + x^2,$
$\mathrm{F}(x) = x^2 + \dfrac{x^3}{3}$
$c = 1, d = 3.$

(ii) $$\int_4^9 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x}\right]_4^9$$

$$= 2(9)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{9} - \left[2(4)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{4}\right]$$

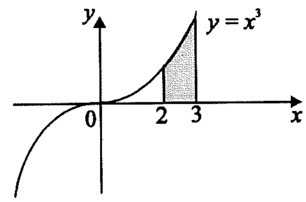
$$= 54 + 6 - 16 - 2(2) = 40.$$

Gelwir integrynnau megis $\int_c^d \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ yn <u>integrynnau pendant</u> oherwydd nad oes cysonion mympwyol neu anhysbys yn yr atebion.

Enghraifft 10.6
Cynrychiolwch yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = x^3$ a'r llinellau $x = 2$, $x = 3$ a'r echelin x fel integryn pendant. Enrhifwch yr integryn pendant hwn.

Mae'r rhan hon o'r gromlin yn gorwedd uwchben yr echelin x ac felly rhoddir yr arwynebedd gan $\int_2^3 x^3\,\mathrm{d}x$.
Mae enrhifo'r integryn pendant hwn yn rhoi

$$\int_2^3 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4}$$
$$= \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}.$$

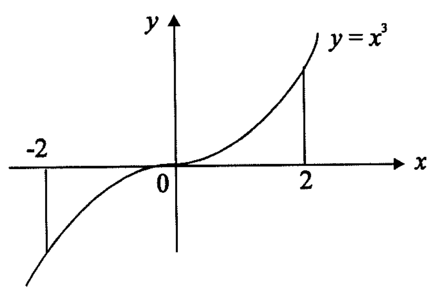


Rhaid bod yn ofalus wrth ddefnyddio integrynnau pendant i enrhifo arwynebedd. Argymhellir defnyddio braslun. Mae'r enghraifft ganlynol yn dangos yr anhawster sy'n gallu codi.

Enghraifft 10.7
Defnyddiwch integriad pendant i enrhifo'r arwynebedd rhwng y gromlin $y = x^3$, y llinellau $x = -2$, $x = 2$ a'r echelin x.
Heb lunio braslun, ysgrifennwn yr arwynebedd fel $\int_{-2}^2 x^3\,\mathrm{d}x$

sef $$\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 4 - 4 = 0.$$

Deallwn y canlyniad rhyfedd pan ystyriwn fraslun o $y = x^3$ rhwng $x = -2$, $x = 2$.



Mae'r integryn pendant $\int_{-2}^2 x^3\,\mathrm{d}x$ yn rhoi swm algebraidd yr arwynebeddau tywyll. Enrhifir yr arwynebedd tywyll ar y chwith fel rhif negatif oherwydd bod y gromlin o dan yr echelin x; enrhifir yr arwynebedd ar y dde fel rhif positif oherwydd bod y gromlin uwchben yr echelin x. Mae'r arwynebeddau 'positif' a 'negatif' yn canslo ei gilydd dros yr amrediad.

Rhoddir yr arwynebedd 'negatif' gan

$$\int_{-2}^{0} x^3 \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} \;=\; \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \;=\; -4.$$

Enrhifir yr arwynebedd 'positif' fel

$$\int_{0}^{2} x^3 \mathrm{d}x \;=\; \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} \;=\; \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \;=\; 4.$$

Er mwyn canfod cyfanswm yr arwynebedd tywyll mae angen

$$\int_{0}^{2} x^3 \mathrm{d}x - \int_{-2}^{0} x^3 \mathrm{d}x \;=\; 4-(-4)$$
$$=\; 8$$

neu fel arall, trwy gymesuredd yn yr achos hwn :-

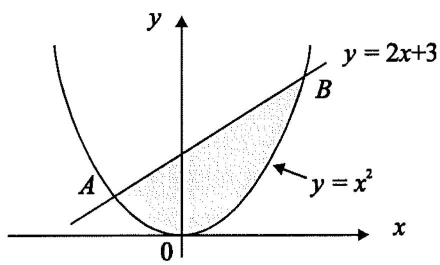
yr arwynebedd y gofynnir amdano $= 2 \times \int_{0}^{2} x^3 \mathrm{d}x$

$= 2 \times 4 = 8.$

Pan fo arwynebeddau yn gorwedd o dan echelin x, gellir trefnu iddynt roi atebion positif trwy gyflwyno arwydd minws.

Mae'r wers sydd i'w dysgu yn Enghraifft 10.7 yn amlwg: wrth ddarganfod arwynebeddau trwy integriad pendant lluniwch fraslun o'r sefyllfa.
Mae brasluniau hefyd yn fuddiol pan ofynnir i ni enrhifo arwynebeddau mwy cymhleth.

Enghraifft 10.8
Brasluniwch y gromlin $y = x^2$ a'r llinell syth $y = 2x + 3$. Darganfyddwch groestorfannau A a B y llinell a'r gromlin, lle mae cyfesuryn x A yn llai na chyfesuryn x B. Enrhifwch yr arwynebedd rhwng y cord AB a'r gromlin.



Mae cyfesurynnau y croestorfannau A a B yn bodloni

$y = x^2$ ac $y = 2x + 3$ fel ei gilydd.

Trwy hafalu'r cyfesurynnau y, ceir

$$x^2 = 2x+3$$

h.y. $\quad x^2 - 2x - 3 = 0.$

Mae hyn yn ffactorio gan roi

$$(x+1)(x-3) = 0$$

ac felly $\quad x = -1$ neu $x = 3$.

neu defnyddiwch y fformiwla gwadratig

Pan fydd $x = -1, \quad y = (-1)^2 = 1,$
$x = 3, \quad y = 3^2 = 9.$

Fel mae'n digwydd, nid oes angen gwerth y yn yr enghraifft hon.
Dangosir yr arwynebedd rhwng y cord a'r gromlin yn dywyll.

Gellir defnyddio'r hafaliad $y = x^2$ fel a wneir yma neu $y = 2x + 3$ i ddarganfod y gwerthoedd y.

Arwynebedd tywyll = Arwynebedd dan y cord – arwynebedd dan y gromlin

$$= \int_{-1}^{3} 2x + 3\,dx - \int_{-1}^{3} x^2\,dx$$

$$= \left[x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}$$

$$= 3^2 + 3 \times 3 - ((-1)^2 + 3(-1)) - \left\{\frac{3^3}{3} - \left(\frac{(-1)^3}{3}\right)\right\}$$

$$= 9 + 9 - 1 + 3 - 9 - \frac{1}{3}$$

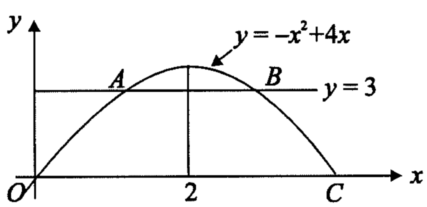
$$= 10\frac{2}{3}.$$

Mae pob arwynebedd uwchben yr echelin x ac felly fe'u hystyrir yn bositif.

