

MATHEMATEG

Ystadegaeth

Uned S2

I G Evans

SAFON UG/UWCH

Cyhoeddwyd gan Uned Iaith Genedlaethol Cymru,
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru,
245 Rhodfa'r Gorrlewin,
Caerdydd
CF5 2YX

Mae Uned Iaith Genedlaethol Cymru
yn rhan o WJEC CBAC Cyf.,
cwmni a gyfyngir gan warant
ac a reolir gan awdurdodau unedol Cymru.

Mathemateg Safon UG/Uwch CBAC
Ystadegaeth
Uned S2

Cyhoeddwyd dan nawdd Cynllun Cyhoeddiadau
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru

Cyhoeddwyd gyntaf 2002

Argraffwyd gan Wasg Gomer,
Llandysul, Ceredigion, SA44 4QL

ISBN: 1 86085 510 5

RHAGYMADRODD

Mae'r llyfr hwn yn cyd-fynd â'r fanyleb ar gyfer Uned S2 o gynllun newydd CBAC ar gyfer Mathemateg Safon Uwch Gyfrannol/Safon Uwch. Fel yn y llyfr sydd yn ymdrin â manyleb Uned S1, mae pob pennod wedi ei rhannu'n adrannau, a phob adran yn cyflwyno pwnc arbennig ac yn cynnwys enghreifftiau o'r gwaith ac ymarferion. Ar ddiwedd pob pennod ceir detholiad o gwestiynau Safon Uwch ar y pynciau hynny a gododd yn y bennod. Mae'r atebion rhifyddol i'r holl ymarferion i'w cael yng nghefn y llyfr, yn ogystal â mynegai o'r pynciau.

Mae Pennod 1 yn ymdrin â dosraniadau di-dor ac yn debyg iawn i'r bennod yn llyfr Modiwl S1 ar wahân i'r ffaith fod yna adran ychwanegol y tro hwn (§ 1.2) ar ganraddau dosraniad di-dor.

Mae Pennod 2 yn ymdrin â dau neu ragor o hapnewidynnau (arwahanol a di-dor) ac eto yn debyg iawn i'r bennod gyfatebol yn llyfr Modiwl S1.

Mae Pennod 3 yn ymdrin â rhai o'r pynciau ar brofi rhagdybiaethau sydd wedi eu cynnwys yn llyfr Modiwl S2.

Fel yn llyfr Uned S1, daw'r tablau a ddefnyddir yn yr enghreifftiau o lyfr *Elementary Statistical Tables* a gyhoeddwyd yn wreiddiol gan RND (Caerdydd) ond sydd bellach yn cael eu cyhoeddi gan CBAC.

Byddem yn gwerthfawrogi pe baech yn ein hysbysu ynghylch unrhyw wallau a all fod yn y llyfr hwn a'u hanfon at yr awdur neu at CBAC.

CYNNWYS

Pennod 1: Hapnewidynnau Di-dor

	Rhagarweiniad	1
1.1	Ffwythiant dwysedd tebygolrwydd	2
1.2	Ffwythiant dosraniad cronrus	6
1.3	Canraddau dosraniad di-dor	12
1.4	Cymedr ac amrywiant hapnewidyn di-dor	15
1.5	Y dosraniad unffurf	19
1.6	Y dosraniad normal	23
1.7	Brasamcanion normal ar gyfer dosraniadau binomaidd a dosraniadau Poisson	32
	Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 1	38

Pennod 2: Dau neu Ragor o Hapnewidynnau

2.1	Dau hapnewidyn arwahanol	44
2.2	Dau hapnewidyn arwahanol annibynnol	47
2.3	Tri neu ragor o hapnewidynnau arwahanol annibynnol	56
2.4	Dau neu ragor o hapnewidynnau di-dor	58
2.5	Dosraniad o gymedr sampl	66
	Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 2	70

Pennod 3: Profi Rhagdybiaethau 1

	Rhagarweiniad	76
3.1	Rhagdybiaethau nwl ac arall	76
3.2	Y gwerth-p	78
3.2.1	Profi cymedr dosraniad normal sydd ag amrywiant hysbys	79
3.2.2	Profi tebygolrwydd neu gyfran	83
3.2.3	Profi cymedr dosraniad Poisson	87
3.3	Profi arwyddocâd	
	Rhagarweiniad	91
3.3.1	Profi arwyddocâd cymedr dosraniad normal sydd ag amrywiant hysbys	92
3.3.2	Profi arwyddocâd tebygolrwydd	96
3.3.3	Profi arwyddocâd cymedr Poisson	101
	Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 3	105

Atebion Rhifyddol	113
--------------------------	-----

Mynegai	118
----------------	-----

Pennod 1

Hapnewidynnau Di-dor

Rhagarweiniad

Yn Adran 4.1 o'r Llyfr S1, diffiniwyd hapnewidyn fel disgrifiad geiriol o reol ar gyfer neilltuo gwerth rhifiadol i bob canlyniad mewn haparbrawf. Roedd pob hapnewidyn a astudiwyd ym Mhennod 4, Llyfr S1 o'r math y gellid rhestru ei werthoedd posibl fesul un; gelwir y math hwn yn hapnewidyn arwahanol. Cyfeirid at werthoedd posibl hapnewidyn o'r fath a'u tebygolrwyddau o ddigwydd fel dosraniad tebygolrwydd yr hapnewidyn.

Yn y bennod hon, ystyriwn hapnewidynnau nad ydynt yn arwahanol, hynny yw, hapnewidynnau na ellir rhestru eu gwerthoedd posibl yn unigol. Fel ym Mhennod 4, Llyfr S1, dynodir hapnewidyn o'r fath gan briflythyren (e.e. V, W, X, Y, Z).

Diffiniad

Diffinnir hapnewidyn na ellir rhestru ei werthoedd posibl yn unigol yn hapnewidyn **di-dor**.

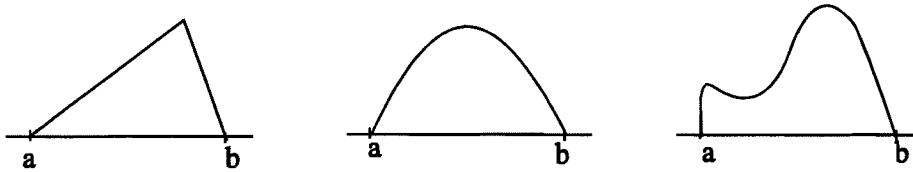
Yma, cyfyngir ein hystyriaeth i hapnewidynnau di-dor y mae eu gwerthoedd posibl yn cael eu mynegi fel cyfyngau. Dyma rai enghreifftiau o hapnewidynnau di-dor o'r fath.

- (1) V = Yr amser pan fydd trêen penodol yn cyrraedd gorsaf.
- (2) W = Taldra disgybl a ddewisir ar hap.
- (3) X = Hyd oes bwlb golau trydan.
- (4) Y = Pellter ergyd o ganol targed.
- (5) Z = Y tymheredd uchaf yng Nghaerdydd yfory.

Gan na ellir rhestru gwerthoedd posibl hapnewidyn di-dor fesul un, mae angen dull gwahanol i'r un ym Mhennod 4, Llyfr S1 er mwyn disgrifio sut y dosrennir yr un uned o debygolrwydd dros ei gwerthoedd posibl.

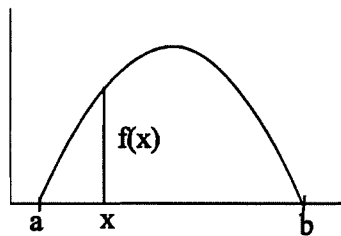
1.1 Ffwythiant dwysedd tebygolrwydd

Tybiwch fod X yn hapnewidyn di-dor a bod ganddo'r gwerthoedd posibl $a \leq x \leq b$. Mae angen dosrannu'r un uned o debygolrwydd dros y cyfwng $[a, b]$. Gellir gwneud hyn mewn nifer anfeidraidd o ffyrdd. Dychmygwch yr un uned o debygolrwydd fel petai yn bowdr mewn jwg ac sy'n cael ei arllwys dros y cyfwng $[a, b]$. Dengys y diagramau rai posibiliadau. Ym mhob achos mae'r arwynebedd amgaeedig yn hafal i 1 (cyfanswm y tebygolrwydd).

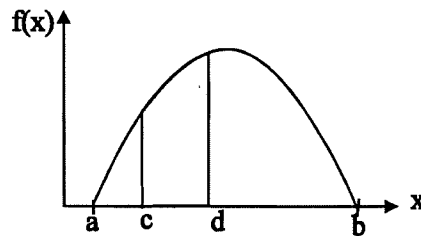


Ar gyfer disgrifiad mathemategol o ddosraniad tebygolrwydd hapnewidyn di-dor, boed i $f(x)$ ddynodi uchder 'twmpath' y tebygolrwydd dros werth x , fel a ddangosir yn Ffigur 1 isod. Gan fod cyfanswm arwynebedd y 'twmpath' yn 1 mae'n dilyn bod

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad (1)$$



Ffigur 1



Ffigur 2

Ar ben hynny, fel a ddangosir yn Ffigur 2 uchod, maint y tebygolrwydd a ddyrennir i'r is-gyfwng $[c, d]$ yw'r arwynebedd dan $f(x)$ dros $[c, d]$. Mae'n dilyn y rhoddir y tebygolrwydd fod y digwyddiad ($c \leq X \leq d$) yn digwydd gan

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx. \quad (2)$$

Diffiniad: Cyfeirir at unrhyw ffwythiant f lle mae

$$f(x) \geq 0, \text{ ar gyfer } a \leq x \leq b,$$

ac mae
$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

fel ffwythiant dwysedd tebygolrwydd.

Mae ffwythiant o'r fath yn briodol ar gyfer disgrifio dosraniad tebygolrwydd hapnewidyn di-dor X sydd â gwerthoedd posibl $a \leq x \leq b$.

Noder mai'r arwynebedd o dan y gromlin $f(x)$ sy'n cynrychioli tebygolrwydd. I unrhyw werth posibl x ar gyfer X , mae $f(x)$ yn fesur o **ddwysedd** crynodiad tebygolrwydd wrth ymyl x . Ar gyfer unrhyw werth c yn $[a, b]$, ceir bod $P(X=c) = 0$, gan fod yr arwynebedd dan $f(x)$ dros y pwynt $x = c$ yn sero, gan nad oes gan y llinell $x = c$ drwch. Noder yn arbennig fod

$$P(c \leq X \leq d) = P(c < X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X < d).$$

Felly, wrth ystyried tebygolrwydd megis $P(c \leq X \leq d)$ pan fo X yn ddi-dor, gellir newid un o'r symbolau $\leq$, neu'r ddau, a defnyddio $<$ yn eu lle, ac nid yw hyn yn wir pan fo X yn arwahanol.

Enghraifft 1

Dosreennir yr hapnewidyn di-dor X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan

$$f(x) = kx(4-x), \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq 4.$$

Darganfyddwch (a) werth k , (b) $P(X \leq 3)$, (c) $P(0 < X < 1 \mid X \leq 3)$.

[Yr arfer fyddai diffinio $f(x)$ ar gyfer pob x ac felly yn yr enghraifft uchod byddai llinell ychwanegol yn nodi " $f(x) = 0$, fel arall". Fodd bynnag, er mwyn bod yn gyson â'r hyn a wnaed ar gyfer hapnewidyn arwahanol, ni fyddwn yn dilyn yr arfer hwn, a chymerir yn ganiataol fod $f(x) = 0$ ar gyfer pob gwerth x heblaw y rhai a nodir.]

Datrysiaid

(a) Darganfyddir k gan ddefnyddio (1) uchod; hynny yw, mae

$$k \int_0^4 (4x - x^2) dx = 1.$$

Wrth integru ceir bod

$$k \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = 1,$$

$$\text{sy'n arwain at } k \left[32 - \frac{64}{3} \right] = 1 \text{ a } k = \frac{3}{32}.$$

(b) Gan ddefnyddio (2) uchod ceir bod

$$P(X \leq 3) = \frac{3}{32} \int_0^3 (4x - x^2) dx = \frac{3}{32} \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{32}.$$

(c) O'r diffiniad o debygolrwydd amodol, mae

$$P(0 < X < 1 \mid X \leq 3) = \frac{P(0 < X < 1 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(0 < X < 1)}{P(X \leq 3)}.$$

$$P(0 < X < 1) = \frac{3}{32} \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{5}{32}.$$

$$\text{Trwy hyn, mae } P(0 < X < 1 \mid X \leq 3) = \frac{5}{32} \div \frac{27}{32} = \frac{5}{27}.$$

Enghraifft 2

Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 3,$$

$$f(x) = \frac{1}{18}, \quad \text{ar gyfer } 3 < x \leq 15.$$

Enrhifwch (a) $P(2 < X < 3)$, (b) $P(X > 10)$, (c) $P(2 < X < 6)$, (d) $P(X < 6)$.

Datrysiaid

(a) Gan fod $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ ar gyfer pob x o 2 i 3, mae

$$P(2 < X < 3) = \int_2^3 \frac{1}{2x^2} dx = \left[-\frac{1}{2x} \right]_2^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

(b) Gan fod $f(x) = \frac{1}{18}$ ar gyfer pob x o 10 i 15, mae

$$P(X > 10) = \frac{1}{18} \int_{10}^{15} dx = \frac{1}{18} [x]_{10}^{15} = \frac{5}{18}.$$

(c) Gan fod $f(x)$ yn cymryd ffurfiau gwahanol ar gyfer $1 \leq x \leq 3$

ac ar gyfer $3 < x \leq 15$,

defnyddir $(2 < X < 6) = (2 < X \leq 3) \cup (3 < X < 6)$,

ac felly mae $P(2 < X < 6) = P(2 < X \leq 3) + P(3 < X < 6)$

$$= \int_2^3 \frac{1}{2x^2} dx + \int_3^6 \frac{1}{18} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2x} \right]_2^3 + \frac{1}{18} [x]_3^6 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

(d) Er mwyn enrhifo $P(X < 6)$ gallem ddilyn (c) uchod ond mae'n haws darganfod tebygolrwydd y digwyddiad cyflenwol ($X \geq 6$).

$$\text{Mae } P(X < 6) = 1 - P(X \geq 6) = 1 - \int_6^{15} \frac{1}{18} dx = 1 - \frac{1}{18} [x]_6^{15} = \frac{1}{2}.$$

Ymarfer 1.1

1. Mae gan yr hapnewidyn X y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f lle mae

$$f(x) = cx(16 - x^2), \quad \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 4.$$

Enrhifwch (a) c , (b) $P(1 < X < 2)$, (c) $P(X \geq 3)$, (d) $P(X > 2 \mid 1 < X < 3)$.

2. Dosrennir hyd oes batriau mewn oriau gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd

f , lle mae $f(x) = \frac{c}{x^2}$, ar gyfer $100 \leq x \leq 400$.

Darganfyddwch werth c a'r tebygolrwydd y bydd hyd oes batri o'r fath rywle rhwng 150 a 200 awr.

3. Dosrennir yr hapnewidyn X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = k(1 - x^4), \text{ ar gyfer } -1 \leq x \leq 1.$$

Enrhifwch (a) $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$, (b) $P\left(X^2 > \frac{1}{4}\right)$, (c) $P\left(X < \frac{1}{2} | X > 0\right)$.

4. Mae hyd, X munud, galwad ffôn gan berson arbennig i'w ffrind yn hapnewidyn di-dor X , sydd â ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan

$$f(x) = x^{-2}, \text{ ar gyfer } x \geq 1,$$

- (a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd hyd galwad o'r fath (i) rhwng 5 a 10 munud, (ii) yn llai na 5 munud.
(b) O wybod bod galwad wedi parhau am 3 munud yn barod, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol y bydd hyd yr alwad yn llai na 5 munud.

5. Mae person yn tanio gwn at darged crwn â radiws 4 cm gyda chylchoedd â radiysau 1 cm, 2 cm, a 3 cm, gyda'u canol i gyd ar ganol y targed. Dosrennir y pellter X cm o'r pwynt lle mae'r ergyd yn taro i ganol y targed gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = 0.03(x^2 + 3), \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq 4.$$

- (a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd ergyd yn taro'r targed y tu mewn i'r cylch lleiaf.
(b) Mae ergyd o fewn y cylch lleiaf yn sgorio 4 pwynt; mae ergyd rhwng y cylch lleiaf a'r cylch nesaf yn sgorio 2 bwynt; mae ergyd rhwng y cylch nesaf a'r cylch mwyaf yn sgorio 1 pwynt; ac nid yw ergyd y tu allan i'r cylch mwyaf yn sgorio o gwbl. Cyfrifwch (i) y sgôr fwyaf tebygol o un ergyd, (ii) y sgôr gymedrig am bob ergyd.

6. Dosrennir yr hapnewidyn X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = \frac{3}{7}x^2, \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq 1,$$

$$f(x) = \frac{3}{7}, \text{ ar gyfer } 1 < x \leq 3.$$

Enrhifwch

(a) $P\left(X > 1\frac{1}{2}\right)$, (b) $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$, (c) $P\left(X < 2\frac{1}{2}\right)$, (d) $P\left(\frac{1}{2} < X < 2\right)$.

7. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \text{ ar gyfer } 0 < x < 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{6}(4 - x), \text{ ar gyfer } 1 \leq x \leq 4.$$

Enrhifwch (a) $P(X < 2)$, (b) $P(X < \frac{1}{2} | X < 2)$

8. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = \frac{x}{4}, \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq 2,$$

$$f(x) = \frac{4}{x^3}, \text{ ar gyfer } x > 2.$$

- (a) Enrhifwch (i) $P(X < 3)$, (ii) $P(1 < X < 3)$.
 (b) Darganfyddwch werth k os yw $P(X < k) = 0.995$.

9. Mae modurdy yn cael petrol bob bore dydd Llun ac mae'r galw wythnosol am betrol, mewn miloedd o litrau, yn hapnewidyn X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = \frac{3}{125}(5 - x)^2, \text{ ar gyfer } 0 < x < 5.$$

Darganfyddwch (a) y tebygolrwydd y bydd gwerthiant y modurdy mewn wythnos yn llai na 3000 litr, (b) y tebygolrwydd na fydd y modurdy yn gallu bodloni'r galw mewn wythnos o wybod bod ei danc storio yn gallu dal 4000 litr.

10. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = \frac{a+x}{a^2}, \text{ ar gyfer } -a \leq x < 0,$$

$$f(x) = \frac{a-x}{a^2}, \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq a.$$

Enrhifwch (a) $P\left(X < \frac{1}{2}a\right)$, (b) $P\left(X^2 > \frac{1}{4}a^2\right)$.

1.2 Ffwythiant dosraniad cronnu

Gellir disgrifio dosraniad tebygolrwydd hefyd gan ddefnyddio'r ffwythiant dosraniad cronnu a ddiffinnir fel a ganlyn.

Diffiniad

Ar gyfer unrhyw hapnewidyn X , mae'r ffwythiant F lle mae

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ ar gyfer pob } x,$$

yn cael ei alw yn **ffwythiant dosraniad cronnu** X .

$F(x)$ yw maint y tebygolrwydd sydd wedi'i neilltuo hyd at werth x . Er ei fod wedi'i ddiffinio ar gyfer newidynnau arwahanol a rhai di-dor, mae'r ffwythiant dosraniad cronnu yn fwy defnyddiol ar gyfer hapnewidyn di-dor.

Ystyriwch hapnewidyn di-dor gyda gwerthoedd posibl $a \leq x \leq b$, a ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f . Ei ffwythiant dosraniad cronnu yw F , lle mae

$$F(x) = 0, \text{ ar gyfer } x < a$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ ar gyfer pob } a \leq x \leq b, \quad (1)$$

$$F(x) = 1, \text{ ar gyfer } x > b.$$

[Defnyddir y newidyn ffug t yn hafaliad (1) er mwyn osgoi cael x yn yr integrand a hefyd fel terfan.]

Mae'n dilyn bod $F(a) = 0$ a bod $F(b) = 1$,
sy'n darparu gwiriadau defnyddiol i ffwythiant dosraniad cronus sydd wedi ei
olrhain, ac ar gyfer unrhyw gysonion c, d gydag $c < d$, bod

$$P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X \leq d) = P(c < X < d) = F(d) - F(c)$$

Enghraifft 1

Darganfyddwch ffwythiant dosraniad cronus yr hapnewidyn X y rhoddir ei
ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f gan

$$f(x) = kx(4 - x), \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq 4.$$

[Dyma'r dosraniad a ystyriwyd yn Enghraifft 1 yn Adran 1.1.]

Datrysiaid

Boed i F ddynodi ffwythiant dosraniad cronus X . Ceir yn syth fod

$$F(x) = 0 \text{ ar gyfer } x < 0 \text{ a bod } F(x) = 1 \text{ ar gyfer } x > 4.$$

O hafaliad (1), ar gyfer $0 \leq x \leq 4$, mae

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x kt(4-t) dt = k \left[2t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x \\ &= k \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right). \end{aligned}$$

Gan fod yn rhaid i $F(4)$ fod yn 1, ceir bod

$$k \left(32 - \frac{64}{3} \right) = 1, \text{ ac felly mae } k = \frac{3}{32}$$

(yn union fel a gafwyd yn Enghraifft 1 yn Adran 1.1).

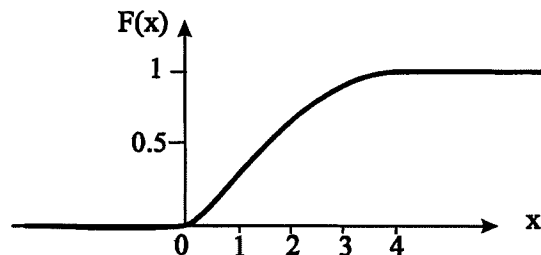
Trwy hyn, manylion llawn F yw:

mae $F(x) = 0$, ar gyfer $x < 0$,

$$F(x) = \frac{3}{32} \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right), \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq 4$$

$$F(x) = 1, \text{ ar gyfer } x > 4.$$

Mae graff $F(x)$ fel a ganlyn:



Nawr gellir defnyddio $F(x)$ er mwyn darganfod y tebygolrwyddau y gofynnwyd amdanynt yn Enghraifft 1 yn Adran 1.1 fel a ganlyn.

$$\text{Mae} \quad P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3}{32} \left(2 \times 9 - \frac{1}{3} \times 27 \right) = \frac{27}{32}, \text{ fel o'r blaen.}$$

$$\begin{aligned} \text{Mae} \quad P(0 < X < 1) &= P(X < 1) - P(X \leq 0) = F(1) - F(0) \\ &= \frac{3}{32} \left(2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{32}, \text{ fel a gafwyd o'r blaen.} \end{aligned}$$

Wrth gyffredinolli'r uchod, noder ar gyfer unrhyw hapnewidyn X , fod

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) = 1 - F(c),$$

$$P(X \geq c) = 1 - P(X < c) = 1 - P(X \leq c) = 1 - F(c),$$

$$P(c < X < d) = P(X < d) - P(X \leq c) = F(d) - F(c).$$

Enghraifft 2

Darganfyddwch ffwythiant dosraniad cronus yr hapnewidyn X y rhoddir ei ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f gan

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}, \text{ ar gyfer } 1 \leq x \leq 3,$$

$$f(x) = \frac{1}{18}, \text{ ar gyfer } 3 < x \leq 15$$

(fel yn Enghraifft 2 yn Adran 1.1).

Datrysiad

Ceir yn syth fod $F(x) = 0$ ar gyfer $x < 1$ a bod $F(x) = 1$ ar gyfer $x > 15$.

Ar gyfer $1 \leq x \leq 15$, ceir bod

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Rhaid ystyried nawr y ffaith bod gan $f(t)$ ffurfiau gwahanol ar gyfer $t \leq 3$ ac ar gyfer $t > 3$.

Ystyriwch werth x yn yr amrediad $1 \leq x \leq 3$. Ar gyfer x o'r fath, mae

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{2t^2} dt = \left[-\frac{1}{2t} \right]_1^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}.$$

[Er mwyn gwirio hyn, noder bod $F(1) = 0$ fel y dylai fod.]

Nawr ystyriwch werth x yn yr amrediad $3 < x \leq 15$. Gan gofio bod $F(x) = P(X \leq x)$

$$\begin{aligned} \text{ceir bod} \quad F(x) &= F(3) + \int_3^x \frac{1}{18} dt = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left[\frac{1}{18} t \right]_3^x \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{18}(x-3) = \frac{1}{18}(x+3). \end{aligned}$$

[Er mwyn gwirio hyn, noder bod $F(15) = 1$ fel y dylai fod.]

Trwy hyn, manylion llawn $F(x)$ yw fel a ganlyn:

$$\text{mae } F(x) = 0, \quad \text{ar gyfer } x < 1,$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right), \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 3$$

$$F(x) = \frac{1}{18}(x + 3), \quad \text{ar gyfer } 3 < x \leq 15$$

$$F(x) = 1, \quad \text{ar gyfer } x > 15.$$

[Gwiriad: mae $F(1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1} \right) = 0$ ac mae $F(15) = \frac{1}{18}(15 + 3) = 1$, fel sydd ei angen.]

Nawr defnyddir yr $F(x)$ uchod i enrhifo'r tebygolrwyddau yn Enghraifft 2, Adran 1.1.

$$(a) \text{ Mae } P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}.$$

$$(b) \text{ Mae } P(X > 10) = 1 - F(10) = 1 - \frac{1}{18}(10 + 3) = \frac{5}{18}.$$

$$(c) \text{ Mae } P(X < 6) = F(6) = \frac{1}{18}(6 + 3) = \frac{1}{2}.$$

Mae'r atebion i gyd yn cytuno â'r rhai a gafwyd yn Adran 1.1.

Rhai o briodweddau $F(x)$

Cafwyd $F(x)$ trwy integru $f(x)$; wrth gildroi'r weithred mae'n dilyn mai $f(x)$ yw deilliad $F(x)$. Hynny yw, mae

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \text{ar gyfer pob gwerth posibl } x. \quad (2)$$

Mae priodwedd ddefnyddiol arall $F(x)$, lle mae X yn hapnewidyn di-dor, yn dilyn o'r ffaith bod $P(X < x) = P(X \leq x)$. Mae hyn yn arbennig o berthnasol pan fo gan ffwythiant dwysedd tebygolrwydd X ffurf sydd wedi ei hollti. Er enghraifft, tybiwch fod gan $f(x)$ un ffurf ar gyfer $a \leq x \leq b$ a ffurf arall ar gyfer $b < x \leq c$, ac felly bod gan $F(x)$ hefyd wahanol ffurfiau ar gyfer y ddau amrediad hyn o x . Er hynny, mae'n dilyn bod yn rhaid i bob ffurf ar $F(x)$ roi yr un gwerth i $F(b)$ gan fod $P(X \leq b) = P(X < b)$. Yn fathemategol, ffwythiant di-dor yw F .

Enghraifft 3

Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dosraniad cronus F a ddiffinnir fel a ganlyn: mae $F(x) = 0$, ar gyfer $x < 0$

$$F(x) = \frac{1}{3}x, \quad \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 1,$$

Hapnewidynnau Di-dor

$$F(x) = a, \quad \text{ar gyfer } 1 < x \leq 2,$$

$$F(x) = bx^2, \quad \text{ar gyfer } 2 < x \leq 3,$$

$$F(x) = \frac{x}{4}, \quad \text{ar gyfer } 3 < x \leq 4,$$

$$F(x) = 1, \quad \text{ar gyfer } x > 4.$$

- (a) Darganfyddwch werthoedd y cysonion a a b.
- (b) Enrhifwch $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\frac{1}{2}\right)$.
- (c) Darganfyddwch ffwythiant dwysedd tebygolrwydd X.

Datrysiaid

- (a) Gan ddefnyddio $F(x) = \frac{x}{3}$ ar gyfer $0 \leq x \leq 1$ ceir bod $F(1) = \frac{1}{3}$.

Gan ddefnyddio $F(x) = a$ ar gyfer $1 < x \leq 2$ ceir bod $F(1) = a$.

Trwy hyn, mae $a = \frac{1}{3}$.

Gan ddefnyddio $F(x) = a$ ar gyfer $1 < x \leq 2$ ceir bod $F(2) = a = \frac{1}{3}$.

Gan ddefnyddio $F(x) = bx^2$ ar gyfer $2 < x \leq 3$ ceir bod $F(2) = 4b$. Trwy hyn, mae $4b = \frac{1}{3}$, ac felly mae $b = \frac{1}{12}$.

(b) Mae $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 2\frac{1}{2}\right) = F\left(2\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(2\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{48}$.

- (c) Trwy ddifferu, ceir y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f o X, sef bod

$$f(x) = 0, \quad \text{ar gyfer } x < 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 1,$$

$$f(x) = 0, \quad \text{ar gyfer } 1 < x \leq 2,$$

$$f(x) = 2bx = \frac{x}{6}, \quad \text{ar gyfer } 2 < x \leq 3,$$

$$f(x) = \frac{1}{4}, \quad \text{ar gyfer } 3 < x \leq 4,$$

$$f(x) = 0, \quad \text{ar gyfer } x > 4.$$

[Sylwer, yn wahanol i $F(x)$, nad yw $f(x)$ yn ddi-dor ym mhob man gan fod ganddo 'neidiadau' (toriannau) ar y gwerthoedd $x = 0, 1, 2, 3$ a 4 .]

Ymarfer 1.2

1. Mae gan yr hapnewidyn X ffwythiant dosraniad cronus F, lle mae

$$F(x) = 0, \quad \text{ar gyfer } x < 3$$

$$F(x) = 1 - \frac{k}{x^2}, \quad \text{ar gyfer } x \geq 3.$$

- (a) Darganfyddwch werth k.
- (b) Darganfyddwch ffwythiant dwysedd tebygolrwydd X.

2. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dosraniad cronnus F , lle mae

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & \text{ar gyfer } x < 0, \\ F(x) &= \frac{x^2}{10}, & \text{ar gyfer } 0 \leq x < 2, \\ F(x) &= 1 - k(5 - x)^2, & \text{ar gyfer } 2 \leq x < 5, \\ F(x) &= 1, & \text{ar gyfer } x \geq 5. \end{aligned}$$

- (a) Darganfyddwch werth y cysonyn k .
(b) Enrhifwch $P(1 \leq X < 3)$ a $P(1 \leq X < 4 \mid X < 3)$.
(c) Darganfyddwch ffwythiant dwysedd tebygolrwydd X .

3. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dosraniad cronnus F lle mae

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \text{ ar gyfer } x < 0, \quad F(x) = 1 \text{ ar gyfer } x > 3, \\ F(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2, & \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 1, \\ F(x) &= \frac{1}{4}x + a, & \text{ar gyfer } 1 < x \leq 2, \\ F(x) &= \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + b, & \text{ar gyfer } 2 < x \leq 3. \end{aligned}$$

- (a) Darganfyddwch werthoedd a a b .
(b) Darganfyddwch ffwythiant dwysedd tebygolrwydd X .

4. Mae gan yr hapnewidyn X ffwythiant dosraniad cronnus F a roddir gan

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & \text{ar gyfer } x < -2, \\ F(x) &= 1 & \text{ar gyfer } x \geq 6, \\ F(x) &= \frac{x+2}{12}, & \text{ar gyfer } -2 < x < 0, \\ F(x) &= a(x+1), & \text{ar gyfer } 0 \leq x < 4, \\ F(x) &= b(x+6), & \text{ar gyfer } 4 \leq x < 6. \end{aligned}$$

- (a) Darganfyddwch werthoedd a a b .
(b) Darganfyddwch ffwythiant dwysedd tebygolrwydd X .

5. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X werthoedd posibl $0 < x \leq 3$ ac mae

$$P(X > x) = a + bx^3 \quad \text{ar gyfer } 0 < x \leq 3.$$

- (a) Ysgrifennwch ffwythiant dosraniad cronnus X .
(b) Darganfyddwch werthoedd a a b .
(c) Darganfyddwch ffwythiant dwysedd tebygolrwydd X .

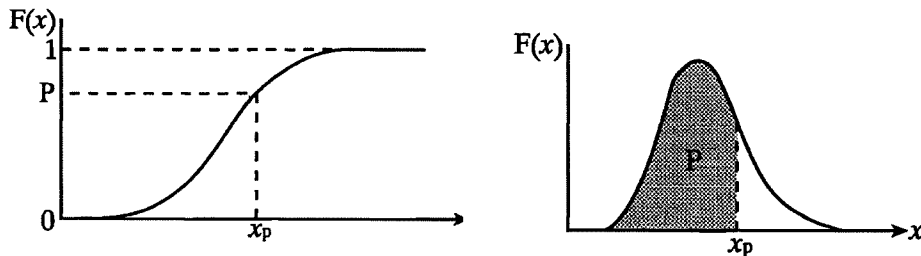
1.3 Canraddau dosraniad di-dor

Gadewch i X ddynodi hapnewidyn di-dor sydd â ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a ffwythiant dosraniad cronnus F .

Diffiniad: Ar gyfer unrhyw p rhwng 0 ac 1 mae'r gwerth x_p fel bod

$$P(X \leq x_p) \equiv F(x_p) = p$$

yn cael ei alw'n **100^{fed} canradd** dosraniad X . Felly, y tebygolrwydd yw p , sef bod gwerth hap-sylwedig X yn llai na neu'n hafal i x_p . Esbonnir hyn yn y diagramau isod.



Dyma'r canraddau a ddefnyddir amlaf:

- $x_{0.5}$, sy'n cael ei alw'n **ganolrif** y dosraniad,
- $x_{0.25}$, sy'n cael ei alw'n **chwartel isaf** y dosraniad,
- $x_{0.75}$, sy'n cael ei alw'n **chwartel uchaf** y dosraniad.

Defnyddir y canolrif yn aml fel mesur o leoliad yn lle'r cymedr (fe'i diffinnir yn Adran 1.4) yn enwedig pan fo'r dosraniad ar sgiw. Gyda'r canolrif fel mesur o leoliad, yna'r mesur addas o ledaeniad yw'r gwahaniaeth rhwng x_p a x_{1-p} ar gyfer dewis addas o p . Y rhai a ddefnyddir amlaf yw

- (1) $x_{0.75} - x_{0.25}$, a elwir yn **amrediad rhyngchwartel**,
gydag $x_{0.25}$ yn cynrychioli'r **chwartel isaf** ac $x_{0.75}$ yn cynrychioli **chwartel uchaf** y dosraniad,
- (2) $x_{0.9} - x_{0.1}$, a elwir yn **amrediad rhyng-ganraddol 10-90**,
gydag $x_{0.1}$ yn cynrychioli canradd 10% ac $x_{0.9}$ yn cynrychioli canradd 90% y dosraniad.

Enghraifft 1

Mae gan yr hapnewidyn di-dor X y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = \frac{4}{3x^2}, \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 4.$$

Darganfyddwch fynegiad ar gyfer x_p , 100^{fed} canradd y dosraniad. Drwy hynny darganfyddwch, yn gywir i ddau le degol, werthoedd y canolrif, y chwarteli a'r 80^{fed} canradd.

Datrysiad

Mae modd dangos ffwythiant dosraniad cronrus F o X fel bod

$$F(x) = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{x} \right), \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 4$$

Y $100p^{\text{fed}}$ canradd x_p yw datrysiad $F(x_p) = p$,

sef
$$\frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{x_p} \right) = p,$$

ac o hynny fe gawn ni

$$x_p = \frac{1}{1 - 0.75p}.$$

Gan osod $p = 0.5, 0.25, 0.75$ a 0.8 , fe gawn ni, yn ôl eu trefn,

y canolrif $x_{0.5} = 1/(1 - 0.375) = 1.6$

y chwartzel isaf $x_{0.25} = 1/(1 - 0.1875) = 1.23$ yn gywir i ddau le degol

y chwartzel uchaf $x_{0.75} = 1/(1 - 0.5625) = 2.29$ yn gywir i ddau le degol

yr 80^{fed} canradd $x_{0.8} = 1/(1 - 0.6) = 2.5$.

Enghraifft 2

Darganfyddwch ganolrif, chwartzel isaf ac amrediad rhyng-ganraddol 10–90 yr hapnewidyn X sydd â ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f fel a ganlyn

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 3,$$

$$f(x) = \frac{1}{18}, \quad \text{ar gyfer } 3 < x \leq 15.$$

Datrysiad

Dangoswyd yn Enghraifft 2 o Adran 1.2 fod ffwythiant dosraniad cronrus F o X fel bod

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right), \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 3,$$

$$F(x) = \frac{1}{18}(x + 3), \quad \text{ar gyfer } 3 < x \leq 15.$$

Wrth weld bod $F(3) = \frac{1}{3}$, bydd gwerth x_p ar gyfer unrhyw $p \leq \frac{1}{3}$ yn y cyfwng $[1, 3]$ ac ar gyfer unrhyw $p > \frac{1}{3}$ bydd yn y cyfwng $(3, 15]$. Gan fod $0.5 > \frac{1}{3}$, mae'r canolrif yn y cyfwng $(3, 15]$ ac yn ddatrysiad i

$$\frac{1}{18}(x_{0.5} + 3) = 0.5,$$

sy'n rhoi $x_{0.5} = 6$.

Gan fod $0.25 < \frac{1}{3}$, mae'r chwartzel isaf $x_{0.25}$ yn y cyfwng $(3,15]$ ac yn ddatrysiad i

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x_{0.25}} \right) = 0.25.$$

O'i ddatrys, $x_{0.25} = 2$ yw'r chwartzel isaf.