Defnyddiwch gromfachau er mwyn osgoi gwallau yn yr arwyddion.

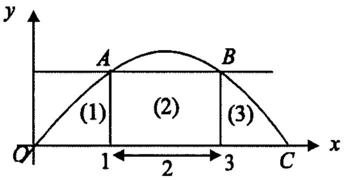
Enghraifft 10.9

Brasluniwch y gromlin $y = -x^2 + 4x$. Mae'r llinell $y = 3$ yn croestorri'r gromlin yn y pwyntiau A a B, lle mae cyfesuryn x A yn llai na chyfesuryn x B. Mae'r gromlin yn croestorri'r echelin x ar y tardd O a'r pwynt C.
Darganfyddwch yr arwynebedd rhwng yr arc OA, y cord AB, yr arc BC a'r echelin x.



Mae gan y gromlin uchafbwynt ar $x = 2$ ac mae'n croestorri'r echelin x ar bwyntiau lle mae $y = 0$, h.y. pan fydd

$-x^2 + 4x = 0.$
$\therefore \quad x(-x + 4) = 0.$
Felly, $x = 0$ neu 4.
Mae $x = 4$ yn cyfateb i'r pwynt C.
Mae'r llinell $y = 3$ yn croestorri'r gromlin pan
$3 = -x^2 + 4x.$
$\therefore \quad x^2 - 4x + 3 = 0$
ac felly $(x - 3)(x - 1) = 0.$
Felly $x = 1$ (pwynt A)
neu $x = 3$ (pwynt B).



Yr arwynebedd y gofynnir amdano
= arwynebedd (1) + arwynebedd (2) + arwynebedd (3).

$$\text{Arwynebedd (1)} = \int_0^1 -x^2+4x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^1$$

$$= -\frac{(1)^3}{3}+2(1)^2-\left(-\frac{(0)^3}{3}+2.(0)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{3}+2 = 1\frac{2}{3}.$$

Arwynebedd (2) = Arwynebedd petryal gyda sail 2, uchder 3
$= 2\times 3 = 6.$

$$\text{Arwynebedd (3)} = \int_3^4 -x^2+4x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_3^4$$

$$= -\frac{(4)^3}{3}+2.(4)^2-\left(-\frac{(3)^3}{3}+2.(3)^2\right) = 1\frac{2}{3}.$$

Mewn gwirionedd arwynebedd (3) = arwynebedd (1) trwy gymesuredd.

Yr arwynebedd y gofynnir amdano $= 1\frac{2}{3}+6+1\frac{2}{3} = 9\frac{1}{3}.$

Ymarferion 10.2

D.S. Fe'ch cynghorir i lunio brasluniau wrth ddarganfod arwynebeddau.

1 Beth yw'r arwynebedd a ffurfir rhwng y gromlin $y = x^2 - 5x + 4$ a'r echelin x?

2 Beth yw'r yr arwynebedd a ffurfir rhwng y llinell $y = 7$ a'r gromlin $y = x^2 + 3$?

3 Darganfyddwch yr arwynebedd a amgaeir gan y gromlin $y = -2x + x^2$, y llinellau $x = 0$, $x = 3$ a'r echelin x.

4 Dangoswch fod $\int_0^a a^2x - x^3\,\mathrm{d}x = \frac{a^4}{4}$.

5 Dangoswch fod $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{a^2}{6}$.

6 Enrhifwch $\int_0^1 x^2(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

7 Darganfyddwch yr arwynebedd a amgaeir gan yr echelin x a'r rhan honno o'r gromlin $y = 8x - 12 - x^2$ lle mae y yn bositif.

8 Cyfrifwch arwynebedd y segment o'r gromlin $y = 2\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ a dorrir ymaith gan y llinell $y = x$.

9 Darganfyddwch arwynebedd y segment o'r gromlin $y = x^2 - 2x + 2$ a dorrir ymaith gan y llinell $y = 5$.

10 Darganfyddwch arwynebedd y segment o'r gromlin $y = x(x - 2)$ a dorrir ymaith gan y llinell $y = x$.

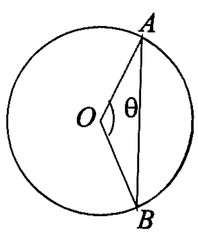
Papur Adolygu 1

1. O wybod bod gwreiddiau real gan yr hafaliad
$$x^2 - (3+2k)x + 2k + 11 = 0,$$
dangoswch fod
$$4k^2 + 4k - 35 \geq 0.$$
O wybod ymhellach fod y gwreiddiau'n hafal, darganfyddwch werthoedd posibl i k, a gwerthoedd cysylltiedig x.

2. (a) Brasluniwch graff $y = \cos x$ ar gyfer gwerthoedd x rhwng $0°$ a $360°$.
(b) Darganfyddwch y gwerthoedd x rhwng $0°$ a $360°$ sy'n bodloni
$$4\sin^2 x + 8\cos x - 7 = 0.$$

3. Trydydd term cyfres geometrig yw $\frac{1}{4}$ a'r pumed term yw $\frac{1}{16}$.
(a) Darganfyddwch werthoedd posibl y gymhareb gyffredin.
(b) Darganfyddwch swm i anfeidredd y gyfres â'r gymhareb gyffredin bositif.

4. A yw'r pwynt (1, 3), C yw'r pwynt (3, 7) a D yw canolbwynt AC. Dangoswch fod y llinell trwy D yn berpendicwlar i AC yn cael ei rhoi gan
$$2y + x - 12 = 0.$$
Mae'r llinell yn cwrdd ag echelin x yn B. Darganfyddwch arwynebedd y triongl ABC.

5. 

Mae dau bwynt, A a B, wedi eu lleoli ar gylch, canol O a radiws r, fel bod $A\hat{O}B = \theta$, fel a ddangosir.
O wybod bod yr arwynebedd tywyll yn draean arwynebedd y cylch, dangoswch fod
$$3\theta - 3\sin\theta - 2\pi = 0.$$
Trwy fraslunio'r graffiau $y = \theta - \frac{2\pi}{3}$, $y = \sin\theta$, dangoswch fod gwerth θ rhwng $\frac{\pi}{2}$ a π.

6. Mae'r gromlin $y = x^2 + 6$ a'r llinell $y = 5x$ yn croestorri yn y pwyntiau A a B, lle mae cyfesuryn x y pwynt A yn llai na chyfesuryn x y pwynt B.
(a) Brasluniwch y gromlin a'r llinell.
(b) Darganfyddwch gyfesurynnau A a B.
(c) Mae'r llinell trwy B yn baralel i'r echelin y yn cwrdd â'r echelin x ar C, ac O yw'r tardd. Darganfyddwch yr arwynebedd a amgaeir gan y llinell OA, yr arc AB, y llinell BC a'r echelin x.

7. Mae tanc petryalog agored yn 2 fetr o led, x metr o hyd ac y metr o uchder. Ysgrifennwch yn nhermau x ac y arwynebedd A mewn metrau sgwâr y ddalen denau o fetel a ddefnyddir wrth adeiladu'r tanc.
Cyfaint y tanc yw 6 metr ciwbig.
(a) Dangoswch fod $A = 2x + \frac{12}{x} + 6$.
(b) Darganfyddwch hyd a dyfnder y tanc os defnyddir yr arwynebedd lleiaf o ddalen fetel.

Papur Adolygu 2

1. A, B, C yw'r pwyntiau (1, 3), (−1, 5), (3, 7), yn ôl eu trefn. Canolbwyntiau AB a BC yw E ac F yn ôl eu trefn.
   (a) Darganfyddwch gyfesurynnau E ac F.
   (b) Dangoswch fod EF yn baralel i AC.
   (c) Dangoswch fod $EF = \frac{1}{2}AC$.

2. (a) Nodwch y set o werthoedd y rhwng $0°$ a $360°$ sydd â $\sin y < 0$.
   (b) Darganfyddwch y parau o werthoedd x ac y rhwng $0°$ a $360°$ sy'n bodloni

$$2\cos x + 3\sin y = -\frac{1}{6}$$

$$3\cos x - 2\sin y = \frac{5}{6}.$$

3. Darganfyddwch $\int \frac{(1+2x)^2}{\sqrt{x}}\, dx.$

4. (a) Darganfyddwch a nodwch natur werthoedd sefydlog y ffwythiant a roddir gan

$$f(x) = x^3 - 12x + 15.$$

   (b) Brasluniwch graff $y = x^3 - 12x + 15$ a diddwythwch nifer y gwreiddiau real sydd gan yr hafaliad

$$x^3 - 12x + 15 = 0.$$

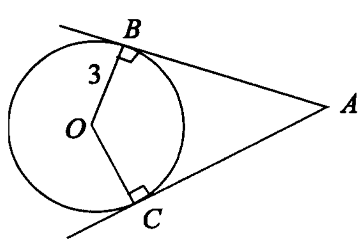
5. Term cyntaf cyfres rifyddol yw a a'r gymhareb gyffredin yw d. Dangoswch y rhoddir swm yr n term cyntaf gan

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right].$$

   Term cyntaf cyfres rifyddol yw 4 a'r gwahaniaeth cyffredin yw −2.
   Swm yr n term cyntaf yw −1116. Darganfyddwch n.

6. (a) Brasluniwch y gromlin $y = x^2 - 4x + 3$.
   (b) Darganfyddwch yr arwynebedd a amgaeir gan echelin x, y gromlin $y = x^2 - 4x + 3$, a'r llinellau $x = 0$ ac $x = 2$.

7.



Mae gan gylch ganol O a radiws 3 cm. Mae'r tangiadau i'r cylch o bwynt A yn cwrdd â'r cylch ar bwyntiau B ac C fel a ddangosir. Hyd OA yw 5 cm. Darganfyddwch yr arwynebedd a dywyllwyd, yn gywir i ddau le degol.

Papur Adolygu 3

1. Symleiddiwch $\left(\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1}\right)$.

2. Mynegwch $1-x-x^2$ yn y ffurf $b-(x+a)^2$ a darganfyddwch werth mwyaf y mynegiad. Brasluniwch graff $y = 1-x-x^2$.

3. Fertigau pedrochr $ABCD$ yw $A(4, 0)$, $B(14, 11)$, $C(0, 6)$, a $D(-10, -5)$. Dangoswch
   (a) fod AC a BD yn berpendicwlar,
   (b) fod canolbwynt AC a chanolbwynt BD yn cyd-daro,
   (c) fod $BD = 4AC$.

4. Swm diamedr ac uchder silindr yw 18 cm.
   (a) Mynegwch gyfaint y silindr yn nhermau r, sef radiws sylfaen y silindr a fesurir mewn centimetrau.
   (b) Darganfyddwch gyfaint mwyaf posibl y silindr.

5. O wybod bod $y = 3\sqrt{x} + \dfrac{5}{x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{6}{x^2} + 4$, darganfyddwch werth $\dfrac{dy}{dx}$ pan fo $x = 4$.

6. Mae'r gromlin C a roddir gan $y = x(2-x)$ yn croestorri'r echelin x yn y tardd O ac mewn pwynt arall A.
   (a) Brasluniwch y gromlin C.
   (b) Mae'r llinell syth $y = x$ yn croestorri C yn O ac mewn pwynt arall B. Darganfyddwch yr arwynebedd a amgaeir gan linell OB, yr arc BA ac echelin x.

7. Mae cord AB, hyd 4 cm, yn rhannu cylch, radiws 4 cm, yn ddau segment. Darganfyddwch arwynebedd y naill segment a'r llall.

Papur Adolygu 4

1. (a) Brasluniwch graff $y = \tan x$ ar gyfer gwerthoedd x rhwng 0° a 360°.
   (b) Trwy ddefnyddio eich braslun, neu fel arall, darganfyddwch bob gwerth x sy'n bodloni
   $$8 \tan^2 x + 10 \tan x - 3 = 0.$$
2. O wybod bod $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$, darganfyddwch werth $f(x+h) - f(x)$. Diddwythwch fod
   $$f'(x) = 6x - 4.$$
3. Fertigau triongl yw $A(2, 4)$, $B(-8, 2)$ ac $C(4, -6)$. Pwyntiau P a Q yw canolbwyntiau AB ac AC yn ôl eu trefn. Mae'r llinell sy'n mynd trwy P ac sy'n berpendicwlar i AB yn cwrdd â'r llinell trwy Q sy'n berpendicwlar i AC yn y pwynt R.
   (a) Dangoswch mai hafaliad PR yw
   $$y + 5x + 12 = 0$$
   a darganfyddwch hafaliad QR.
   (b) Darganfyddwch gyfesurynnau R.
   (c) Dangoswch fod $BR = CR$.
4. Mae merch yn sefyll ei harholiadau TGAU mewn naw pwnc. Dywedodd un o'i rhieni, efallai heb ystyried y gost, y byddai'n gwobrwyo'r ferch am ei llwyddiant fel a ganlyn:
   10c am ei llwyddiant cyntaf,
   20c am ei hail lwyddiant,
   40c am ei thrydydd llwyddiant,
   hyd at ei nawfed llwyddiant, gyda'r wobr am bob llwyddiant yn ddwbl y wobr am y llwyddiant blaenorol.
   Os yw'r ferch wedi llwyddo ym mhob un o'r naw pwnc, darganfyddwch
   (a) y wobr a gafodd am y nawfed llwyddiant,
   (b) cyfanswm y gwobrau a gafodd y ferch, gan fynegi eich ateb mewn punnoedd a cheiniogau.
5. Darganfyddwch werthoedd sefydlog y ffwythiant f a roddir gan
   $$\mathrm{f}(x) = \frac{3x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - 2x^3 + 2$$
   a darganfyddwch eu natur.
   Brasluniwch y gromlin $y = \dfrac{3x^5}{5} - \dfrac{3x^4}{4} - 2x^3 + 2$.
6. O wybod bod gwerthoedd real x ac y yn bodoli sy'n bodloni'r hafaliadau
   $$y = mx + 5,$$
   $$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0,$$
   dangoswch fod
   $$m^2 + 8m + 7 \geq 0.$$
7. Brasluniwch y gromlin $y = -x^2 + 3x$ rhwng y tardd O a'r pwynt A, lle bo $x = 3$. Mae'r llinell $y = 2$ yn torri'r gromlin mewn pwyntiau B ac C, lle bo cyfesuryn x y pwynt B yn llai na chyfesuryn x y pwynt C. Darganfyddwch arwynebedd $OBCA$.