Ar gyfer yr amrediad rhyng-ganraddol 10–90 mae arnom angen gwerthoedd $x_{0.9}$ ac $x_{0.1}$. Gan fod $0.9 > \frac{1}{3}$, y 90^{fed} canradd yw datrysiad

$$\frac{1}{18} (x_{0.9} + 3) = 0.9,$$

sydd, o'i ddatrys, yn rhoi $x_{0.9} = 13.2$. Gan fod $0.1 < \frac{1}{3}$, y canradd 10%, sef $x_{0.1}$, yw datrysiad

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x_{0.1}} \right) = 0.1,$$

sydd yn rhoi $x_{0.1} = 1.25$.

Felly, yr amrediad rhyng-ganraddol 10–90 yw $13.2 - 1.25 = 11.95$.

Ymarfer 1.3

1. Ar gyfer pob un o'r dosraniadau canlynol darganfyddwch fynegiad ar gyfer y $100p^{\text{fed}}$ canradd a thrwy hynny enrhifwch ganolrif a chwartzeli'r dosraniad, gan roi eich atebion yn gywir i ddau lle degol lle bo'n addas.

- (a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ar gyfer $x > 1$.
- (b) $f(x) = 0.2$, ar gyfer $1 \leq x \leq 6$.
- (c) $f(x) = kx^2$, ar gyfer $1 \leq x \leq 2$.
- (d) $f(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$, ar gyfer $0 \leq x \leq 2$.

2. Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, ganolrif, chwartzeli ac amrediad rhyng-ganraddol 10–90 pob un o'r dosraniadau canlynol.

- (a) $f(x) = \frac{1}{5}$, ar gyfer $0 \leq x \leq 1$,
 $f(x) = \frac{x^3}{25}$, ar gyfer $1 < x \leq 3$.
- (b) $f(x) = \frac{2}{3}$, ar gyfer $0 \leq x < 1$,
 $f(x) = \frac{1}{3}$, ar gyfer $1 \leq x \leq 2$.
- (c) $f(x) = 0.1x - 0.3$, ar gyfer $4 \leq x \leq 6$
 $f(x) = 0.3$ ar gyfer $6 < x \leq 8$.

3. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f fel a ganlyn

$$f(x) = \frac{x}{2}, \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq 1,$$

$$f(x) = \frac{(4-x)}{6}, \text{ ar gyfer } 1 < x \leq 4.$$

(a) Dangoswch fod ffwythiant dosraniad cronus F o X fel bod

$$F(x) = 1 - \frac{1}{12}(4-x)^2, \text{ ar gyfer } 1 < x \leq 4,$$

a darganfyddwch fynegiad ar gyfer $F(x)$ sydd yn ddilys ar gyfer $0 \leq x \leq 1$.

(b) Trwy hynny pennwch ganolrif, chwarteli ac amrediad rhyng-ganraddol 20–80 y dosraniad, gan roi eich atebion yn gywir i ddau le degol.

4. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f fel a ganlyn

$$f(x) = ax - bx^2, \text{ ar gyfer } 0 \leq x \leq 2.$$

O wybod fod gwerth canolrif X yn hafal i 1, pennwch werthoedd a a b .

1.4 Cymedr ac amrywiant hapnewidyn di-dor

Boed i $h(X)$ fod yn ffwythiant o'r hapnewidyn di-dor X sydd â gwerthoedd posibl $a \leq x \leq b$ a ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f . Fel estyniad o'r diffiniad a roddwyd yn Adran 2.3 o Lyfr S1 pan fo X yn arwahanol, diffinnir **gwerth disgwyledig** $h(X)$ fel

$$E[h(X)] = \int_a^b h(x)f(x) dx. \quad (1)$$

Yn benodol, $E(X)$ yw **cymedr**, μ , dosraniad X , ac $E[(X - \mu)^2]$ yw **amrywiant** dosraniad X . Fel y dangoswyd yn Llyfr S1,

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2. \quad (2)$$

Mae priodweddau E a olrheiniwyd ym Mhennod 4, Llyfr S1 hefyd yn ddilys pan fo X yn ddi-dor a gellir gwireddu hyn trwy ddefnyddio priodweddau integrynau pendant. Yn benodol, ar gyfer unrhyw gysonion c_1, c_2 ac unrhyw ffwythiannau $h_1(X), h_2(X)$, mae

$$E[c_1 h_1(X) + c_2 h_2(X)] = c_1 E[h_1(X)] + c_2 E[h_2(X)]. \quad (3)$$

Mae'r canlyniad hwn yn estyn mewn ffordd amlwg i gyfuniad llinol o dri neu ragor o ffwythiannau o X .

Mae'n dilyn o hafaliad (3) fod

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad (4)$$

a, chan ddilyn y deiliant a roddwyd yn Adran 4.4 o Lyfr S1, fod

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X). \quad (5)$$

Mae'r ddau ganlyniad hyn yn ein galluogi i ddarganfod cymedr ac amrywiant $Y = aX + b$ heb orfod darganfod yn gyntaf ddosraniad Y .

Ar ben hynny, gellir hefyd ddarganfod cymedr ac amrywiant $Z = h(X)$, ar gyfer unrhyw ffwythiant $h(X)$, heb wybod ei ddosraniad. Gellir darganfod cymedr Z trwy ddefnyddio hafaliad (1). Nawr, mae

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = E[h^2(X)] - \{E[h(X)]\}^2$$

a gellir darganfod y ddau fynegiad ar yr ochr dde trwy ddefnyddio hafaliad (1).

Mae'r canlyniadau uchod yn cael eu darlunio yn yr enghreifftiau a ganlyn.

Enghraifft 1

Dosrennir yr hapnewidyn di-dor X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = 6x(1-x), \quad \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant X .
- (b) Diddwythwch gymedr ac amrywiant (i) $Y = 10X - 3$, (ii) $Z = 2(3 - X)/5$.
- (c) Enrhifwch $E(5X^2 - 3X + 1)$.
- (d) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant $W = X^{1/2}$.

Datrysiad

- (a) Cymedr X yw

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 6x^2(1-x) dx = 6 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= 6 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 6 \int_0^1 x^3(1-x) dx = 6 \int_0^1 (x^3 - x^4) dx \\ &= 6 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{20}. \end{aligned}$$

$$\text{Felly, mae } \text{Var}(X) = \frac{6}{20} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{20}.$$

- (b) Gellir diddwytho cymedr ac amrywiant Y a Z trwy ddefnyddio hafaliadau (4) a (5).

$$\text{(i) Cymedr } Y \text{ yw} \quad E(10X - 3) = 10E(X) - 3 = 10 \times \frac{1}{2} - 3 = 2.$$

$$\text{Amrywiant } Y \text{ yw} \quad \text{Var}(10X - 3) = 10^2 \text{Var}(X) = 100 \times \frac{1}{20} = 5.$$

$$\text{(ii) Cymedr } Z \text{ yw} \quad E\left[\frac{2}{5}(3 - X)\right] = E\left(\frac{6}{5} - \frac{2}{5}X\right) = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = 1.$$

$$\text{Amrywiant } Z \text{ yw} \quad \text{Var}\left(\frac{6}{5} - \frac{2}{5}X\right) = \frac{4}{25} \text{Var}(X) = \frac{1}{125}.$$

(c) Gan ddefnyddio hafaliad (3), mae

$$E(5X^2 - 3X + 1) = 5E(X^2) - 3E(X) + 1 = 5 \times \frac{6}{20} - 3 \times \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

(d) O hafaliad (1), mae

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X^{1/2}) = 6 \int_0^1 x^{1/2} \times x(1-x) dx = 6 \int_0^1 (x^{3/2} - x^{5/2}) dx \\ &= 6 \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{2}{7} x^{7/2} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right) = 6 \times \frac{4}{35} = \frac{24}{35}. \end{aligned}$$

Mae $E(W^2) = E(X) = \frac{1}{2}$, fel a ddangoswyd yn (a).

Trwy hyn, mae $\text{Var}(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{24}{35} \right)^2 = \frac{73}{2450}.$

Enghraifft 2

Darganfyddwch gymedr ac amrywiant y dosraniad sydd â ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 1, \\ f(x) &= 2 - x, & \text{ar gyfer } 1 < x \leq 2. \end{aligned}$$

Datrysiaid

Y cymedr yw $E(X) = \int_0^2 xf(x) dx.$

Fodd bynnag, gan fod gan $f(x)$ ffurfiau gwahanol ar gyfer $0 \leq x \leq 1$ a $1 < x \leq 2$, mae

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = 1. \end{aligned}$$

[Mae'r canlyniad $E(X) = 1$ hefyd yn dilyn yn syth trwy nodi bod y ffwythiant $f(x)$ yn gymesur o amgylch $x = 1$, a gellir gwireddu hyn yn rhwydd trwy lunio graff $f(x)$.

Yn gyffredinol, os yw ffwythiant dwysedd tebygolrwydd $f(x)$ yn gymesur o amgylch $x = \mu$, yna gellir cymryd yn ganiataol fod $E(X) = \mu$.]

Mae $E(X^2) = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3) dx$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_1^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{14}{12}.$$

Felly, mae $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{14}{12} - (1)^2 = \frac{1}{6}.$

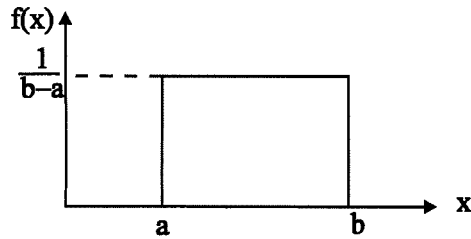
Ymarfer 1.4

1. Dosrennir yr hapnewidyn di-dor X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae $f(x) = \frac{1}{4}x^3$, ar gyfer $0 \leq x \leq 2$.
 - (a) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant X .
 - (b) Diddwythwch gymedr ac amrywiant (i) $Y = 3X - 1$, (ii) $Z = 5(2 - X)$.
 - (c) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant $W = X(2 - X)$.
2. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae $f(x) = \frac{5}{8}(1 - x^4)$, ar gyfer $-1 \leq x \leq 1$.
 - (a) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant X .
 - (b) Diddwythwch gymedr ac amrywiant $Y = 21X + 10$.
3. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan $f(x) = 2(1 - x)$, ar gyfer $0 < x < 1$.
 - (a) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $E(X^r)$, lle mae r yn gyfanrif positif. Trwy hyn darganfyddwch gymedr ac amrywiant X .
 - (b) Adeiledir petryal gydag ochrau cyfagos x cm a $(3 - 2x)$ cm, lle mae x yn werth X a geir ar hap. Darganfyddwch werth disgwyledig (i) perimedr a (ii) arwynebedd y petryal.
4. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan $f(x) = cx(a - x)$, ar gyfer $0 \leq x \leq 2$, lle mae c ac a (≥ 2) yn gysonion. O wybod bod $E(X) = 1$, darganfyddwch (a) werthoedd c ac a , (b) $\text{Var}(X)$.
5. Dosrennir yr hapnewidyn X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae $f(x) = ax(1 - bx^2)$, ar gyfer $0 \leq x \leq 1$. Dangoswch fod yn rhaid i b fod yn ≤ 1 a bod $a = 4/(2 - b)$. A bwrw bod $b = 1$, darganfyddwch gymedr ac amrywiant X .
6. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant y dosraniad y diffinnir ei ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f gan
$$f(x) = kx^3, \quad \text{ar gyfer } 0 \leq x < 1,$$
$$f(x) = k, \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 2.$$
7. Mae màs, mewn g, elfen benodol a gynhwysir mewn 1 kg o ddefnydd crai yn hapnewidyn di-dor X sydd â ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f lle mae
$$f(x) = cx, \quad \text{ar gyfer } 0 < x \leq 5,$$
$$f(x) = c(10 - x) \quad \text{ar gyfer } 5 < x \leq 10.$$

- (a) Darganfyddwch werth y cysonyn c .
- (b) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant X .
- (c) Mae cost tynnu'r elfen benodol hon o 1 kg o'r defnydd crai yn £2 os yw $0 < X \leq 3$, yn £4 os yw $3 < X \leq 6$, ac yn £5 os yw $6 < x \leq 10$. Cyfrifwch gost ddisgwyliedig tynnu'r elfen am bob kg o'r defnydd crai.
8. Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
- $$f(x) = a, \quad \text{ar gyfer } 0 < x < 1,$$
- $$f(x) = b(4 - x), \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 4,$$
- lle mae a a b yn gysonion. O wybod mai cymedr y dosraniad yw 1.4 darganfyddwch werthoedd a a b .
9. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant y dosraniad y rhoddir ei ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f gan
- $$f(x) = \frac{1}{4}(2 - x), \quad \text{ar gyfer } 0 \leq x < 1,$$
- $$f(x) = \frac{1}{4}, \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x < 2,$$
- $$f(x) = \frac{1}{4}(x - 1), \quad \text{ar gyfer } 2 \leq x \leq 3.$$
10. Mewn ffatri, y nodwedd ansawdd X ar gyfer eitem a gynhyrchir yno yw hapnewidyn di-dor sydd â ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
- $$f(x) = \frac{2x}{\lambda^2}, \quad \text{ar gyfer } 0 < x < \lambda,$$
- lle mae λ yn gysonyn positif y gall y gwneuthurwr reoli ei werth.
- (a) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant X yn nhermau λ .
- (b) Archwilir pob eitem a gynhyrchir cyn iddi adael y ffatri. Mae unrhyw eitem lle mae X yn 8 neu fwy yn iawn ar gyfer ei gwerthu ac mae unrhyw eitem lle mae X yn llai nag 8 yn cael ei thafu. Mae'r gwneuthurwr yn gwneud elw o £(27 - λ) ar bob eitem sy'n iawn i'w gwerthu, ac yn cael colled o £(λ + 5) ar bob eitem a deflir. Darganfyddwch werth λ y dylai'r gwneuthurwr anelu ato er mwyn cael yr elw disgwyliedig mwyaf am bob eitem, a chyfrifwch yr elw disgwyliedig mwyaf am bob eitem.

1.5 Y dosraniad unffurf

Ystyriwch yr hapnewidyn X gyda gwerthoedd posibl $a \leq x \leq b$ lle mae gwerth X y sylwyd arno yn hafal debygol o fod yn unrhyw werth yn yr amrediad $a \leq x \leq b$. Gan ddefnyddio'r darlun o bowdr mewn jwg a gyflwynwyd yn Adran 1.1, mae'n amlwg y dylid dosrannu'r tebygolrwydd yn unffurf (yn gyfartal) dros y cyfwng $[a, b]$ fel a ddangosir yn y diagram canlynol. Gan fod gan y 'twmpath', sef petryal yn yr achos hwn, arwynebedd o 1, mae'n dilyn bod yn rhaid i uchder y petryal fod yn $1/(b - a)$.



Felly, rhoddir y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f gan

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{ar gyfer } a \leq x \leq b \quad (1)$$

Dywedir bod gan hapnewidyn sydd â'r ffwythiant dwysedd tebygolrwydd hwn y dosraniad **unffurf** dros y cyfwng $[a, b]$, a byddwn yn talfyrru hyn fel $X \sim U(a, b)$.

Fel enghraifft syml o sut y gall hapnewidyn o'r fath ddigwydd yn ymarferol, tybiwch y bydd llinyn 10 cm o hyd yn cael ei dorri'n ddau ddarn, a dewisir pwynt y toriad ar hap. Boed i X cm ddynodi pellter pwynt y toriad o un pen y llinyn. Yna mae gan X y gwerthoedd posibl $0 < x < 10$ ac mae'r gwerthoedd hyn yn hafal debygol, ac felly mae gan $X \sim U(0, 10)$.

Os oes gan $X \sim U(a, b)$, yna rhoddir y ffwythiant dosraniad cronus F gan

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & \text{ar gyfer } x < a, \\ F(x) &= \frac{x-a}{b-a}, & \text{ar gyfer } a \leq x \leq b \\ F(x) &= 1, & \text{ar gyfer } x > b. \end{aligned} \quad (2)$$

Yn benodol, noder, ar gyfer unrhyw is-gyfwng $[c, d]$ o (a, b) , fod

$$P(c \leq X \leq d) \equiv F(d) - F(c) = \frac{d-c}{b-a}, \quad (3)$$

ac felly fod y tebygolrwydd y bydd X yn cymryd gwerth mewn unrhyw is-gyfwng mewn cyfrannedd union â lled yr is-gyfwng.

Cymedr ac amrywiant

Cymedr y dosraniad $U(a, b)$ yw

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{1}{2}(b+a) \quad (4)$$

sydd yn amlwg hefyd wrth nodi bod $f(x)$ yn gymesurol o amgylch $x = \frac{1}{2}(b+a)$.

$$\text{Mae } E(X^2) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2)$$

wrth nodi bod $(b^3 - a^3) = (b-a)(b^2 + ba + a^2)$.

Mae'n dilyn mai'r amrywiant $U(a, b)$ yw

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2) - \frac{1}{4}(b + a)^2 = \frac{1}{12}(b - a)^2.$$

Enghraifft 1

Torrir llinyn 10 cm o hyd ar bwynt a ddewisir ar hap.

(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd y darn hiraf yn hwy na 7 cm.

(b) Darganfyddwch hyd disgwyledig y darn hiraf.

Boed i X ddynodi pellter pwynt y toriad mewn cm o un pen y llinyn.

Yna mae gan $X \sim U(0, 10)$ a'i ffwythiant dwysedd tebygolrwydd yw

$$f(x) = 0.1, \text{ ar gyfer } 0 < x < 10.$$

Datrysiaid

(a) Hydroedd y ddau ddarn mewn cm yw X a $(10 - X)$. Boed i A ddynodi'r digwyddiad bod y darn hiraf yn hwy na 7 cm. Yna wrth gofio y gall y naill ddarn neu'r llall fod yn hwy na 7 cm ceir bod

$$A = (X > 7) \cup (10 - X > 7) = (X > 7) \cup (X < 3).$$

$$\text{Felly, mae } P(A) = P(X > 7) + P(X < 3) = \frac{10-7}{10} + \frac{3-0}{10} = 0.6.$$

(b) Boed i Y ddynodi hyd y darn hiraf mewn cm. Yna, mae

$$Y = X \text{ os yw } X > 5,$$

$$Y = 10 - X \text{ os yw } X < 5.$$

$$\text{Trwy hyn, mae } E(Y) = 0.1 \int_0^5 (10 - x) dx + 0.1 \int_5^{10} x dx$$

$$= 0.1 \left[10x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^5 + 0.1 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_5^{10}$$

$$= 0.1 \times \frac{75}{2} + 0.1 \times \frac{75}{2} = 7.5.$$

Felly, hyd disgwyledig y darn hwyaf yw 7.5 cm.

Enghraifft 2

Yn yr hafaliad cwadratig ar gyfer u a roddir gan $u^2 - 2u - X = 0$, dewisir gwerth X ar hap o'r cyfwng $(-1, 1)$. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd gwreiddyn mwyaf yr hafaliad yn llai nag 1.5.

Datrysiad

Gwraidd yr hafaliad yw

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 4X}}{2} = 1 \pm \sqrt{(1 + X)},$$

a'r un mwyaf yw $Y = 1 + \sqrt{(1 + X)}$.

$$P(Y < 1.5) = P(1 + \sqrt{(1 + X)} < 1.5) = P(1 + X < 0.25) = P(X < -0.75).$$

Ond mae gan $X \sim U(-1, 1)$ ac felly, o hafaliad (3), mae

$$P(X < -0.75) = \frac{-0.75 - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{0.25}{2} = 0.125.$$

Ymarfer 1.5

1. Ym mhob un o'r dosraniadau canlynol enrhifwch (i) $P(3 < X < 5)$, (ii) $E(X)$, (iii) $\text{Var}(X)$.
(a) $X \sim U(2, 10)$, (b) $X \sim U(-2, 8)$.
2. Dosrennir yr hapnewidyn X yn unffurf dros y cyfwng $(0, 8)$. Os yw $Y = X^{1/3}$, enrhifwch (a) $P(Y > 1)$ a (b) $E(Y)$.
3. Hyd pob un o ochrau sgwâr yw X cm, lle mae gan $X \sim U(4, 10)$. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant arwynebedd y sgwâr.
4. Mae gan betryal sydd â pherimedr 16 cm un ochr X cm o hyd, lle y dosrennir X yn unffurf dros y cyfwng $(3, 7)$. Os yw arwynebedd y petryal yn Y cm² darganfyddwch (a) werth cymedrig Y , (b) $P(Y > 12)$.
5. Torrir llinyn 12 cm o hyd ar bwynt a ddewisir ar hap. Boed i Y cm² ddynodi arwynebedd y petryal, y mae'r ddau ddarn o'r llinyn yn ffurfio dwy o'i ochrau. Enrhifwch (a) werth disgwyliedig Y , (b) $P(Y > 20)$.
6. AB yw diamedr hanner cylch gyda radiws r . AP yw cord sy'n gwneud ongl X radian gydag AB , lle mae gan $X \sim U(0, \pi/2)$. Darganfyddwch werth disgwyliedig arwynebedd y triongl APB .
7. Mae gan danc wynebau fertigol a sylfaen sy'n betryal llorwedd gydag ochrau X m a $(10 - X)$ m, lle y dosrennir X yn unffurf dros $(6, 9)$. Mae'r tanc yn cynnwys 100 m³ o hylif. Cyfrifwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd fod dyfnder yr hylif yn y tanc yn fwy na 5 m.
8. Yn yr hafaliad cwadratig $y^2 - 2Xy + X + 2 = 0$, dewisir gwerth X ar hap o'r cyfwng $(-5, 5)$. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd gan yr hafaliad wraidd real. Os, yn lle hynny, dewisir gwerth X ar hap o'r cyfwng $(2, 5)$, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y gwreiddyn lleiaf yn llai nag 1.

1.6 Y dosraniad normal

Rhagymadrodd

Yn yr adran hon cyflwynir y dosraniad di-dor a ddefnyddir amlaf mewn Ystadegaeth ac a fydd yn cael lle blaenllaw yn y cymwysiadau a drafodir yn ddiweddarach. Er gwaethaf y ffaith fod gan hapnewidyn â'r dosraniad hwn werthoedd posibl sy'n amrywio o $-\infty$ i $+\infty$, gwelwyd, yn ymarferol, fod y dosraniad yn fodel rhesymol. Mae'n digwydd yn bennaf pan fo gwerth a geir i hapnewidyn yn dibynnu ar nifer o ffactorau. Er enghraifft, mae taldra oedolyn (gwryw neu fenyw) a chyfeiliornadau mewn mesuriadau yn newidynnau o'r fath. Mae gan yr histogram a ffurfir o nifer mawr iawn o arsylwadau o newidyn o'r fath, siâp sy'n debyg i siâp y dosraniad dan sylw yma. Gelwir y dosraniad hwn yn **ddosraniad normal** (ond nid yw hyn yn awgrymu bod unrhyw beth anarferol neu ryfedd am ddosraniad nad yw'n ddosraniad normal!).

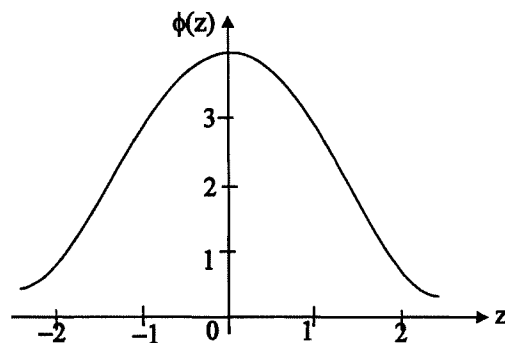
Cyn ymwneud â ffurf gyffredinol y dosraniad normal a ddefnyddir yn ymarferol, dechreuwn â'i ffurf safonol.

Y dosraniad normal safonol

Ystyriwch y ffwythiant ϕ a ddiffinnir gan

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad \text{ar gyfer } -\infty < z < +\infty \quad (1)$$

y dangosir braslun ohono isod.



Mae'n amlwg bod $\phi(z)$ yn > 0 ar gyfer pob z , a gellir dangos (gan ddefnyddio mathemateg y tu hwnt i'r lefel a ddisgwylir yn y llyfr hwn) fod

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz = 1 \quad (2)$$

Felly, gall ϕ weithredu fel ffwythiant dwysedd tebygolrwydd. Bydd hapnewidyn $\hat{\phi}$ fel ei ffwythiant dwysedd tebygolrwydd yn cael ei ddynodi gan Z , a dywedir bod gan yr hapnewidyn hwn y **dosraniad normal safonol**. Mae'n amlwg o gymesuredd $\phi(z)$ o amgylch $z = 0$ fod $E(Z) = 0$. Gellir dangos hefyd fod $\text{Var}(Z) = 1$. Byddwn yn talfyrru'r wybodaeth hon trwy ysgrifennu $Z \sim N(0,1)$ i nodi bod gan yr hapnewidyn Z y dosraniad normal safonol gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd ϕ a roddir gan hafaliad (1). Rhoddir ffwythiant dosraniad cronus Φ Z gan

$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (3)$$

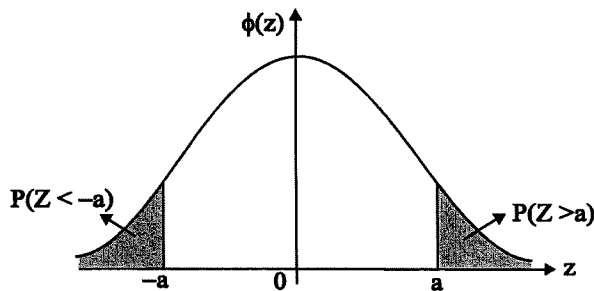
Gan ystyried y cymesuredd o $\phi(z)$ o amgylch $z = 0$ mae'n dilyn bod $\Phi(0) = 0.5$. Fodd bynnag, ar gyfer unrhyw $z \neq 0$, ni ellir enrhifo $\Phi(z)$ ond trwy ddefnyddio dulliau rhifiadol. Mae canlyniadau enrhifiadau rhifiadol o'r fath wedi cael eu cofnodi mewn pob math o dablau. Mae Tabl 3 yn nhablau RND yn rhoi gwerthoedd $P(Z \leq z) \equiv \Phi(z)$ i bum lle degol ar gyfer gwerthoedd z o 0 i 3.99 mewn camau o 0.01. Mae Tabl 3 yn nhablau Murdoch & Barnes yn rhoi gwerthoedd $P(Z > z) \equiv 1 - \Phi(z)$ i bedwar lle degol ar gyfer gwerthoedd z o 0 i 2.99 mewn camau o 0.01, ac ar gyfer z o 3.0 i 4.0 mewn camau o 0.1. Pan gyfeirir at y tablau hyn, byddwn yn eu talfyrru i RND ac M&B.

Beth os yw z yn negatif? Ar gyfer gwerthoedd negatif i z gellir defnyddio cymesuredd $\phi(z)$ o amgylch $z = 0$. Fel a ddangosir yn y diagram canlynol, ar gyfer unrhyw $a > 0$, mae

$$P(Z < -a) = P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad (4a)$$

ac yn yr un modd, mae

$$P(Z > -a) = P(Z < a) = 1 - P(Z > a). \quad (4b)$$



Mae'r enghraifft ganlynol yn darlunio defnyddio tablau i enrhifo tebygolrwyddau o ddigwyddiadau ar ffurf ($a < Z < b$). Seilir y datrysiadau a roddir ar dabl o werthoedd $P(Z < z)$ fel a geir yn Nhabl 3 gan RND. Bydd angen addasu'r datrysiadau os yw'r tabl a ddefnyddir yn rhoi gwerthoedd $P(Z > z)$ fel yn Nhabl 3 yn nhablau M&B.

Enghraifft 1

O wybod bod $Z \sim N(0, 1)$ defnyddiwch dablau i enrhifo yn gywir i dri lle degol

- (a) $P(Z < 0.5)$, (b) $P(Z > 1.66)$, (c) $P(Z < -0.5)$,
(d) $P(Z > -2.6)$, (e) $P(1.24 < Z < 2.36)$, (f) $P(-1.23 < Z < 1.89)$

Datrysiaid

- (a) O Dabl 3 ceir bod $P(Z < 0.5) = 0.69146 = 0.691$ i 3 lle degol.
- (b) Mae $P(Z > 1.66) = 1 - P(Z < 1.66) = 1 - 0.95154 = 0.048$ i 3 lle degol.
- (c) Gan ddefnyddio (4a) uchod, mae
 $P(Z < -0.5) = 1 - P(Z < 0.5) = 1 - 0.69146 = 0.309$ i 3 lle degol.
- (d) Gan ddefnyddio (4b) uchod, mae
 $P(Z > -2.6) = P(Z < 2.6) = 0.99534 = 0.995$ i 3 lle degol.
- (e) Mae $P(1.24 < Z < 2.36) = P(Z < 2.36) - P(Z < 1.24)$
 $= 0.99086 - 0.89251$
 $= 0.098$ i 3 lle degol.
- (f) Mae $P(-1.23 < Z < 1.89) = P(Z < 1.89) - P(Z < -1.23)$
 $= P(Z < 1.89) - [1 - P(Z < 1.23)]$ wrth ddefnyddio (4a)
 $= 0.97062 - (1 - 0.89065) = 0.861$ i 3 lle degol.

[I osgoi camgymeriadau sy'n digwydd yn eithaf aml, mae'n werth llunio diagram o'r arwynebedd angenrheidiol ac, yn arbennig, asesu a yw'r ateb yn fwy neu'n llai na 0.5.]

I enrhifo $P(Z > a)$ neu $P(Z < a)$ pan roddir a i fwy na dau le degol byddai angen defnyddio rhyngosodiad llinol yn Nhabl 3 RND neu M&B. Fodd bynnag, yn y llyfr hwn byddwn yn talgrynnu a i ddau le degol a derbyn bod yr ateb a geir yn ddigon cywir. Pan wneir hyn, mae'r cyfeiliornadau sy'n digwydd yn lleihau wrth i a (> 0) gynyddu. Bron yn ddiethriad bydd yr ateb yn gywir i o leiaf ddau le degol.

Er enghraifft, mae

$$P(Z < 2.6746) \approx P(Z < 2.67) = 0.99621 = 0.996 \text{ i 3 lle degol.}$$

Fel mae'n digwydd yr ateb penodol hwn yw gwerth $P(Z < 2.6746)$ yn gywir i dri lle degol, gan fod $P(Z < 2.67)$ a $P(Z < 2.68)$ yn hafal i 0.996 i dri lle degol.

Ystyriwch nawr $P(Z < 0.2672)$.

$$\text{Mae } P(Z < 0.2672) \approx P(Z < 0.27) = 0.60642 = 0.606 \text{ i 3 lle degol.}$$

Yn yr achos hwn byddai rhyngosodiad llinol yn Nhabl 3 yn rhoi'r ateb 0.6053 i bedwar lle degol, ac felly nid yw ein brasamcan yn gywir ond i ddau le degol.

Mewn rhai problemau bydd angen darganfod a fel bod $P(Z < a) = p$ ar gyfer rhyw werth p a roddir rhwng 0 ac 1. Noder y bydd a yn negatif os $yw p < 0.5$ ac yn positif os $yw p > 0.5$. Gellir cael y datrysiad ar gyfer unrhyw p a roddir trwy ryngosodiad llinol yn Nhabl 3 ond mae'n llawer haws defnyddio Tabl 4 yn nhablau RND neu M&B. Mae Tabl 4 RND yn rhoi gwerthoedd z i dri lle degol lle mae $P(Z \leq z) = p$ ar gyfer gwerthoedd detholedig $p > 0.5$, tra bo Tabl 4 M&B yn rhoi gwerthoedd z i bedwar lle degol lle mae $P(Z > z) = p$ ar gyfer gwerthoedd detholedig $p < 0.5$. Darlunnir defnyddio Tabl 4 RND yn yr enghraifft ganlynol. Bydd angen addasu'r datrysiadau os defnyddir M&B.

Enghraifft 2

O wybod bod gan $Z \sim N(0, 1)$ darganfyddwch werth a ym mhob un o'r achosion canlynol, gan roi'r ateb i ddau le degol, (a) $P(Z < a) = 0.992$, (b) $P(Z < a) = 0.35$.

Datrysiad

(a) Ceir yn uniongyrchol yn Nhabl 4 fod gan $P(Z < a) = 0.992$ y datrysiad $a = 2.409$.

(b) Mae'n amlwg bod gwerth a lle mae $P(Z < a) = 0.35$ yn negatif. Nawr mae

$$P(Z < a) = P(Z > -a) = 1 - P(Z < -a).$$

Felly, mae $P(Z < a) = 0.35$ yn gywerth ag $1 - P(Z < -a) = 0.35$,

neu $P(Z < -a) = 0.65$.

Yn Nhabl 4 ceir bod $-a = 0.385$, ac felly mae $a = -0.385$.

Ymarfer 1.6a

A bwrw bod gan $Z \sim N(0, 1)$ enrhifwch i ddau le degol

1. $P(Z < 1.95)$, 2. $P(Z > 1.06)$, 3. $P(Z > -2.16)$, 4. $P(Z > -0.08)$,
5. $P(1.24 < Z < 2.34)$ 6. $P(Z > 0.9887)$, 7. $P(Z < -1.843)$,
8. $P(2.04 < Z < 2.98)$, 9. $P(-1.067 < Z < -0.093)$,
10. c os $yw P(Z < c) = 0.982$, 11. c os $yw P(Z > c) = 0.03$,
12. c os $yw P(Z < c) = 0.027$

Y dosraniad normal cyffredinol

Estynnir nawr y dosraniad normal safonol i un a all weithredu fel model ar gyfer amrywiaeth eang o hapnewidynnau.

Boed i $X = \mu + \sigma Z$. Yna, gan ddefnyddio canlyniadau a roddir yn Adran 1.4,

mae $E(X) = \mu + \sigma E(Z) = \mu$, gan fod $E(Z) = 0$,

ac mae $\text{Var}(X) = \sigma^2 \text{Var}(Z) = \sigma^2$, gan fod $\text{Var}(Z) = 1$.

Mae'n dilyn bod gan ddosraniad X gymedr μ ac amrywiant σ^2 . Ar ben hynny, gellir dangos bod y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f o X yn cael ei roi gan

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad \text{ar gyfer } -\infty < x < \infty. \quad (5)$$

Y cyfdro i hyn yw bod y trawsffurfiant $Z = (X - \mu)/\sigma$ yn lleihau f i ϕ . Dywedir bod gan hapnewidyn X sydd â'r ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir yn hafaliad (5) y **dosraniad normal**, cymedr μ ac amrywiant σ^2 , ac mae hyn yn cael ei dalfyrru hyn fel $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Mae'r trawsffurfiant $Z = (X - \mu)/\sigma$ yn ein galluogi i leihau unrhyw $N(\mu, \sigma^2)$ i $N(0, 1)$. Darlunnir hyn yn yr enghreifftiau canlynol.

Enghraifft 3

O wybod bod gan X y dosraniad normal, cymedr 5 a gwriad safonol 2, enrhifwch

(a) $P(X < 6)$, (b) $P(X < 2.56)$, (c) $P(3.4 < X < 5.7)$, (d) c lle mae $P(X < c) = 0.63$.

Datrysiad

O'r wybodaeth uchod gwyddom fod gan $Z = (X - 5)/2$ y dosraniad $N(0, 1)$.

$$(a) \text{ Mae } P(X < 6) = P\left(Z < \frac{6-5}{2}\right) = P(Z < 0.5)$$

$$= 0.69146 = 0.691 \text{ i 3 lle degol.}$$

$$(b) \text{ Mae } P(X < 2.56) = P\left(Z < \frac{2.56-5}{2}\right) = P(Z < -1.22) = 1 - P(Z < 1.22)$$

$$= 1 - 0.88877 = 0.111 \text{ i 3 lle degol.}$$

$$(c) \text{ Mae } P(3.4 < X < 5.7) = P\left(\frac{3.4-5}{2} < Z < \frac{5.7-5}{2}\right) = P(-0.8 < Z < 0.35)$$

$$= P(Z < 0.35) - P(Z < -0.8) = P(Z < 0.35) - [1 - P(Z < 0.8)]$$

$$= 0.63683 - (1 - 0.78814) = 0.425 \text{ i 3 lle degol.}$$

$$(d) \text{ Mae } P(X < c) = P\left(Z < \frac{c-5}{2}\right)$$

Gan ddefnyddio Tabl 4, mae

$$P\left(Z < \frac{c-5}{2}\right) = 0.63 \text{ pan fo } \frac{c-5}{2} = 0.332$$

Trwy hyn, mae $c = 2 \times 0.332 + 5 = 5.664$.

Enghraifft 4

Mae peiriant yn cynhyrchu rhodenni silindrog ac mae gan eu diamedrau ddosraniad normal, cymedr 1 cm a gwriad safonol 0.01 cm. Nid yw rhoden yn iawn ar gyfer pwrpas penodol oni bai bod ei diamedr rhwng 0.993 cm ac 1.017 cm.

(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd rhoden a ddewisir ar hap yn iawn.

(b) O wybod bod gan roden ddiamedr mwy nag 1 cm darganfyddwch, yn gywir i dri ffigur ystyrlon, y tebygolrwydd fod y rhoden yn iawn.

(c) Darganfyddwch, yn gywir i dri ffigur ystyrlon, werth cymedrig arwynebeddau trawstoriadau y rhodenni.

Datrysiad

Boed i X cm ddynodi diamedr rhoden a ddewisir ar hap.

Yna mae gan $X \sim N(1, 0.01^2)$, ac mae $Z = \frac{X-1}{0.01} \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} \text{(a) Mae } P(\text{rhoden yn iawn}) &= P(0.993 < X < 1.017) \\ &= P\left(\frac{0.993-1}{0.01} < Z < \frac{1.017-1}{0.01}\right) \\ &= P(Z < 1.7) - P(Z < -0.7) \\ &= 0.95543 - (1 - 0.75804) = 0.7135 \text{ i 4 lle degol.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) Mae } P(\text{rhoden yn iawn} \mid X > 1) &= P(0.993 < X < 1.017 \mid X > 1) \\ &= \frac{P(1 < X < 1.017)}{P(X > 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mae } P(1 < X < 1.017) &= P\left(\frac{1-1}{0.01} < Z < \frac{1.017-1}{0.01}\right) \\ &= P(Z < 1.7) - P(Z < 0) \\ &= 0.95543 - 0.5 = 0.45543. \end{aligned}$$

$$\text{Mae } P(X > 1) = P\left(Z > \frac{1-1}{0.01}\right) = P(Z > 0) = 0.5$$

$$\text{Trwy hyn, mae } P(\text{rhoden yn iawn} \mid X > 1) = \frac{0.45543}{0.5} = 0.911 \text{ i 3 ffigur ystyrllon.}$$

(c) Boed i Y cm² ddynodi arwynebedd trawstoriad rhoden sydd â diamedr X cm.

$$\text{Yna mae } Y = \frac{1}{4}\pi X^2. \text{ Arwynebedd y trawstoriad cymedrig yw } E(Y) = \frac{\pi}{4}E(X^2).$$

Oherwydd bod gan $X \sim N(1, 0.01^2)$, mae $E(X) = 1$ a $\text{Var}(X) = 0.01^2$.

$$\text{Felly mae } E(X^2) = \text{Var}(X) + [E(X)]^2 = 0.01^2 + 1 = 1.0001.$$

Arwynebedd trawstoriad cymedrig y rhodenni yw $\frac{1.0001\pi}{4} = 0.785$ cm² yn gywir i 3 ffigur ystyrllon.

[Gan na all diamedr rhoden fod yn negatif efallai fod defnyddio dosraniad normal (a ddifinnir o $-\infty$ i $+\infty$) fel y model ar gyfer dosraniad diamedrau'r rhodenni yn ymddangos yn rhyfedd. Fodd bynnag, o dan y model hwn y tebygolrwydd y bydd diamedr rhoden yn negatif yw

$$P(X < 0) = P\left(Z < \frac{0-1}{0.01}\right) = P(Z < -100) \text{ sy'n ddigon bach i fod yn ddibwys.}]$$

Enghraifft 5

Gellir tybio bod gan daldra, mewn metrau, oedolion gwryw ddosraniad normal. O wybod bod 10% o oedolion gwryw yn dalach nag 1.8 metr a bod 5% yn fyrrach nag 1.6 metr, darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol taldra oedolion gwryw.

Datrysiaid

Boed i X metr ddynodi taldra oedolyn gwryw a ddewisir ar hap. Rydym yn cymryd bod

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

lle mae μ a σ i'w darganfod o wybod bod

$$P(X > 1.8) = 0.1 \quad \text{a bod} \quad P(X < 1.6) = 0.05.$$

Trwy safoni, ceir bod

$$P\left(Z > \frac{1.8 - \mu}{\sigma}\right) = 0.1 \quad \text{a bod} \quad P\left(Z < \frac{1.6 - \mu}{\sigma}\right) = 0.05.$$

Gan ddefnyddio Tabl 4 yn nhablau RND ceir bod

$$\frac{1.8 - \mu}{\sigma} = 1.282 \quad \text{a bod} \quad \frac{1.6 - \mu}{\sigma} = -1.645,$$

$$\text{sy'n arwain at} \quad 1.8 - \mu = 1.282\sigma \quad \text{ac} \quad 1.6 - \mu = -1.645\sigma.$$

Mae tynnu'r ail hafaliad o'r cyntaf yn rhoi

$$0.2 = 2.927\sigma, \quad \text{ac felly mae } \sigma = \frac{0.2}{2.927} \approx 0.0683.$$

Gan ddileu σ o'r ddau hafaliad trwy gymryd eu cymhareb, ceir bod

$$\frac{1.8 - \mu}{1.6 - \mu} = -\frac{1.282}{1.645} \quad \text{neu fod} \quad 1.645(1.8 - \mu) = -1.282(1.6 - \mu)$$

a thrwy hyn mae'n dilyn bod

$$\mu = \frac{1.645 \times 1.8 + 1.282 \times 1.6}{1.645 + 1.282} = 1.7124$$

Felly, yn gywir i dri lle degol, mae gan daldra oedolion gwryw gymedr 1.712 m a gwyriad safonol 0.068 m.

Ymarfer 1.6b

- O wybod bod gan X ddosraniad normal, cymedr 2 a gwyriad safonol 1,
 - enrhifwch yn gywir i dri lle degol (i) $P(X < 2)$, (ii) $P(X < 3.65)$, (iii) $P(X > 2.07)$, (iv) $P(0 < X < 3)$, (v) $P(1.56 < X < 2.54)$;
 - darganfyddwch c , i dri ffigur ystyrlon, ym mhob achos lle mae (i) $P(X > c) = 0.005$, (ii) $P(X < c) = 0.1$.
- O wybod bod gan X ddosraniad normal, cymedr 2.86 a gwyriad safonol 1.2 darganfyddwch werthoedd
 - $P(X < 3.7)$, (b) $P(X > 1.72)$, (c) $P(3.1 < X < 3.4)$, (d) $P(1.66 < X < 2.98)$.
- Tybiwch fod gan yr amser X y mae athletwr yn ei gymryd i redeg 1500 m ddosraniad normal, cymedr 4 munud a gwyriad safonol 20 eiliad. Cyfrifwch y

tebygolrwydd y bydd yr athletwr yn rhedeg 1500 m mewn (a) llai na 4 munud, (b) llai na 3.25 munud, (c) amser rhywle rhwng 3.9 munud a 4.2 munud.

4. Mae gan y pwysau a gofnodir wrth bwyso gwrthrych dro ar ôl tro ar glorian arbennig ddosraniad normal, cymedr sy'n hafal i wir bwysau'r gwrthrych a gwriad safonol 0.02 g.
Os defnyddir y glorian unwaith i bwyso gwrthrych y mae ei wir bwysau yn 10 g, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y pwysau a gofnodir yn yr amrediad rhwng 9.99 g a 10.02 g.
5. Mae gan ddwy ddyfais electronig A a B oes o X mis ac Y mis yn ôl eu trefn, lle mae gan $X \sim N(40, 6^2)$ ac $Y \sim N(45, 3^2)$. Penderfynwch ba un o'r ddwy ddyfais sydd fwyaf tebygol o barhau i weithio am (a) o leiaf 48 mis, (b) o leiaf 52 mis.
6. Mae defnyddio prawf safonol yn eang i brofi gallu plant o oedran arbennig yn rhoi sgoriau y gellir modelu eu dosraniad gan ddosraniad normal, cymedr 74 a gwriad safonol 15. Mae'r prawf hwn yn cael ei argymhell ar gyfer pennu graddau a mabwysiedir y system ganlynol. Rhoddir y radd uchaf 'A' i 10% o'r ymgeiswyr, y radd nesaf 'B' i 30% o'r ymgeiswyr, y drydedd radd 'C' i 40% o'r ymgeiswyr, a'r radd isaf 'D' i'r 20% o'r ymgeiswyr sy'n weddill. Darganfyddwch amrediad y sgoriau ar gyfer pob gradd.
7. Defnyddir offer arbennig i fesur hyd ac mae'n wybyddus fod gan ei gyfeiliornad ddosraniad normal, cymedr sero a gwriad safonol 0.5 mm.
Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd y cyfeiliornad mewn mesuriad
(a) yn fwy nag 1 mm **yn rhifiadol**,
(b) yn fwy na 0.5 mm **yn rhifiadol**.
8. Mae gan oes bylbiau golau arbennig ddosraniad normal, cymedr 1060. Darganfyddwch, yn gywir i ddau le degol, gwriad safonol yr oes o wybod bod gan 80% o'r bylbiau oesoedd sydd dros 1050 awr.
9. Mae gan ddiamedr mewnol pibell ddosraniad normal, cymedr 4 cm a gwriad safonol 0.1 cm. Y gofynion ar gyfer diamedr mewnol pibell yw 4 cm. Os bydd y gwahaniaeth rhwng y diamedr a'r gofynion yn fwy na 0.05 cm ond yn llai na 0.08 cm, bydd y gwneuthurwr yn colli 50c. Os bydd y gwahaniaeth yn fwy na 0.08 cm yna bydd y gwneuthurwr yn colli £1. Mae'r gwneuthurwr yn gwneud elw o £2 ar bob pibell y mae ei diamedr o fewn 0.05 cm i'r gofynion.

Darganfyddwch, i'r geiniog agosaf, elw disgwylidig y gwneuthurwr am bob pibell.

10. Defnyddir dyfais awtomatig i lenwi cynhwysyddion â hylif. Pan osodir y ddyfais i roi μ cm^3 ym mhob cynhwysydd mae gan y gwir gyfaint a roddir ddosraniad normal, cymedr μ cm^3 a gwyriad safonol 0.1 cm^3 .
- (a) Os gosodir y ddyfais i roi 12 cm^3 ym mhob cynhwysydd, cyfrifwch yn gywir i ddau le degol gyfrannedd y cynhwysyddion a fydd yn cynnwys rhwng 11.8 cm^3 a 12.1 cm^3 .
- (b) Darganfyddwch, i 2 le degol, werth μ y dylid ei osod os yw'n angenrheidiol mai dim ond 10% o'r cynhwysyddion sy'n cynnwys llai na 12 cm^3 o hylif.
11. Mae dyn yn dilyn yr un daith i'w waith bob dydd. Mae ei waith yn dechrau am 08.30. Os yw'n gadael ei gartref am 07.30 mae'n hwyr 5% o'r amser, ond os yw'n gadael ei gartref am 07.25 nid yw ond yn hwyr 1% o'r amser. A bwrw bod gan yr amseroedd y mae'n eu cymryd i gyrraedd y gwaith ddosraniad normal gyda'r un cymedr a gwyriad safonol beth bynnag yw'r amser cychwyn, cyfrifwch y cymedr a'r gwyriad safonol.
12. Tynnir elfen arbennig o ddefnydd crai gan ddefnyddio unrhyw un o blith dau ddull A a B. O gyfaint penodol o ddefnydd crai gellir cael X cm^3 o'r elfen trwy ddefnyddio dull A neu Y cm^3 trwy ddefnyddio dull B. Mae gan X ddosraniad normal, cymedr 13 a gwyriad safonol 2. Mae gan Y ddosraniad gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
- $$f(y) = 0.08(y - 10), \text{ ar gyfer } 10 \leq y \leq 15.$$
- Penderfynwch ba un o'r ddau ddull (a) sydd â'r tebygolrwydd mwyaf o dynnu mwy na 14 cm^3 , (b) sy'n tynnu'r maint mwyaf ar gyfartaledd.
- Cost defnyddio dull A yw 3 ceiniog am bob cm^3 a dynnir, a chost defnyddio dull B yw $(15 + 2Y)$ ceiniog. © Os gwerthir yr elfen a dynnir am 5 ceiniog y cm^3 , penderfynwch ba un o'r ddau ddull sy'n rhoi'r elw disgwylidig mwyaf.
13. Mewn arholiad penodol, cafwyd bod gan y marciau ddosraniad normal, cymedr 42 a gwyriad safonol 10. Am reswm arbennig roedd angen trawsffurfio'r marciau hyn er mwyn i'r cymedr fod yn 50 a'r gwyriad safonol yn 15. Orlheiniwch y trawsffurfiad angenrheidiol a darganfyddwch y marc newydd sy'n cyfateb i farc gwreiddiol o 40.

14. Mae gan yr amser y mae dynes y post yn ei gymryd i ddosbarthu post i ystâd benodol o dai ddosraniad normal, cymedr 12 munud a gwyriad safonol 2 funud. A bwrw ei bod hi'n dosbarthu post i'r ystâd hon ar 300 diwrnod mewn blwyddyn, amcangyfrifwch nifer y diwrnodau pryd mae'n cymryd
(a) mwy na 17 munud, (b) llai na 10 munud, (c) rhwng 10 a 15 munud.
15. Mae'n hysbys bod gan fasau'r eitemau a gynhyrchir mewn ffatri benodol ddosraniad normal. O wybod bod gan 5% o'r eitemau fâs mwy na 85 g a bod gan 10% fâs llai na 25 g, darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol masau'r eitemau.
16. Mae gan ferynnau a gynhyrchir mewn ffatri ddiamedrau sydd â dosraniad normal, cymedr 14.2 mm a gwyriad safonol 1.2 mm.
(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd gan feryn a ddewisir ar hap ddiamedr llai na 13.9 mm.
(b) Dewisir chwe beryn ar hap. Darganfyddwch, i ddau ffigur ystyrlon, y tebygolrwydd y bydd gan o leiaf pump o'r chwe beryn ddiamedrau yn yr amrediad rhwng 13.9 mm a 14.5 mm.
17. Mae gan gryfder torri rhaff, X kg, ddosraniad normal, cymedr 100 a gwyriad safonol 4. Gwerthir pob coil o'r rhaff am elw o £25 os yw $X > 95$, ond os yw $X \leq 95$ mae'n rhaid gwerthu'r coil ar gyfer pwrpas gwahanol am elw o £10. Cyfrifwch yr elw disgwyliedig am bob coil.
18. Mae gan faint yr hylif a ddosberthir i bob cwpan gan beiriant gwerthu diodydd ddosraniad normal, cymedr 200 ml a gwyriad safonol 8 ml.
(a) O wybod bod cynhwysedd mwyaf cwpan yn 210 ml cyfrifwch gyfrannedd y cwpanau a fydd yn gorlenwi.
(b) Darganfyddwch, i'r ml agosaf, y cynhwysedd mwyaf a ddylai fod gan gwpan os 1% yn unig o'r cwpanau sydd am orlenwi.

1.7 Brasamcanion normal ar gyfer dosraniadau binomaidd a dosraniadau Poisson

Gwelwyd sut mae tablau yn symleiddio'r dasg o enrhifo tebygolrwyddau digwyddiadau sy'n gysylltiedig â dosraniad normal. Pan fydd yn anodd enrhifo tebygolrwydd rhyw ddigwyddiad sy'n gysylltiedig â dosraniad annormal neu pan fydd hyn yn cymryd gormod o amser, byddai'n werth edrych ar y posibilrwydd o frasamcanu'r dosraniad trwy ddosraniad normal a'i ddefnyddio i ddarganfod gwerth

bras i'r tebygolrwydd. Oherwydd bod gan y dosraniad normal siâp cloch a'i fod yn gymesurol, ni all weithredu fel brasamcan ond ar gyfer dosraniad sydd yn agos at siâp cloch ac sy'n gymesurol neu bron yn gymesurol. Dylid defnyddio'r dosraniad normal sydd â chymedr ac amrywiant sy'n hafal i rai'r dosraniad sy'n cael ei frasmcanu. Er enghraifft, tybiwch fod gan $X \sim B(200, 0.6)$ a bod angen enrhifo $P(X \leq 100)$. Heb dabl neu raglen gyfrifiadurol o debygolrwyddau binomaidd ar gyfer $n = 200$ a $p = 0.6$ mae gennym dasg anferth. Gwelwn yn yr enghraifft hon y gellir cael gwerth sy'n rhesymol agos ar gyfer y tebygolrwydd trwy dybio bod dosraniad X yn agos at y dosraniad normal sydd â'i gymedr sy'n $200 \times 0.6 = 120$ a'i amrywiant yn $120 \times 0.4 = 48$.

Byddwn hefyd yn ystyried brasamcan normal ar gyfer enrhifo tebygolrwyddau Poisson.

Cyn trafod yr amodau lle mae brasamcanion normal ar gyfer dosraniadau binomaidd a dosraniadau Poisson yn briodol, sylwer yn gyntaf ym mhob achos ein bod yn defnyddio dosraniad di-dor i frasmcanu dosraniad hapnewidyn arwahanol, sydd â gwerthoedd posibl sy'n gyfanrifau an-negatif. Er mwyn gwneud hyn mae angen gwasgaru'r tebygolrwydd a roddir i'r cyfanrif k dros y cyfwng o $k - 0.5$ i $k + 0.5$; cyfeirir at hyn fel y **cywiriad didoriant**. Boed i X ddynodi hapnewidyn arwahanol y mae ei werthoedd posibl yn gyfanrifau. Tybiwch y defnyddir dosraniad Y , lle mae Y yn hapnewidyn di-dor, fel brasamcan ar gyfer dosraniad X . Yna, wrth wneud y cywiriad didoriant, ceir ar gyfer unrhyw gyfanrif k bod

$$P(X = k) \approx P(k - 0.5 < Y < k + 0.5),$$

$$P(X \leq k) \approx P(Y < k + 0.5)$$

$$P(X \geq k) \approx P(Y > k - 0.5).$$

Brasamcan normal ar gyfer dosraniad binomaidd

Fel a ddangosir uchod ni fydd brasamcan normal ar gyfer $B(n, p)$ yn rhesymol oni bai bod y dosraniad $B(n, p)$ yn gymesurol neu yn agos at fod yn gymesurol. Mae'r dosraniad $B(n, p)$ yn gymesurol ar gyfer $p = 0.5$, ac felly pan fo $p = 0.5$ bydd brasamcan normal yn briodol. Gan fod y dosraniad normal yn estyn o $-\infty$ i $+\infty$ ond bod $B(n, 0.5)$ yn estyn o 0 i n , mae'n dilyn mai po fwyaf yw gwerth n , y gorau oll yw'r brasamcan. Ar gyfer unrhyw werth $p \neq 0.5$, po fwyaf yw gwerth n agosaf yw'r dosraniad $B(n, p)$ at fod yn gymesurol; felly po bellaf y mae p yn gwyro oddi wrth 0.5 po fwyaf y bydd angen i n fod er mwyn i'r brasamcan normal fod yn rhesymol dda. Nid yw'n bosibl ffurfio rheol am ba werthoedd o n a p y bydd brasamcan normal yn rhesymol ar eu cyfer. Mae cyfarwyddyd defnyddiol wedi ei seilio ar yr angen i'r rhan fwyaf o'r dosraniad normal fod yn y cyfwng $[0, n]$, sef amrediad gwerthoedd y binomial $B(n, p)$. Ar gyfer y dosraniad $N(\mu, \sigma^2)$ gellir gwireddu o dablau fod gan y cyfwng $[\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma]$ debygolrwydd 0.99994 , sy'n ddigon agos at 1 i bwrpasau

ymarferol. Oherwydd bod gan ein brasamcan normal gymedr np ac amrywiant npq , mae hyn yn awgrymu y dylai

$$np - 4\sqrt{npq} > 0 \quad \text{ac} \quad np + 4\sqrt{npq} < n,$$

ac mae'n dilyn o hyn y dylai n fod yn fwy na $16p/q$ ac $16q/p$, pa un bynnag fo'r mwyaf.

Felly, i benderfynu a yw'n rhesymol defnyddio brasamcan normal ar gyfer $B(n, p)$, gellir defnyddio rheol fras, sef gwireddu bod

$$n > \text{mwyaf}\left(\frac{16p}{q}, \frac{16q}{p}\right).$$

Ystyriwch $B(200, 0.6)$. Ceir bod

$$\frac{16p}{q} = 16 \times \frac{0.6}{0.4} = 24 \quad \text{a} \quad \frac{16q}{p} = 16 \times \frac{0.4}{0.6} = 10.67.$$

Yn yr achos hwn mae $n = 200$ sy'n fwy o lawer na 24 ac felly dylai brasamcan normal fod yn un da.

Enghraifft 1

Os oes gan $X \sim B(200, 0.6)$ darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer

(a) $P(X = 110)$, (b) $P(X \geq 100)$, (c) $P(120 < X < 140)$.

Datrysiaid

Mae gan $B(200, 0.6)$ gymedr $200 \times 0.6 = 120$ ac amrywiant $120 \times 0.4 = 48$.

Boed i $Y \sim N(120, 48)$, a hwn fydd ein brasamcan normal ar gyfer $B(200, 0.6)$.

(a) Wrth weithredu'r cywiriad didoriant, mae $P(X = 110) \equiv P(109.5 < X < 110.5)$.

$$\begin{aligned} \text{Mae } P(X = 110) &\approx P(109.5 < Y < 110.5) \\ &= P\left(\frac{109.5 - 120}{\sqrt{48}} < Z < \frac{110.5 - 120}{\sqrt{48}}\right) \\ &\approx P(-1.52 < Z < -1.37) \\ &= P(1.37 < Z < 1.52) \quad \text{trwy ddefnyddio cymesuredd } N(0, 1), \\ &= P(Z < 1.52) - P(Z < 1.37) = 0.93574 - 0.91466 \\ &= 0.021 \text{ i 3 lle degol.} \end{aligned}$$

[Y tebygolrwydd binomaidd yw 0.0202 yn gywir i 4 lle degol.]

(b) Mae $P(X \geq 100) \equiv P(X > 99.5) \approx P(Y > 99.5)$

$$\begin{aligned} &= P\left(Z > \frac{99.5 - 120}{\sqrt{48}}\right) \approx P(Z > -2.96) = P(Z < 2.96) \\ &= 0.99846 = 0.998 \text{ i 3 lle degol.} \end{aligned}$$

[Y tebygolrwydd binomaidd yw 0.9983 yn gywir i 4 lle degol.]

$$\begin{aligned} \text{(c) Mae } P(120 < X < 140) &\equiv P(121 \leq X \leq 139) \equiv P(120.5 < X < 139.5) \\ &\approx P(120.5 < Y < 139.5) \\ &= P\left(\frac{120.5 - 120}{\sqrt{48}} < Z < \frac{139.5 - 120}{\sqrt{48}}\right) \\ &\approx P(0.07 < Z < 2.81) \\ &= P(Z < 2.81) - P(Z < 0.07) \\ &= 0.99752 - 0.52790 = 0.470 \text{ i 3 lle degol.} \end{aligned}$$

[Y tebygolrwydd binomaidd yw 0.4710 yn gywir i 4 lle degol.]

Ymarfer 1.7a

1. Os oes gan $X \sim B(20, 0.5)$ defnyddiwch ddosraniad normal i ddarganfod gwerthoedd bras ar gyfer (a) $P(X = 11)$, (b) $P(X \leq 15)$, (c) $P(7 \leq X \leq 15)$. Cymharwch eich brasamcanion â'r union debygolrwyddau a geir trwy ddefnyddio Tabl 1 (tablau RND neu M&B).
2. Os oes gan $X \sim B(50, 0.4)$ defnyddiwch ddosraniad normal i ddarganfod gwerthoedd bras ar gyfer (a) $P(X = 19)$, (b) $P(X \leq 24)$, (c) $P(18 \leq X \leq 25)$. Cymharwch eich brasamcanion â'r union debygolrwyddau a geir trwy ddefnyddio Tabl 1 (RND neu M&B).
3. Darganfyddwch werth bras ar gyfer y tebygolrwydd o gael o leiaf 50 pen mewn 120 tafliad o ddarn arian diduedd.
4. Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad $B(n, p)$. Trwy ddefnyddio brasamcanion priodol **pan fo angen**, enrhifwch $P(X = np)$ ym mhob un o'r achosion pan fydd (a) $n = 400, p = 0.5$, (b) $n = 550, p = 0.8$, (c) $n = 50, p = 0.8$.
5. Teflir dau ddis teg gyda'i gilydd 180 gwaith. Darganfyddwch werth bras i'r tebygolrwydd mai 7 fydd cyfanswm y sgoriau mewn o leiaf 25 o'r tafliadau.
6. Mae 120 o gydrannau mewn dyfais electronig ac ni fydd yn gweithio trwy gyfnod penodol oni bai bod o leiaf 100 o'r cydrannau yn iawn trwy'r cyfnod. Yn annibynnol ar gyfer pob cydran y tebygolrwydd yw 0.25 y bydd cydran yn methu yn ystod y cyfnod. Darganfyddwch werth bras ar gyfer y tebygolrwydd y bydd y ddyfais yn gweithio trwy'r cyfnod.
7. O blith poblogaeth Cymru a Lloegr, mae gan 22% grŵp gwaed A. Mewn hapsampl o 150 o bobl darganfyddwch werth bras ar gyfer y tebygolrwydd mai nifer y bobl yn y sampl â'u gwaed yn A yw (a) 20 neu lai, (b) 30 neu ragor.
8. Y tebygolrwydd fod plentyn yn llawchwith yw 0.2. Ar gyfer ysgol o 1600 o blant defnyddiwch brasamcan normal i ddarganfod y tebygolrwydd y bydd nifer y plant llawchwith yn yr ysgol rhwng 330 a 350, y ddau ffigur yn gynwysedig.
9. Mae'n hysbys y bydd 35% o blant yn absennol o'r ysgol ar o leiaf un diwrnod yn ystod tymor. Defnyddiwch ddosraniad normal i ddarganfod gwerthoedd bras

- ar gyfer y tebygolrwyddau mewn sampl o 400 o blant y bydd y nifer sy'n absennol o'r ysgol ar o leiaf un diwrnod yn ystod y tymor nesaf
- (a) yn llai na 120, (b) rhwng 120 a 150, yn gynwysedig, (c) yn fwy na 160.
10. Gwerthir math arbennig o hadau blodau mewn pecynnau, sy'n cynnwys 150 o hadau. Mae'n hysbys y bydd 40% o hadau o'r fath yn egino a chynhyrchu blodau gwyn. Darganfyddwch werth bras ar gyfer y tebygolrwydd y bydd rhwng 50 a 60 (y ddau ffigur yn gynwysedig) o'r hadau mewn pecyn yn cynhyrchu blodau gwyn.
11. Mewn papur prawf aml-ddewis mae 100 cwestiwn, i gyd â dewis o dri ateb, ond un yn unig ohonynt sy'n gywir. Er mwyn llwyddo yn y prawf mae angen ateb o leiaf 40 cwestiwn yn gywir. Defnyddiwch ddosraniad normal i ddarganfod werth bras ar gyfer y tebygolrwydd y bydd ymgeisydd sy'n dewis ei atebion i bob cwestiwn ar hap yn llwyddo yn y prawf. Darganfyddwch hefyd werth bras ar gyfer y tebygolrwydd y bydd ymgeisydd o'r fath yn llwyddo os cynyddir nifer yr atebion i bob cwestiwn i bedwar.

Brasamcan normal ar gyfer dosraniad Poisson

Ni all dosraniad Poisson fod yn gymesurol ond po fwyaf yw'r cymedr μ agosaf yw'r dosraniad at fod yn gymesurol. Gan fod cymedr ac amrywiant y dosraniad Poisson gyda pharamedr μ hefyd i gyd yn μ , y dosraniad normal priodol ar gyfer brasamcanu fydd $N(\mu, \mu)$. Gan fod y dosraniad Poisson yn estyn o 0 hyd ∞ , mae'r rheol a ddefnyddir fel canllaw ar gyfer y dosraniad binomaidd yn arwain at yr amod

$$\mu - 4\sqrt{\mu} > 0 \text{ neu } \mu > 16.$$

Trwy hyn, dylai brasamcan normal ar gyfer dosraniad Poisson fod yn rhesymol ar gyfer unrhyw $\mu > 16$, a po fwyaf yw gwerth μ , y gorau fydd y brasamcan.

Enghraifft 2

Os oes gan $X \sim \text{Po}(15)$ defnyddiwch Dabl 2 i enrhifo'r canlynol:

$$(a) P(X = 15), \quad (b) P(12 \leq X \leq 17), \quad (c) P(X \leq 13).$$

Defnyddiwch ddosraniad normal i ddarganfod gwerthoedd bras ar gyfer y tebygolrwyddau hyn.

Datrysiaid

(a) Wrth ddefnyddio Tabl 2 (RND), mae

$$P(X = 15) \equiv P(X \leq 15) - P(X \leq 14) = 0.5681 - 0.4657 = 0.1024.$$

Defnyddir $Y \sim N(15, 15)$ fel y brasamcan normal ar gyfer dosraniad X . Wrth weithredu'r cywiriad didoriant ceir bod

$$\begin{aligned} P(X = 15) &\equiv P(14.5 < X < 15.5) \approx P(14.5 < Y < 15.5) \\ &= P\left(\frac{14.5 - 15}{\sqrt{15}} < Z < \frac{15.5 - 15}{\sqrt{15}}\right) \approx P(-0.13 < Z < 0.13) \end{aligned}$$

$$= 0.55172 - (1 - 0.55172) = 0.1034,$$

sy'n rhesymol o agos at yr union werth sef 0.1024, gan ei fod yn gywir i ddau le degol.

(b) Gan ddefnyddio Tabl 2 ceir bod

$$P(12 \leq X \leq 17) = P(X \leq 17) - P(X \leq 11) = 0.7489 - 0.1848 = 0.5641.$$

Gan ddefnyddio'r brasamcan normal a'r cywiriad didoriant ceir bod

$$\begin{aligned} P(12 \leq X \leq 17) &\equiv P(11.5 < X < 17.5) \approx P(11.5 < Y < 17.5) \\ &= P\left(\frac{11.5 - 15}{\sqrt{15}} < Z < \frac{17.5 - 15}{\sqrt{15}}\right) \approx P(-0.90 < Z < 0.65) \end{aligned}$$

$$= 0.74215 - (1 - 0.81594) = 0.55809,$$

sydd hefyd yn rhoi ateb sy'n gywir i ddau le degol.

(c) Gan ddefnyddio Tabl 2, mae $P(X \leq 13) = 0.3632$.

Gan ddefnyddio'r brasamcan normal a'r cywiriad didoriant ceir bod

$$\begin{aligned} P(X \leq 13) &\equiv P(X < 13.5) \approx P(Y < 13.5) \\ &= P\left(Z < \frac{13.5 - 15}{\sqrt{15}}\right) \approx P(Z < -0.39) \\ &= 1 - P(Z < 0.39) = 0.34827 \end{aligned}$$

sef y cyfrifiad lleiaf manwl gywir o'r rhai a wneir yn yr enghraifft hon. [Ond sylwer bod $\mu = 15$ yn llai na'r gwerth lleiaf a nodir uchod ar gyfer cael brasamcan normal sy'n rhesymol.]

Ymarfer 1.7b

1. O wybod bod gan $X \sim \text{Po}(14)$ defnyddiwch dablau Poisson i enrhifo
(a) $P(X = 15)$, (b) $P(X > 20)$, (c) $P(10 < X < 15)$. Defnyddiwch ddosraniad normal i ddarganfod gwerthoedd bras ar gyfer y tebygolrwyddau hyn a rhwch sylwadau ar ba mor fanwl gywir ydynt.
2. Mae gan nifer y galwadau ffôn a wneir i swyddfa bob awr ddosraniad Poisson, cymedr 48. Darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer y tebygolrwyddau y bydd nifer y galwadau mewn awr (a) yn 45 yn union, (b) rhwng 40 a 50, y ddau ffigur yn gynwysedig, (c) dros 60.
3. Mae gan nifer y damweiniau sy'n digwydd ar ran o draffordd ddosraniad Poisson, gyda nifer cymedrig y damweiniau yr wythnos yn 1.8. Darganfyddwch werth bras ar gyfer y tebygolrwydd y bydd llai na 100 o ddamweiniau mewn blwyddyn o 52 wythnos ar y rhan hon o draffordd.

4. Mewn dinas arbennig, mae 35 o fabanod yn cael eu geni ar gyfartaledd bob dydd. (a) Darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer y tebygolrwyddau y bydd nifer y babanod a enir mewn diwrnod yn (i) 25 neu lai, (ii) 30 neu ragor.
(b) Darganfyddwch nifer disgwylidig y dyddiau mewn blwyddyn pan fydd 30 neu ragor o fabanod yn cael eu geni.
5. Mae gan nifer yr allyriadau bob munud o ffynhonnell ymbelydrol ddosraniad Poisson, cymedr 36. Darganfyddwch (a) werthoedd bras i'r tebygolrwydd y bydd nifer yr allyriadau mewn munud rhwng 35 a 38, yn gynnwysedig; (b) werth bras i'r tebygolrwydd y bydd nifer yr allyriadau mewn 5 munud yn llai na 160.
6. Mae gan nifer yr wyau y mae prŷf arbennig yn eu dodwy mewn tymor ddosraniad Poisson, cymedr 200. Darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer y tebygolrwyddau y bydd nifer yr wyau a ddodwyir mewn tymor (a) yn fwy na 160, (b) rhwng 180 a 240, yn gynnwysedig.
7. Mae cwmni yswiriant yn cynnig polisïau i berchenogion tai er mwyn eu diogelu rhag difrod i'r tŷ, cynnwys y tŷ, a cheir. Mae nifer y ceisiadau sy'n cyrraedd y cwmni mewn blwyddyn ar gyfer y tri math hyn o bolisïau yn hapnewidynnau annibynnol sydd â dosraniadau Poisson, cymedrau 20, 50 a 30, yn ôl eu trefn. Darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer y tebygolrwyddau mewn blwyddyn
 - (a) y bydd nifer y ceisiadau ar dai yn 25 neu ragor,
 - (b) y bydd cyfanswm nifer y ceisiadau ar gyfer tai ac ar gyfer cynnwys yn llai na 80,
 - (c) y bydd cyfanswm nifer y ceisiadau ar gyfer y tri math o bolisi rhwng 95 a 102, yn gynnwysedig.

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 1

[Mae arwydd seren * yn dangos rhan a ychwanegwyd at gwestiwn a osodwyd er mwyn cwmpasu canraddau]

1. (1987) Rheolir peiriant gwerthu diodydd ysgafn i roi cyfartaledd o 200 ml ym mhob cwpan. Mae'r maint a roddir mewn gwirionedd yn hapnewidyn sydd â dosraniad normal, cymedr 200 ml a gwyriad safonol 8 ml.
 - (a) O wybod bod cynhwysedd mwyaf cwpan yn 210 ml darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd cwpan yn cael ei orlenwi.
 - (b) Darganfyddwch, i'r ml agosaf, faint y dylai cynhwysedd pob cwpan fod er mwyn sicrhau bod 1% yn unig o'r cwpanau sy'n cael eu gorlenwi. [5]
2. (1987) Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
$$f(x) = 3x^2, \quad \text{ar gyfer } 0 < x < 1,$$
$$f(x) = 0, \quad \text{fel arall.}$$
Darganfyddwch gymedr ac amrywiant (i) X , (ii) X^{-1} . [5]

3. (1987) Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f lle mae $f(x) = \frac{25}{12(x+1)^3}$, ar gyfer $0 \leq x \leq 4$,
 $f(x) = 0$, fel arall.
- (i) Enrhifwch $E(X+1)$. Trwy hyn, neu fel arall, darganfyddwch gymedr X . [4]
 (ii) Darganfyddwch werth $c > 0$ lle mae $P(X \leq c) = c$. [4]
 (iii) * Darganfyddwch ganolrif X yn gywir i dri lle degol.
4. (1988) Mae hyd pob ochr ciwb yn X cm, lle mae X yn hapnewidyn di-dor sydd â ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
 $f(x) = 2x^{-2}$, ar gyfer $1 \leq x \leq 2$
 $f(x) = 0$, fel arall.
- Darganfyddwch gymedr ac amrywiant cyfeintiau'r ciwbiau. [5]
5. (1988) Tybiwch fod gan daldra oedolion gwryw ddosraniad normal, cymedr 174.5 cm a gwyriad safonol 10 cm.
- (i) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd taldra oedolyn gwryw a ddewisir ar hap yn fwy na 175 cm. [2]
 (ii) Defnyddiwch frasmcan dosraniadol er mwyn cyfrifo'r tebygolrwydd fod o leiaf 40 o blith 80 o oedolion gwryw a ddewisir ar hap yn dalach na 175 cm. [4]
6. (1988) Mae gan yr hapnewidyn di-dor X , a gyfyngir i werthoedd yn y cyfwng rhwng 2 a 4, ffwythiant dosraniad cronuss F a roddir gan
 $F(x) = ax^2 + bx$, ar gyfer $2 \leq x \leq 4$.
- (i) Gan ddangos eich dull yn eglur, dangoswch fod $a = \frac{1}{8}$ a bod $b = -\frac{1}{4}$. [3]
 (ii) Darganfyddwch werth c lle mae $P(X > c) = 0.88$. [3]
 (iii) Boed i N ddynodi'r cyfanrif a geir trwy dalgrynnu gwerth X y sylwir arno i'w werth cyfanrifol agosaf. Darganfyddwch ddosraniad tebygolrwydd N a, thrwy hyn, enrhifwch $E(N)$. [4]
 (iv) * Dewch o hyd i fynegiad am x_p , y $100p^{\text{fed}}$ canradd o'r dosraniad. Trwy hyn, neu fel arall, cyfrifwch y canolrif a'r chwartelau.
7. (1989) Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad normal, cymedr $\mu (> 0)$ a gwyriad safonol 0.1μ . (i) Os yw $\mu = 5$ darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd gwerth X y sylwyd arno ar hap yn fwy na 5.5. (ii) Darganfyddwch werth μ , yn gywir i ddau le degol, os yw'r tebygolrwydd fod gwerth X y sylwyd arno ar hap yn fwy na 30, yn hafal i 0.4. [5]
8. (1989) Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
 $f(x) = a(x-b)$, ar gyfer $2 \leq x \leq 5$,
 $f(x) = 0$, fel arall,
 lle mae a a b yn gysonion.