Papur Adolygu 5

1. Term cyntaf cyfres geometrig yw $\sqrt{3}$ a'r gymhareb gyffredin yw $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

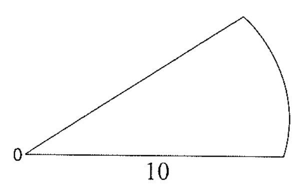
   Darganfyddwch swm i anfeidredd y gyfres yn y ffurf $a+b\sqrt{c}$, lle bo a, b ac c yn rhifau cymarebol.

2. Darganfyddwch bob gwerth x rhwng $0°$ a $360°$ sy'n bodloni
   $$12\cos^2 x - 5\sin x - 10 = 0.$$

3. A yw'r pwynt (3, 5), C yw'r pwynt (5, 1), a D yw canolbwynt AC. Mae'r llinell trwy D sy'n berpendicwlar i AC yn croestorri'r echelin y yn B.
   (a) Darganfyddwch hafaliad BD.
   (b) Dangoswch fod y llinell trwy D sy'n baralel i AB yn mynd trwy ganolbwynt BC.

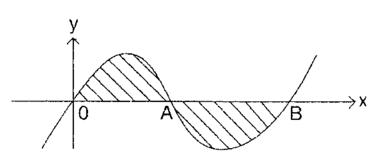
4. Darganfyddwch werth $k(k \neq 1)$ sy'n gwneud y ffwythiant cwadratig
   $$k(x+1)^2-(x-2)(x-3)$$
   yn hafal i sero ar gyfer un gwerth o x yn unig.

5.



O wybod bod perimedr sector o gylch, canol 0 a radiws 10cm, yn 25 cm, darganfyddwch arwynebedd y sector.

6.



Mae'r gromlin $y=x^3-3x^2+2x$ yn croestorri yr echelin x yn y tardd 0 ac mewn dau bwynt arall, A a B. Enrhifwch gyfanswm yr arwynebedd a dywyllwyd.

7. Mae ffermwr yn bwriadu neilltuo arwynebedd petryalog o fewn cae mawr. Mae gwrych syth ar un ochr y cae yn gweithredu fel un ffin, ac adeiledir ffensys i wneud y tair ffin arall. Mae 100 metr o ffens ar gael. Defnyddir x metr o'r gwrych.
   (a) Dangoswch y rhoddir yr arwynebedd $A\text{m}^2$ a amgaeir, gan
   $$A = 50x - \frac{x^2}{2}.$$
   (b) Darganfyddwch werth mwyaf A.

Papur Adolygu 6

1. Ar gyfer triongl ABC mae A yn y pwynt (7, 9), B yn y pwynt (3, 5), C yn y pwynt (5, 1); E ac F yw canolbwynt AB ac AC, yn ôl eu trefn.
   (a) Dangoswch fod EF yn baralel i BC.
   (b) Mae EF yn cwrdd ag echelinau x ac y yn y pwyntiau P a Q yn ôl eu trefn. Darganfyddwch arwynebedd y triongl OPQ, os O yw'r tardd.

2. (a) Darganfyddwch bob gwerth x rhwng $0°$ a $360°$ sy'n bodloni
   $$3(\sin^2 x - \cos^2 x) = 1 + \cos x.$$
   (b) Darganfyddwch bob gwerth θ rhwng $0°$ a $180°$ sy'n bodloni
   $$\tan 4\theta = \sqrt{3}.$$

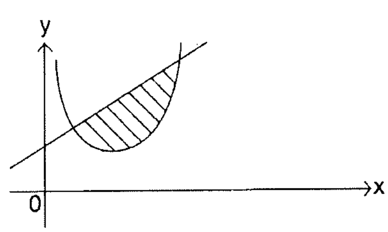
3. Term cyntaf cyfres rifyddol yw -2, ac mae'r 11^{eg} term yn hafal i bedair gwaith y pedwerydd term.
   (a) Darganfyddwch y gwahaniaeth cyffredin.
   (b) Lluoswm yr n^{fed} term a'r $(n + 1)^{fed}$ term yw 3190. Darganfyddwch n.

4. O wybod bod
   $$\int_0^a \frac{6\sqrt{x}}{a} + \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{x^2}\,dx = 6,$$
   darganfyddwch werth a.

5. O wybod bod
   $$f(x) = \frac{4x^3}{3} - 6x^2 + 15x + 3,$$
   darganfyddwch $f'(x)$.
   Trwy gwblhau'r sgwâr, neu fel arall, ar gyfer $f'(x)$ diddwythwch fod f yn ffwythiant cynyddol.

6. Mae'r diagram yn dangos y gromlin $y = x^2 - 3x + 8$ a'r llinell $y = x + 5$.

   Enrhifwch yr arwynebedd a dywyllwyd.



7. Rhoddir cyfanswm cost rhedeg llong am awr (mewn miloedd o bunnau) gan
   $$C = 8 + \frac{s^3}{2000},$$
   lle mae s yn cynrychioli'r buanedd mewn kilometr/awr.
   (a) Ysgrifennwch yr amser a gymer mordaith o 2000 km gan dybio bod y llong yn teithio ar fuanedd cyson o s cilometr/awr.
   (b) Ysgrifennwch gost mordaith 2000 km yn nhermau s.
   (c) Darganfyddwch werth s sy'n sicrhau'r gost leiaf ar gyfer mordaith 2000 km.