- (i) O wybod bod a yn bositif ysgrifennwch y gwerth mwyaf posibl ar gyfer b .
- (ii) Trwy integru $f(x)$ dros gyfwng priodol dangoswch fod $21a - 6ab = 2$.
- (iii) O wybod bod cymedr y dosraniad yn 3.8, darganfyddwch werthoedd a a b , a dangoswch fod amrywiant y dosraniad yn hafal i 0.66. [9]
9. (1990) Dosrennir yr hapnewidyn di-dor X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae
- $$f(x) = 2(2 - x), \quad \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 2,$$
- $$f(x) = 0, \quad \text{fel arall.}$$
- (i) Enrhifwch gymedr X .
- (ii) Darganfyddwch werth disgwyledig arwynebedd y petryal sydd â hydoedd ochrau cyfagos yn X cm a $(5 - 2X)$ cm. [5]
- (iii) *Cyfrifwch ganolrif ac amrediad rhyngchwartel y dosraniad.
10. (1991) Yn annibynnol ar gyfer pob hedyn o fath arbennig o flodyn a gaiff ei hau, y tebygolrwydd fod yr hedyn yn egino yw 0.8. Defnyddiwch frasmcan normal i ddarganfod y tebygolrwydd fod 324 yn union o 400 hedyn yn egino. [3]
11. (1991) Dosrennir yr hapnewidyn di-dor X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
- $$f(x) = 12x^2(1 - x), \quad \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 1,$$
- $$f(x) = 0, \quad \text{fel arall.}$$
- Enrhifwch gymedr ac amrywiant X . Diddwythwch gymedr ac amrywiant $Y = 6 - 5X$. [6]
12. (1991) Dosrennir yr hapnewidyn di-dor X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
- $$f(x) = \frac{4}{(x + 2)^2}, \quad \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 2,$$
- $$f(x) = 0, \quad \text{fel arall.}$$
- (i) Darganfyddwch ddosraniad cronus, F , X . Trwy hyn, neu fel arall, enrhifwch y tebygolrwydd amodol $P\left(X \leq \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3}\right)$. [6]
- (ii) Enrhifwch $E(X + 2)$ ac $E[(X + 2)^2]$. Trwy hyn, neu fel arall, darganfyddwch gymedr ac amrywiant X . [4]
13. (1992) Mae gan bibellau a gynhyrchir mewn ffatri ddiamedrau mewnol sydd â dosraniad normal, cymedr 10 cm a gwyriad safonol 0.4 cm.
- (i) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd gan bibell a ddewisir ar hap ddiamedr mewnol mwy na 10.3 cm.
- (ii) Darganfyddwch werth d , yn gywir i ddau le degol, os oes gan 95% o'r pibellau ddiamedrau mewnol mwy na d cm. [4]

14. (1992) Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan

$$\begin{aligned}f(x) &= 3c, & \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 1, \\f(x) &= c(4 - x), & \text{ar gyfer } 1 \leq x \leq 4, \\f(x) &= 0, & \text{fel arall.}\end{aligned}$$

- (a) Dangoswch fod $c = 2/15$. [2]
(b) Darganfyddwch werth cymedrig X . [3]
(c) Darganfyddwch fynegiadau ar gyfer $F(x)$, lle mae F yn cynrychioli ffwythiant dosraniad cronus X , gan nodi yn eglur y gwerthoedd x y mae pob mynegiad yn ddilys ar eu cyfer. Trwy hyn, neu fel arall, enrhifwch $P(0.5 < X < 2.5)$. [6]
(d) *Cyfrifwch ganolrif a chwartelau y dosraniad.

15. (1993) Mae gan hyd eitem a gynhyrchir mewn ffatri ddosraniad normal, cymedr 24.3 cm a gwriad safonol 0.4 cm. Gwrthodir eitem os yw ei hyd yn llai na 23.7 cm neu yn fwy na 25.2 cm. Cyfrifwch

- (a) ganran yr eitemau a wrthodir,
(b) ganran yr eitemau a wrthodir sy'n fwy na 25.2 cm [5]

16. (1993) Mae gyrrwr yn teithio yn aml o un dref i dref arall sydd 132 km i ffwrdd. Mae'r daith yn cynnwys 60 km o draffordd a 72 km o ffyrdd eraill. Mae cyflymder cyfartalog y car ar y draffordd yn 100 km yr awr ac ar y ffyrdd eraill yn X km yr awr, lle mae X yn hapnewidyn di-dor gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan

$$\begin{aligned}f(x) &= x/2250, & \text{ar gyfer } 60 \leq x \leq 90, \\f(x) &= 0, & \text{fel arall.}\end{aligned}$$

- (a) Darganfyddwch ffwythiant dosraniad cronus X . [3]
(b) Dangoswch fod amser, T awr, y daith yn $T = 0.6 + 72/X$. Trwy hyn, neu fel arall, darganfyddwch (i) y tebygolrwydd y bydd yr amser a gymer taith yn fwy nag 1 awr 36 munud, (ii) amser disgwylidig y daith. [7]

17. (1994) Mae gan yr hapnewidyn di-dor X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$\begin{aligned}f(x) &= kx(4 - x^2), & \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 2, \\f(x) &= 0, & \text{fel arall}\end{aligned}$$

- (i) Dangoswch fod $k = 0.25$. (ii) Cyfrifwch werth cymedrig X . [5]

18. (1995) Mae gan yr hapnewidyn X ffwythiant dwysedd tebygolrwydd

$$\begin{aligned}f(x) &= k(x - 1)^2, & \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 2, \\f(x) &= 0, & \text{fel arall}\end{aligned}$$

- (a) Darganfyddwch werth y cysonyn k .
(b) Darganfyddwch, ar gyfer pob un o werthoedd x , ffwythiant dosraniad cronus X .
(c) Cyfrifwch $P(0.5 < X < 1.5)$.

- (d) Darganfyddwch werth a , lle mae $P(X \geq a) = 0.25$. [9]
- (e) *Cyfrifwch amrediad rhyngchwartel 10–90 y dosraniad.
19. (S1 Ionawr 1996) Rhoddir i chi union oedran pob disgybl yn eich dosbarth a gofynnir i chi eu talgrynnu i lawr i gyfanrif o flynyddoedd, e.e. caiff 17 mlwydd a 201 diwrnod ei dalgrynnu i 17 mlwydd. Os yw X diwrnod yn dynodi'r gwahaniaeth rhwng yr union oedran a'r oedran wedi'i dalgrynnu, (a) enwch ddosraniad di-dor y gellid ei ddefnyddio i fodelu X , gan roi rheswm dros eich dewis, (b) defnyddiwch eich model i ysgrifennu gwerth cymedrig X . [3]
20. (S1 Ionawr 1996) Mae gan hydoedd rhywogaeth arbennig o fadfall ddosraniad normal, cymedr 1.2 m a gwriad safonol 0.2 m.
- (a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd hyd un o'r madfallod hyn a ddewisir ar hap rhwng 1.1 m a 1.6 m. [3]
- (b) Pa hyd y mae 2% o'r madfallod yn hwy nag ef? Rhowch eich ateb yn gywir i ddau le degol. [3]
21. (S1 Ionawr 1996) Mae athro addysg gorfforol yn gyrru car am 12 milltir i'r ysgol ar hyd ffyrdd gwastad. Trwy arsylwi dros gyfnod o flwyddyn, mae'n darganfod y gellir modelu amser y daith, T awr, gan hapnewidyn gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan
- $$\begin{aligned} f(t) &= k(t - 0.5), & \text{ar gyfer } 0.5 \leq t \leq 1, \\ f(t) &= 0, & \text{fel arall.} \end{aligned}$$
- (a)(i) Darganfyddwch werth k . [2]
- (ii) Cyfrifwch amser cymedrig y daith. [3]
- (iii) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd T yn fwy na'r cymedr. [2]
- (b) Nawr mae'r athro yn penderfynu rhedeg i'r ysgol. Nodwch, gan roi eich rhesymau, a fyddai
- (i) cymedr, (ii) gwriad safonol
- amser y daith nawr yn llai neu yn fwy na'r gwerthoedd cyfatebol ar gyfer daith mewn car. [2]
- (c) *Cyfrifwch ganolrif amser y daith yn gywir i'r munud agosaf.
22. (S1 Mehefin 1996) Mae'r marciau a ddyfernir mewn arholiad cyhoeddus penodol yn gyfanrifau ag iddynt amrediad o 0 i 100. Dyfernir clod i'r ymgeiswyr sy'n ennill marc o 70 neu fwy. Mae dosraniad y marciau a enillwyd gan yr ymgeiswyr i'w fodelu gan ddosraniad normal, cymedr 50 a gwriad safonol 13.
- (a) Defnyddiwch y model, ynghyd â chywiriad didoriant, i ddarganfod, yn gywir i un lle degol, ganran yr ymgeiswyr sy'n ennill clod. [4]
- (b) Rhowch un rheswm pam nad yw'r dosraniad normal yn cynnig model sy'n hollol fanwl gywir ar gyfer dosraniad y marciau a enillir yn yr arholiad. [1]

23. (S1 Mehefin 1996) Gellir modelu dosraniad y glaw haf blynyddol, X cm, sy'n syrthio mewn tref wyliau arbennig gan y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan

$$\begin{aligned} f(x) &= kx(9 - x^2) && \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 3 \\ f(x) &= 0 && \text{fel arall} \end{aligned}$$

Ile mae k yn gysonyn.

- (a) Dangoswch y rhoddir F , ffwythiant dosraniad cronus X , ar gyfer $0 \leq x \leq 3$, gan

$$F(x) = \frac{kx^2(18 - x^2)}{4}. \quad [2]$$

- (i) Diddwythwch fod $k = 4/81$. [2]
(ii) Darganfyddwch y tebygolrwydd fod X rhwng 1 a 2. [2]
(b) Cyfrifwch $E(X)$. [3]

24. (A3 1996) Mae gan rychwant adenydd rhywogaeth arbennig o adar ddosraniad normal, cymedr μ m a gwriad safonol σ m. O wybod bod rychwantau 4.4% o'r adenydd yn fwy nag 1.25 m, dangoswch fod

$$\mu + 1.706\sigma = 1.25. \quad [2]$$

O wybod hefyd fod 3.4% o'r rychwantau adenydd yn llai nag 1.04 m,

- (a) ysgrifennwch ail hafaliad sy'n cynnwys μ a σ , [2]
(b) cyfrifwch μ a σ , bob un yn gywir i dri ffigur ystyrlon. [3]
25. (A3 1996) Modelir dosraniad y cyfaint o betrol, X mil litr, a werthir yn ddyddiol gan fodurdy, gan y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f a roddir gan

$$\begin{aligned} f(x) &= kx^2(4 - x), && \text{ar gyfer } 0 \leq x \leq 4, \\ f(x) &= 0, && \text{fel arall.} \end{aligned}$$

- (a) Dangoswch fod $k = 3/64$. [2]
(b) Cyfrifwch gymedr ac amrywiant X . [5]
(c) Nodwch un rheswm pam ei bod yn bosibl nad yw'r model a ddisgrifir uchod yn fanwl gywir. [1]

Pennod 2

Dau neu Ragor o Hapnewidynnau

2.1 Dau hapnewidyn arwahanol

Gadewch i X ac Y ddynodi dau hapnewidyn arwahanol gyda naill ai'r ddau'n gysylltiedig â chanlyniadau un haparbrawf, neu un o'r ddau yn gysylltiedig â chanlyniadau un haparbrawf a'r llall yn gysylltiedig â chanlyniadau haparbrawf arall. Dynodir gwerthoedd posibl X gan $x_1, x_2, \dots, x_r$ a gwerthoedd posibl Y gan $y_1, y_2, \dots, y_s$. Yna bydd dosraniad cyfun X ac Y yn fanyleb o $P(X = x_i \cap Y = y_j)$ ar gyfer pob (x_i, y_j) . Fe ddefnyddiwn ni p_{ij} i gynrychioli $P(X = x_i \cap Y = y_j)$. Nodwch y bydd swm pob p_{ij} yn hafal i 1 ac y gall rhai gwerthoedd fod yn sero.

Gan fod rhaid i $X = x_i$ ddigwydd gyda unrhyw un o'r y_j , dosraniad X yw

$$P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{is}, \text{ ar gyfer } i = 1, 2, 3, \dots, r \quad (1)$$

Yn yr un modd, dosraniad Y yw

$$P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{rj}, \text{ ar gyfer } j = 1, 2, 3, \dots, s \quad (2)$$

Diffiniad: Diffinnir **gwerth disgwyliedig** unrhyw ffwythiant, $h(X, Y)$, o X ac Y gan

$$E[h(X, Y)] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s h(x_i, y_j) p_{ij}. \quad (3)$$

Estyniad yw hwn o'r diffiniad a roddwyd yn flaenorol ar gyfer gwerth disgwyliedig ffwythiant o un hapnewidyn. Ystyriwch y ffwythiant penodol $h(X, Y) = aX + bY$, lle mae a a b yn gysonion. O hafaliad (3), mae

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (ax_i + by_j) p_{ij} \\ &= a \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_i p_{ij} + b \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s y_j p_{ij} \\ &= a \sum_{i=1}^r x_i \left(\sum_{j=1}^s p_{ij} \right) + b \sum_{j=1}^s y_j \left(\sum_{i=1}^r p_{ij} \right) \\ &= a \sum_{i=1}^r x_i P(X = x_i) + b \sum_{j=1}^s y_j P(Y = y_j) \end{aligned}$$

wrth ddefnyddio hafaliadau (1) a (2) uchod. Trwy hyn mae

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y). \quad (4)$$

Mae hyn yn ganlyniad defnyddiol iawn gan ei fod yn ein galluogi i ddarganfod gwerth disgwylidig $aX + bY$ heb ddarganfod ei ddosraniad yn gyntaf os gwyddom ddosraniadau X ac Y ar wahân yn unig. Gellir cyffredinoli'r canlyniad i

$$E[ag(X,Y) + bh(X,Y)] = aE[g(X,Y)] + bE[h(X,Y)] \quad (5)$$

Er enghraifft, mae

$$\begin{aligned} E(3X - 2Y) &= 3E(X) - 2E(Y), \\ E(2X^2Y - 3X^3) &= 2E(X^2Y) - 3E(X^3) \\ E[X(X - 2Y)] &= E(X^2 - 2XY) = E(X^2) - 2E(XY) \end{aligned}$$

Enghraifft

Tynnir dwy bêl ar hap, heb eu rhoi yn ôl, o flwch sy'n cynnwys 2 bêl goch, 3 pêl wen a 5 pêl las. Boed i X ddynodi nifer y peli coch a dynnir a boed i Y ddynodi nifer y peli gwyn a dynnir.

- Darganfyddwch ddosraniadau X ac Y .
- Darganfyddwch ddosraniad cyfanswm y sgôr os bydd pob pêl goch a dynnir yn sgorio 4 pwynt, pob pêl wen a dynnir yn sgorio 2 bwynt, a phob pêl las a dynnir yn sgorio sero.
- Defnyddiwch eich canlyniadau er mwyn gwireddu bod hafaliad (4) uchod yn wir yn yr enghraifft hon.

Datrysiaid

- Gwerthoedd posibl X yw 0, 1, 2, a'u tebygolrwyddau yw

$$P(X=0) = P(\text{dim pêl goch}) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45},$$

$$P(X=1) = P(1 \text{ pêl goch}) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{8}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{16}{45},$$

$$P(X=2) = P(2 \text{ bêl goch}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}.$$

Felly, dangosir dosraniad X yn y tabl isod.

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

Yn yr un modd, gellir dangos fod dosraniad Y fel a ganlyn.

y	0	1	2
$P(Y=y)$	$\frac{21}{45}$	$\frac{21}{45}$	$\frac{3}{45}$

- (b) Gan fod pob pêl goch a ddewisir yn sgorio 4 pwynt, pob pêl wen a ddewisir yn sgorio 2 bwynt a phob pêl las a ddewisir yn sgorio dim, cyfanswm sgôr y ddwy bêl a ddewisir yw

$$T = 4X + 2Y.$$

I ddarganfod dosraniad T rhaid i ni bennu ei werthoedd posibl a thebygolrwyddau'r gwerthoedd hyn. Y ffordd hawsaf o wneud hynny yw drwy restru holl werthoedd posibl (X, Y) , eu tebygolrwyddau a gwerthoedd cyfatebol T . Gwneir hyn yn y tabl isod.

Nifer a ddewisir Coch Gwyn Glas			X	Y	Tebygolrwydd	$T = 4X + 2Y$
2	0	0	2	0	$\binom{2}{2} / \binom{10}{2} = \frac{1}{45}$	8
1	1	0	1	1	$\binom{2}{1} \times \binom{3}{1} / \binom{10}{2} = \frac{6}{45}$	6
1	0	1	1	0	$\binom{2}{1} \times \binom{5}{1} / \binom{10}{2} = \frac{10}{45}$	4
0	2	0	0	2	$\binom{3}{2} / \binom{10}{2} = \frac{3}{45}$	4
0	1	1	0	1	$\binom{3}{1} \times \binom{5}{1} / \binom{10}{2} = \frac{15}{45}$	2
0	0	2	0	0	$\binom{5}{2} / \binom{10}{2} = \frac{10}{45}$	0

Gan gasglu'r data addas o'r tabl, dosraniad T yw:

t	0	2	4	6	8
$P(T=t)$	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$

[Nodwch fod y tebygolrwyddau'n gwneud cyfanswm o 1, fel sy'n ofynnol]

- (c) O'r tabl hwn gwelwn fod

$$E(T) = 0 \times \frac{10}{45} + 2 \times \frac{15}{45} + 4 \times \frac{13}{45} + 6 \times \frac{6}{45} + 8 \times \frac{1}{45} = \frac{126}{45}.$$

O ddosraniadau X ac Y a gafwyd yn (a) gwelwn fod

$$E(X) = 0 \times \frac{28}{45} + 1 \times \frac{16}{45} + 2 \times \frac{1}{45} = \frac{18}{45}$$

ac
$$E(Y) = 0 \times \frac{21}{45} + 1 \times \frac{21}{45} + 2 \times \frac{3}{45} = \frac{27}{45}$$

Gan amnewid y gwerthoedd hyn ar gyfer $E(X)$ ac $E(Y)$ yn (4) fe gawn ni

$$E(4X + 2Y) = 4E(X) + 2E(Y) = 4 \times \frac{18}{45} + 2 \times \frac{27}{45} = \frac{126}{45} = E(T),$$

sydd yn gwirio dilysrwydd (4) yn yr enghraifft hon.

Ymarfer 2.1

- O wybod bod $E(X) = 5$, $E(X^2) = 30$, $E(Y) = 2$, $\text{Var}(Y) = 4$, ac $E(XY) = 3$, enrhifwch (a) $E(3X - 2Y)$, (b) $E(X^2 - 10Y)$, (c) $E[X(X - 5Y)]$, (d) $E[(X - Y)^2]$, (e) $\text{Var}(X - Y)$
- Dewisir tri rhif ar hap o'r rhifau 1, 2, 3, 4, 5 heb eu hailosod.
 - Rhestrwch yr holl gyfuniadau posibl o'r tri rhif a ddewisir.
 - Gadewch i X ddynodi'r mwyaf ac Y y lleiaf o'r tri rhif a ddewisir. Pennwch ddosraniad $U = X - 2Y$ ac enrhifwch $E(U)$.
 - Darganfyddwch ddosraniadau X ac Y a thrwy hynny werthoedd $E(X)$ ac $E(Y)$. Defnyddiwch (4) uchod i ddarganfod gwerth $E(U)$ gan ofalu fod eich ateb yn cytuno â'ch ateb i (b).
- Teflir dwy geiniog diduedd gyda'i gilydd. Teflir y ceiniogau sy'n dangos pen eto. Gadewch i X ddynodi nifer y pennau a geir ar y taflad cyntaf a gadewch i Y ddynodi nifer y pennau a geir ar yr ail daflad.
 - Enrhifwch $E(X)$ ac $E(Y)$.
 - Darganfyddwch ddosraniad $T = X - Y$ a darganfyddwch werth $E(T)$.
 - Defnyddiwch eich canlyniadau i wirio dilysrwydd (4).
- Mae gan ddis ciwbig teg bedwar wyneb wedi eu rhifo â 0 a'r ddau wyneb arall wedi eu rhifo ag 1. Teflir y dis dair gwaith. Gadewch i X ddynodi swm y tri sgôr a geir a gadewch i Y ddynodi sawl gwaith oedd y sgôr yn 0.
 - Enrhifwch $E(X)$ ac $E(Y)$.
 - Darganfyddwch ddosraniad XY a dangoswch fod $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

2.2 Dau hapnewidyn arwahanol annibynnol

Fe gofiwch fod dau ddigwyddiad A a B yn annibynnol dim ond os yw

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Mae hyn yn arwain at y diffiniad canlynol a ddywed fod dau hapnewidyn arwahanol yn annibynnol.

Diffiniad: Mae'r hapnewidynnau arwahanol X ac Y yn **annibynnol** dim ond os yw

$$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j) \quad \text{ar gyfer pob } (x_i, y_j)$$

Sefyllfa o ddiddordeb arbennig yw pan fo X ac Y yn gysylltiedig â haparbrofion annibynnol, lle mae X ac Y yn amlwg yn annibynnol. Er enghraifft, gall X gynrychioli nifer y pennau a geir mewn deg taflad o geiniog a gall Y gynrychioli cyfanswm y sgoriau pan deflir dis ddwy waith.

Enghraifft 1

Mae Ann am daflu ceiniog ddiduedd ddwy waith a Brenda am daflu ceiniog ddiduedd dair gwaith. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod Ann yn taflu mwy o bennau na Brenda.

Datrysiad

Gadewch i X ddynodi nifer y pennau a deflir gan Ann a gadewch i Y ddynodi nifer y pennau a deflir gan Brenda. Felly, mae $X \sim B(2, \frac{1}{2})$ ac, yn annibynnol, mae $Y \sim B(3, \frac{1}{2})$. Mae angen i ni ddarganfod $P(X > Y)$. Bydd $\{X > Y\}$ ddim ond yn digwydd os yw un o'r rhain yn wir:

$$\{(X = 2) \cap (Y = 0)\} \text{ neu } \{(X = 2) \cap (Y = 1)\} \text{ neu } \{(X = 1) \cap (Y = 0)\},$$

gan fod y digwyddiadau mewn $\{ \}$ yn gyd-anghynhwysol.

Gan fod X ac Y yn annibynnol, mae

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= P(X = 2)P(Y = 0) + P(X = 2)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Enghraifft 2

Hapnewidynnau annibynnol yw X ac Y gyda'r dosraniadau a ddangosir yn y tablau canlynol:

x	2	3
$P(X = x)$	0.6	0.4

y	1	2	3	4
$P(Y = y)$	0.2	0.3	0.3	0.2

Darganfyddwch ddosraniad $W = 2X - Y$ a dewch o hyd i'w gymedr a'i amrywiant.

Datrysiad

Mae'r tabl canlynol yn rhestru'r parau posibl o werthoedd X ac Y , gwerthoedd cyfatebol W a'u tebygolrwyddau.

X	Y	$W = 2X - Y$	Tebygolrwydd
2	1	3	$0.6 \times 0.2 = 0.12$
2	2	2	$0.6 \times 0.3 = 0.18$
2	3	1	$0.6 \times 0.3 = 0.18$
2	4	0	$0.6 \times 0.2 = 0.12$
3	1	5	$0.4 \times 0.2 = 0.08$
3	2	4	$0.4 \times 0.3 = 0.12$
3	3	3	$0.4 \times 0.3 = 0.12$
3	4	2	$0.4 \times 0.2 = 0.08$

[Noder bod cyfanswm y tebygolrwyddau yn 1 fel a ddylai fod.]

Trwy gasglu o'r tabl werthoedd posibl W a'u tebygolrwyddau, ceir dosraniad W fel a ganlyn.

w	0	1	2	3	4	5
$P(W = w)$	0.12	0.18	0.26	0.24	0.12	0.08

Mae $E(W) = 1 \times 0.18 + 2 \times 0.26 + 3 \times 0.24 + 4 \times 0.12 + 5 \times 0.08 = 2.3$.

Mae $E(W^2) = 1 \times 0.18 + 4 \times 0.26 + 9 \times 0.24 + 16 \times 0.12 + 25 \times 0.08 = 7.3$.

Mae $\text{Var}(W) = 7.3 - 2.3^2 = 2.01$.

Ymarfer 2.2a

1. Teflir dis ciwbigol teg ddwywaith. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod y sgôr a geir ar yr ail daflriad o leiaf ddwywaith y sgôr a geir ar y taflriad cyntaf.
2. O wybod bod $X \sim B(5, 0.4)$ ac, yn annibynnol, fod $Y \sim \text{Po}(2)$ enrhifwch (a) $P(X > 2Y)$, (b) $P(XY = 0)$ gan roi eich atebion yn gywir i dri lle degol.
3. Boed i X ddynodi nifer y pennau a geir mewn 3 thaflriad o geiniog diduedd a boed i Y ddynodi sawl tro y ceir 6 mewn 2 daflriad o ddis diduedd. Enrhifwch $P(X + Y \leq 2)$.
4. Hapnewidynnau annibynnol yw X ac Y ac mae gan X ddosraniad binomaidd $B(3, \frac{1}{2})$ a chan Y ddosraniad Poisson $\text{Po}(2)$.
Darganfyddwch, yn nhermau e, y tebygolrwydd
(a) bod gan X ac Y werth sero,
(b) bod gan X ac Y yr un gwerth.
5. Tynnir dwy bêl ar hap, gan ddychwelyd pob un ar ôl ei thynnu, o flwch A sy'n cynnwys 5 pêl goch a 4 pêl las. Ar yr un pryd tynnir tair pêl ar hap, gan ddychwelyd pob un ar ôl ei thynnu, o flwch B sy'n cynnwys 5 pêl goch a 5 pêl las. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod (a) cyfanswm y peli coch a dynnir yn 4, (b) nifer y peli coch a dynnir o flwch A yn fwy na nifer y peli coch a dynnir o flwch B.
6. Gydag X ac Y wedi'u diffinio fel yn Enghraifft 2 uchod, darganfyddwch ddosraniad $S = X + Y$ a chyfrifwch ei gymedr a'i amrywiant.

Priodwedd adioli dau hapnewidyn Poisson annibynnol

Os yw X ac Y yn annibynnol gydag $X \sim \text{Po}(\alpha)$ ac $Y \sim \text{Po}(\beta)$, yna mae

$$X + Y \sim \text{Po}(\alpha + \beta).$$

Prawf

Boed i $S = X + Y$. Gwerthoedd posibl S yw $s = 0, 1, 2, 3, \dots$. Mae angen darganfod mynegiad ar gyfer $P(S = s)$ a dangos ei fod yn gyson â'r dosraniad $\text{Po}(\alpha + \beta)$.

Nid yw'r digwyddiad $\{S = s\}$ yn digwydd oni bai bod X ac Y yn cymryd y gwerthoedd

$$\{(X = 0) \cap (Y = s)\} \text{ neu } \{(X = 1) \cap (Y = s - 1)\} \text{ neu } \dots \text{ neu } \{(X = s) \cap (Y = 0)\}.$$

Gan fod y digwyddiadau mewn $\{ \}$ yn gyd-anghynhwysol a chan fod X ac Y yn annibynnol, mae

$$P(S = s) = P(X = 0)P(Y = s) + P(X = 1)P(Y = s - 1) + \dots + P(X = s)P(Y = 0)$$

Hynny yw, $P(S = s)$ yw swm $P(X = x)P(Y = s - x)$ ar gyfer $x = 0, 1, 2, \dots, s$.

Nawr, mae

$$\begin{aligned} P(X = x)P(Y = s - x) &= \left(e^{-\alpha} \times \frac{\alpha^x}{x!} \right) \times \left(e^{-\beta} \times \frac{\beta^{s-x}}{(s-x)!} \right) \\ &= \frac{e^{-(\alpha+\beta)} \alpha^x \beta^{s-x}}{x!(s-x)!} \\ &= e^{-(\alpha+\beta)} \binom{s}{x} \frac{\alpha^x \beta^{s-x}}{s!}. \end{aligned}$$

Trwy hyn, mae

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{s!} \left\{ \beta^s + \binom{s}{1} \alpha \beta^{s-1} + \binom{s}{2} \alpha^2 \beta^{s-2} + \dots + \alpha^s \right\} \\ &= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{s!} (\beta + \alpha)^s, \text{ ar gyfer } s = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

a gallwn weld mai $Po(\alpha + \beta)$ yw'r mynegiad hwn.

Enghraifft 3

Mae'r niferoedd X , y galwadau allan, ac Y , y galwadau i mewn, trwy gyfnawidfa ffôn yn ystod awr ginio yn hapnewidynnau annibynnol gydag $X \sim Po(3)$ ac $Y \sim Po(5)$.

- (a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd cyfanswm y galwadau i mewn ac allan yn ystod yr awr ginio yn 3.
- (b) O wybod bod 3 galwad yn ystod yr awr ginio cyfrifwch y tebygolrwydd mai un ohonynt yn unig oedd yn alwad allan.

Datrysiaid

- (a) Boed i $T = X + Y$ ddynodi cyfanswm y galwadau allan ac i mewn yn ystod yr awr ginio. Trwy'r briodwedd adiol ar gyfer dosraniadau Poisson annibynnol rydym yn gwybod bod $T \sim Po(3 + 5 = 8)$. Trwy hyn, mae

$$P(T = 3) = e^{-8} \times \frac{8^3}{3!} = \frac{256e^{-8}}{3} \approx 0.0286.$$

- (b) Nawr mae angen enrhifo $P(X = 1 | T = 3)$.

$$P(X = 1 | T = 3) = \frac{P(X = 1 \cap Y = 2)}{P(T = 3)}.$$

Gan fod X ac Y yn annibynnol mae'r rhifiadur yn hafal i

$$P(X=1)P(Y=2) = (e^{-3} \times 3) \times \left(e^{-5} \times \frac{5^2}{2!}\right) = \frac{75}{2}e^{-8}.$$

Gan ddefnyddio'r canlyniad yn rhan (a), mae

$$P(X=1|T=3) = \frac{75}{2}e^{-8} / \frac{256}{3}e^{-8} = \frac{225}{512} \approx 0.4395.$$

Ymarfer 2.2b

1. Mae gan niferoedd, X ac Y, yr allyriadau bob munud o ddwy ffynhonnell ymbelydrol annibynnol, ddosraniadau Poisson, cymedrau 3.4 a 5.6, yn ôl eu trefn. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd cyfanswm o lai na 4 allyriad mewn munud o'r ddwy ffynhonnell.
2. Mae gan ddyn busnes ddwy siop a gyflenwir gan storfa ganolog. Mae gan niferoedd eitem benodol a dderbynnir gan y siopau mewn wythnos ddosraniadau Poisson, cymedrau 6 ac 8, yn ôl eu trefn. Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd mewn wythnos y bydd cyfanswm niferoedd yr eitem a dderbynnir gan y ddwy siop yn llai na 12.
3. Mae gan y troeon y bydd nam ar fy mheiriant golchi llestri mewn blwyddyn ddosraniad Poisson, cymedr 2.4, tra bo gan y troeon y mae nam ar fy mheiriant golchi dillad mewn blwyddyn ddosraniad Poisson, cymedr 1.6. Cyfrifwch y tebygolrwydd mewn blwyddyn (a) na fydd nam ar fy mheiriant golchi llestri nac ar fy mheiriant golchi dillad, (b) y bydd cyfanswm y troeon y mae nam ar un o'r ddau beiriant hyn yn llai na 5.
4. Mewn caffeteria gellir tybio bod y niferoedd o gwpaneidiau o goffi a the a werthir bob munud yn hapnewidynnau annibynnol sydd â dosraniadau Poisson, cymedrau 3 a 2, yn ôl eu trefn. (a) Cyfrifwch y tebygolrwydd mewn munud fod cyfanswm nifer y cwpaneidiau o goffi a the a werthir yn 4 o leiaf. (b) O wybod bod y cyfanswm a werthwyd mewn munud yn 4, cyfrifwch y tebygolrwydd mai dau gwpanaid o goffi a dau gwpanaid o de a werthwyd.
5. Mae'r niferoedd X ac Y o ddau fath o organebau bacterol a all fod yn bresennol mewn sampl o hylif yn hapnewidynnau annibynnol, ac mae gan X ac Y fel ei gilydd ddosraniad Poisson, cymedr μ .
 - (a) O wybod bod sampl o'r hylif yn cynnwys cyfanswm o 4 organeb, cyfrifwch y tebygolrwydd fod ynddo 2 organeb o bob math.

- (b) O wybod bod sampl yn cynnwys o leiaf 1 organeb, dangoswch fod y tebygolrwydd fod yr organebau yn y sampl i gyd yr un fath yn $2/(1 + e^\mu)$.

Rhai o briodweddau pwysig dau hapnewidyn arwahanol annibynnol

Boed i X ac Y ddynodi dau hapnewidyn annibynnol lle mae gan X y gwerthoedd posibl $x_1, x_2, \dots, x_r$ a lle mae gan Y y gwerthoedd posibl $y_1, y_2, \dots, y_s$.

Gan fod X ac Y yn annibynnol, eu cyd-ddosraniad yw

$$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \text{ ar gyfer } i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s.$$

Priodwedd 1

Ar gyfer unrhyw ddau ffwythiant $g(X)$ ac $h(Y)$, mae

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

O ddiffiniad gwerth disgwyledig unrhyw ffwythiant o X ac Y , mae

$$\begin{aligned} E[g(X)h(Y)] &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s g(x_i)h(y_j)P(X = x_i)P(Y = y_j) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^r g(x_i)P(X = x_i) \right\} \times \left\{ \sum_{j=1}^s h(y_j)P(Y = y_j) \right\} \\ &= E[g(X)]E[h(Y)]. \end{aligned}$$

Yn benodol, mae $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Enghraifft arall o'r briodwedd uchod yw bod $E(X^3Y^2) = E(X^3)E(Y^2)$.

Noder mai ar gyfer X ac Y annibynnol,

$$\text{mae } E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X) \times E\left(\frac{1}{Y}\right) \quad \text{AC NID } \frac{E(X)}{E(Y)}.$$

Enghraifft 4

Mae X ac Y yn hapnewidynnau gydag $X \sim B(10, 0.6)$ ac $Y \sim \text{Po}(4.5)$.

Darganfyddwch gymedr ac amrywiant $W = XY$.

Datrysiaid

Gan fod X ac Y yn annibynnol, ceir o Briodwedd 1 fod

$$E(W) = E(XY) = E(X)E(Y) = 6 \times 4.5 = 27.$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(W) &= E(W^2) - [E(W)]^2 = E(X^2Y^2) - 27^2 \\ &= E(X^2)E(Y^2) - 27^2. \end{aligned}$$

$$\text{Nawr mae } E(X^2) = \text{Var}(X) + [E(X)]^2 = 10 \times 0.6 \times 0.4 + (10 \times 0.6)^2 = 38.4,$$

$$\text{ac mae } E(Y^2) = \text{Var}(Y) + [E(Y)]^2 = 4.5 + (4.5)^2 = 24.75.$$

Trwy hyn, mae

$$\text{Var}(W) = 38.4 \times 24.75 - 27^2 = 221.4.$$

[Noder nad yw'n bosibl yma ddefnyddio'r dull arall a seilir ar ddarganfod dosraniad W yn gyntaf.]

Ymarfer 2.2c

1. Mae X ac Y yn annibynnol ac mae $E(X) = 3$, $\text{Var}(X) = 1$, $E(Y) = 1$ a $\text{Var}(Y) = 4$. Enrhifwch (a) $E[X(X - Y)]$, (b) $\text{Var}(XY)$.
2. Mae X ac Y yn annibynnol ac mae ganddynt y dosraniadau a ddangosir yn y tablau canlynol.

x	1	2	3	4
P(X = x)	0.1	0.3	0.5	0.1

y	1	2
P(Y = y)	0.6	0.4

- (a) Darganfyddwch ddosraniadau $U = \frac{1}{Y}$ and $W = \frac{X}{Y}$.

Gwireddwch fod $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X) \times E\left(\frac{1}{Y}\right)$ ac nad yw'r gwerth disgwyledig

hwn yn hafal i $\frac{E(X)}{E(Y)}$.

- (b) Enrhifwch $E\left(\frac{X^2}{Y}\right)$.

3. Mae X ac Y yn annibynnol ac mae gan X ddosraniad Poisson $\text{Po}(2)$ a chan Y ddosraniad Poisson $\text{Po}(3)$. Darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol $U = XY$.
4. Mae hyd pob ochr, X cm, sylfaen sgwâr ciwboid yn hapnewidyn gyda'r dosraniad a ddangosir yn y tabl canlynol.

x	5	10	15
P(X = x)	0.4	0.4	0.2

Yn annibynnol, mae uchder, Y cm, y ciwboid yn hapnewidyn gyda'r dosraniad canlynol.

y	20	25	30
P(Y = y)	0.5	0.4	0.1

Cyfrifwch werth disgwyledig cyfaint y ciwboid.

5. Mae person yn tynnu cerdyn ar hap o becyn o bump o gardiau sydd wedi eu rhifo o 1 i 5, yn ôl eu trefn, ac yna'n tynnu cerdyn ar hap o becyn arall sy'n cynnwys pedwar o gardiau wedi eu rhifo o 1 i 4, yn ôl eu trefn. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant lluoswm y ddau rif ar y cardiau a dynnir.

Priodwedd 2

Yn Adran 2.1 dangoswyd, ar gyfer unrhyw ddau hapnewidyn X ac Y ac ar gyfer unrhyw ddau gysonyn a a b , fod

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Dangosir nawr, os yw X ac Y yn annibynnol, fod

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y).$$

Prawf

Boed $Z = aX + bY$. Yna, o'r cyntaf o'r canlyniadau uchod, mae

$$\mu_Z \equiv E(Z) = aE(X) + bE(Y) \equiv a\mu_X + b\mu_Y.$$

Felly, mae

$$Z - \mu_Z = a(X - \mu_X) + b(Y - \mu_Y)$$

ac felly mae

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &\equiv E[(Z - \mu_Z)^2] \\ &= E[a^2(X - \mu_X)^2] + E[2ab(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] + E[b^2(Y - \mu_Y)^2] \\ &= a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2abE[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]. \end{aligned}$$

Gan fod X ac Y yn annibynnol, mae

$$E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(X - \mu_X)E(Y - \mu_Y) = 0.$$

Trwy hyn, mae

$$\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y).$$

Yn arbennig, ar gyfer X ac Y sy'n annibynnol, mae

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y),$$

$$\text{Var}(2X - 3Y) = 4\text{Var}(X) + 9\text{Var}(Y).$$

Gwireddwn y canlyniadau uchod ar gyfer $E(aX + bY)$ a $\text{Var}(aX + bY)$ yn yr achos penodol a roddwyd yn Enghraifft 2 uchod. Yn yr enghraifft honno roedd X ac Y yn annibynnol gyda'r dosraniadau canlynol.

x	2	3
$P(X=x)$	0.6	0.4

y	1	2	3	4
$P(Y=y)$	0.2	0.3	0.3	0.2

Dangoswyd bod $E(2X - Y) = 2.3$ a bod $\text{Var}(2X - Y) = 2.01$.

Nawr byddwn yn cymharu y rhain â $2E(X) - E(Y)$ a $4\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$, yn ôl eu trefn.

$$\text{Mae } E(X) = 2 \times 0.6 + 3 \times 0.4 = 2.4,$$

$$\text{Mae } E(Y) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 2.5.$$

Trwy hyn, mae

$$2E(X) - E(Y) = 2 \times 2.4 - 2.5 = 2.3, \text{ fel a gafwyd gynt.}$$

$$\text{Mae } E(X^2) = 4 \times 0.6 + 9 \times 0.4 = 6.0,$$

$$\text{mae } \text{Var}(X) = 6.0 - 2.4^2 = 0.24.$$

$$\text{Mae } E(Y^2) = 1 \times 0.2 + 4 \times 0.3 + 9 \times 0.3 + 16 \times 0.2 = 7.3,$$

$$\text{mae } \text{Var}(Y) = 7.3 - 2.5^2 = 1.05$$

Felly, mae

$$4\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 4 \times 0.24 + 1.05 = 2.01, \text{ fel a gafwyd gynt.}$$

Enghraifft 5

Mae X ac Y yn annibynnol ac mae $X \sim B(50, 0.2)$ ac $Y \sim \text{Po}(10)$. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant (a) $Y - X$, (b) $2X + 3Y$, (c) $Y - \frac{1}{2}X$.

Datrysiaid

Gan fod $X \sim B(50, 0.2)$, mae $E(X) = 50 \times 0.2 = 10$,

ac mae $\text{Var}(X) = 50 \times 0.2 \times 0.8 = 8$.

Gan fod $Y \sim \text{Po}(10)$, mae $E(Y) = \text{Var}(Y) = 10$.

$$(a) \text{ Mae } E(Y - X) = E(Y) - E(X) = 10 - 10 = 0.$$

Gan fod X ac Y yn annibynnol,

$$\text{mae } \text{Var}(Y - X) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(X) = 8 + 10 = 18.$$

$$(b) \text{ Mae } E(2X + 3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 10 + 3 \times 10 = 50.$$

$$\text{Mae } \text{Var}(2X + 3Y) = 4\text{Var}(X) + 9\text{Var}(Y) = 4 \times 8 + 9 \times 10 = 122.$$

$$(c) \text{ Mae } E(Y - \frac{1}{2}X) = E(Y) - \frac{1}{2}E(X) = 10 - \frac{1}{2} \times 10 = 5.$$

$$\text{Mae } \text{Var}(Y - \frac{1}{2}X) = \text{Var}(Y) + \frac{1}{4}\text{Var}(X) = 10 + \frac{1}{4} \times 8 = 12.$$

Ymarfer 2.2d

1. O wybod bod X ac Y yn annibynnol a bod $X \sim B(20, 0.6)$ a bod $Y \sim B(10, 0.3)$, darganfyddwch gymedr ac amrywiant (a) $X - Y$, (b) $X - 4Y$, (c) $\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}Y$.
2. Teflir dis teg ddwywaith. Boed i X ddynodi sgôr y tafliaid cyntaf a boed i Y ddynodi sgôr yr ail dafliaid. Diffinnir hapnewidynnau U ac W gan $U = X + Y$ ac $W = 3X - 2Y$. Enrhifwch (a) $E(U)$, (b) $\text{Var}(U)$, (c) $\text{Var}(W)$, (d) $E(UW)$.

3. Mae X ac Y yn annibynnol ac mae $X \sim \text{Po}(5)$ ac $Y \sim \text{Po}(8)$. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant (a) $X + Y$, (b) $2Y - 3X$, (c) $Y - X$. Rhwch un rheswm pam na all dosraniad $Y - X$ fod yn un Poisson.
4. Gall dau fath o ddiffyg, A a B , ddigwydd mewn brethyn a weithgynhyrchir. Mae niferoedd y diffygion o fath A a math B sy'n digwydd ym mhob metr o'r brethyn yn hapnewidynnau annibynnol sydd â dosraniadau Poisson, cymedrau 0.5 ac 1, yn ôl eu trefn. Mae cael gwared ar ddiffyg math A o'r brethyn yn costio 8c ac mae cael gwared ar ddiffyg math B yn costio 2c. Darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol y gost o gael gwared ar y diffygion ym mhob metr o'r brethyn.
5. Yn ystod ei flwyddyn gyntaf mae gan nifer y troeon y mae'n rhaid mynd â char newydd yn ôl i'r modurdy i'w drin sylw ddosraniad Poisson, cymedr 0.5. Yn annibynnol, yn ystod ei ail flwyddyn mae gan nifer y troeon y mae'n rhaid mynd â'r car yn ôl i'r modurdy i'w drin ddosraniad Poisson, cymedr 1.4.
 - (a) Ysgrifennwch gymedr ac amrywiant gyfanswm y troeon yn ystod ei ddwy flynedd cyntaf y mae'n rhaid mynd â'r car yn ôl i'r modurdy. Tybiwch fod nifer y troeon y mae'n rhaid mynd â'r car yn ôl i'r modurdy yn ystod ei drydedd flwyddyn yn union ddwywaith nifer y troeon yr oedd yn rhaid gwneud hynny yn ei ail flwyddyn.
 - (b) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant gyfanswm y troeon yn ystod ei dair blynedd cyntaf y mae'n rhaid mynd â'r car yn ôl i'r modurdy i'w drin.

2.3 Tri neu ragor o hapnewidynnau arwahanol annibynnol

Gellir estyn y canlyniadau a gafwyd uchod ar gyfer dau hapnewidyn annibynnol mewn ffordd amlwg i dri neu ragor o hapnewidynnau annibynnol. Gellir eu hestyn i dri hapnewidyn annibynnol X , Y a Z fel a ganlyn.

- (1) Os yw X , Y a Z yn annibynnol gydag $X \sim \text{Po}(\alpha)$, $Y \sim \text{Po}(\beta)$, a $Z \sim \text{Po}(\gamma)$, yna mae $X + Y + Z \sim \text{Po}(\alpha + \beta + \gamma)$.
- (2) Ar gyfer unrhyw dri hapnewidyn X , Y a Z a chysonion a , b ac c , mae $E(aX + bY + cZ) = aE(X) + bE(Y) + cE(Z)$.
- (3) Os yw X , Y a Z yn annibynnol, yna mae
 - (a) $E[f(X)g(Y)h(Z)] = E[f(X)] \times E[g(Y)] \times E[h(Z)]$,
ac felly, yn benodol, mae $E(XYZ) = E(X) \times E(Y) \times E(Z)$;
 - (b) $\text{Var}(aX + bY + cZ) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + c^2 \text{Var}(Z)$,
ar gyfer unrhyw gysonion a , b ac c .

Mae'r canlyniadau a nodir yn hafaliadau (2) a 3(b) yn rhoi i ni ddull arall ar gyfer olrhain cymedr ac amrywiant $B(n, p)$ sy'n llawer symlach na'r dull a ddefnyddiwyd yn Llyfr S1.

Ystyriwch haparbrawf lle mae p yn dynodi'r tebygolrwydd o lwyddiant mewn unrhyw dreial. Os X yw nifer y llwyddiannau mewn n treial annibynnol, mae $X \sim B(n, p)$.

Nawr ystyriwch n hapnewidyn $X_1, X_2, \dots, X_n$, lle mae X_r yn gysylltiedig â chanlyniad yr r^{fed} treial (mae $r = 1, 2, \dots, n$) a lle diffinnir X_r gan

$$X_r = 1 \text{ os yw'r } r^{\text{fed}} \text{ treial yn llwyddiant, ac}$$

$$X_r = 0 \text{ fel arall.}$$

Sylwer bod $X_1 + X_2 + \dots + X_n = X$, nifer y llwyddiannau yn yr n treial.

Gan ddefnyddio hafaliad (2) uchod ceir bod

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

Hefyd, gan fod y treialon yn annibynnol, mae $X_1, X_2, \dots, X_n$ hefyd yn annibynnol ac felly o hafaliad (3)(b) uchod, mae

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Mae gan bob X_r y dosraniad

$$P(X_r = 1) = p \text{ a } P(X_r = 0) = 1 - p.$$

Felly, ar gyfer $r = 1, 2, \dots, n$

$$\text{Mae } E(X_r) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

$$\text{mae } E(X_r^2) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) = p$$

$$\text{ac felly mae } \text{Var}(X_r) = p - p^2 = p(1 - p).$$

Trwy hyn, mae $E(X) = np$ a $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.

Ymarfer 2.3

1. Mae niferoedd y dynion, y menywod a'r plant sy'n dod i feddygfa bob awr yn hapnewidynnau annibynnol sydd â dosraniadau Poisson, cymedrau 4, 3 a 2, yn ôl eu trefn. Darganfyddwch, yn gywir i 3 lle degol, y tebygolrwydd mewn awr (a) y daw o leiaf 3 oedolyn, (b) na fydd rhagor na 3 pherson yn dod.
2. Mae cwmni yswiriant yn cynnig polisïau sy'n gwarchod tai, cynnwys tai, a cheir. Gellir tybio bod gan niferoedd y ceisiadau a dderbynnir bob dydd ar y polisïau hyn ddosraniadau Poisson, cymedrau 2, 3 a 5, yn ôl eu trefn. Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd y cwmni yn derbyn cyfanswm o ragor na 12 cais mewn diwrnod.

3. Mae gan sir bedair gorsaf dân. Mae gan nifer y galwadau ffug a wneir bob dydd i bob gorsaf drosriniad Poisson, cymedr 1.5. A bwrw bod y galwadau ffug a wneir i'r gorsafoedd yn annibynnol, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd cyfanswm nifer y galwadau ffug mewn diwrnod i'r pedair gorsaf yn 6 yn union.
4. Mae X , Y a Z yn hapnewidynnau annibynnol ac mae
 $E(X) = 2$, $\text{Var}(X) = 4$, $E(Y) = 3$, $\text{Var}(Y) = 1$, $E(Z) = 4$, $\text{Var}(Z) = 9$.
 Darganfyddwch gymedr ac amrywiant
 (a) $X + Y + Z$, (b) $2X - 3Y + Z$, (c) XYZ .
5. Mae hyd ochrau ciwboid yn hapnewidynnau annibynnol ac mae ganddynt i gyd y dosraniad canlynol.

x	5	10	15
$P(X = x)$	0.6	0.2	0.2

Darganfyddwch gymedr ac amrywiant cyfaint ciwboid o'r fath.

2.4 Dau neu ragor o hapnewidynnau di-dor

Mae'r diffiniad canlynol er mwyn i ddau hapnewidyn di-dor fod yn annibynnol yn addasiad o'r diffiniad a roddwyd yn Adran 2.2 ar gyfer dau hapnewidyn arwahanol.

Diffiniad: Mae'r hapnewidynnau di-dor X ac Y yn annibynnol dim ond os yw

$$P[(a \leq X \leq b) \cap (c \leq Y \leq d)] = P(a \leq X \leq b) \times P(c \leq Y \leq d) \quad (1)$$

ar gyfer pob cysonyn a , b , c a d .

Mae priodweddau'r gwerth disgwyledig a'r amrywiant a roddwyd yn Adrannau 2.1 a 2.2 yr un mor ddilys ar gyfer hapnewidynnau di-dor. Y priodweddau hynny yw:

Ar gyfer unrhyw ddau hapnewidyn di-dor X ac Y , mae

$$E[c_1 h_1(X) + c_2 h_2(Y)] = c_1 E[h_1(X)] + c_2 E[h_2(Y)] \quad (2a)$$

ac, yn arbennig,

$$E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y) \quad (2b)$$

Os yw X ac Y yn annibynnol, yna mae

$$E[h_1(X)h_2(Y)] = E[h_1(X)] \times E[h_2(Y)] \quad (3a)$$

ac, yn arbennig,

$$E(XY) = E(X) \times E(Y). \quad (3b)$$

$$\text{Var}(aX \pm bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) \quad (4)$$

Fel y soniwyd yn Adran 2.3, mae'r canlyniadau uchod yn ymestyn mewn ffordd amlwg i dri neu ragor o hapnewidynnau. Yn benodol,

- (1) Os yw X , Y a Z yn dri hapnewidyn ac a , b a c yn gysonion, yna mae

$$E(aX + bY + cZ) = aE(X) + bE(Y) + cE(Z).$$

- (2) Os yw X , Y a Z yn hapnewidynnau annibynnol, yna mae

(a) $E[f(X)g(Y)h(Z)] = E[f(X)] \times E[g(Y)] \times E[h(Z)],$

ac, yn benodol, fel bod

$$E(XYZ) = E(X) \times E(Y) \times E(Z).$$

(b) $\text{Var}(aX + bY + cZ) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + c^2\text{Var}(Z)$

Enghraifft 1

Mae X ac Y yn annibynnol ac mae gan X ddosraniad unffurf $U(10, 20)$, ac mae gan Y ddosraniad normal $N(15, 4^2)$. Enrhifwch

- (a) $P[(X \leq 16) \cap (Y \leq 16)],$ (b) $E(3X - Y),$ (c) $\text{Var}(3X - Y),$ (d) $E(Y^2/X^3).$

Datrysiaid

- (a) Gan fod X ac Y yn annibynnol, mae

$$P[(X \leq 16) \cap (Y \leq 16)] = P(X \leq 16) \times P(Y \leq 16)$$

Oherwydd bod gan $X \sim U(10, 20)$, mae $P(X \leq 16) = \frac{16-10}{20-10} = 0.6.$

Oherwydd bod gan $Y \sim N(15, 4^2)$, mae $P(Y \leq 16) = P\left(Z \leq \frac{16-15}{4}\right)$
 $= P(Z \leq 0.25) = 0.59871.$

Trwy hyn,

mae $P[(X \leq 16) \cap (Y \leq 16)] = 0.6 \times 0.59871 = 0.359$ yn gywir i 3 lle degol.

- (b) Gan ddefnyddio (2b) uchod,

$$\text{mae } E(3X - Y) = 3E(X) - E(Y) = 3(10 + 20)/2 - 15 = 30.$$

- (c) Gan ddefnyddio (4) uchod, $\text{Var}(3X - Y) = 9\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Mae gan $X \sim U(10, 20)$, felly mae $\text{Var}(X) = (20 - 10)^2/12 = 100/12 = 25/3.$

Trwy hyn, mae $\text{Var}(3X - Y) = 9 \times (25/3) + 16 = 91.$

- (d) Gan ddefnyddio (3a) uchod, $E(Y^2/X^3) = E(Y^2 \times 1/X^3) = E(Y^2) \times E(1/X^3).$

Ffwythiant dwysedd tebygolrwydd X yw $f(x) = \frac{1}{10}$, ar gyfer $10 \leq x \leq 20.$

Trwy hyn, mae $E\left(\frac{1}{X^3}\right) = \frac{1}{10} \int_{10}^{20} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{20} \left[-\frac{1}{x^2} \right]_{10}^{20} = 0.000375.$

Mae $E(Y^2) = \text{Var}(Y) + [E(Y)]^2 = 16 + 15^2 = 241.$

Felly, mae $E(Y^2/X^3) = 0.000375 \times 241 = 0.090375.$

Enghraifft 2

Mae gwneuthurwr yn cynhyrchu dau fath o rodenni, sef A a B. Mae gan rodenni math A hydoedd mewn cm sydd â dosraniad unffurf dros y cyfwng (10,15), tra bo gan rodenni math B hydoedd mewn cm sydd â dosraniad normal, cymedr 12 a gwyriad safonol 1. Os dewisir un rhoden o bob math ar hap (a) cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y rhoden hiraf o'r ddwy a ddewisir yn fwy na 13 cm o hyd, (b) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant y maint pryd mae hyd y rhoden math A yn fwy na hyd y rhoden math B.

Datrysiaid

Boed i X cm ddynodi hyd y rhoden math A a ddewisir, a boed i Y cm ddynodi hyd y rhoden math B a ddewisir. Mae'n amlwg bod X ac Y yn annibynnol.

Rhoddir bod gan $X \sim U(10, 15)$ a bod gan $Y \sim N(12, 1)$.

- (a) Boed i W cm ddynodi hyd y rhoden hiraf o'r ddwy. Mae angen enrhifo $P(W > 13)$. Ni fydd y digwyddiad ($W > 13$) yn digwydd oni bai bod o leiaf un o blith X ac Y yn fwy na 13. Cyflenwad yr amod hwn yw nad yw X nac Y yn fwy nag 13, sydd yn gywerth â dweud bod X ac Y yn llai na neu yn hafal i 13. Trwy hyn,

$$\text{mae} \quad P(W > 13) = 1 - P(W \leq 13) = 1 - P(X \leq 13) \times P(Y \leq 13)$$

$$P(X \leq 13) = \frac{13-10}{15-10} = 0.6,$$

$$P(Y \leq 13) = P\left(Z \leq \frac{13-12}{1}\right) = P(Z \leq 1) = 0.84134$$

$$\text{Felly, mae} \quad P(W > 13) = 1 - 0.6 \times 0.84134 = 0.495 \text{ i 3 lle degol.}$$

- (b) Y maint mewn cm pryd mae hyd y rhoden math A yn fwy na hyd y rhoden math B yw $X - Y$. Gan ddefnyddio (2b) a (4) uchod ceir bod

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{2}(10 + 15) - 12 = 0.5$$

$$\begin{aligned} \text{a bod} \quad \text{Var}(X - Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = \frac{(15-10)^2}{12} + 1^2 \\ &= 3.083 \text{ i 3 lle degol.} \end{aligned}$$

Ymarfer 2.4a

- Os yw X ac Y yn hapnewidynnau annibynnol gydag $X \sim N(4, 1)$ ac $Y \sim N(5, 4)$, darganfyddwch (a) $P[(X \leq 3) \cap (Y > 3)]$, (b) gymedr ac amrywiant $3X - 2Y$.
- Mae X ac Y yn hapnewidynnau annibynnol gyda ffwythiannau dwysedd tebygolrwydd f acg, lle mae $f(x) = 3x^2$, ar gyfer $0 < x < 1$,
ac mae $g(y) = 2(1 - y)$, ar gyfer $0 < y < 1$.

- (a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd y lleiaf o blith gwerth X a gafwyd ar hap a gwerth Y a gafwyd ar hap yn llai na $\frac{27}{45}$.
- (b) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd y mwyaf o blith gwerth X a gafwyd ar hap a gwerth Y a gafwyd ar hap yn fwy na $\frac{1}{2}$.
3. Mae gan giwboidau sylfeini sgwâr. Mae gan hydoedd, mewn cm, ochrau'r sylfeini hyn ddosraniad unffurf dros y cyfwng $(2, 8)$ ac, yn annibynnol, mae gan uchderau'r ciwboidau, mewn cm, ddosraniad unffurf dros y cyfwng $(4, 10)$. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant cyfeintiau'r ciwboidau.
4. Mae X ac Y yn hapnewidynnau annibynnol gydag $X \sim U(0, 2)$ ac $Y \sim U(1, 5)$. Adeiledir petryal gyda'i ochrau cyfagos â hydoedd X ac Y , yn ôl eu trefn. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant arwynebedd y petryal.
5. Rhoddir y cerrynt, W amper, a fydd yn llifo mewn cylched pan fydd y foltedd ar draws y gylched yn X folt a'r gwrthiant yn y gylched yn Y ohm gan $W = X/Y$. Tybiwch fod X ac Y yn hapnewidynnau annibynnol gyda ffwythiannau dwysedd tebygolrwydd f ac g , lle mae $f(x) = 6x(1 - x)$, ar gyfer $0 \leq x \leq 1$,
ac mae $g(y) = 3y^2$, ar gyfer $0 \leq y \leq 1$.
Darganfyddwch gymedr ac amrywiant y cerrynt W yn y gylched.
6. Hyd pob un o ochrau hiraf petryal yw X cm lle mae gan $X \sim U(5, 9)$, a hyd pob un o'r ochrau byrraf yw Y cm, lle mae gan $Y \sim U(0, 1)$. O wybod bod X ac Y yn annibynnol darganfyddwch gymedr ac amrywiant perimedr y petryal.
7. Mae gan rodenni a gynhyrchir hydoedd sydd â dosraniad, cymedr 10 cm a gwyrriad safonol 0.5 cm.
Darganfyddwch gymedr ac amrywiant cyfanswm hydoedd
(a) dwy roden a ddewisir ar hap,
(b) tair rhoden a ddewisir ar hap.
8. Mae nifer X y swigod aer a geir mewn lens a gynhyrchir gan beiriant yn hapnewidyn arwahanol lle mae
$$P(X=r) = \frac{1}{3} - \frac{r}{15}, \quad r = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Mae lens sydd â dwy neu ragor o swigod aer yn cael ei wrthod gan ei fod yn anaddas. Mae lens sydd ag un swigen aer, neu sydd heb swigod o gwbl, yn cael ei brofi i ddarganfod ei indecs gwasgariant. Nid yw lens o'r fath yn cael ei dderbyn oni bai bod ganddo naill ai indecs gwasgariant llai na 4 a dim swigod aer, neu indecs gwasgariant llai na 3.4 ac un swigen aer. Yn annibynnol ar nifer y swigod aer, mae gan indecs gwasgariant lens ddosraniad normal, cymedr 3.6 a gwyrriad safonol 0.5.
(a) Darganfyddwch gyfran yr holl lensau a fydd yn cael eu derbyn, gan roi eich ateb yn gywir i dri lle degol.

- (b) Dewisir ar hap un o'r lensau sydd wedi'u derbyn. Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd nad oes swigen aer yn y lens.
9. Mae'r hapnewidynnau X , Y ac W yn annibynnol, ac mae gan X y dosraniad binomaidd $B(10, 0.2)$, gan Y y dosraniad unffurf $U(5, 11)$, a chan W y dosraniad normal $N(3.5, 0.5)$.
Darganfyddwch gymedr ac amrywiant $T = 2YW - 5X$.

Cyfuniad llinol o hapnewidynnau normal annibynnol

Priodwedd bwysig o'r dosraniad normal yw bod gan unrhyw gyfuniad llinol o hapnewidynnau annibynnol sydd â dosraniad normal hefyd ddosraniad normal.

Felly, os yw X ac Y yn annibynnol ac â dosraniad normal, yna ar gyfer unrhyw gysonion a a b ,

$$T = aX + bY$$

hefyd ddosraniad normal, cymedr ac amrywiant a roddir gan

$$E(T) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{ac} \quad \text{Var}(T) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y).$$

Yn gyffredinol, os yw $X_1, X_2, \dots, X_n$ yn annibynnol gydag $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, yna ar gyfer unrhyw gysonion $c_1, c_2, \dots, c_n$, mae gan

$$T = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$

hefyd ddosraniad normal, cymedr ac amrywiant a roddir gan

$$E(T) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots + c_n\mu_n,$$

$$\text{Var}(T) = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \dots + c_n^2\sigma_n^2.$$

Er enghraifft, os yw X_1, X_2 , a X_3 yn annibynnol ac â dosraniad normal, yna mae gan

$$T = 3X_1 - 2X_2 + X_3$$

hefyd ddosraniad normal, cymedr ac amrywiant a roddir gan

$$E(T) = 3E(X_1) - 2E(X_2) + E(X_3)$$

$$\text{Var}(T) = 9\text{Var}(X_1) + 4\text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3).$$

Enghraifft 3

Gellir bwrw bod gan bwysau'r dynion a menywod sy'n fyfyrwyr mewn coleg mawr ddosraniad normal, lle mae gan bwysau'r dynion gymedr 69 kg a gwyriad safonol 10 kg, a chan bwysau'r menywod gymedr 56 kg a gwyriad safonol 8 kg.

- (a) Os dewisir ar hap un dyn ac un fenyw, cyfrifwch y tebygolrwyddau (i) bod y fenyw yn drymach na'r dyn, (ii) bod pwysau'r fenyw yn o leiaf $\frac{3}{4}$ pwysau'r dyn.
- (b) Os dewisir ar hap ddau ddyn ac un fenyw, cyfrifwch y tebygolrwydd fod cyfanswm eu pwysau yn fwy na 200 kg.

Datrysiaid

Boed i X kg ddynodi pwysau dyn a ddewisir ar hap, fel bod gan $X \sim N(69, 10^2)$, a boed i Y kg ddynodi pwysau menyw a ddewisir ar hap, fel bod gan $Y \sim N(56, 8^2)$.

(a)(i) Mae'r fenyw yn drymach na'r dyn os yw $Y > X$; hynny yw, os yw $Y - X > 0$.

Nawr mae gan $Y - X$ ddosraniad normal, cymedr

$$E(Y) - E(X) = 56 - 69 = -13$$

ac amrywiant $\text{Var}(Y) + \text{Var}(X) = 64 + 100 = 164$.

$$\text{Mae } P(Y - X > 0) = P\left(Z > \frac{0 - (-13)}{\sqrt{164}}\right) \approx P(Z > 1.02) = 0.154 \text{ i 3 lle degol.}$$

(ii) Mae pwysau'r fenyw yn o leiaf $\frac{3}{4}$ pwysau'r dyn os yw $Y \geq \frac{3}{4}X$, neu $4Y - 3X \geq 0$.

Mae gan $4Y - 3X$ ddosraniad normal, cymedr

$$4E(Y) - 3E(X) = 4 \times 56 - 3 \times 69 = 17$$

ac amrywiant $16 \text{Var}(Y) + 9 \text{Var}(X) = 16 \times 64 + 9 \times 100 = 1924$.

$$\begin{aligned} \text{Felly, mae } P(4Y - 3X \geq 0) &= P\left(Z \geq \frac{0 - 17}{\sqrt{1924}}\right) \approx P(Z > -0.39) \\ &= P(Z < 0.39) = 0.652 \text{ i 3 lle degol.} \end{aligned}$$

(b) Boed i X_1 ac X_2 ddynodi pwysau'r ddau ddyn a ddewisir a boed i Y ddynodi pwysau'r fenyw a ddewisir. Noder bod gan X_1 ac X_2 yr un dosraniad ag X a bod X_1, X_2 ac Y yn annibynnol.

Cyfanswm pwysau'r tri yw $S = X_1 + X_2 + Y$, lle mae gan S ddosraniad normal, cymedr

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(Y) = 69 + 69 + 56 = 194$$

ac amrywiant $\text{Var}(S) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(Y) = 100 + 100 + 64 = 264$.

$$\text{Mae } P(S > 200) = P\left(Z > \frac{200 - 194}{\sqrt{264}}\right) \approx P(Z > 0.37) = 0.356 \text{ i 3 lle degol.}$$

[Noder: Camgymeriad a welir yn aml wrth ateb rhan (b) yw cymryd $S = 2X + Y$, sy'n tybio bod gan bob un o'r dynion a ddewisir yr un pwysau, sef X kg. Er y bydd y fersiwn hwn ar gyfer S yn rhoi'r gwerth cywir i $E(S)$, bydd yn rhoi gwerth anghywir ar gyfer $\text{Var}(S)$. Mae pwysau'r ddau ddyn a ddewisir yn arsylwadau sy'n annibynnol ar X .]

Enghraifft 4

Caiff cyfarpar ei gydodod mewn tri cham. Mae gan yr amser W munud a gymerir i gwblhau'r cam cyntaf ddosraniad normal, cymedr 15.4 a gwriad safonol 3; mae gan yr amser X munud a gymerir i gwblhau'r ail gam ddosraniad normal, cymedr 25.8 a gwriad safonol 4; mae gan yr amser Y munud a gymerir i gwblhau'r trydydd cam ddosraniad normal, cymedr 10.3 a gwriad safonol 2. Hefyd, mae angen caniatáu

amser o $2X$ munud rhwng cwblhau'r ail gam a dechrau'r trydydd cam. Os yw W , X ac Y yn annibynnol, cyfrifwch y tebygolrwyddau

- (a) y cwblheir y ddau gam cyntaf mewn llai na 30 munud,
- (b) y cydosodir yr holl gyfarpar mewn llai na 120 munud.

Datrysiad

- (a) Yr amser a gymerir i gwblhau'r ddau gam cyntaf yw $S = W + X$. O'r wybodaeth uchod gwyddom fod gan S ddosraniad normal, cymedr

$$E(S) = E(W) + E(X) = 15.4 + 25.8 = 41.2,$$

$$\text{ac amrywiant } \text{Var}(S) = \text{Var}(W) + \text{Var}(X) = 9 + 16 = 25.$$

$$\text{Mae } P(S < 30) = P\left(Z < \frac{30 - 41.2}{\sqrt{25}}\right) = P(Z < -2.24) = 0.013 \text{ i 3 lle degol.}$$

- (b) Yr amser a gymerir i gwblhau cydosod y cyfarpar yw

$$T = W + X + 2X + Y = W + 3X + Y.$$

Mae'n dilyn bod gan W ddosraniad normal, cymedr

$$E(T) = E(W) + 3E(X) + E(Y) = 15.4 + 3 \times 25.8 + 10.3 = 103.1,$$

$$\text{ac amrywiant } \text{Var}(T) = \text{Var}(W) + 9\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 9 + 9 \times 16 + 4 = 157.$$

$$\text{Mae } P(T < 120) = P\left(Z < \frac{120 - 103.1}{\sqrt{157}}\right) \approx P(Z < 1.35) = 0.911 \text{ i 3 lle degol.}$$

Ymarfer 2.4b

1. Mae'r amseroedd a gymerir gan ddau redwr A a B i redeg rasys 400 m yn hapnewidynnau annibynnol sydd â dosraniadau normal, cymedrau 51.8 eiliad a 52.3 eiliad, a gwyriadau safonol 0.3 eiliad a 0.4 eiliad, yn ôl eu trefn. Os bydd y ddau redwr yn cystadlu mewn ras 400 m, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd A yn trechu B.
2. Mewn gwlad arbennig mae gan daldra dynion ddosraniad normal, cymedr 172 cm a gwyriad safonol 4 cm, ac mae gan daldra menywod ddosraniad normal, cymedr 164 cm a gwyriad safonol 3 cm. Os dewisir ar hap un dyn ac un fenyw, darganfyddwch y tebygolrwyddau (a) bod y dyn yn dalach na'r fenyw, (b) bod taldra'r fenyw yn o leiaf 90% o daldra'r dyn.
3. Mae gan rodenni silindrog ddiamedrau sydd â dosraniad normal, cymedr 35.4 mm a gwyriad safonol 0.08 mm. Rhoddir y rhodenni mewn tyllau crwn y mae gan eu diamedrau ddosraniad normal, cymedr 35.5 mm a gwyriad safonol 0.01 mm. Ceir ffit boddhaol pan fo diamedr y twll rhwng 0.04 mm a 0.05 mm yn fwy na diamedr y rhoden. Os dewisir rhoden ar hap a'i rhoi mewn twll a ddewisir ar hap, darganfyddwch y tebygolrwydd o gael ffit boddhaol.

4. Mae gan bwysau y ffrwythau a roddir mewn tun ddosraniad normal, cymedr 250 g a gwyriad safonol 1.2 g. Mae gan bwysau tun gwag ddosraniad normal, cymedr 25 g a gwyriad safonol 0.5 g.
Cyfrifwch (a) gymedr a gwyriad safonol pwysau tun llawn, (b) y tebygolrwydd y bydd tun llawn yn pwysu mwy na 278 g.
5. Mae gan sylfeini dur ar gyfer dal pyst pren drawstoriadau petryalog y mae eu hydoedd a'u lledau yn hapnewidynnau annibynnol, ac mae gan yr hydoedd ddosraniad normal, cymedr 10 cm a gwyriad safonol 0.4 cm, a chan y lledau ddosraniad normal, cymedr 6 cm a gwyriad safonol 0.2 cm. Mae gan y pyst pren drawstoriadau petryalog y mae eu hydoedd a'u lledau yn hapnewidynnau annibynnol sydd â dosraniad normal; mae gan yr hydoedd gymedr 9.9 cm a gwyriad safonol 0.3 cm ac mae gan y lledau gymedr 5.9 cm a gwyriad safonol 0.15 cm.
Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd postyn a ddewisir ar hap yn ffitio mewn sylfaen ddur a ddewisir ar hap.
6. Bydd gwerthwr yn ymweld â thref arbennig. Tybiwch fod gan yr amser mewn oriau y bydd y gwerthwr yn ei dreulio yn y dref ddosraniad normal, cymedr 5 a gwyriad safonol 1.6. Yn annibynnol ar yr amser a dreulir yn y dref, mae'r amser mewn oriau a gymerir i deithio i'r dref a'r amser a gymerir i deithio adref yn annibynnol, ac mae gan y ddau amser ddosraniad normal, cymedr 1.2 a gwyriad safonol 0.4.
Darganfyddwch y tebygolrwyddau (a) y bydd amser y gwerthwr oddi cartref yn llai na 9 awr, (b) y bydd yr amser a dreulir yn y dref yn fwy na dwywaith yr amser a dreulir yn teithio.
7. Mae gan bwysau melysion blas oren ddosraniad normal, cymedr 8 g a gwyriad safonol 0.2 g. (a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd pwysau'r melysion mewn pecyn sy'n cynnwys 16 ohonynt yn fwy na 130 g. (b) Dangoswch y dylai pecyn o felysion gynnwys o leiaf 26 os bydd y tebygolrwydd yn o leiaf 0.99 y bydd eu pwysau dros 200 g. (c) Mae gan bwysau melysion blas lemwn ddosraniad normal, cymedr 9 g a gwyriad safonol 0.3 g. Mae pecyn o 10 o felysion yn cynnwys 4 blas oren a 6 blas lemwn.
Darganfyddwch y tebygolrwydd fod pwysau'r melysion yn y pecyn yn fwy nag 88 g.
8. Mae gan bwysau, X g, tun llawn o gawl ddosraniad normal, cymedr 560 a gwyriad safonol 13. Mae gan bwysau, Y g, tun gwag ar gyfer y cawl ddosraniad normal, cymedr 30 a gwyriad safonol 5. Boed i W g ddynodi pwysau'r cawl yn y tun.

- (a) Pa ddau o blith X , Y ac W sy'n annibynnol?
 - (b) Darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol pwysau'r cawl mewn tun.
 - (c) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd pwysau'r cawl mewn tun yn llai na 500 g.
9. Mae gan bwysau pobl sy'n defnyddio lifft ddosraniad normal, cymedr 68 kg a gwyriad safonol 9 kg. Uchafswm y pwysau a ganiateir yw 295 kg.
- (a) Darganfyddwch y tebygolrwydd fod pedwar person yn y lifft yn mynd dros yr uchafswm.
 - (b) Mae dyn yn mynd i'r lifft gyda bagiau sy'n pwyso tair gwaith ei bwysau. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod y pwysau yn fwy na'r uchafswm.
10. Mae gan hydoedd rhodenni math A ddosraniad normal, cymedr 5 cm a gwyriad safonol 0.5 cm, tra bo gan hydoedd rhodenni math B ddosraniad normal, cymedr 9 cm a gwyriad safonol 1 cm. Darganfyddwch y tebygolrwyddau fod
- (a) cyfanswm hydoedd dwy roden math A ac un rhoden math B yn fwy na 21 cm,
 - (b) cyfanswm hydoedd dwy roden math A a dwy roden math B yn fwy na 31 cm,
 - (c) fod cyfanswm hydoedd dwy roden math A yn fwy na hyd un rhoden math B,
 - (d) y bydd gan roden math B hyd sy'n fwy na dwywaith hyd rhoden math A.
11. Bob bore gwaith bydd Aled a Berwyn yn cyrraedd safle bysiau er mwyn dal y bws 8.00 a.m. i'w gweithle. Gellir modelu'r amser mae Aled yn cyrraedd y safle bysiau gan ddosraniad normal, cymedr 7.50 a.m. a gwyriad safonol 4 munud. Yn annibynnol, gellir modelu'r amser mae Berwyn yn cyrraedd y safle bysiau gan ddosraniad normal, cymedr 7.54 a.m. a gwyriad safonol 3 munud. Cyfrifwch y tebygolrwydd ar ddiwrnod penodol
- (a) y bydd Aled a Berwyn yn cyrraedd y safle bysiau cyn 7.57 a.m.
 - (b) y bydd Berwyn yn cyrraedd o flaen Aled,
 - (c) y bydd Aled a Berwyn yn cyrraedd o fewn 2 funud o'i gilydd.