ATEBION

Pennod 1

Ymarferion 1.1

1. (i) $\dfrac{1}{a^2}$ (ii) $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ (iii) $\dfrac{1}{b^6}$ (iv) a (v) b^2

2. (i) a (ii) b^8 (iii) $\dfrac{1}{x}$ or x^{-1} (iv) $4a^2b^3$ (v) $\dfrac{1}{2}x^2y^7$

(vi) 4 (vii) $\dfrac{1}{2}$ (viii) $\dfrac{9}{25}$ (ix) $\dfrac{64}{27}$

3. (i) $7ab^3$ (ii) $4x^3y^2$ **4.** $\dfrac{1}{128}$

Ymarferion 1.2

(i) $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$ (ii) $\dfrac{2a+3}{a+1}$ (iii) $\dfrac{b^2-b+2}{b(b^2+2)^2}$

(iv) $\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\left(x^2-y^2-1\right)\left(x-y\right)^{\frac{1}{2}}}$ (v) $\dfrac{1}{x}$ (vi) $\dfrac{3}{2x^2+3}$

Ymarferion 1.3

Gweler y testun

Ymarferion 1.4

1. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $3\sqrt{2}$ (iii) $6\sqrt{2}$ (iv) $6\sqrt{5}$ (v) $5\sqrt{10}$

2. (i) $2\sqrt{3}-3$ (ii) $5\sqrt{2}-4$ (iii) 1 (iv) $2\sqrt{3}+14$

(v) $58-12\sqrt{6}$ (vi) $x-x^2$ neu $x(1-x)$

3. (i) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ (iv) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

(v) $\sqrt{2}+1$ (vi) $5(\sqrt{5}+2)$ (vii) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ (viii) $\sqrt{3}$

Ymarferion 1.5

(i) x^2-16 (ii) $2x^2+5x+2$ (iii) $2x^3+3x^2-5x-6$

(iv) $x^4+x^3-5x^2-35x-18$ (v) $9x^2+3xy-20y^2$ (vi) x^2+4x+4

(vii) $9x^2-12x+4$ (viii) $x^3+9x^2+27x+27$ (ix) x^3-3x+2

Ymarferion 1.6

1. (i) $(x+1)(x+4)$ (ii) $(x-1)(x-4)$ (iii) $(x+1)(x-4)$

(iv) $(x+5)(x+18)$ (v) $(x-5)(x-18)$ (vi) $(x-5)(x+18)$

(vii) $(l-2)(l+3)$ (viii) $(l+2)(l-3)$ (ix) $(p-7)(p+9)$

(x) $(x+4)(x-7)$

2. (i) $(x+1)(2x+1)$ (ii) $(3t+4)(t+1)$ (iii) $(x-4)(4x+1)$

(iv) $(x-2)(4x+1)$ (v) $(x-5)(4x+5)$ (vi) $(3x-2)(2x+1)$

(vii) $(y-2)(3y+1)$ (viii) $(2y-7)(4y-1)$ (ix) $(2x-3)(5x+3)$

(x) $(x+3)(7x-4)$

Pennod 2

Ymarferion 2.1

(i) unfathiant (ii) hafaliad (iii) hafaliad (iv) unfathiant (v) unfathiant
(vi) hafaliad (vii) hafaliad (viii) unfathiant

Ymarferion 2.2

1. (i) $y = 22$ (ii) $a = -35$ (iii) $x = 21$

2. 15525 m^2 **3.** 15 **4.** 70 am £5.50, 50 am £2.50

5. 5 km **6.** £12 **7.** 23

Ymarferion 2.3

1. (i) $-1, 7$ (ii) $1, 12$ (iii) $\frac{1}{2}, 8$ (iv) $-4, -5$

(v) $-\frac{5}{3}, 4$ (vi) $-\frac{2}{5}, -6$

2. (i) 3.56, − 0.56 (ii) − 4.56, − 0.44 (iii) 2.85, − 0.35

(iv) 0.67 (dwywaith) (v) 0.60 (vi) dim datrysiadau real

3. (a) (i) (b) (iii) (c) (i) (d) (i) (e) (i) (f) (ii)

4. $a = 1, x = 1$ (dwywaith) **6.** 32

Ymarferion 2.4

(i) $-2, 3$ (lleiaf) (ii) $-2, 11$ (mwyaf)

(iii) $-\frac{3}{2}, \frac{13}{4}$ (mwyaf) (iv) $-\frac{3}{4}, -\frac{45}{4}$ (lleiaf)

(v) $-\frac{1}{4}, \frac{55}{8}$ (lleiaf) (vi) $\frac{3}{8}, \frac{25}{16}$ (mwyaf)

(vii) $\frac{1}{2}, \frac{37}{4}$ (mwyaf) (viii) 1, 1 (mwyaf)

(ix) 0, 4 (lleiaf) (x) 0, 9 (mwyaf)

Ymarferion 2.5

1. (i) $x = 3, y = 1$ (ii) $x = 2, y = -2$ (iii) $a = 8, b = 3$
(iv) $x = -4, y = 6$

2. $a = 6, b = 4$ **3.** 12, 20 **4.** $\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ **5.** $-\frac{19}{3}, \frac{59}{3}$

6. $-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}$ **7.** $\frac{232}{3}, -\frac{104}{3}$ **8.** $\frac{17}{5}, \frac{16}{5}$

Ymarferion 2.6

1. (i) $x = 6, y = -4$ neu $x = -5, y = 7$ (ii) $a = 5, b = -2$ neu $a = -26, b = -33$

(iii) $x = 2, y = 26$ neu $x = 13, y = 4$ (iv) $a = 2, b = -1$ neu $a = -\frac{7}{11}, b = -\frac{69}{11}$

(v) $x = 4, y = -3$ neu $x = -\frac{15}{14}, y = \frac{171}{14}$ (vi) $x = -4, y = -6$ neu $x = \frac{116}{13}, y = \frac{6}{13}$

(vii) $x = -4, y = -2$ neu $x = \frac{6}{9}, y = -\frac{4}{9}$

2. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) -17 (iii) $9, -1$

3. (i) Nac oes (ii) Nac oes (iii) Oes

Pennod 3

Ymarfer 3.1

15

Ymarferion 3.2

1. 5, 8, n ; dargyfeiriol **2.** $\frac{1}{32}, \frac{1}{2^{n-1}}$; cydgyfeiriol, terfan = 0

3. 4^n, Nac ydyw **4.** Nac ydyw, cydgyfeiriol, terfan = 0 **5.** Osgiliadol

6. Ydyw **7.** Dargyfeiriol **8.** Nac ydyw **9.** Osgiliadol

10. x^n (i) Cydgyfeiriol, terfan = 0 (ii) Cydgyfeiriol, terfan = 0
(iii) Dargyfeiriol (iv) Osgiliadol (v) Cydgyfeiriol, terfan = 0

11. 1, Ydyw

Ymarferion 3.3

1. (i) 0 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 1 (v) 0
(vi) dim terfan (vii) 0 (viii) dim terfan (ix) 1

2. (a) Ydyw, terfan = 0 (b) Ydyw, terfan = 1 (c) Nac ydyw (d) Ydyw, terfan = 1
(e) Ydyw, terfan = 0 (f) Ydyw, terfan = 1 (g) Nac ydyw (h) Ydyw, terfan = 1

Ymarferion 3.4

1. $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$ **2.** $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r}$ **3.** $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r-1}}$ **4.** $\sum_{r=1}^{7} 2^r$

5. $\sum_{r=1}^{20} (2r-1)$ **6.** $\sum_{r=1}^{\infty} \left(r + \frac{1}{r+1}\right)$