2.5 Dosraniad o gymedr sampl

Gadewch i X ddynodi hapnewidyn sydd yn gysylltiedig â chanlyniadau haparbrawf a ellir ei ailadrodd yn ddiddiwedd o dan yr un amgylchiadau. Er enghraifft, gall X gynrychioli'r sgôr a geir pan deflir dis neu gall fod yn nodwedd rifiadol o safon eitem a fas-gynhyrchir. Gadewch i $X_1, X_2, \dots, X_n$ ddynodi canlyniadau n treial annibynnol o'r haparbrawf. Yna mae $X_1, X_2, \dots, X_n$ yn hapnewidynnau annibynnol (gan fod y treialon i gyd yn annibynnol) ac mae gan bob un yr un dosraniad ag X . Fe gyfeiriwn ni at $X_1, X_2, \dots, X_n$ fel **hap-sampl o n arsylw o X** .

Gadewch i $\bar{X}$ ddynodi cymedr hap-sampl o n arsylw o'r hapnewidyn X sydd â chymedr μ ac amrywiant σ^2 .

Sylwer bod

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

yn gyfuniad llinol o n hapnewidyn annibynnol.

Felly, gan ddefnyddio'r canlyniadau a roddwyd yn yr adran flaenorol, cawn

$$E(\bar{X}) = \mu \text{ gan fod } E(X_i) = \mu \text{ ar gyfer } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \text{a} \quad \text{Var}(\bar{X}) &= \frac{1}{n^2} \times n\sigma^2, \text{ gan fod } \text{Var}(X_i) = \sigma^2 \text{ ar gyfer } i = 1, 2, \dots, n \\ &= \sigma^2/n. \end{aligned}$$

Mae'n dilyn, ar gyfer unrhyw hapnewidyn X sydd â chymedr μ ac amrywiant σ^2 , fod gan ddosraniad $\bar{X}$ gymedr μ ac amrywiant σ^2/n .

Hefyd, mae'n dilyn o Adran 2.4 os yw X wedi ei ddosrannu'n normal fod hynny hefyd yn wir am $\bar{X}$, gyda'r cymedr a'r amrywiant fel a roddir uchod. Fe gawn ni felly'r canlyniad pwysig hwn:

$$\text{Os yw } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ yna mae } \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

Enghraifft 1

Mae amser oes gweithredol bylbiau brand penodol, mewn oriau, wedi eu dosrannu'n normal gyda chymedr 1060 a gwriad safonol 20.

- (a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd cymedr oes hap-sampl o 25 bwlb yn fwy na 1050 awr.
- (b) Darganfyddwch yr n lleiaf posibl lle bo'r tebygolrwydd yn o leiaf 0.8 y bydd cymedr oes hap-sampl o n bwlb yn fwy na 1055 awr.

Datrysiaid

Gadewch i X awr ddynodi oes bwlb a ddewisir ar hap, lle mae $X \sim N(1060, 20^2)$.

- (a) Gadewch i $\bar{X}$ ddynodi cymedr oes hap-sampl o 25 bwlb. Gan ddefnyddio'r canlyniad uchod fe wyddom fod

$$\bar{X} \sim N\left(1060, \frac{400}{25}\right) \equiv N(1060, 4^2).$$

Felly, wrth safoni, fe gawn ni

$$P(\bar{X} > 1050) = P\left(Z > \frac{1050 - 1060}{4}\right) = P(Z > -2.5) = 0.9938.$$

- (b) Gadewch i $\bar{X}$ ddynodi cymedr oes hap-sampl o n bwlb. Felly mae

$$\bar{X} \sim N\left(1060, \frac{400}{n}\right).$$

Rydym eisiau darganfod yr n lleiaf er mwyn i $P(\bar{X} > 1055) \geq 0.8$, sydd yn gywerth â

$$P(Z > \frac{1055 - 1060}{20/\sqrt{n}}) \geq 0.8 \text{ neu } P(Z > -\frac{\sqrt{n}}{4}) \equiv P(Z < \frac{\sqrt{n}}{4}) \geq 0.8.$$

Gan ddefnyddio Tabl 4, gwelwn fod yn rhaid i n fodloni'r datganiad canlynol,

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \geq 0.842 \text{ neu } n \geq (4 \times 0.842)^2 \geq 11.34.$$

Felly mae'n dilyn y dylai n fod o leiaf 12.

Enghraifft 2

Mewn arholiad gyda nifer fawr o ymgeiswyr, roedd y marciau a gafodd y bechgyn a ymgeisiodd wedi eu dosrannu'n normal gyda chymedr 56 a gwyriad safonol 16, tra bo'r marciau a gafodd y merched a ymgeisiodd wedi eu dosrannu'n normal gyda chymedr 61 a gwyriad safonol 20. Gadewch i $\bar{X}$ ddynodi cymedr y marciau a gafwyd gan hap-sampl o 4 bachgen a ymgeisiodd a gadewch i $\bar{Y}$ ddynodi cymedr y marciau a gafwyd gan hap-sampl o 5 merch a ymgeisiodd.

Cyfrifwch y tebygolrwydd fod $\bar{Y} > \bar{X}$.

Datrysiad

Gan ddefnyddio'r canlyniad a roddir uchod fe wyddom fod

$$\bar{X} \sim N(56, 16^2/4) \text{ ac } \bar{Y} \sim N(61, 20^2/5).$$

Yn amlwg mae $\bar{X}$ ac $\bar{Y}$ yn annibynnol a, gan fod $\bar{Y} - \bar{X}$ yn gyfuniad llinol o hapnewidynnau sydd wedi eu dosrannu'n normal, mae'n dilyn o'r dosraniadau uchod fod

$$\bar{Y} - \bar{X} \sim N(61 - 56, 16^2/4 + 20^2/5) \text{ h.y. } N(5, 144).$$

Felly, mae $P(\bar{Y} > \bar{X}) \equiv P(\bar{Y} - \bar{X} > 0) = P(Z > \frac{0-5}{12}) \approx P(Z > -0.42) \approx 0.66$

Ymarfer 2.5

1. Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad normal gyda'r cymedr yn 58 a'r gwyriad safonol yn 5. Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd cymedr hap-sampl o 36 arsylw ar X
 - (a) yn fwy na 60,
 - (b) rhwng 56 a 59.
2. Tynnir hap-sampl o 24 arsylw o ddosraniad normal sydd â chymedr 50 ac amrywiant 6. Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd cymedr y sampl
 - (a) yn llai na 48.5,
 - (b) rhwng 50.7 a 51.2.

3. Mewn gwlad benodol mae gan daldra'r dynion gymedr 172 cm a gwyriad safonol 10 cm. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd cymedr taldra 4 dyn a hapddewisir yn llai na 180 cm.
4. Mae gan bwysau twrcïod ar fferm dwrcïod ddosraniad normal gyda chymedr 7 kg a gwyriad safonol 1.5 kg. Cyfrifwch, i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd pwysau cymedrig hap-sampl o 100 twrci rhwng 6.85 kg a 7.4 kg.
5. Mae peiriant pacio awtomatig yn llenwi bagiau â siwgr yn y fath fodd fel bod gan fâs y siwgr mewn bag a hapddewisir ddosraniad normal gyda chymedr 1 kg a gwyriad safonol 0.02 kg. Er mwyn gwirio bod y peiriant yn gweithio yn iawn, cymerir sampl o fagiau a'u pwyso. Mae'r swp cyfan yn cael ei dderbyn os yw màs cymedrig y sampl o fewn 5 gram o'r màs enwol, sef 1 kg. Pa mor fawr y dylai'r sampl fod i sicrhau bod y tebygolrwydd o dderbyn y swp yn 0.9 neu fwy pan fo'r peiriant yn gweithio yn iawn?
6. Pan ddefnyddir offeryn penodol i fesur hyd, mae'n hysbys bod gan y cyfeiliornad ddosraniad normal gyda chymedr 0 a gwyriad safonol 0.5 mm.
 - (a) Defnyddir yr offeryn 4 gwaith yn annibynnol. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd **maint** y cyfeiliornad cymedrig yn llai na 0.05 mm.
 - (b) Os bydd yr offeryn yn cael ei ddefnyddio n gwaith darganfyddwch werth lleiaf n lle mae'r tebygolrwydd yn 0.9 neu fwy y bydd **maint** y cyfeiliornad cymedrig yn llai na 0.1 mm.
7. Mae gan y cyflog a delir i'r staff a delir yn wythnosol mewn ffatri fawr ddosraniad normal gyda chymedr £120.50 a gwyriad safonol £6.
 - (a) Cyfrifwch y tebygolrwydd bod cyflog wythnosol cymedrig hap-sampl o 9 o'r staff a delir yn wythnosol yn fwy na £125.
 - (b) Pa mor fawr y dylai'r hap-sampl fod i gael tebygolrwydd o tua 0.9 bod cyflog cymedrig y sampl o fewn £2 i gyflog cymedrig y boblogaeth, sef £120.50?
8. Mae X ac Y yn hapnewidynnau lle mae $X \sim N(100, 12)$ ac $Y \sim N(120, 20)$. Cymerir hapsamplau o 50 arsylw ar X a 50 arsylw ar Y. Cyfrifwch y tebygolrwydd bod gwerth cymedrig y 50 arsylw ar Y o leiaf 21 yn fwy na gwerth cymedrig y 50 arsylw ar X.
9. Mewn gwlad benodol mae gan daldra bechgyn a merched 16 oed ddosraniad normal. Mae gan daldra'r merched gymedr 162.5 cm a gwyriad safonol 4.0 cm, a chan daldra'r bechgyn gymedr 173.5 cm a gwyriad safonol 4.8 cm. Boed i $\bar{X}$ ddynodi taldra cymedrig hap-sampl o 64 o ferched ac $\bar{Y}$ ddynodi taldra cymedrig hap-sampl o 36 o fechgyn.
 - (a) Ysgrifennwch ddosraniadau samplu (i) $\bar{X}$, (ii) $\bar{Y}$, (iii) $\bar{Y} - \bar{X}$.

- (b) Cyfrifwch yn gywir i ddau le degol, y tebygolrwydd y bydd gwerth $\bar{Y}$ o leiaf 12 cm yn fwy na gwerth $\bar{X}$.
10. Mae gan y pellter, mewn km, a deithir yr wythnos gan yrrwr car, ddosraniad normal gyda chymedr 1024 a gwyriad safonol 80.
- (a) Cyfrifwch, yn gywir i ddau le degol, y tebygolrwydd y bydd y pellter cymedrig a deithir yr wythnos gan y gyrrwr hwn dros gyfnod o flwyddyn (52 wythnos) yn fwy na 1040 km.
- (b) Mae'r car yn teithio 10.6 km am bob litr o betrol a ddefnyddir. Cyfrifwch, yn gywir i ddau le degol, y tebygolrwydd y bydd ar y gyrrwr hwn angen llai na 360 litr o betrol dros gyfnod o 4 wythnos.

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 2

1. (A3 1988) Mae'r hapnewidynnau X ac Y yn annibynnol ac mae ganddynt y dosraniadau tebygolrwydd canlynol.

x	1	2
$P(X=x)$	0.4	0.6

y	1	2	3
$P(Y=y)$	0.3	0.4	0.3

- (i) Enrhifwch $E\left(\frac{Y}{X}\right)$. [3]

Gadewch i $U = XY$ ac $W = 2X - Y$.

- (ii) Dangoswch fod $E(UW) = E(U)E(W)$ [6]
- (iii) Enrhifwch $P(U=2, W=0)$ [2]

2. (A3 1989) Mae gwerthwr ffenestri dwbl yn mynd o amgylch tai yn ceisio gwerthu ffenestri a drysau patio newydd i gwsmeriaid. Mae'r gwerthwr yn derbyn comisiwn o 10% ar gyfer cyfanswm gwerth yr archebion am ffenestri, a chomisiwn o 15% ar gyfer cyfanswm gwerth yr archebion am ddrysau patio. Mewn unrhyw fis, mae cyfanswm gwerth yr archebion am ffenestri yn hapnewidyn gyda chymedr £2500 a gwyriad safonol £500 ac, yn annibynnol, mae cyfanswm gwerth yr archebion am ddrysau patio yn hapnewidyn gyda chymedr £1200 a gwyriad safonol £250. Darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol cyfanswm comisiwn misol y gwerthwr hwn. [5]

3. (A3 1989) Mewn cyfaint penodol o hydoddiant, mae'r nifer, X ac Y , o ddau fath o facteria A a B, yn y drefn honno, yn hapnewidynnau annibynnol gyda dosraniad Poisson. Cymedr nifer math A o facteria ym mhob litr o'r hydoddiant yw 3.6, a chymedr nifer math B o facteria ym mhob litr o'r hydoddiant yw 1.24.

- (a) Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd sampl o 1 litr o'r hydoddiant yn cynnwys (i) union 4 o facteria math A, (ii) 3 neu lai o facteria math B, (iii) union 2 o facteria math A ac union 2 o facteria math B. [7]
- (b) Gadewch i $W = XY$. (i) Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd fod gwerth W yn sero mewn sampl o 1 litr o'r hydoddiant. [4]
(ii) Cyfrifwch gymedr ac amrywiant W . [4]
4. (A3 1989) Mae gan orsaf betrol ddau fath gwahanol, A a B, o fatriâu ceir. Gellir tybio fod oes batri math A, X mis, wedi ei ddosrannu fel $N(\mu, \sigma^2)$.
(i) O wybod fod 1% o fatriâu math A yn para llai na 40 mis a bod 25% yn para mwy na 46 mis, darganfyddwch werthoedd μ a σ gan roi eich atebion yn gywir i ddau le degol. [5]
Gellir tybio fod oes batri math B, Y mis, wedi ei ddosrannu'n normal gyda chymedr 40 a gwyriad safonol 4. Mae person penodol bob amser yn prynu batri newydd o'r orsaf. O gael y dewis, fe fydd y person hwn yn prynu batri math A ond yn fodlon cymryd batri math B os mai dim ond hwnnw sydd mewn stoc ar y pryd. Tybiwch, ar unrhyw adeg, mai 0.6 yw'r tebygolrwydd mai dim ond batri math B sydd mewn stoc.
(ii) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd batri a brynwyd gan y person uchod yn yr orsaf yn para mwy na 46 mis. [4]
(iii) Gadewch i T_A ddynodi cyfanswm oes hap-sampl o 5 batri math A a gadewch i T_B ddynodi cyfanswm oes hap-sampl o 6 batri math B. Gan gymryd cymedr (μ) a gwyriad safonol (σ) oes batri math A i fod yn 45 mis a 2 fis, yn y drefn honno, cyfrifwch y tebygolrwydd na fydd y gwahaniaeth rhwng T_A a T_B yn fwy na 10 mis. [6]
5. (A3 1990) Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad Poisson gyda chymedr 0.4. Yn annibynnol o X , mae gan yr hapnewidyn Y ddosraniad fel a ddangosir yn y tabl canlynol:
- | | | | |
|----------|-----|-----|-----|
| y | 0 | 1 | 2 |
| $P(Y=y)$ | 0.2 | 0.6 | 0.2 |
- (i) Mynegwch amrywiant X a dangoswch fod gan Y yr un amrywiant.
(ii) Gadewch i $T = 2Y - X$ ac $U = Y + 2X$. Gwiriwch fod $E(TU) = E(T)E(U)$. [7]
6. (A3 1990) Defnyddir peiriant i roi glo mewn bagiau, gyda màs y glo ym mhob bag wedi ei ddosrannu'n normal gyda chymedr 55 kg a gwyriad safonol 1.25 kg. O ddewis dau fag ar hap, cyfrifwch y tebygolrwyddau y bydd (i) y ddau fag yn cynnwys o leiaf 56 kg yr un, (ii) cyfanswm màs y glo yn y ddau fag gyda'i gilydd

yn llai na 112 kg, (iii) un bag yn cynnwys o leiaf 1 kg yn fwy na'r bag arall, (iv) y trymaf o'r ddau fag yn cynnwys mwy na 57 kg. [12]

7. (A3 1992) Mae siop bapur newydd yn cadw dau gylchgrawn garddio, *Newyddion Garddio* a *Gardd Heddiw*, a chaiff y ddau eu cyhoeddi'n fisol. Mewn unrhyw fis, mae gan nifer y cwsmeriaid sydd angen copi o *Newyddion Garddio* ddosraniad Poisson gyda chymedr 10 ac, yn annibynnol, mae gan y nifer sydd angen copi o *Gardd Heddiw* ddosraniad Poisson gyda chymedr 5. Ym mhob mis dim ond 10 copi o *Newyddion Garddio* a 5 copi o *Gardd Heddiw* sydd gan y siop ar werth.
- (a) Darganfyddwch (i) y nifer mwyaf tebygol o gopïau *Gardd Heddiw* a gaiff eu gwerthu mewn mis, (ii) gwerth cymedr, yn gywir i ddau lle degol, y nifer o gopïau *Gardd Heddiw* a gaiff eu gwerthu bob mis. [7]
- (b) Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd y siop mewn mis yn (i) gwerthu union 5 copi o *Newyddion Garddio* ac union 4 copi o *Gardd Heddiw*, (ii) methu â darparu eu dewis gylchgrawn i o leiaf un cwsmer. [8]
8. (A3 1992) Mae taldra myfyrwyr gwrywaidd mewn coleg mawr wedi eu dosrannu'n normal gyda chymedr 180 cm a gwyriad safonol 4 cm. Yn annibynnol, mae taldra myfyrwyr benywaidd y coleg wedi eu dosrannu'n normal gyda chymedr 170 cm a gwyriad safonol 5 cm.
- (a) Pe dewisir un myfyriwr gwrywaidd ac un fyfyrwraig fenywaidd ar hap, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd (i) y ddau yn dalach na 175 cm, (ii) y fyfyrwraig fenywaidd yn dalach na'r myfyriwr gwrywaidd. [7]
- (b) Pe dewisir dau fyfyrwr gwrywaidd a thair myfyrwraig fenywaidd ar hap, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd cyfanswm taldra'r pum myfyriwr yn fwy nag 850 cm. [3]
9. (A3 1993) Mae gan nifer y diwrnodau mewn tymor y bydd bachgen a ddewisir ar hap yn absennol o'r ysgol ddosraniad Poisson gyda chymedr 2. Yn annibynnol, mae gan nifer y diwrnodau mewn tymor y bydd merch a ddewisir ar hap yn absennol o'r ysgol ddosraniad Poisson gyda chymedr 3.
- (b) Dewisir un bachgen ac un ferch ar hap. Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd mewn tymor y bydd un ohonynt yn absennol am 2 ddiwrnod a'r llall yn absennol am 3 diwrnod. [4]
10. (S1 Ion 1996) Mae gan floc o swyddfeydd lifft sy'n gallu dal llwyth o 500 kg ar y mwyaf. Gwyddys y gellir modelu pwysau'r dynion a'r merched sydd yn defnyddio'r lifft gyda dosraniadau normal. Mae gan bwysau'r dynion gymedr 80 kg a gwyriad safonol 12 kg. Mae gan bwysau'r merched gymedr 56 kg

a gwyriad safonol 6 kg. Ar un achlysur, mae 3 dyn a 4 merch yn defnyddio'r lifft.

Cyfrifwch, yn gywir i ddau ffigur ystyrion, y tebygolrwydd y bydd

- (a) cyfanswm eu pwysau yn fwy na phwysau'r llwyth uchaf a ganiateir, [4]
- (b) cyfanswm pwysau'r 3 dyn yn fwy na chyfanswm pwysau'r 4 merch. [4]

11. (S1 Mehefin 1996) Mae'r hapnewidynnau X ac Y yn annibynnol ac mae gan y ddau ddosraniad Poisson gyda chymedr μ .

- (a) Dangoswch fod $E(X^2) = \mu(\mu + 1)$ [2]
- (b) O wybod fod $Z = XY$, dangoswch fod $(Z) = \mu^2(2\mu + 1)$. [3]

12. (A3 1996) Mae pedwar athletwr yn rhedeg ras gyfnewid 4×400 m. Mae eu hyfforddwr yn gwybod o brofiad fod yr amseroedd a gymer pob athletwr i redeg 400m wedi eu dosrannu'n normal gyda'r cymedrau a'r gwyradau safonol canlynol.

Athletwr	Cymedr (eil)	G.S. (eil)
1	57.3	1.3
2	63.5	1.7
3	60.9	1.5
4	59.8	1.9

- (a) Cyfrifwch gymedr a gwyriad safonol cyfanswm yr amser mae'n ei gymryd i'r athletwyr gwblhau'r pedair rhan, gan ddynodi'n glir pan fo angen dod i unrhyw ragdybiaeth ynghylch annibyniaeth. [4]
- (b) Cyfrifwch y tebygolrwydd fod y pedair rhan yn cael eu cwblhau mewn cyfanswm amser sy'n llai na 4 munud. [3]

13. (S1 Mehefin 1996) Mae diffygion yn digwydd ar hap wrth gynhyrchu cebl arbennig ar raddfa gymedrig o 3.75 i bob 100m. Caiff y cebl hwn ei roi o amgylch drymiau, gyda phob drwm yn dal 40m. Os yw X yn cynrychioli nifer y diffygion ar ddrwm, ysgrifennwch fodel addas ar gyfer dosraniad X . [1]

- (a) Darganfyddwch, heb ddefnyddio tablau, y tebygolrwydd fod o leiaf 2 ddiffyg ar ddrwm. [2]
- (b) Mae cwsmer yn prynu 5 drwm. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod union 3 ohonynt yn cynnwys o leiaf 2 ddiffyg. [2]
- (c) Mae cwsmer arall yn prynu 100 drwm. Darganfyddwch, yn fras, y tebygolrwydd fod y drymiau hyn yn cynnwys cyfanswm o 175 diffyg. Rhewch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [4]

14. (A3 1996) Yn annibynnol ar gyfer pob diwrnod, gellir modelu'r nifer o weithiau mae peiriannau'n torri i lawr mewn ffatri gyda dosraniad Poisson sydd â chymedr 2.5.
- (b) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd peiriannau'n torri i lawr o leiaf 20 gwaith mewn wythnos 6-diwrnod. [2]
- (c) Defnyddiwch frasmcan dosraniadol i gyfrifo'r tebygolrwydd y bydd peiriannau'n torri i lawr o leiaf 780 gwaith mewn blwyddyn 300-diwrnod. [4]
15. (A3 1997) Mae pwysau darnau o doffi cartref wedi eu dosrannu'n normal gyda chymedr 35 gram a gwyriad safonol 4 gram.
- (b) Mae bag sydd yn cynnwys 6 darn o doffi yn pwyso 200 gram mewn enw. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd cyfanswm pwysau'r toffi yn y bag yn fwy na'r gwerth hwn. [4]
16. (S1 Mehefin 1999) Bob bore yn ystod yr wythnos mae bysiau'n gadael pentref tuag at dref gyfagos am 07.00, 07.30, ac 08.00. Ar unrhyw fore mae gan nifer y teithwyr sy'n defnyddio'r bysiau hyn ddosraniadau Poisson annibynnol gyda chymedrau 4, 11 a 34, yn y drefn honno.
- (b) Darganfyddwch y tebygolrwydd ar fore yn ystod yr wythnos y bydd cyfanswm nifer y teithwyr sydd yn defnyddio'r bysiau am 07.00 a 07.30 yn o leiaf 10. [2]
- (c) Darganfyddwch amcangyfrif o'r tebygolrwydd y bydd cyfanswm nifer y teithwyr sydd yn defnyddio'r tri bws ar fore yn ystod yr wythnos yn 38 neu lai. [4]
17. (S1 Ion 1999) Mewn drafft cyntaf o lyfr Ystadegaeth, gellir cael dau fath o gamgymeriad argraffyddol. Un math yw camgymeriad yn y geiriau a'r math arall yw camgymeriad yn y fformiwlâu mathemategol. Mae gan nifer y camgymeriadau geiriol mewn n o dudalennau ddosraniad Poisson gyda chymedr $0.65n$ ac, yn annibynnol, mae gan nifer y camgymeriadau yn y fformiwlâu mewn n tudalen ddosraniad Poisson gyda chymedr $0.25n$.
- (b) O wybod fod y llyfr yn cynnwys 250 tudalen, darganfyddwch werth bras ar gyfer y tebygolrwydd y bydd cyfanswm y camgymeriadau yn y geiriau a'r fformiwlâu yn llai na 230. [5]
18. (S1 Ion 1999) Mae siop bapur newydd yn gwerthu ticedi'r Loteri Genedlaethol a thicedi Arian Cyflym. Mae enillion wythnosol y siop o werthiant ticedi'r Loteri Genedlaethol yn hapnewidyn X a all gael ei fodelu â dosraniad normal sydd â chymedr £450 a gwyriad safonol £20. Yn annibynnol, mae enillion wythnosol y siop o werthiant ticedi Arian Cyflym yn hapnewidyn Y a all gael ei fodelu â dosraniad normal sydd â chymedr £120 a gwyriad safonol £15.

- (a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd cyfanswm enillion y siop o werthiant ticedi'r Loteri Genedlaethol a thicedi Arian Cyflym yn fwy na £600 mewn wythnos. [3]
- (b) Gan dybio fod cyfanswm enillion un wythnos yn annibynnol o gyfanswm enillion unrhyw wythnos arall, cyfrifwch y tebygolrwydd mewn cyfnod o bedair wythnos y bydd cyfanswm enillion y siop o werthiant ticedi'r Loteri Genedlaethol a thicedi Arian Cyflym yn llai na £2200. [3]
- (c) Cyfrifwch y tebygolrwydd mewn wythnos y bydd enillion y siop o werthiant ticedi'r Loteri Genedlaethol yn fwy na thair gwaith yr enillion o werthiant ticedi Arian Cyflym.
19. (S1 Mehefin 1999) Mae màs, X gram, jam mewn jar wedi ei ddosrannu'n normal gyda chymedr 454 a gwyriad safonol 5. Mae cyfanswm màs, T gram, jar a'i gynnwys wedi ei ddosrannu'n normal gyda chymedr 620 a gwyriad safonol 8. Gadewch i Y gram ddynodi màs jar gwag.
- (c) Pa ddau o blith X , Y a T sydd yn hapnewidynnau annibynnol? [1]
- (d) Gan ddangos eich gwaith yn glir, darganfyddwch gymedr ac amrywiant Y (màs jar gwag). [3]

Pennod 3

Profi Rhagdybiaethau 1

Rhagarweiniad

Edrychwch ar unrhyw ddarn o arian sydd gennych. Ydy hi'n bosibl barnu a yw'n ddiuedd yn y ffaith ei bod hi yr un mor debygol o lanio ar ei ben a'i gynffon wrth ei daflu? Eich ateb yn ddi-os (fel pobl eraill, gan gynnwys arbenigwyr mewn mecaneg) yw 'Nac ydy'. Mae'r cwestiwn hwn yr un fath â cheisio penderfynu a yw'r tebygolrwydd o gael pen mewn un taflriad o geiniog yn hafal i $\frac{1}{2}$. Efallai y bydd hyn yn eich atgoffa o'r diffiniad o debygolrwydd unrhyw ddigwyddiad sydd yn gysylltiedig â haparbrwff: amledd cymharol y digwyddiad mewn nifer amhenodol o fawr o dreialon o'r haparbrwff. Ond nid yw hyn yn ymarferol gan nad oes modd rhoi cynnig ar nifer amhenodol o fawr o daflriadau i'r geiniog. Y gorau y gallwn ei wneud felly yw taflu'r geiniog nifer penodol o weithiau, dyweder n gwaith, a chyfrif nifer y taflriadau sydd yn rhoi pen. Gadewch i X ddynodi nifer y pennau a geir mewn n taflriad o'r geiniog. Yna bydd X/n , amledd cymharol y pennau, yn darparu amcangyfrif o'r tebygolrwydd o gael pen wrth daflu'r geiniog yn y dyfodol.

Cofiwch fod gan X dosraniad binomial $B(n,p)$, gyda p yn cynrychioli'r tebygolrwydd o gael pen ac $E(X) = np$. Os yw'r geiniog yn ddiuedd fel bod $p = \frac{1}{2}$ yna mae $E(X) = \frac{1}{2}n$. Os yw'r gwerth X a geir yn llawer mwy neu'n llawer llai na $\frac{1}{2}n$ yna fe fyddwn yn dueddol o ddod i'r casgliad fod y geiniog â thuedd iddi. Ond sylwer, beth bynnag yw gwerth p , gall X gymryd unrhyw un o'r gwerthoedd $0, 1, 2, \dots, n$, felly hyd yn oed os yw'r geiniog yn ddiuedd, gellir cael gwerth X sydd yn hollol wahanol i $\frac{1}{2}n$. O ganlyniad, mae'n amlwg nad oes unrhyw ffordd i benderfynu'n bendant a yw'r geiniog yn ddiuedd ai peidio.

Bydd dull yn cael ei ddisgrifio yn nes ymlaen ar gyfer dod i gasgliad a fydd yn darparu rhyw amddiffyniad (ar sail tebygolrwydd) yn erbyn casglu fod y geiniog â thuedd iddi tra ei bod, mewn gwirionedd, yn geiniog ddiuedd. Cyn disgrifio'r dull hwn rhaid i ni gyflwyno ychydig o derminoleg.

3.1 Rhagdybiaethau nwl ac arall

Gadewch i X ddynodi hapnewidyn gyda dosraniad sydd yn dibynnu ar nifer anhysbys o θ (a elwir yn **baramedr** y dosraniad). Mae achosion yn codi yn ymarferol pan fo haparbrwff o arsylwadau X i'w ddefnyddio i brofi a oes gan θ werth penodol o θ_0 ai peidio. (Yn y sefyllfa a ddisgrifiwyd yn y rhagarweiniad uchod, dim ond un arsylw o

X o'r dosraniad binomial $B(n, \theta)$ oedd gennym, gyda θ yn cynrychioli'r tebygolrwydd o gael pen a'r gwerth penodol dan sylw yn $\theta_0 = \frac{1}{2}$.

Mae'r tybiad $\theta = \theta_0$ yn cael ei alw'n **rhagdybiaeth nwl** a chaiff ei dalfyrro fel $H_0: \theta = \theta_0$. Ar ôl pennu H_0 addas, y cam nesaf yw nodi'r **rhagdybiaeth arall**, sydd yn cael ei ddynodi gan H_1 , ac fe fydd hwn yn cael ei dderbyn os penderfynir gwrthod H_0 . (Yn y broblem a ddisgrifiwyd yn y rhagarweiniad y rhagdybiaeth nwl fyddai $H_0: \theta = \frac{1}{2}$ (h.y. fod y geiniog yn ddiuedd) a'r rhagdybiaeth arall fyddai $H_1: \theta \neq \frac{1}{2}$ (h.y. fod y geiniog â thuedd iddi). Yn gyffredinol gall y rhagdybiaeth arall gymryd unrhyw un o'r tair ffurf ganlynol.

1. $H_1: \theta < \theta_0$. Bydd y ffurf hon ar ragdybiaeth arall yn addas os ydym ni'n gwybod cyn cymryd y sampl fod θ ar y mwyaf yn θ_0 neu os ydym ni â diddordeb yn unig mewn darganfod gwerth i θ sydd yn llai na θ_0 . Er enghraifft, gadewch i μ_0 gynrychioli nifer cymedrig y damweiniau sydd wedi digwydd bob mis ar draffordd benodol. Awgrymwyd y byddai gosod camerâu cyflymder ar hyd y draffordd yn lleihau'r gyfradd ddamweiniau. Gan adael i μ ddynodi nifer cymedrig y damweiniau fydd yn digwydd ar ôl gosod y camerâu cyflymder, y rhagdybiaethau nwl ac arall addas yw $H_0: \mu = \mu_0$ a $H_1: \mu < \mu_0$.
2. $H_1: \theta > \theta_0$. Bydd y ffurf hon ar ragdybiaeth arall yn addas os ydym ni'n gwybod cyn cymryd y sampl fod θ yn o leiaf θ_0 neu os ydym ni â diddordeb yn unig mewn darganfod gwerth i θ sydd yn fwy na θ_0 . Fel enghraifft, tybiwch mai μ_0 yw safon gymedrig bresennol eitem benodol a fas-gynhyrchir. Cynigiwyd newid y broses fas-gynhyrchu er mwyn gwella'r safon gymedrig. Yn yr achos hwn y rhagdybiaeth nwl ac arall addas yw $H_0: \mu = \mu_0$ a $H_1: \mu > \mu_0$.
3. $H_1: \theta \neq \theta_0$. Mae'r ffurf hon ar ragdybiaeth arall yn addas os nad oes gennym ni unrhyw wybodaeth ymlaen llaw am werth θ , neu os ydym ni â diddordeb yn unig mewn darganfod gwerth i θ sydd yn wahanol i θ_0 i unrhyw gyfeiriad. Hon yw'r ffurf addas wrth brofi a yw ceiniog yn ddiuedd ai peidio, gyda θ yn cynrychioli'r tebygolrwydd o gael pen a $\theta_0 = \frac{1}{2}$.

Dywedir fod rhagdybiaeth arall ar ffurf $H_1: \theta < \theta_0$ neu $H_1: \theta > \theta_0$ yn **un-ochrog**, tra bod rhagdybiaeth arall ar ffurf $H_1: \theta \neq \theta_0$ yn **ddwy-ochrog**.

[Mewn arholiad dylai geiriad unrhyw gwestiwn ar brofi rhagdybiaeth gyfleu yn glir drwy'r cyd-destun pa ffurf ar ragdybiaeth arall sydd yn addas. Os nad yw hyn yn wir, awgrymir eich bod yn datgan yn glir pa ffurf ar ragdybiaeth arall yr ydych wedi ei dewis].

Ymarfer 3.1

Ym mhob un o'r canlynol, nodwch y paramedr sydd o ddiddordeb a dewiswch rhagdybiaethau nwl ac arall.

1. Mae hi'n hysbys fod cyffur penodol yn gwella 75% o'r cleifion a gaiff eu trin. Caiff cyffur newydd ei ddefnyddio ar sampl o gleifion i weld a fydd y gyfran sy'n gwella yn uwch.
2. Caiff dis ciwbig ei daflu nifer o weithiau i brofi a yw'n dueddol o beidio â rhoi sgôr o 6.
3. Mae modurwr wedi darganfod dros gyfnod hir o amser mai cyfartaledd traul tanwydd ei gar yw 11.7 km i bob litr. Mae'r modurwr yn gosod teclyn sydd yn honni lleihau cyfartaledd y traul tanwydd.
4. Pan fo peiriant yn gweithio'n iawn mae'n cynhyrchu pinnau haearn sydd â hyd cymedrig o 2.5 cm. Cymerir samplau o'r pinnau ar gyfnodau i ofalu nad yw'r hyd cymedrig wedi newid.
5. Yn yr etholiad cyffredinol diwethaf, pleidleisiodd 40% o'r etholwyr mewn ardal benodol dros Lafur. Un mis cyn yr etholiad cyffredinol nesaf bwriedir cynnal arolwg barn o'r etholwyr i weld a yw'r canradd fydd yn pleidleisio dros Lafur wedi newid ers yr etholiad diwethaf.

3.2 Y gwerth-p

Gadewch i $X_1, X_2, \dots, X_n$ ddynodi hap-sampl o n arsylw o'r hapnewidyn X gyda'i ddosraniad yn dibynnu ar y paramedr θ a bod y sampl i'w ddefnyddio i brofi'r rhagdybiaeth nwl $H_0: \theta = \theta_0$. Gadewch i T ddynodi cyfuniad o $X_1, X_2, \dots, X_n$ sydd yn cael ei ystyried yn addas ar gyfer y prawf. Er enghraifft, os θ yw cymedr y dosraniad, μ , yna byddai cymedr y sampl, $\bar{X}$, yn ddewis addas ar gyfer T . Cyfeirir at y T a ddewisir fel **ystadegyn prawf**. Nodwch fod T ei hun yn hapnewidyn. Dylai'r penderfyniad i dderbyn neu wrthod y rhagdybiaeth nwl gael ei wneud ar sail y gwerth arsylwedig t o T . Er mwyn gwneud hyn, mae angen mesuriad o ba mor debygol neu annhebygol yw'r t arsylwedig o fod yn werth rhesymol ar gyfer T os yw'r rhagdybiaeth nwl yn wir. Un mesuriad o'r fath yw'r **gwerth-p** a ddiffinnir isod:

Diffiniad: O wybod gwerth arsylwedig t o T , y gwerth-p yw'r tebygolrwydd y bydd gan T werth sydd o leiaf yr un mor eithafol â t os yw'r rhagdybiaeth nwl yn gywir.

Mae hi'n amlwg o'r diffiniad hwn mai dim ond os ydym ni'n gwybod dosraniad T pan fo'r rhagdybiaeth nwl yn wir y gellir cyfrifo'r gwerth-p.

Mae gwerth-p a gyfrifwyd o p_0 , dyweder, yn golygu fod yn rhaid i $100p_0\%$ o'r holl samplau posibl o'r maint a gymerwyd gael gwerth o T fydd o leiaf yr un mor eithafol â'r t arsylwedig. Y lleiaf yw'r gwerth-p, y cryfaf yw tystiolaeth y samplau nad yw H_0 yn wir. Wrth benderfynu pa mor fach yw gwerth-p, fe fydd cyfiawnhau gwrthod H_0 yn dibynnu ar ddifrifoldeb canlyniadau sy'n gwrthod H_0 ar gam. Pan nad yw'n bosibl

asesu'r canlyniadau hyn, defnyddir rheol yn aml sy'n gwrthod H_0 dim ond os yw'r gwerth-p yn llai na neu'n hafal i 0.05. Mae'r canlynol yn ganllaw manylach ar gyfer dehongli'r gwerth-p.