Ymarferion 3.5

1. Nac ydyw **2.** Ydyw **3.** Dargyfeiriol **4.** Ydyw

7. $\frac{r+2}{r(r+1)(r+3)}$; $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r+2}{r(r+1)(r+3)}$; $\frac{29}{30}$; Ydyw **8.** $\frac{1}{n(n+1)}$; 0

9. $2n + 1$; nid yw'r naill na'r llall yn cydgyfeirio **10.** $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; y ddau yn cydgyfeirio

Ymarferion 3.6

1. 22 **2.** $a-3b$; $a-5b$; $a-7b$ **3.** 27 **4.** 12fed

5. 2500 **6.** 2; $2n-6$ **7.** $8n-7$ **8.** 15

9. £2010 ; £102000 **10.** £1665 **11.** Nac ydyw

12. 14; 4 **13.** $3\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{10}$; $148\frac{1}{2}$ **14.** 8; −3, −410 **15.** 3525

Ymarferion 3.7

1. (a) 54; 162 (b) $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$ (c) −40.5 ; 60.75 (d) 0.0002 ; 0.00002

2. 64 **3.** $-\frac{64}{81}$ **4.** 2.48832 **5.** 2.737152

6. £8857.81 i'r geiniog agosaf **7.** £2146835.06, i'r geiniog agosaf **8.** 1 ; 4

9. ±3; $\pm\frac{2}{3}$ **10.** 6; $13\frac{1}{2}$ **11.** $\sqrt{2}-1$; $5\sqrt{2}-7$

Ymarferion 3.8

1. (i) $3^n - 1$ (ii) $31.25\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$ (iii) $4.8\left[1-(-1.5)^n\right]$ (iv) $\frac{2}{9}\left[1-(0.1)^n\right]$

2. (ii) 31.25 (iv) $\frac{2}{9}$ **3.** (i) $\frac{3}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{2}{33}$

4. 17.531 (3 lle degol) **5.** (i) $\frac{x^n - 1}{x-1}$ (ii) $\frac{\left[1-(-x)^n\right]}{1+x}$

(iii) $\frac{a^2}{1-a}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^n - 1\right]$ (iv) $\frac{2b}{(b-2)}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^n - 1\right]$ **6.** 15.77 (2 le degol)

7. 45 **8.** (i) $\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{42}{99}$ (iii) $\frac{419}{990}$ (iv) $\frac{335}{1998}$ **10.** £1 000 000

11. $-\frac{1}{4};\frac{1}{3};\ 13\frac{1}{2}$ **12.** $\pm\frac{1}{2}$

Pennod 4

Ymarferion 4.1

1. (a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{5}$ (d) 5 (e) $2\sqrt{2}$

3. (i) $\sqrt{41}$ (ii) 5 (iii) $\sqrt{34}$

Ymarferion 4.2

1. (a) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ (b) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ (c) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (d) $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ (e) $(-3, -4)$

2. $(5, 8)$; 14 **3.** $(-5, -1)$ **4.** $(2, 6)$; $\sqrt{5}$ **6.** 10 **7.** 8

Ymarferion 4.3

1. (i) 2 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) -1 (v) $-\frac{11}{5}$

Ymarferion 4.4

1. (a) Paralel (b) Perpendicwlar (c) Perpendicwlar (d) Paralel

2. $a = 1, b = 0$ **3.** 8 **4.** -2 ; 30 **5.** 32 **7.** 1

Ymarferion 4.5

1. Mae pob hafaliad ac eithrio (c) ac (e) yn cynrychioli llinellau syth.

Ymarferion 4.6

1. (a) 2 ; 0 (b) -1 ; 1 (c) -2 ; 3 (d) $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$ (e) $\frac{3}{4}$; $-\frac{7}{4}$

2. (a) $y = 2x$ (b) $y = -5x$ (c) $y = \frac{7}{2}x$ (d) $y = -\frac{1}{3}x$ (e) $y = 0$

3. (a) $2y = x + 3$ (b) $y = 3x + 5$ (c) $y = 4x + 1$ (d) $2y + x + 2 = 0$

4. (a) $y - x - 1 = 0$ (b) $y = 3$ (c) $2y + x - 2 = 0$ (d) $y - 3x - 5 = 0$

5. (a) $y = 3x + 6$ (b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (c) $2y = x + 8$ (d) $3y - 2x - 18 = 0$

6. (a) $y = -x + 2$ (b) $y = 2x + 1$ (c) $4y = 3x + 6$
(d) $5y - 3x - 7 = 0$ (e) $7y - 4x = 0$

7. $(2, 3)$; $y = x + 1$ **8.** $y = -x + 3$; $y = -x + 4$

9. $3y - 5x - 6 = 0$; $3y - x - 14 = 0$

Ymarferion 4.7

1. (a), (c), (e) ac (f) **3.** (a) Ydyw (b) Nac ydyw (c) Ydyw (d) Ydyw (e) Nac ydyw

4. (a) -6 (b) 1 (c) $\frac{5}{2}$ (d) 18 (e) $-\frac{1}{10}$ **5.** $2, -3$; ± 3

Ymarferion 4.8

1. (a) $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (b) $\left(-\frac{17}{8}, \frac{19}{8}\right)$ (c) $(-1, 1)$; $(-6, -9)$ (d) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right)$

(e) $(0, 0)$; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

3. $(0, 0)$; $(1, 3)$ **4.** $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$; $(0, 2)$; $\left(\frac{22}{5}, -\frac{23}{5}\right)$ **5.** $a = -2, b = \frac{9}{2}; \frac{5}{3}$

6. $A(11, -7)$; $B(5, -1)$; $C(7, 1)$; $D(6, 0)$

7. $y - 2x + 3 = 0$, $4y + x - 21 = 0$ **8.** $3y + x - 5 = 0$; $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Pennod 5

Ymarferion 5.1

1. (i) $45°$; $\frac{\pi}{4}$ (ii) $60°$; $\frac{\pi}{3}$ (iii) $40°$; $\frac{2\pi}{9}$ (iv) $30°$; $\frac{\pi}{6}$

(v) $90°$; $\frac{\pi}{2}$ (vi) $48°$; $\frac{4\pi}{15}$

Yng Nghwestiynau 2 a 3 rhoddir yr atebion yn gywir i ddau le degol.

2. (i) $0.63\left(\frac{\pi}{5}\right)$ (ii) $0.94\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ (iii) $2.73\left(\frac{13\pi}{15}\right)$ (iv) $3.35\left(\frac{16\pi}{15}\right)$

(v) $5.03\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ (vi) 2.09

3. (i) $67.5°$ (ii) $25.71°$ (iii) $57.30°$ (iv) $42.97°$

Ymarferion 5.2

1. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{4\pi}{3}$ (iii) $\frac{3\pi}{2}$ (iv) $\frac{5\pi}{3}$

2. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{9\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{13\pi}{3}$

3. $\frac{50}{\pi}$ cm^2 **4.** 28.5 cm **5.** 8, 1.5 **6.** 25

Ymarferion 5.3

1. (i) $\frac{1}{2}$; $\frac{12}{13}; \frac{3}{5}$ (ii) $\frac{7}{25}; \frac{3}{5}; \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{12}{5}; \frac{3}{4}$ (ii) $\frac{24}{7}; \frac{4}{3}; \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$

Rhoddir yr atebion yng Nghwestiynau 3, 4 a 5 yn gywir i bedwar lle degol.

3. (i) 0.5922 (ii) 0.8948 (iii) 0.2795 (iv) 0.7314 (v) 0.6540

4. (i) $44.9995°$; 0.7854 (ii) $63.4349°$; 1.1071 (iii) $23.6376°$; 0.4126

5. (i) $54.4623°$ (ii) $36.8699°$ (iii) $69.6359°$

Pennod 6

Ymarferion 6.1

1. (i) positif (ii) negatif (iii) positif (iv) positif (v) positif
(vi) negatif (vii) positif (viii) negatif (ix) negatif (x) positif

2. (i) $-\cos 76°$ (ii) $\sin 66°$ (iii) $-\sin 10°$ (iv) $\tan 3°6'$ (v) $-\sin 15°$
(vi) $-\cos 68°$ (vii) $-\tan 86.9°$ (viii) $-\cos 45°$ (ix) $\tan 80°$

3. 1 ; 0 ; heb ei ddiffinio ; 0 ; -1 ; 0 ; -1 ; 0 ; heb ei ddiffinio; 0 ; 1 ; 0

4. (i) ail (ii) trydydd **5.** $-\tan\theta$ **6.** $\tan\theta$ **7.** $-\tan\theta$

Ymarferion 6.2

Lle bo angen, rhoddir atebion yn gywir i bedwar lle degol.

1 (a) 9 (b) 30 (c) 6.5 (d) $\sqrt{3} \approx 1.7321$ (e) 3.8567
(f) 16.0869 (g) 3.4641

2. 1.9603 **3.** (a) 8 (b) 5 (c) 35.6710 (d) 7.5175 (e) 10

3. (a) 8 (b) 5 (c) 35.6710 (d) 7.5175 (e) 10

4. $\frac{9}{2}(2\sin\theta - \theta)$ **5.** $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$

Ymarferion 6.3

1. (a) 45°; 135° (b) 60°; 300° (c) 30°; 210° (d) 30°; 330° (e) 0°; 360°
(f) 0°; 180°; 360° (g) 240°; 300° (h) 180° (i) 135°; 315°

2. $\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}$ **3.** (i) 0 (ii) 0 (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{3}$ (v) $-\frac{1}{2}$
(vi) $\frac{1}{2}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (viii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\frac{\pi}{18}; \frac{7\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}$ **5.** (i) 90° (ii) 15° ; 75° (iii) 75°

6. (a) 30°, 150°, 210°, 330° (b) 30°, 150°, 210°, 330°
(c) 90°, 210°, 330° (d) 30°, 150°, 210°, 330°
(e) 0°, 135°, 180°, 315°, 360° (f) 60°, 90°, 270°, 300°
(g) $15x^2 + 6x + 2$ (yn gywir i ddau le degol)
(h) 60°, 90°, 120°, 240°, 270°, 300° (i) 0°, 60°, 180°, 300°, 360°

Ymarferion 6.4

Rhoddir yr atebion yn gywir i ddau le degol, lle bo angen.

1. (i) 270° (ii) 30°,90°,150° (iii) 0°,90°,180°,360°
(iv) 46.67°,313.33°

2. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\sqrt{3}$ **3.** (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $\sqrt{3}$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **5.** (i) $a\cos\theta$ (ii) $\tan\theta$

6. (i) $b\sin\theta$ (ii) $\tan\theta$

Pennod 7
Ymarferion 7.1

1. (i) 56 (ii) $-\dfrac{10}{11}$ (iii) 0 (iv) -6 (v) $\dfrac{1}{1000}$ (vi) $\dfrac{1}{3}$ (vii) $-\dfrac{3}{7}$

Ymarferion 7.2

1. 12.61 **2.** $12+3h$; 12 **3.** 24
4. $4x+3$ **5.** $14x-3$ **6.** $3x^2-2x$
7. (i) $9x^2$ (ii) $4x$ (iii) 6 (iv) $9x^2+4x+6$ (iv) = (i) + (iii) + (iii)

Ymarferion 7.3

2. $3x^2$ **3.** 1 **4.** 0 **6.** $15x^2+6x+2$
7. (i) 6 (ii) $4x$ (iii) $9x^2$ (iv) $9x^2+4x+6$
(iv) = (iii) + (ii) + (i)

Ymarferion 7.4

1. (i) $90x^9$ (ii) $-\dfrac{12}{x^5}$ (iii) 0 (iv) $3\sqrt{x}$ (v) $-\dfrac{6}{x^{\frac{5}{3}}}$ (vi) $4x-9$

(vii) $9x^2+18x$ (viii) $2x-1$ (ix) $1-\dfrac{4}{x^2}$ (x) $2x+2=2(x+1)$

(xi) $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$ (xii) $-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{12}{x^4}$

2. (i) 6 (ii) 9 (iii) $-\dfrac{1}{4}$ (iv) -14 (v) $-\dfrac{1}{2}$ (vi) 6

3. (i) $(-4, 20)$ (ii) $(0, 2)$ (iii) $(2, 12)$ (iv) $(-11, 80)$

(v) $\left(\dfrac{1}{2},3\right);\left(-\dfrac{1}{2},-3\right)$ (vi) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-3\sqrt{3}\right);\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},3\sqrt{3}\right)$

(vii) $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{256}{27}\right);(-2,-2)$

4. -1 **5.** 3 **6.** $-4, 4$ **7.** $0, 2\,;\ \dfrac{1}{2}$ **8.** $(0, 6), (2, 2)$

Pennod 8
Ymarferion 8.1

1. (i) (a) $x>\dfrac{3}{2}$ (b) $x<\dfrac{3}{2}$ (ii) (a) $x>1$ or $x<-2$ (b) $-2<x<1$

(iii) (a) $x>1$ (b) $0<x<1$ (iv) (a) $x<-\dfrac{3}{2}$ (b) $x>-\dfrac{3}{2}$

(v) (a) $x>\sqrt[3]{2}$ (b) $x<\sqrt[3]{2}$ (vi) (a) $x>3$ or $x<-3$ (b) $-3<x<3$

2. (i) $\dfrac{3}{2}$ (ii) $-2, 1$ (iii) 1 (iv) $-\dfrac{3}{2}$ (v) $\sqrt[3]{2}$ (vi) $0, \pm 3$

Ymarferion 8.2

1. (i) B isafbwynt, D uchafbwynt
   (ii) F, J isafbwynt; G, L uchafbwynt; H pwynt ffurfdro sefydlog
   (iii) O, S pwyntiau ffurfdro sefydlog; Q isafbwynt