- (a) Os yw'r gwerth-p yn ≤ 0.01 mae'r sampl yn darparu tystiolaeth gref iawn ar gyfer gwrthod H_0 .
- (b) Os yw $0.01 < \text{gwerth-p} \leq 0.05$ mae'r sampl yn darparu tystiolaeth gref ar gyfer gwrthod H_0 .
- (c) Os yw'r gwerth-p yn > 0.05 nid oes digon o dystiolaeth i gyfiawnhau gwrthod H_0 . Nodwch hefyd nad yw (c) yn caniatáu i ni gasglu fod H_0 yn wir. Mae hyn yn iawn gan fod gwerth manwl gywir y paramedr θ yn anhysbys ac fe fydd hwn yn aros yn anhysbys hyd yn oed ar ôl i arsylwadau'r sampl gael eu gwneud. Yn y cyswllt hwn mae'r drefn uchod rywfodd yn un-ochrog o ganlyniad i'r ffaith ei fod yn darparu amddiffyniad tebygol yn erbyn gwrthod H_0 ar gam ond nid yw'n caniatáu derbyn fod H_0 yn wir. Mae'r drefn wedi ei dyfeisio i ymdrin â sefyllfaoedd sydd â'r pwrpas o ganfod gwyrriad oddi wrth gwerth rhagdybiedig θ_0 .

Cyn rhoi'r drefn uchod ar waith mewn achosion penodol rhaid i ni egluro'n fanwl ystyr "o leiaf yr un mor eithafol" yn niffiniad y gwerth-p. Yn yr achosion y byddwn ni'n eu hystyried mae T wedi ei ddosrannu fel bod $E(T) = k\theta$, lle mae k yn gysonyn positif. Yn arbennig, wrth dybio fod H_0 yn wir, mae $E(T) = k\theta_0$.

Os y rhagdybiaeth arall yw $H_1: \theta < \theta_0$ yna mae gwerth eithafol o T yn un bach o'i gymharu â θ_0 , felly yn yr achos hwn, mae

$$\text{gwerth-p} = P(T \leq t \text{ pan fo } H_0 \text{ yn wir}).$$

Yn yr un modd, os y rhagdybiaeth arall yw $H_1: \theta > \theta_0$, mae gwerth eithafol o T yn un mawr o'i gymharu â $k\theta_0$, ac mae

$$\text{gwerth-p} = P(T \geq t \text{ pan fo } H_0 \text{ yn wir}).$$

Pan fo H_1 yn ddwy-ochrog h.y. $\theta \neq \theta_0$ bydd gwerth eithafol o T yn un sydd naill ai'n fawr neu'n fach o'i gymharu â $k\theta_0$. Nawr bydd gwerth arsylwedig t o T naill ai'n $< k\theta_0$ neu'n $> k\theta_0$. Pa bynnag o'r rhain sydd yn digwydd, rhaid rhoi lle i werth **ar sail tebygolrwydd** sydd yr un mor eithafol i'r cyfeiriad arall oddi wrth $k\theta_0$. Mae'n dilyn yn yr achos hwn y bydd y gwerth-p fel a ganlyn.

$$(a) \text{ ar gyfer } t > k\theta_0, \text{ mae gwerth-p} = 2P(T \geq t \text{ pan fo } H_0 \text{ yn wir}),$$

$$(b) \text{ ar gyfer } t < k\theta_0, \text{ mae gwerth-p} = 2P(T \leq t \text{ pan fo } H_0 \text{ yn wir}).$$

Mae'r is-adrannau canlynol yn dangos y drefn uchod mewn rhai sefyllfaoedd safonol.

3.2.1 Profi cymedr dosraniad normal sydd ag amrywiant hysbys

Ystyriwch hapnewidyn X sydd â dosraniad normal gyda chymedr anhysbys μ ac amrywiant hysbys σ^2 . Defnyddir hap-sampl o n arsylw i brofi bod $H_0: \mu = \mu_0$ ar gyfer rhyw werth penodol μ_0 . Yn yr achos hwn mae'n amlwg y dylid defnyddio $\bar{X}$ fel ystadegyn prawf, y mae'n hysbys bod ei ddosraniad yn normal gyda chymedr μ a

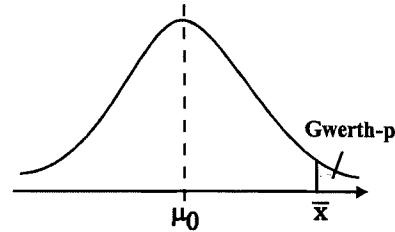
gwyriad safonol $\sigma/\sqrt{n}$. Mae'n dilyn, pan dybir bod H_0 yn wir, fod $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$. Boed i $\bar{x}$ fod y gwerth dan sylw a geir yn y sampl ar gyfer $\bar{X}$.

ACHOS A : Profi $H_0 : \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1 : \mu > \mu_0$.

Yma, gwerth eithafol ar gyfer $\bar{X}$ yw un sy'n fawr o'i gymharu â μ_0 ac felly,

$$\begin{aligned} \text{y gwerth-p} &= P(\bar{X} \geq \bar{x} \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) \\ &= P\left(Z \geq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

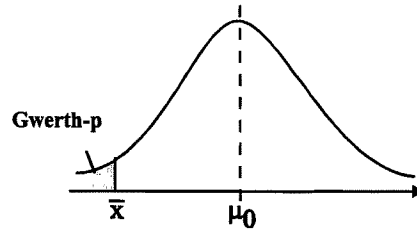
lle mae $\text{GS}(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ a $Z \sim N(0, 1)$.



ACHOS B : Profi $H_0 : \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1 : \mu < \mu_0$.

Yn yr achos hwn mae'n dilyn bod

$$\begin{aligned} \text{y gwerth-p} &= P(\bar{X} \leq \bar{x} \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})}\right) \end{aligned} \quad (2)$$



ACHOS C : Profi $H_0 : \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Yn yr achos hwn gall gwerth eithafol ar gyfer $\bar{X}$ fod yn un sy'n fawr neu'n fach o'i gymharu â μ_0 .

(a) Os $\bar{x} > \mu_0$, yna gan gymryd i ystyriaeth werth yr un mor eithafol sy'n $< \mu_0$,

$$\text{y gwerth-p} = 2P(\bar{X} \geq \bar{x} \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) = 2P\left(Z \geq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})}\right)$$

(b) Os $\bar{x} < \mu_0$, yna gan gymryd i ystyriaeth werth yr un mor eithafol sy'n $> \mu_0$,

$$\text{y gwerth-p} = 2P(\bar{X} \leq \bar{x} \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) = 2P\left(Z \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})}\right)$$

Enghraifft 1

Mae gwneuthurwr arbennig yn cynhyrchu cortyn neilon ac mae'n hysbys bod gan hydoedd un metr ohono gryfderau torri sydd â dosraniad normal gyda chymedr 10.2 kg a gwyriad safonol 0.8 kg. Mae arbrofion yn y labordy wedi awgrymu y gellir addasu'r broses weithgynhyrchu gan roi cryfderau torri sydd â dosraniad normal gyda chymedr mwy ond yr un gwyriad safonol. Defnyddiwyd y broses wedi'i haddasu i gynhyrchu 25 hyd un metr a darganfuwyd bod cryfder torri cymedrig y sampl yn 10.4 kg. Profwch y rhagdybiaeth na fydd yr addasiad yn newid cymedr y cryfder torri yn erbyn y rhagdybiaeth arall y bydd yn rhoi cryfder torri cymedrig mwy.

Datrysiaid

Boed i X kg ddynodi cryfder torri cortyn neilon ar ôl addasu'r broses, a boed i μ kg ddynodi cryfder torri cymedrig cortynnau o'r fath. Yna, $X \sim N(\mu, 0.8^2)$. Mae angen profi

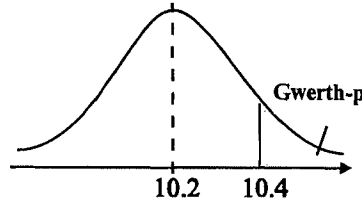
$$H_0: \mu = 10.2 \text{ yn erbyn } H_1: \mu > 10.2.$$

Boed i $\bar{X}$ ddynodi cymedr hap-sampl o 25 cortyn ar ôl addasu'r broses. Yna, mae gan $\bar{X}$ dosraniad normal gyda chymedr μ a gwyriad safonol $0.8/5 = 0.16$. Gan fod cymedr y sampl dan sylw yn 10.4,

$$\text{y gwerth-p} = P(\bar{X} \geq 10.4 \text{ pan fydd } \mu = 10.2)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{10.4 - 10.2}{0.16}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.25) \approx 0.1056$$



Gan fod y gwerth-p > 0.05 nid oes tystiolaeth ddigonol i wrthod H_0 ; hynny yw, nid oes tystiolaeth ddigonol i gasglu y bydd y broses wedi'i haddasu yn cynhyrchu cortynnau gyda chryfder torri cymedrig mwy. [Gan nad yw'r gwerth-p yn fawr iawn, gellir argymhell y dylid cymryd sampl mwy o gortynnau ar ôl addasu'r broses er mwyn cael asesiad mwy dibynadwy.]

Enghraifft 2

Y pellter cymedrig yr oedd gyrrwr teithiau pell yn ei deithio bob wythnos yn y gorffennol oedd 1130 km. Yn yr 20 wythnos gyntaf ar ôl cyflwyno rheolau gyrru newydd fe yrrodd gyfanswm o 21600 km. Gan dybio fod y pellter a deithiwyd bob wythnos ar ôl cyflwyno'r rheolau newydd wedi eu dosrannu'n normal gyda gwyriad safonol 106 km, profwch a yw'r pellter cymedrig a deithiwyd bob wythnos wedi newid o'r ffigur blaenorol o 1130 km.

Datrysiad

Gadewch i X km ddynodi'r pellter a deithiwyd bob wythnos ar ôl cyflwyno'r rheolau gyrru newydd a defnyddiwyd μ i ddynodi'r pellter cymedrig a deithiwyd. Yna mae gan X y dosraniad normal $N(\mu, 106^2)$. Mae angen i ni brofi

$$H_0: \mu = 1130 \text{ (y cymedr blaenorol)} \text{ v } H_1: \mu \neq 1130 \text{ (y cymedr newydd)}$$

Gadewch i $\bar{X}$ ddynodi'r pellter cymedrig a deithiwyd mewn 20 wythnos. Gan dybio fod H_0 yn wir, mae

$$\bar{X} \sim N(1130, \frac{106^2}{20} = 561.8).$$

Mae'r gwerth arsylwedig $\bar{x} = \frac{21600}{20} = 1080$, sy'n llai na $E(\bar{X}) = 1130$.

Gan fod H_1 yn ddwy-ochrog, mae'r

$$\text{gwerth-p} = 2P(\bar{X} \leq 1080) = 2P(Z < \frac{1080 - 1130}{\sqrt{561.8}})$$

$$= 2P(Z < -2.11) = 2 \times 0.01743 \approx 0.035.$$

Gan fod y gwerth-p yn llai na 0.05 ond yn fwy na 0.01, mae yna dystiolaeth gref yn erbyn H_0 ac felly fe allwn ni gasglu fod yna newid yn y pellter cymedrig a deithiwyd. Gan fod yr $\bar{x}$ arsylwedig yn llai na $E(X)$ fe allwn ni fod yn fwy sicr a chasglu fod y pellter cymedrig a deithiwyd ar ôl cyflwyno'r rheolau gyrru newydd yn llai na'r pellter cymedrig a deithiwyd yn y gorffennol.

Ymarfer 3.2.1

1. Cymerir hap-sampl o 25 arsylw ar ddosraniad normal sydd â chymedr μ a gwyriad safonol 2 er mwyn profi $H_0 : \mu = 10$ yn erbyn $H_1 : \mu > 10$. Cynhaliwch y prawf o wybod bod cymedr y sampl dan sylw yn 11.
2. Pan fydd peiriant yn gweithio yn iawn mae'n cynhyrchu pinnau dur y mae gan eu hydoedd ddosraniad normal gyda chymedr 2.5 cm a gwyriad safonol 0.05 cm. Mae unrhyw ddiffyg ar y peiriant yn effeithio ar yr hyd cymedrig yn unig. Cymerir samplau bob hyn a hyn er mwyn profi bod y peiriant yn gweithio yn iawn. Mae pob sampl o'r fath yn cynnwys 40 pin. Cynhaliwch brawf i benderfynu a yw'r peiriant yn mynd o chwith o wybod bod cymedr y sampl (a) yn 2.49 cm, (b) yn 2.52 cm.
3. Mae gan gwmni sy'n cynhyrchu bylbiau golau trydan adran ymchwil er mwyn datblygu addasiadau i'r broses gynhyrchu i geisio cynyddu hyd oes cymedrig y bylbiau. Ar hyn o bryd mae gan yr hydoedd oes ddosraniad normal gyda chymedr 2200 awr a gwyriad safonol 118 awr. Gellir cymryd y bydd unrhyw addasiad i'r broses bresennol yn effeithio ar yr hyd oes cymedrig yn unig. Defnyddir unrhyw addasiad i gynhyrchu 100 o fylbiau. Profwch a ddylid mabwysiadu addasiad o wybod bod hyd oes cymedrig y 100 bwlb (a) yn 2210 awr, (b) yn 2231 awr.
4. Mae gan fâs eitemau a gynhyrchir gan beiriant arbennig ddosraniad normal gyda chymedr μ kg a gwyriad safonol 0.02 kg. Os $\mu \neq 1$ yna dylid cywiro gosodiad y peiriant. O wybod bod mäs cymedrig hap-sampl o 25 eitem yn 0.989 kg penderfynwch a ddylid ystyried cywiro gosodiad y peiriant.
5. Mae'n hysbys bod gan feintiau'r tar mewn sigarennau o frand arbennig ddosraniad normal gyda chymedr μ mg a gwyriad safonol 0.8 mg. Mewn hap-sampl o 10 o sigarennau, cafwyd y meintiau canlynol o dar :
17.1, 19.2, 18.3, 18.2, 18.9, 17.8, 17.8, 18.3, 16.9, 18.5
Profwch y rhagdybiaeth bod $\mu = 17.5$ yn erbyn y rhagdybiaeth arall bod $\mu > 17.5$.

3.2.2 Profi tebygolrwydd neu gyfran

Boed i θ ddynodi'r tebygolrwydd anhysbys o lwyddiant ym mhob cynnig o haparbrawf. Tybiwch fod angen profi'r rhagdybiaeth nwl $H_0 : \theta = \theta_0$, ar gyfer rhyw werth penodol θ_0 , yn seiliedig ar nifer X y llwyddiannau a geir mewn n cynnig annibynnol ar yr haparbrawf. A bwrw bod H_0 yn wir, dosraniad X yw $B(n, \theta_0)$ a gwerth disgwyliedig X yw $E(X) = n\theta_0$. Felly, bydd gwerth x ar gyfer X sy'n wahanol iawn i $n\theta_0$ yn bwrw amheuaeth ar ddilysrwydd H_0 .

ACHOS A : Profi $H_0 : \theta = \theta_0$ yn erbyn $H_1 : \theta > \theta_0$.

Yn yr achos hwn mae gwerth eithafol ar gyfer X yn un sy'n fawr o'i gymharu ag $n\theta_0$, ac felly os x yw gwerth dan sylw X ,

$$y \text{ gwerth-p} = P(X \geq x \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir})$$

ACHOS B : Profi $H_0 : \theta = \theta_0$ yn erbyn $H_1 : \theta < \theta_0$.

Nawr, mae gwerth eithafol ar gyfer X yn un sy'n fach o'i gymharu ag $n\theta_0$, ac felly os x yw gwerth dan sylw X ,

$$y \text{ gwerth-p} = P(X \leq x \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}).$$

ACHOS C : Profi $H_0 : \theta = \theta_0$ yn erbyn $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Nawr, mae gwerth eithafol ar gyfer X yn un sy'n fawr neu'n fach o'i gymharu ag $n\theta_0$. Os yw x dan sylw $> n\theta_0$ mae angen cymryd i ystyriaeth werth eithafol yr un mor debygol $< n\theta_0$, ac os $x < n\theta_0$ mae angen cymryd i ystyriaeth werth eithafol yr un mor debygol $> n\theta_0$. Trwy hyn, ceir y gwerth-p fel a ganlyn.

$$(a) \text{ Os } x > n\theta_0, \quad y \text{ gwerth-p} = 2P(X \geq x \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir})$$

$$(b) \text{ Os } x < n\theta_0, \quad y \text{ gwerth-p} = 2P(X \leq x \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir})$$

Enghraifft 1

Mae gwneuthurwr math newydd o wrtaith hadu yn honni y bydd gan hadau a heuir yn y gwrtaith newydd hwn gyfradd egino uwch na phetaent yn cael eu hau mewn gwrtaith cyffredin. Ar gyfer math penodol o hadau a heuir mewn gwrtaith cyffredin, mae'n hysbys bod y gyfradd egino yn 0.7 (70%). Er mwyn profi honiad y gwneuthurwr, cynhaliwyd arbrawf lle cafodd 20 o'r hadau eu hau yn y gwrtaith newydd. Cynhaliwch y prawf o wybod i 18 o'r 20 had egino.

Datrysiad

Boed i X ddynodi'r nifer o'r 20 had a heuwyd yn y gwrtaith newydd ac a fydd yn egino a boed i θ ddynodi'r gyfradd egino. Yna $X \sim B(20, \theta)$. Gan mai dim ond yn y posibilrwydd bod $\theta > 0.7$ y mae gennym ddiddordeb, y rhagdybiaeth nwl a'r rhagdybiaeth arall priodol yw :

$$H_0 : \theta = 0.7 \text{ ac } H_1 : \theta > 0.7.$$

Gan mai $x = 18$ yw gwerth dan sylw X ,

$$y \text{ gwerth-p} = P(X \geq 18 \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir})$$

Os yw H_0 yn wir yna $X \sim B(20, 0.7)$. Mae Tabl 1 yn rhoi tebygolrwyddau binomaidd cronrus ar gyfer $n = 20$ gyda gwerthoedd $\theta \leq 0.5$ yn unig. Er mwyn ein galluogi i ddefnyddio Tabl 1, boed i X' ddynodi'r nifer o'r 20 had na fydd yn egino ac felly pan fydd H_0 yn wir $X' \sim B(20, 0.3)$. Nawr mae $X \geq 18$ yn cyfateb i $X' \leq 2$ ac felly, gan gyfeirio ar Dabl 1, ceir

$$y \text{ gwerth-p} = P(X' \leq 2) = 0.0355.$$

Mae'n dilyn bod yr arbrawf yn darparu tystiolaeth gref yn erbyn H_0 ac felly y casgliad yw cefnogi'r honiad a wneir gan y gwneuthurwr.

Enghraifft 2

Mae archfarchnad yn honni bod 25% o'i chwsmeriaid yn talu gyda cherdyn credyd. Profwch yr honiad hwn ym mhob un o'r achosion canlynol.

- (a) Mewn hap-sampl o 50 o gwsmeriaid cafwyd bod 9 wedi talu gyda cherdyn credyd.
- (b) Mewn hap-sampl o 160 o gwsmeriaid cafwyd bod 28 wedi talu gyda cherdyn credyd.

Datrysiad

Boed i θ ddynodi gwir gyfran y cwsmeriaid sy'n talu gyda cherdyn credyd. Gan fod gennym ddiddordeb yma mewn gwerth ar gyfer θ sydd yn wahanol i 0.25 i'r naill gyfeiriad neu'r llall, y rhagdybiaeth nwl a'r rhagdybiaeth arall priodol yw :

$$H_0 : \theta = 0.25 \text{ ac } H_1 : \theta \neq 0.25$$

Gellir trin taliadau gan gwsmeriaid fel arbrofion annibynnol lle mae'r tebygolrwydd o lwyddiant ym mhob un yn θ , lle mae llwyddiant yn golygu taliad gyda cherdyn credyd. Boed i X ddynodi nifer y cwsmeriaid mewn hap-sampl o n cwsmer sy'n talu gyda cherdyn credyd. Yna $X \sim B(n, \theta)$.

- (a) Yma, os yw H_0 yn wir, $X \sim B(50, 0.25)$ sydd â gwerth disgwyledig o 12.5. Gan fod y gwerth dan sylw $x = 9$ yn llai na 12.5 a chan fod H_1 yn ddwyochrog,

$$\begin{aligned} y \text{ gwerth-p} &= 2P(X \leq 9) = 2 \times 0.1637 \text{ oddi wrth Dabl 1} \\ &= 0.3274 \end{aligned}$$

Mae'r gwerth-p hwn yn rhy fawr o lawer i gyfiawnhau gwrthod H_0 . Felly, ar sail y sampl hwn, nid oes digon o dystiolaeth i amau'r honiad a wnaed.

- (b) Yn yr achos hwn, os yw H_0 yn wir, $X \sim B(160, 0.25)$, sydd â chymedr o 40. Gan fod y gwerth dan sylw $x = 28$ yn llai na 40 a chan fod H_1 yn ddwyochrog

$$y \text{ gwerth-p} = 2P(X \leq 28).$$

Ni chynhwysir $n = 160$ yn $N_{\text{habl 1}}$ ond gan ei fod yn fawr a chan nad $yw \theta = 0.25$ yn agos at 0 nac 1, gellir defnyddio'r brasamcan normal gyda'r cywiriad ar gyfer didoriant er mwyn darganfod brasamcan ar gyfer y gwerth-p. Mae gan y dosraniad $B(160, 0.25)$ gymedr 40 ac amrywiant $40 \times 0.75 = 30$ ac felly'r dosraniad normal sy'n frasamcan yw $N(40, 30)$. Wrth gymhwyso'r cywiriad ar gyfer didoriant, ceir

$$\begin{aligned} \text{y gwerth-p} &= 2P(X \leq 28) \equiv 2P(X \leq 28.5) \\ &\approx 2P\left(Z \leq \frac{28.5 - 40}{\sqrt{30}}\right) \approx 2P(Z \leq -2.10) \\ &\approx 2 \times 0.0179 = 0.0358. \end{aligned}$$

Yn yr achos hwn mae'r sampl yn darparu tystiolaeth gref yn erbyn H_0 a, chan fod yr x dan sylw yn llai na'r gwerth disgwyledig, sef 40, petai H_0 yn wir, y casgliad yw bod cyfran y cwsmeriaid sy'n talu gyda cherdyn credyd yn llai na 25%.

Ymarfer 3.2.2

1. Honnodd menyw ei bod yn gallu, trwy gyffwrdd â cherdyn chwarae yn unig, dweud yn gywir beth yw ei siwt yn amlach na phetai yn dyfalu. Er mwyn profi ei honiad, cafodd ei mygydu a gofynnwyd iddi enwi siwtiau 10 cerdyn. Profwch ei honiad, o wybod ei bod wedi enwi yn gywir siwtiau 5 o'r cardiau.
2. Amheuir bod dis rhad sydd wedi'i fewnforio yn dueddol. Taflwyd y dis 15 o weithiau ac ni chafwyd 6 ond unwaith. Darganfyddwch a yw'r wybodaeth hon yn darparu digon o dystiolaeth i gasglu bod y dis yn dueddol.
3. Mae gwneuthurwyr hylif golchi llestri o'r enw *Disglair* yn honni bod 35% o'r holl wragedd tŷ yn defnyddio'r hylif hwn, tra mae cystadleuydd yn dweud nad yw'r ffigur cymaint â hyn. Mewn hap-sampl o 20 o wragedd tŷ cafwyd bod 4 ohonynt yn defnyddio *Disglair*. Profwch yr honiad a wneir gan wneuthurwyr *Disglair* yn erbyn yr honiad a wneir gan y cystadleuydd.
4. Y tebygolrwydd y bydd larfa wystrysen yn datblygu mewn dŵr anllygredig yw 0.9, tra mae'r tebygolrwydd yn llai na 0.9 mewn dŵr llygredig. Rhoddodd magwr wystrys 20 larfa mewn sampl o ddŵr a sylwodd bod 16 ohonynt yn datblygu. Profwch a ellir cyfiawnhau'r casgliad bod y dŵr yn llygredig.
5. Mae'n hysbys bod cyffur arbennig yn gwella 55% o'r cleifion sy'n ei dderbyn. Mewn prawf clinigol, rhoddwyd i 10 claf fersiwn wedi'i addasu o'r cyffur yr honnir ei fod yn fwy effeithiol. O wybod bod 8 o'r 10 claf wedi gwella, a ellir cyfiawnhau'r casgliad bod yr addasiad yn fwy effeithiol?

6. Honnodd haphwaraewr y gallai daflu dis teg mewn ffordd arbennig sy'n rhoi tebygolrwydd o fwy nag $\frac{1}{6}$ o daflu 6. Er mwyn dangos hyn, taflodd ddis teg 50 o weithiau, gan gael 6 mewn 12 tafliad. Darganfyddwch a yw ei arddangosiad yn cefnogi ei honiad.
7. Mae Alan yn honni y gall chwarae tennis yn well na Bill ac yn herio Bill i chwarae cyfres o gemau. Profwch honiad Alan yn y ddau achos isod:
 - (a) Enillodd Alan 7 o'r 10 gêm cyntaf,
 - (b) Enillodd Alan 15 o'r 20 gêm cyntaf.
8. Mae darn arian wedi'i ddifrodi i'r fath raddau fel na ellir gweld a yw'n deg ai peidio. Profwch ddiweddrwydd y darn arian yn y ddau achos canlynol, gan nodi eich casgliad yn eglur.
 - (a) Taflwyd y darn arian 20 o weithiau a chafwyd pen 14 o weithiau.
 - (b) Taflwyd y darn arian 120 o weithiau a chafwyd pen 72 o weithiau.
9. Gyda hap-sampl o 200 o oedolion yn byw mewn ardal arbennig, cafwyd bod 120 o blaid fflworideiddio'r cyflenwad dŵr domestig. Profwch y rhagdybiaeth bod 55% o'r oedolion yn yr ardal o blaid fflworideiddio yn erbyn y rhagdybiaeth arall bod y gyfran o blaid yn fwy na 55%.
10. Mae'n hysbys bod clefyd yn effeithio ar ddail 25% o'r holl goed ffawydd. Mae botanegydd yn amau bod digwyddiadau o'r clefyd yn cynyddu gyda maint y llygredd amgylcheddol ac fe gynhaliodd arolwg o goed ffawydd mewn ardal drefol. Cafwyd 36 coeden wedi'u heintio allan o 120 a archwiliwyd. Profwch yr hyn y mae'r botanegydd yn ei amau.
11. Mae cwmni moddion yn honni mewn hysbyseb bod 60% o'r bobl sy'n dioddef o ryw anhwylder arbennig yn cael esmwythâd yn syth ar ôl defnyddio'u cynnyrch. Mae meddyg yn teimlo bod yr honiad braidd yn optimistaidd ac fe roddodd y cynnyrch i 200 o gleifion oedd yn dioddef o'r anhwylder a darganfu i 106 ohonynt gael esmwythâd yn syth. Defnyddiwch yr wybodaeth hon i brofi dilysrwydd yr honiad yn yr hysbyseb yn erbyn amheuaeth y meddyg bod yr honiad yn optimistaidd.
12. Mae ymwelydd rheolaidd â chasino yn amau bod yr olwyn rwlét yn annheg. Bob tro mae'r olwyn yn troi mae 37 sgôr posibl, a labelir 0 i 36, a dylai fod gan bob sgôr yr un tebygolrwydd o ddigwydd. Mae'r casino yn ennill os ceir sero. Nododd yr ymwelydd y rhifau a gafwyd wrth i'r olwyn gael ei throï 740 o

weithiau a gwelodd y cafwyd sero 35 o weithiau. A yw'r canlyniadau hyn yn darparu digon o dystiolaeth bod yr olwyn yn rhoi mantais annheg i'r casino?

13. Dosrennir yr hapnewidyn X yn unffurf dros y cyfwng $(-\theta, 2)$, lle mae θ yn gysonyn positif anhysbys. Darganfyddwch, yn nhermau θ , y tebygolrwydd y bydd gwerth a arsylwir ar hap ar gyfer X yn negatif.

Mewn hap-sampl o 20 gwerth dan sylw ar gyfer X , cafwyd bod 17 yn negatif a bod 3 yn bositif.

Profwch y rhagdybiaeth bod $\theta = 3$ yn erbyn y rhagdybiaeth arall bod $\theta > 3$.

14. Dosrennir yr hapnewidyn X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f , lle mae

$$f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)}, \text{ ar gyfer } x \geq 1,$$

$$f(x) = 0, \text{ fel arall.}$$

Er mwyn profi'r rhagdybiaeth bod $\alpha = 2$ yn erbyn y rhagdybiaeth arall bod $\alpha \neq 2$, penderfynwyd cymryd hap-sampl o 100 arsylw ar X a chyfrif y nifer, R sydd â gwerthoedd mwy na 5. O wybod bod gwerth dan sylw R yn 9 cynhaliwch y prawf a nodwch eich casgliad am werth α .

3.2.3 Profi cymedr dosraniad Poisson

Boed i $X_1, X_2, \dots, X_n$ ddynodi hap-sampl o n arsylw o'r dosraniad $Po(\mu)$, lle mae μ yn anhysbys. Tybiwch fod arsylwadau'r sampl am gael eu defnyddio i brofi'r rhagdybiaeth bod $\mu = \mu_0$. Gwyddom fod gan $Y = \sum X_i$ y dosraniad $Po(n\mu)$ a'r cymedr $n\mu$. Felly, os yw H_0 yn wir, gwerth disgwyledig Y yw $n\mu_0$. Mae'n dilyn y gellir gwneud y prawf trwy gymharu gwerth dan sylw y ar gyfer Y ag $n\mu_0$.

ACHOS A : $H_0 : \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1 : \mu > \mu_0$.

Yma, gwerth eithafol ar gyfer Y fydd un sy'n fawr o'i gymharu ag $n\mu_0$. Trwy hyn, o wybod gwerth dan sylw y ar gyfer Y

$$\text{y gwerth-p} = P(Y \geq y \text{ pan fydd } \mu = \mu_0).$$

ACHOS B : $H_0 : \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1 : \mu < \mu_0$.

Gwerth eithafol ar gyfer Y yn yr achos hwn fydd un sy'n fach o'i gymharu ag $n\mu_0$, ac felly

$$\text{y gwerth-p} = P(Y \leq y \text{ pan fydd } \mu = \mu_0).$$

ACHOS C : $H_0 : \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Trwy ddefnyddio'r un ddadl ag sydd yn yr isadran flaenorol, ceir y gwerth-p yn yr achos hwn fel a ganlyn :

(a) Os $y > n\mu_0$, $\text{y gwerth-p} = 2P(Y \geq y \text{ pan fydd } \mu = \mu_0).$

(b) Os $y < n\mu_0$, $\text{y gwerth-p} = 2P(Y \leq y \text{ pan fydd } \mu = \mu_0).$

Enghraifft 1

Roedd cofnodion dyddiol dros gyfnod hir yn dangos bod gan nifer y cerbydau yr oedd arnynt angen cymorth bob dydd ar hyd traffordd benodol ddosraniad Poisson gyda chymedr 0.5. Awgrymwyd y byddai'r cymedr yn fwy ar ddiwrnodau glawog. Cafwyd arsylwadau ar 10 diwrnod glawog a gwelwyd bod ar gyfanswm o 9 cerbyd angen cymorth.

A bwrw bod dosraniad Poisson yn fodel priodol ar gyfer nifer y cerbydau y mae arnynt angen cymorth ar ddiwrnod glawog, profwch a oedd tystiolaeth y sampl yn ddigon cryf i ddilysu'r awgrym.

Datrysiad

Boed i X ddynodi nifer y cerbydau y mae arnynt angen cymorth ar ddiwrnod glawog a boed i μ ddynodi cymedr X . Yna, $X \sim \text{Po}(\mu)$. Mae angen profi bod

$$H_0 : \mu = 0.5 \text{ yn erbyn } H_1 : \mu > 0.5$$

Boed i Y ddynodi cyfanswm y cerbydau y mae arnynt angen cymorth ar 10 ddiwrnod glawog. Yna, $Y \sim \text{Po}(10\mu)$ ac os yw H_0 yn wir, $Y \sim \text{Po}(5)$.

Gan fod gwerth dan sylw Y yn $y = 9$,

$$y \text{ gwerth-p} = P(Y \geq 9 \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}).$$

Gan gyfeirio at Dabl 2 gyda $\mu = 5$ (cymedr Y pan fydd H_0 yn wir) ceir

$$y \text{ gwerth-p} = 0.0681.$$

Gan fod hyn ychydig > 0.05 nid yw'r dystiolaeth yn ddigon cryf i wrthod H_0 ac, o ganlyniad, nid oes cyfiawnhad dros gefnogi'r awgrym.

Enghraifft 2

Yn y sefyllfa a ddisgrifiwyd yn Enghraifft 1 cafwyd bod ar gyfanswm o 40 cerbyd angen cymorth dros 55 diwrnod glawog. Profwch a yw'r canlyniad hwn yn ddigonol i gyfiawnhau casglu bod nifer cyfartalog y cerbydau y mae arnynt angen cymorth ar bob diwrnod glawog yn fwy na 0.5.

Datrysiad

Boed i Y ddynodi cyfanswm y cerbydau y mae arnynt angen cymorth ar 55 diwrnod glawog. Yna $Y \sim \text{Po}(55\mu)$, lle mae μ yn cynrychioli nifer cyfartalog y cerbydau y mae arnynt angen cymorth ar bob diwrnod glawog.

Gydag H_0 ac H_1 fel yn Enghraifft 1 mae'n dilyn, os yw H_0 yn wir, bod

$$Y \sim \text{Po}(27.5).$$

Yn yr achos hwn, gan mai gwerth dan sylw Y yw $y = 40$,

$$y \text{ gwerth-p} = P(Y \geq 40 \text{ o wybod bod } H_0 \text{ yn wir}).$$

Gan na chynhwysir $\mu = 27.5$ yn Nhabl 2, defnyddir y dosraniad normal $N(27.5, 27.5)$ fel brasamcan ar gyfer dosraniad Y . Wrth gymhwyso'r cywiriad ar gyfer didoriant a'r brasamcan normal, ceir

$$\begin{aligned} \text{y gwerth-p} &= P(Y \geq 39.5 \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) \\ &\approx P\left(Z \geq \frac{39.5 - 27.5}{\sqrt{27.5}}\right) \approx P(Z \geq 2.29) \approx 0.011. \end{aligned}$$

Bellach mae tystiolaeth y sampl yn ddigon cryf i allu gwrthod H_0 a chasglu bod nifer cymedrig y cerbydau y mae arnynt angen cymorth ar ddiwrnod glawog yn fwy na 0.5.

Ymarfer 3.2.3

1. Yn y gorffennol, roedd gan nifer y ceisiadau a wnaed bob wythnos i gwmni yswiriant ddosraniad Poisson gyda chymedr 1.25. Mewn cyfnod diweddar o bedair wythnos, derbyniodd y cwmni 10 cais. A ellir cyfiawnhau'r casgliad bod nifer cymedrig y ceisiadau a wneir bob wythnos wedi cynyddu?
2. Dangosodd arolwg ar bapurau newydd tabloid fod gan nifer y gwallau sillafu ar bob tudalen ddosraniad Poisson gyda chymedr 1.4. Roedd 3 gwall sillafu mewn pum tudalen o bapur newydd tabloid penodol.
Profwch a yw nifer cymedrig y gwallau sillafu ar bob tudalen yn y papur newydd tabloid hwn yn llai nag 1.4.
3. Mae cofnodion yn y gorffennol wedi dangos bod gan nifer y damweiniau ar hyd ffordd benodol ddosraniad Poisson, gyda chyfartaledd o 10 y mis. Yn ystod mis pan oedd arwyddion rhybudd ychwanegol wedi'u gosod ar hyd y ffordd, cafwyd 5 damwain. Penderfynodd Swyddog Diogelwch y Ffyrdd brofi a oedd yr arwyddion wedi bod yn effeithiol o ran lleihau nifer y damweiniau. Wedi gosod rhagdybiaeth nwl a rhagdybiaeth arall priodol ar gyfer y prawf, cyfrifodd y Swyddog fod y gwerth-p tua 0.07.
Dangoswch sut y cafwyd y gwerth-p hwn a nodwch beth y dylai'r Swyddog ei gasglu.
4. Dangosodd cofnodion dros nifer o flynyddoedd fod gan nifer yr achosion o ddwyn ceir mewn tref fechan ddosraniad Poisson gyda chymedr 1.6. Un wythnos cyhoeddodd papur lleol y dref erthygl gyda'r pennawd "Mwy o Ddwyn Ceir". Nododd yr erthygl fod cyfanswm o 14 achos o ddwyn ceir wedi digwydd yn y dref yn ystod y pum wythnos diwethaf.
Profwch ba mor gryf yw'r dystiolaeth dros yr honiad a wnaed ym mhennawd yr erthygl.

5. Dangosodd cofnodion absenoldeb mewn ffatri fod gan nifer yr absenoldebau ar bob diwrnod gwaith ddosraniad Poisson gyda chymedr 1.2. Yn ystod wythnos wedyn o bum diwrnod gwaith, nifer yr absenoldebau oedd 2, 1, 3, 3, 2, ar y pum diwrnod.

Profwch a yw tystiolaeth yr wythnos honno yn ddigon cryf i gasglu bod nifer cymedrig yr absenoldebau bob wythnos wedi newid.

6. Gellir adnabod natur ffynhonnell ymbelydrol oddi wrth gyfradd gymedrig yr allyriannau. Ar gyfer ffynhonnell math-A mae'n hysbys bod cyfradd gymedr yr allyriannau yn 2.4 y munud.

O wybod y cafwyd 3 allyriant o ffynhonnell anhysbys dros gyfnod o bedwar munud, profwch a yw'r dystiolaeth hon yn ddigon cryf i gyfiawnhau dweud nad yw'r ffynhonnell yn fath-A.

7. Mae gan nifer y radios a werthir bob wythnos gan siop benodol ddosraniad Poisson gyda chymedr 5. Penodwyd gweithiwr ychwanegol yn y siop ac yn yr wythnos nesaf cafodd cyfanswm o 7 radio eu gwerthu.