Ymarferion 8.3

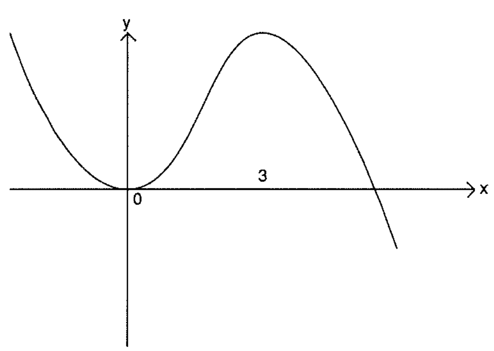
1. (1, 2) isafbwynt
2. (3, 18) uchafbwynt
3. (−4, −107) isafbwynt; (1,18) uchafbwynt
4. (0, 0) pwynt ffurfdro sefydlog; (3, −27) isafbwynt
5. (0, 2) pwynt ffurfdro sefydlog; (1, 1) uchafbwynt
6. (0, 0) pwynt ffurfdro sefydlog; $(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$ isafbwynt
7. (0, 0) isafbwynt
8. (0, 0) pwynt ffurfdro sefydlog
9. (0, 0) uchafbwynt

Ymarferion 8.5

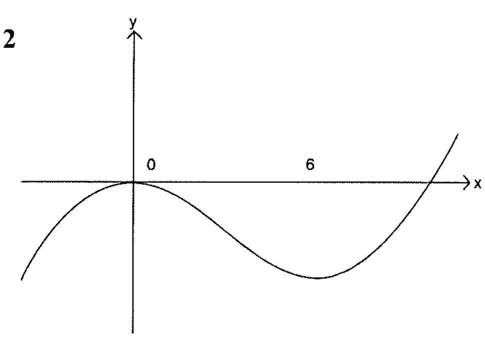
1. $\left(-1, \frac{16}{3}\right)$ uchafbwynt ; $\left(3, -\frac{16}{3}\right)$ isafbwynt
2. $\left(-1, \frac{23}{6}\right)$ uchafbwynt ; $\left(-4, -\frac{2}{3}\right)$ isafbwynt
3. (0, 0) uchafbwynt ; (−2, −16) isafbwynt ; (2, −16) isafbwynt
4. (−1, −4) isafbwynt ; (1, 4) uchafbwynt
5. (0, 0) isafbwynt ; (−4, 32) uchafbwynt
6. (−1, 2) isafbwynt ; (1, 6) uchafbwynt
7. $\left(-\sqrt{3}, 6\right)$ isafbwynt ; $\left(\sqrt{3}, 6\right)$ isafbwynt
8. (2, 8) isafbwynt ; (−2, −8) uchafbwynt

Ymarferion 8.6

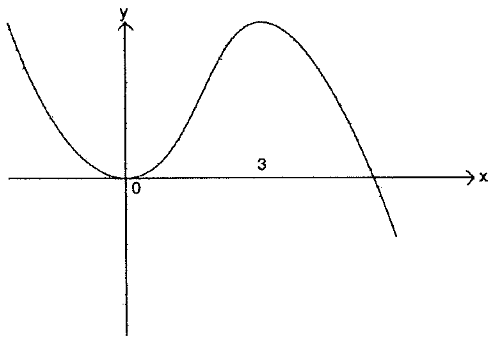
1



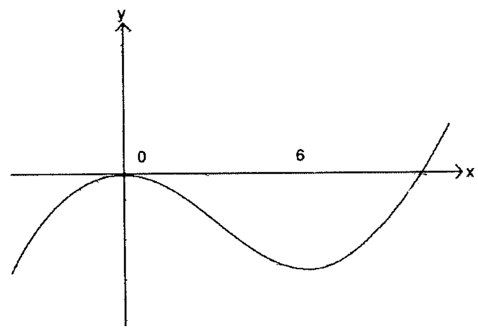
2



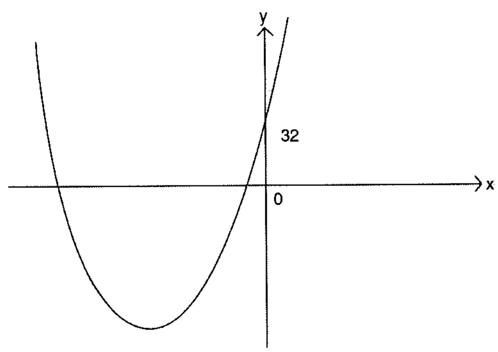
3



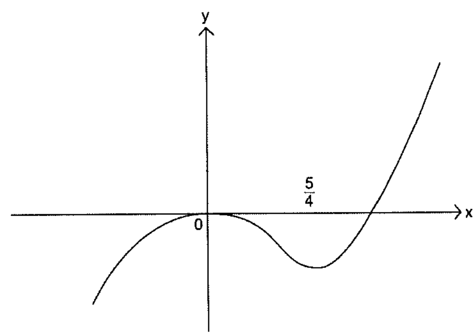
4



5



6



Ymarferion 8.7

1.	24 m	**2.**	4.62 cm; 4.62 cm (2 le degol)
3.	1024 cm^3	**4.**	Dyfnder = 61.24 cm, lled = 43.30 cm (2 le degol)
7.	4000 cm^3	**8.**	1.12 m^2 (2 le degol)

Pennod 9

Ymarferion 9.1

(i) x^3 (ii) x^4 (iii) $x^5 + x^6$

Ymarferion 9.2

(i) $\dfrac{x^9}{9}$ (ii) $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}$ (iii) $-6x$ (iv) $-\dfrac{3}{2x^2}$ (v) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

(vi) $\dfrac{-1}{9x^9}$ (vii) $\dfrac{9}{4x^4}$ (viii) $2\sqrt{x}$ (ix) $\dfrac{-2}{5y^{\frac{5}{2}}}$ (x) $4x - 3x^2 - \dfrac{x^4}{4}$

(xi) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$ (xii) $\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}$ (xiii) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ (xiv) $\dfrac{y^5}{5} + 2y - \dfrac{1}{3y^3}$

(xv) $x + 2\sqrt{x}$ (xvi) $\dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ (xvii) $\dfrac{-1}{3x^3} + \dfrac{8}{5}x^{\frac{5}{4}} + 4x^{\frac{3}{4}}$

(xviii) $y^2 - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 6y$ (xix) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$ (xx) $y - \frac{1}{y}$

(xxi) $\frac{y^{n+1}}{n+1}$

Pennod 10
Ymarferion 10.1

1. $y = \frac{x^4}{4} - 1$ **2.** $y = x^3 + x^2 + x - 14$ **3.** $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

4. $y = 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x} + 2x + 3$

Ymarferion 10.2

1. $4\frac{1}{2}$ **2.** $10\frac{2}{3}$ **3.** $2\frac{2}{3}$ **6.** $\frac{8}{15}$ **7.** $10\frac{2}{3}$

8. $2\frac{2}{3}$ **9.** $10\frac{2}{3}$ **10.** $4\frac{1}{2}$

MYNEGAI