Profwch a yw penodi'r gweithiwr ychwanegol wedi cynyddu nifer cymedrig y radios a werthir bob wythnos.

8. Cynhaliwyd arbrofion er mwyn darganfod a yw chwistrell wrthfotig yn effeithiol o ran lleihau nifer y cytrefi bacteriol a fydd yn datblygu mewn dysglau o jeli meithrin sy'n agored i amgylchedd heintiedig. Mae'n hysbys bod gan nifer y cytrefi a fydd yn datblygu ym mhob dysgl nad yw wedi'i chwistrellu, ddosraniad Poisson gyda chymedr 7.5.

- (a) Mewn arbrawf, cafodd un ddysglaid o'r jeli meithrin ei chwistrellu a nifer y cytrefi a ddatblygodd oedd 3.

Darganfyddwch a yw'r canlyniad hwn yn darparu digon o dystiolaeth bod y chwistrell yn effeithiol o ran lleihau nifer cymedrig y cytrefi bacteriol sy'n datblygu.

- (b) Mewn arbrawf arall, cafodd pedair dysgl eu chwistrellu a nifer y cytrefi a ddatblygodd ym mhob dysgl oedd 3, 5, 6 a 4.

Darganfyddwch a yw'r canlyniadau hyn yn darparu digon o dystiolaeth i gyfiawnhau casglu bod y chwistrell yn effeithiol.

3.3 Profi arwyddocâd

Rhagarweiniad

Yn Adran 3.2 dangoswyd wrth brofi rhyw ragdybiaeth nwl H_0 , bod y gwerth-p yn fesur o ba mor annhebygol ydyw bod H_0 yn wir. Po leiaf yw'r gwerth-p, po fwyaf yw tystiolaeth y sampl yn erbyn H_0 . Nodwyd bod yn rhaid i'r ymchwilydd benderfynu a yw'r gwerth-p a gyfrifwyd yn ddigon bach i gyfiawnhau gwrthod H_0 . Byddai'n rhaid seilio'r penderfyniad hwnnw ar ba mor ddifrifol y byddai'r canlyniadau pe gwrthodid H_0 ar gam. Yn ddelfrydol, dylai'r ymchwilydd fod yn ymwybodol o'r canlyniadau hyn cyn cymryd y sampl ac felly dylai allu rhoi gwerth meintiol ar gyfer y tebygolrwydd y mae'n fodlon ei dderbyn o wrthod H_0 ar gam. Gelwir gwerth a nodir ymlaen llaw ar gyfer y tebygolrwydd hwn yn **lefel arwyddocâd** ac fel rheol fe'i dynodir gan α . Dyfynnir y lefel arwyddocâd yn aml fel canran. Felly er enghraifft, os yw $\alpha = 0.05$, dywedir bod lefel arwyddocâd y prawf yn 5%. Pan gymhwysir prawf sydd wedi'i ddyfeisio gyda lefel arwyddocâd α i'r sampl dan sylw, ni ddylai'r ymchwilydd wrthod H_0 oni bai fod $\alpha \geq y$ gwerth-p. Felly, **y gwerth-p yw'r lefel arwyddocâd isaf ar gyfer gwrthod H_0** . Mae'n dilyn, os yw α wedi'i ddynodi ac os yw arsylwadau'r sampl ar gael, ei bod yn ddigon enrhifo'r gwerth-p a gwrthod H_0 dim ond os yw $\alpha \geq y$ gwerth-p.

Fodd bynnag, mae gan lefel arwyddocâd a ddynodir ymlaen llaw ei swyddogaeth ei hunan wrth brofi rhagdybiaethau. Yn arbennig, o wybod α , mae'n bosibl, cyn cymryd y sampl, creu **rheol benderfyniad** sydd i'w chymhwyso i'r sampl fel bod y tebygolrwydd y bydd y rheol yn gwrthod H_0 ar gam yn hafal i α . Fel yn Adran 3.2, dewisir ystadegyn priodol T ar gyfer y prawf ac yna bydd y rheol benderfyniad yn dynodi'r gwerthoedd ar gyfer T lle dylid gwrthod H_0 ; cyfeirir at y set honno o werthoedd fel y **rhanbarth critigol**. Er mwyn crynhoi, dyma'r diffiniad:

Diffiniad. Dywedir bod gan reol benderfyniad sydd i'w chymhwyso i sampl lefel arwyddocâd α os yw'r tebygolrwydd y bydd y rheol yn gwrthod H_0 pan fydd H_0 yn wir yn hafal i α .

Byddwn yn ystyried dwy broblem, sef

- (a) darganfod lefel arwyddocâd rheol benderfyniad a roddir, a
- (b) darganfod rheol benderfyniad sydd â'r lefel arwyddocâd a ddynodwyd.

Bydd y dulliau yn cael eu harddangos yn yr isadrannau canlynol, sy'n ymwneud â'r un sefyllfaoedd ag sydd yn Adran 3.2.

3.3.1 Profi arwyddocâd cymedr dosraniad normal sydd ag amrywiant hysbys

Ystyriwch hapnewidyn sydd â'r dosraniad $N(\mu, \sigma^2)$, lle mae σ yn hysbys a lle mae angen profi $H_0 : \mu = \mu_0$ ar gyfer rhyw μ_0 a ddynodwyd. Tybiwch fod y prawf i'w seilio ar y gwerthoedd mewn hap-sampl o n arsylw ar X . Fel yn Adran 3.2.1 y dewis amlwg o ystadegyn i'w brofi yw cymedr y sampl $\bar{X}$ y mae'n hysbys bod ei ddosraniad yn

$N(\mu, \sigma^2/n)$.

ACHOS A : Profi $H_0 : \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1 : \mu > \mu_0$

Yn yr achos hwn mae'n amlwg y dylai'r rheol benderfyniad sydd i'w chymhwyso i'r sampl fod ar ffurf:

Gwrthod H_0 dim ond os $\bar{X} \geq c$ (y rhanbarth critigol)

ar gyfer rhyw gysonyn c . Rhoddir lefel arwyddocâd y rheol hon gan

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{bydd y rheol benderfyniad yn gwrthod } H_0 \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) \\ &= P(\bar{X} \geq c \text{ o wybod bod } \mu = \mu_0) = P\left(Z \geq \frac{c - \mu_0}{GS(\bar{X})}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

lle mae $Z \sim N(0, 1)$ ac $GS(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$.

(a) *Lefel arwyddocâd rheol benderfyniad a roddir.*

Gellir enrhifo'r lefel arwyddocâd ar gyfer gwerth c a roddir oddi wrth ochr dde (1) gan ddefnyddio Tabl 3.

(b) *Y rheol benderfyniad o wybod α .*

Ar gyfer rheol benderfyniad sydd â lefel arwyddocâd α , gwerth c yw datrysiad (1); hynny yw, rhaid i c fodloni

$$\frac{c - \mu_0}{GS(\bar{X})} = z_\alpha,$$

lle mae z_α yn gyfryw fel bod $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ ac y gellir darganfod gwerth α oddi wrth Dabl 4. Trwy ddatrys ar gyfer c mae'n dilyn mai'r rheol benderfyniad ar gyfer lefel arwyddocâd α yw

Gwrthod H_0 dim ond os $\bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha GS(\bar{X})$.

Mae hyn yn gywerth â gwrthod H_0 os yw

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{GS(\bar{X})} \geq z_\alpha \quad (2)$$

sy'n debygol o fod yn fwy cyfleus wrth gynnal y math hwn o brawf.

ACHOS B : Profi $H_0 : \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1 : \mu < \mu_0$.

Bydd y rheol benderfyniad yn yr achos hwn ar ffurf $\bar{X} \leq c$. Gan ddisodli $\geq$ a rhoi $\leq$ yn ei le yn yr achos uchod, ceir yr hafaliad sy'n cyfateb i (1), sef

$$\alpha = P(\bar{X} \leq c \text{ pan fydd } \mu = \mu_0) = P\left(Z \leq \frac{c - \mu_0}{GS(\bar{X})}\right) \quad (3)$$

Mae'n dilyn

(a) ar gyfer unrhyw c a roddir fod lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad yn cael ei rhoi gan ochr dde (3).

(b) mai'r rheol benderfyniad sydd â lefel arwyddocâd α yw

$$\begin{aligned} &\text{Gwrthod } H_0 \text{ dim ond os } \bar{X} \leq \mu_0 - z_\alpha \text{GS}(\bar{X}) \\ &\text{sy'n gywerth â gwrthod } H_0 \text{ os yw } z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})} \leq -z_\alpha \end{aligned} \quad (4)$$

ACHOS C : Profi $H_0: \mu = \mu_0$ yn erbyn $H_1: \mu \neq \mu_0$.

Gyda rhagdybiaeth arall ddwyochrog, bydd y rheol benderfyniad ar ffurf

Gwrthod H_0 dim ond os $\bar{X} \geq c_1$ neu os $\bar{X} \leq c_2$,

lle mae c_1 ac c_2 yn gysonion. Rhoddir lefel arwyddocâd y rheol hon gan

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X} \geq c_1 \text{ neu } \bar{X} \leq c_2 \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) \\ &= P(\bar{X} \geq c_1 \text{ pan fydd } \mu = \mu_0) + P(\bar{X} \leq c_2 \text{ pan fydd } \mu = \mu_0), \\ &= P\left(Z \geq \frac{c_1 - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})}\right) + P\left(Z \leq \frac{c_2 - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

(a) O wybod gwerthoedd c_1 ac c_2 , gellir enrhifo ochr dde (5) i roi lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad honno.

(b) Ar gyfer α a roddir, bydd gan hafaliad (5) lawer o werthoedd posibl ar gyfer c_1 ac c_2 . Y confensiwn yw hafalu'r ddau debygolrwydd ar ochr dde (5), ac os gwneir hyn c_1 ac c_2 fydd datrysiadau

$$P\left(Z \geq \frac{c_1 - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})}\right) = \frac{1}{2}\alpha \quad \text{a} \quad P\left(Z \leq \frac{c_2 - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})}\right) = \frac{1}{2}\alpha.$$

O ddatrys yr hafaliadau hyn ceir y rheol benderfyniad sydd ag arwyddocâd α , sef

Gwrthod H_0 dim ond os $\bar{X} \geq \mu_0 + z_{1/2\alpha} \text{GS}(\bar{X})$ neu $\bar{X} \leq \mu_0 - z_{1/2\alpha} \text{GS}(\bar{X})$

sy'n gywerth â gwrthod H_0 os yw

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})} \geq z_{\alpha/2} \quad \text{neu} \quad z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\text{GS}(\bar{X})} \leq -z_{\alpha/2} \quad (6)$$

Enghraifft 1

Mae cwmni yn cynhyrchu bylbiau golau trydan fel bod gan eu hyd oes ddosraniad normal sydd â chymedr 1200 awr a gwyriad safonol 150 awr. Amheuir bod swp arbennig yn is na'r safon. Er mwyn profi'r amheuaeth hon, mae hap-sampl o 50 o fylbiau am gael eu cymryd o'r swp a bydd eu hyd oes yn cael eu mesur.

(a) Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad a fydd yn casglu bod y swp yn is eu safon os yw hyd oes cymedrig y sampl yn llai na 1160 awr.

- (b) Darganfyddwch y rheol benderfyniad a fydd â lefel arwyddocâd o 1%.
- (c) Pa gasgliad y dylid ei dynnu os yw cymedr dan sylw y sampl yn 1150 awr a'r lefel arwyddocâd a ddewisir yn 1%?

Datrysiaid

Boed i μ awr fod yn hyd oes cymedrig y bylbiau yn y swp amheus. Y rhagdybiaeth nwl a'r rhagdybiaeth arall priodol yw

$$H_0 : \mu = 1200 \text{ ac } H_1 : \mu < 1200.$$

Boed i $\bar{X}$ ddynodi hyd oes cymedrig y 50 bwlb yn y sampl. Mae'n hysbys bod dosraniad $\bar{X}$ yn normal gyda chymedr μ a gwyriad safonol

$$GS(\bar{X}) = 150/\sqrt{50} \approx 21.2132.$$

- (a) Lefel arwyddocâd y rheol sy'n gwrthod H_0 os yw $\bar{X} < 1160$ yw

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X} < 1160 \text{ pan fydd } \mu = 1200) \\ &= P\left(Z < \frac{1160-1200}{21.2132}\right) = P(Z < -1.89) = 0.0294 \end{aligned}$$

- (b) Ystyriwch y rheol benderfyniad a fydd yn gwrthod H_0 os yw $\bar{X} \leq c$. Mae angen darganfod c fel bod y lefel arwyddocâd yn 0.01. Hynny yw, rhaid i c fodloni

$$P(\bar{X} \leq c \text{ pan fydd } \mu = 1200) = 0.01$$

neu, yr hyn sydd yr un fath,

$$P\left(Z \leq \frac{c-1200}{21.2132}\right) = 0.01.$$

Oddi wrth Dabl 4 ceir mai'r gwerth z lle mae $P(Z \leq z) = 0.01$ yw -2.326 . Trwy hyn,

$$\frac{c-1200}{21.2132} = -2.326 \text{ ac } c \approx 1150.66$$

Felly, y rheol benderfyniad â lefel arwyddocâd 0.01 yw

Dylid gwrthod H_0 os yw cymedr y sampl yn ≤ 1150.66 .

- (c) Gan fod cymedr y sampl dan sylw, 1150, yn < 1150.66 , dylid gwrthod H_0 a phenderfynu bod y swp yn is na'r safon.

[Trwy ddull arall, gellir dangos bod y gwerth- $p = 0.009$. Gan fod y lefel arwyddocâd a ddewisir, sef 0.01, yn fwy na'r gwerth- p , dylid gwrthod y rhagdybiaeth nwl.]

Enghraifft 2

Mae cyfaint llefrith sy'n cael ei ddosbarthu i gartonnau wedi ei ddosrannu'n normal gyda gwyriad safonol 8.3 ml. Mae'r peiriant wedi ei osod fel bod cymedr y llefrith ym mhob carton yn 500 ml. Fel rhan o'r broses rheoli safon, cymerir samplau o 50 carton bob yn hyn a hyn i ofalu bod y cyfaint cymedrig yn 500 ml. Roedd cyfaint cymedrig un o'r samplau hyn yn 502.5 ml. Profwch, gan ddefnyddio lefel arwyddocâd o 5%, a oes angen gwneud newidiadau i'r peiriant ai peidio.

Datrysiad

Gadewch i μ ml ddynodi cymedr y cyfaint sy'n cael ei ddosbarthu gan y peiriant pan gymerir y sampl. Gan nad oes modd penderfynu, cyn samplu, a yw'r peiriant yn gweithio'n gywir, yn tan-ddosbarthu neu yn gor-ddosbarthu, y rhagdybiaethau nwl ac arall yw:

$$H_0: \mu = 500 \text{ a } H_1: \mu \neq 500.$$

Ar gyfer sampl o faint 50, pan fo H_0 yn wir, mae dosraniad samplu cymedr y sampl yn normal gyda chymedr 500 a gwriad safonol $8.3/\sqrt{50}$. Hynny yw,

$$\bar{X} \sim N(500, \frac{8.3^2}{50})$$

neu, yn gywerth,

$$Z = \frac{\bar{X} - 500}{8.3/\sqrt{50}} \sim N(0,1).$$

Gwerth arsylwedig Z yw

$$z = \frac{502.5 - 500}{8.3/\sqrt{50}} = 2.13.$$

Gyda lefel arwyddocâd o 0.05 a H_1 dwy-ochrog, gwerth hollbwysig z yw

$$z_{0.025} = 1.96 \text{ (o Dabl 4).}$$

Gan fod gwerth arsylwedig z yn > 1.96 rydym yn gwrthod y rhagdybiaeth nwl ac yn dod i'r casgliad fod angen gwneud newidiadau i'r peiriant. I fynd ymhellach, gan fod $\bar{x} > 500$ fe allwn ni gasglu fod y peiriant yn gor-ddosbarthu.

[I ddilyn trywydd gwahanol, gellwch wneud ymarfer i ddangos fod y gwerth-p ar gyfer y sampl arsylwedig yn hafal i 0.041. Gan fod hwn yn llai na'r lefel arwyddocâd amodol o 0.05, dylid gwrthod y rhagdybiaeth nwl a dod i'r un casgliad ag uchod.]

Ymarfer 3.3.1

1. Cyn i siop groser gael ei moderneiddio, roedd gan y gwerthiannau wythnosol (mewn £) ddosraniad normal gyda chymedr 1243 a gwriad safonol 105. Y gwerthiannau yn y naw wythnos ar ôl y moderneiddio oedd:

$$1263, 1306, 1178, 1175, 1309, 1263, 1418, 1387, 1339$$

Gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 10% a bwrw nad yw'r gwriad safonol wedi newid, profwch a yw'r gwerthiannau wythnosol cymedrig wedi cynyddu.

2. Mae'n hysbys bod gan gryfderau torri brand arbennig o edau ddosraniad normal gyda chymedr μ a gwriad safonol 1.4. Darganfyddir bod gan hap-sampl o 36 edau sydd newydd eu cynhyrchu gryfder torri cymedrig o 9.3 uned.

Profwch, ar y lefel arwyddocâd 5%, y rhagdybiaeth nwl bod $\mu = 9.7$ yn erbyn y rhagdybiaeth arall bod $\mu < 9.7$.

3. Roedd gan amserau gwibiwr 100-metr yn ystod y tymor diwethaf ddosraniad normal gyda chymedr 10.7 eiliad a gwriad safonol 0.15 eiliad. Mewn ymgais i wella safon ei berfformiad mae'n cael hyfforddwr newydd ar sail dros dro cyn dechrau'r tymor newydd. Mae'r gwibiwr yn penderfynu asesu a yw'r hyfforddwr newydd wedi bod o fudd ar ôl pedair ras gyntaf y tymor newydd. Cymerwch fod gan yr amserau ddosraniad normal o hyd yn y tymor newydd gyda'r un gwriad safonol.
 - (a) Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol sy'n casglu bod yr hyfforddwr newydd wedi bod o fudd os yw amser cymedrig y gwibiwr yn y pedair ras gyntaf yn llai na 10.58 eiliad.
 - (b) O wybod bod amser cymedrig y gwibiwr yn y pedair ras gyntaf yn 10.6 eiliad cyflawnwch brawf ar lefel arwyddocâd 10% i weld a yw newid hyfforddwr wedi bod o fudd.
4. Mae siart morwrol yn dangos bod gan ddyfnderoedd gwely'r môr mewn ardal arbennig ddosraniad normal gyda chymedr 1515 gwryd a gwriad safonol 65 gwryd. Mesurwyd dyfnderoedd gwely'r môr gan long arolygu mewn 25 lleoliad a hapddewiswyd a darganfuwyd bod y dyfnder cymedrig yn y llefydd hynny yn 1546 gwryd. Gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 1% darganfyddwch a yw canlyniadau'r sampl yn bwrw amheuaeth ar gywirdeb y siart.
5. Cymhwysir turn er mwyn cynhyrchu rhannau gyda diamedrau sydd â dosraniad normal gyda chymedr 10 cm, a gwriad safonol 0.12 cm. Er mwyn gwirio bod y diamedr cymedrig yn dal yn 10 cm, cymerir hap-sampl o 15 rhan a mesurir eu diamedrau.
 - (a) Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad a fydd yn casglu bod y diamedr cymedrig yn wahanol i 10 cm os yw diamedr cymedrig y sampl yn fwy na 10.02 cm neu'n llai na 9.98 cm.
 - (b) Darganfyddwch y rheol benderfyniad y dylid ei defnyddio os yw'r lefel arwyddocâd yn 5%.
 - (c) Gan ddefnyddio'r rheol yn (b), beth yw'r casgliad os yw diamedr cymedrig y sampl yn 9.93 cm?

3.3.2 Profi arwyddocâd tebygolrwydd

Boed i X ddynodi nifer y llwyddiannau mewn n cynnig annibynnol ar haparbrawf lle mae'r tebygolrwydd o lwyddiant yn θ gyda phob cynnig. Defnyddir y gwerth a arsylwir ar gyfer X i brofi'r rhagdybiaeth nwl $H_0 : \theta = \theta_0$.

Enghraifft 1

Mae gwneuthurwr math newydd o wrtaith hau had yn honni y bydd gan had a heuir yn y gwrtaith newydd hwn gyfradd egino uwch na had a heuir mewn gwrtaith cyffredin. Ar gyfer math penodol o had a heuir mewn gwrtaith cyffredin mae'n hysbys bod y gyfradd egino yn 0.7. Er mwyn profi honiad y gwneuthurwr, cynhaliwyd arbrawf lle cafwyd 20 o'r had eu hau yn y gwrtaith newydd a chyfrifwyd y nifer a eginodd, sef X .

- (a) Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad sy'n derbyn yr honiad os yw $X \geq 17$.
- (b) Darganfyddwch reol benderfyniad gyda lefel arwyddocâd 0.05. Pa gasgliad y dylid ei dynnu os eginodd 18 o'r had?

Datrysiaid

Mae'n hysbys bod $X \sim B(20, \theta)$ ac mae angen profi

$$H_0 : \theta = 0.7 \text{ yn erbyn } H_1 : \theta > 0.7.$$

- (a) Lefel arwyddocâd y rheol sy'n gwrthod H_0 os yw $X \geq 17$ yw

$$P(X \geq 17 \text{ pan fydd } \theta = 0.7).$$

Gan nad 0.7 yn ymddangos yn Nhabl 1, boed i X' ddynodi nifer yr had nad ydynt yn egino. Yna, a bwrw bod H_0 yn wir, $X' \sim B(20, 0.3)$ a

$$P(X \geq 17 \text{ pan fydd } \theta = 0.7) = P(X' \leq 3) = 0.1071 \text{ oddi wrth Dabl 1,}$$

sef y lefel arwyddocâd sydd ei hangen.

- (b) Ystyriwch y rheol benderfyniad sy'n gwrthod H_0 os yw $X \geq c$, lle mae c yn gyfryw fel bod y lefel arwyddocâd yn 0.05. Hynny yw, $P(X \geq c \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) = 0.05$. Gyda'r X' a ddiffiniwyd yn (a) mae angen darganfod c sy'n bodloni

$$P(X' \leq 20 - c) = 0.05.$$

Gan gyfeirio at Dabl 1 ceir bod

$$P(X' \leq 2) = 0.0355 \text{ a } P(X' \leq 3) = 0.1071.$$

Mae'n dilyn nad oes rheol benderfyniad y mae ei lefel arwyddocâd yn 0.05 union. Mae'n synhwyrol mewn achos o'r fath dewis rheol benderfyniad y mae ei lefel arwyddocâd mor agos ag y bo modd at 0.05 a gorau oll os yw ychydig yn llai na 0.05 (er mwyn bod yn fwy diogel rhag gwrthod H_0 ar gam). Felly, y rheol benderfyniad a argymhellir yma yw derbyn bod yr honiad yn wir dim ond os yw $X \geq 18$, a lefel arwyddocâd y rheol hon yw 0.0355.

[Bydd y broblem hon yn codi yn gyffredinol wrth drafod hapnewidyn arwahanol.]

O wybod mai 18 oedd y gwerth a arsylwyd ar gyfer X , ac mae'r gwerth hwn yn rhanbarth critigol y rheol benderfyniad uchod, y casgliad yw derbyn bod honiad y gwneuthurwr yn wir.

[Petai (b) wedi gofyn am y casgliad, o wybod bod 18 o'r had wedi egino ac o gymryd lefel arwyddocâd 0.05, yna gellir cael yr ateb yn rhwyddach trwy ganfod y gwerth-p, sef $P(X \geq 18 \text{ pan fydd } H_0 \text{ yn wir}) = 0.0355$. Gan fod $0.05 > y$ gwerth-

p y casgliad yw derbyn yr honiad. Mae gan y gwerth-p y fantais hon fel rheol, yn enwedig pan fydd yr ystadegyn i'w brofi yn arwahanol.]

Enghraifft 2

Teflir darn arian 50 o weithiau i brofi a yw'n ddiuedd.

(a) Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad:

Casglu bod y darn arian yn dueddol os $X \leq 19$ neu os $X \geq 31$,

lle mae X yn cynrychioli nifer y pennau a geir.

(b) Gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 5%, pa gasgliad y dylid ei dynnu os ceir 32 pen?

Datrysiad

(a) Boed i θ fod y tebygolrwydd o gael pen. Yna $X \sim B(50, \theta)$ ac rydym am brofi

$H_0 : \theta = 0.5$ yn erbyn $H_1 : \theta \neq 0.5$.

Lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad a roddir yw

$$P(X \leq 19 \text{ pan fydd } \theta = 0.5) + P(X \geq 31 \text{ pan fydd } \theta = 0.5)$$

Oddi wrth Dabl 1, gydag $n = 50$ a $p = 0.5$ ceir bod

$$P(X \leq 19) = 0.0595 \text{ a bod } P(X \geq 31) = 0.0595.$$

Trwy hyn, lefel arwyddocâd y rheol yw $2 \times 0.0595 = 0.119$.

(b) Gan fod y gwerth a arsylwir ar gyfer X yn 32, sy'n fwy na'r gwerth disgwyledig (25) ar gyfer X pan fydd H_0 yn wir, a chan fod H_1 yn ddwyochrog ceir bod

$$y \text{ gwerth-}p = 2P(X \geq 32 \text{ pan fydd } \theta = 0.5) = 2 \times 0.0325 = 0.065.$$

Gan fod y lefel arwyddocâd a ddynodwyd, sef 0.05, yn llai na'r gwerth-p nid oes digon o dystiolaeth ar lefel arwyddocâd 5% i gyfiawnhau gwrthod y rhagdybiaeth bod y darn arian yn ddiuedd.

Defnyddio brasamcan normal

Enghraifft 3

Mewn etholaeth benodol, pleidleisiodd 40% o'r etholwyr dros Lafur yn yr etholiad cyffredinol diwethaf. Cynhelir arolwg barn yn yr etholaeth i brofi a yw lefel cefnogaeth y Blaid Lafur wedi newid ers yr etholiad diwethaf ai peidio. Yn yr arolwg o 600 o bobl, cafwyd bod 215 yn bwriadu pleidleisio dros Lafur yn yr etholiad nesaf. Pa gasgliad y dylid ei dynnu os yw'r lefel arwyddocâd yn 5%?

Datrysiad

Boed i θ ddynodi cyfran yr etholwyr sy'n bwriadu pleidleisio dros Lafur. Gan mai bwriad yr arolwg yw darganfod a yw'r gyfran wedi newid o 0.4, y rhagdybiaeth nwl a'r rhagdybiaeth arall priodol yw $H_0 : \theta = 0.4$ ac $H_1 : \theta \neq 0.4$. Boed i X ddynodi'r nifer o'r 600 o bobl yn y sampl sy'n bwriadu pleidleisio dros Lafur.

Yna $X \sim B(600, \theta)$. Gan fod y gwerth a arsylwyd ar gyfer X yn 215, sy'n llai na 240 (y gwerth disgwyliedig ar gyfer X pan fydd $\theta = 0.4$), a chan fod H_1 yn ddwyochrog y gwerth- $p = 2P(X \leq 215 \text{ pan fydd } \theta = 0.4)$.

Gan fod $n = 600$ yn fawr iawn, gellir defnyddio fel brasamcan ar gyfer y dosraniad $B(600, 0.4)$ ddosraniad normal gyda chymedr $600 \times 0.4 = 240$ ac amrywiant $240 \times 0.6 = 144$. Gan ddefnyddio'r brasamcan hwn a'r cywiriad ar gyfer didoriant, ceir :

$$\begin{aligned} \text{y gwerth-}p &= 2P(X < 215.5 \text{ pan fydd } \theta = 0.4) \approx 2P\left(Z > \frac{215.5 - 240}{\sqrt{144}}\right) \\ &\approx 2P(Z < -2.04) \approx 2 \times 0.0207 = 0.0414. \end{aligned}$$

Gan fod y lefel arwyddocâd ddynodedig, sef 0.05, yn fwy na'r gwerth- p , gwrthodir y rhagdybiaeth nwl a'r casgliad yw bod y gyfran o'r etholwyr sy'n gefnogol i Lafur wedi disgyn oddi ar yr etholiad diwethaf.

Ymarfer 3.3.2

1. Mae cwmni sy'n cynhyrchu cardiganau yn darganfod, pan fydd peiriant arbennig yn gweithio yn iawn, y bydd 5% o'r cardiganau a gynhyrchir ganddo yn ddiffygiol. Defnyddir cynllun arolygu lle hapddewisir 10 cardigan a'u harchwilio i weld a oes diffygion. Penderfynwyd bod angen cymhwyso'r peiriant os yw o leiaf dwy o'r cardiganau yn y sampl yn ddiffygiol. Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad hon.
2. Dywedodd gwneuthurwr bwyd cŵn o'r enw "Wow" mewn hysbyseb ar y teledu fod yn well gan dros 7 ci allan o 10 "Wow" nag unrhyw frand arall o fwyd cŵn. I brofi'r honiad hwn cynigiwyd i 20 o gŵn ddewis rhydd o ddetholiad eang o frandiau o fwyd cŵn gan gynnwys "Wow". Derbynnir bod yr honiad yn wir os bydd o leiaf 18 o'r cŵn yn dewis "Wow". Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad hon.
3. Mae'n hysbys bod cyffur penodol yn gwella 65% o'r cleifion sy'n cael eu trin. Mae cwmni fferyllo wedi datblygu cyffur newydd ac yn honni ei fod yn gwella cyfran uwch na hyn. I brofi'r honiad, cynigir y cyffur newydd i 50 o gleifion.
 - (a) Gosodwch ragdybiaeth nwl a rhagdybiaeth arall priodol.
 - (b) Penderfynodd meddyg y byddai'n defnyddio'r cyffur newydd petai 36 o'r 50 o gleifion a gaiff y cyffur newydd yn gwella. Darganfyddwch y lefel arwyddocâd.
 - (c) Darganfyddwch reol benderfyniad y mae ei lefel arwyddocâd mor agos ag y bo modd at 0.05 ond heb fod yn fwy. Nodwch y casgliad y dylid ei dynnu pe bai 40 o'r 50 o gleifion a gaiff y cyffur newydd yn gwella.

4. Amheuir bod darn arian penodol yn fwy tebyg o roi pen na chynffon pan gaiff ei daflu. I brofi'r amheuaeth hon, teflir y darn arian 50 o weithiau a thynnir casgliad ar sail nifer, X , y pennau a geir. Darganfyddwch brawf o'r fath sydd â lefel arwyddocâd mor agos ag y bo modd at 0.05. Nodwch lefel arwyddocâd wirioneddol eich prawf.
5. Mae cofnodion ysbyty yn dangos bod 3 allan o bob 10 o gleifion sy'n cyrraedd uned ddamweiniau'r ysbyty yn gorfod aros mwy nag 20 munud cyn gweld meddyg. Penderfynodd yr ysbyty roi meddyg ychwanegol yn yr uned ddamweiniau ac yna gwelwyd mai dau yn unig o'r 20 claf nesaf wnaeth orfod aros mwy nag 20 munud cyn gweld meddyg. Profwch a yw'r meddyg ychwanegol wedi lleihau nifer y cleifion sy'n gorfod aros mwy nag 20 munud, gan ddefnyddio lefel arwyddocâd (a) 2%, (b) 5%.
6. Teflir darn arian 20 o weithiau i brofi a yw'n ddiuedd. Boed i X ddynodi nifer y pennau a geir.
 - (a) Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad a fydd yn gwrthod H_0 os $X \geq 15$ neu os $X \leq 5$.
 - (b) O wybod y cafwyd 6 phen, darganfyddwch a ddylid casglu bod y darn arian yn dueddol os yw'r lefel arwyddocâd yn 10%.
7. Honnwyd bod gan 10% o'r disgyblion mewn ysgol fawr swyddi rhan amser. Mae'r prifathro o'r farn bod y gyfran yn fwy na 10%. Mewn hap-sampl o 100 o ddisgyblion yn yr ysgol, darganfuwyd bod gan 15 ohonynt swyddi rhan amser. Gyda lefel arwyddocâd 5%, a yw tystiolaeth y sampl yn ddigon cryf i gefnogi barn y prifathro?
8. Mae hapchwaraewr yn honni y gall daflu dis teg yn y fath fodd fod ei debygolrwydd o gael rhif chwech yn fwy nag $1/6$. I gyfiawnhau'r honiad mae'n taflu'r dis 50 o weithiau. O wybod iddo gael rhif chwech 13 o weithiau, profwch ei honiad gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 5%.
9. Mae gwneuthurwr setiau teledu lliw yn honni y bydd 90% o'r setiau yn gweithio yn ddidrafferth am o leiaf dwy flynedd. Mewn hap-sampl o 100 o setiau o'r fath a werthwyd, darganfuwyd bod ar 5 ohonynt angen sylw yn ystod y ddwy flynedd gyntaf. Gyda lefel arwyddocâd 5%, a ddylid gwrthod honiad y gwneuthurwr?
10. Mae coleg yn honni ei fod yn derbyn nifer cyfartal o ddynion a menywod. Darganfuwyd bod hap-sampl o 400 o'r myfyrwyr yn cynnwys 210 o ddynion a 190 o fenywod. Profwch yr honiad gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 5%.
11. Taflwyd darn arian 100 o weithiau a chafwyd pen 61 o weithiau. Defnyddiwch lefel arwyddocâd 5% i brofi a yw'r darn arian yn ddiuedd.

3.3.3 Profi arwyddocâd cymedr Poisson

Cymerir hap-sampl o n arsylw o ddosraniad Poisson gyda chymedr anhysbys μ er mwyn profi $H_0 : \mu = \mu_0$. Fel yn Adran 3.2.3, ystadegyn prawf priodol yma yw $Y = \text{swm yr } n \text{ gwerth yn y sampl oherwydd, pan fydd } H_0 \text{ yn wir, } Y \sim \text{Po}(n\mu_0)$.

Enghraifft 1

Mae gan hapnewidyn X ddosraniad Poisson gyda chymedr anhysbys μ . Cymerir hap-sampl o dri arsylw ar X er mwyn profi $H_0 : \mu = 1.7$ yn erbyn $H_1 : \mu < 1.7$.

- (a) Penderfynir gwrthod H_0 os yw swm y tri gwerth a geir yn llai na 3.
- Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad hon.
 - Darganfyddwch y tebygolrwydd na fydd y rheol benderfyniad hon yn gwrthod H_0 pan fydd gwir werth μ yn 1.2.
- (b) Darganfyddwch reol benderfyniad gyda lefel arwyddocâd mor agos ag y bo modd at 0.05. Nodwch lefel arwyddocâd gwirioneddol y rheol.

Datrysiaid

- (a) Boed i Y ddynodi swm gwerthoedd y tri arsylw ar X . Yna $Y \sim \text{Po}(3\mu)$.

- (i) Lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad sy'n gwrthod H_0 os $Y < 3$ yw

$$P(Y < 3 \text{ pan fydd } \mu = 1.7) = P(Y \leq 2 \text{ pan fydd } \mu = 1.7).$$

Pan fydd $\mu = 1.7$, $Y \sim \text{Po}(5.1)$. Gan nad yw Tabl 2 yn cynnwys y dosraniad hwn, byddwn yn defnyddio fformiwla Poisson i enrhifo'r lefel arwyddocâd, sef yn yr achos hwn

$$P(Y = y) = e^{-5.1} \times \frac{5.1^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Trwy hyn y lefel arwyddocâd yw

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= e^{-5.1}(1 + 5.1 + 5.1^2/2) = 0.1165. \end{aligned}$$

- (ii) Os $\mu = 1.2$, yna $Y \sim \text{Po}(3.6)$, a'r tebygolrwydd na fydd y rheol benderfyniad yn gwrthod H_0 yw $P(Y \geq 3) = 0.6973$ oddi wrth Dabl 2.

- (b) Ystyriwch y rheol benderfyniad : Gwrthod H_0 os $Y \leq c$, lle mae c yn gyfryw fel bod

$$P(Y \leq 2 \text{ pan fydd } \mu = 1.7) \approx 0.05.$$

Pan fydd $\mu = 1.7$, dosraniad Y yw $\text{Po}(5.1)$. Oddi wrth (a)(i) uchod ceir $P(Y \leq 2) = 0.1165$, sy'n fwy na 0.05.

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = e^{-5.1}(1 + 5.1) = 0.0372.$$

Trwy hyn, y rheol benderfyniad gyda lefel arwyddocâd mor agos ag y bo modd at 0.05 yw:

Gwrthod H_0 os yw swm gwerth y sampl ≤ 1 .

Lefel arwyddocâd wirioneddol y rheol hon yw 0.0372.

Enghraifft 2

Mae gan nifer y tocynnau a gyflwynir bob diwrnod gwaith am gam-barcio gan wardeiniaid traffig mewn tref ddosraniad Poisson gyda chymedr 1.4. Mae cyngor y dref yn penderfynu cyflogi un warden ychwanegol ar sail dros dro i weld a fydd nifer y tocynnau a gyflwynir yn cynyddu ar gyfartaledd. Boed i X ddynodi nifer y tocynnau a gyflwynir yn ystod y pum diwrnod gwaith cyntaf ar ôl cyflogi warden ychwanegol.

- (a) Penderfynodd y cyngor ddod i'r casgliad bod nifer cymedrig y tocynnau yr wythnos a gyflwynir wedi cynyddu os oedd y gwerth ar arsylwyd ar gyfer X yn 10 neu fwy.

Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad hon.

- (b) O wybod bod y gwerth ar arsylwyd ar gyfer X yn 11, darganfyddwch y gwerth- p , a diddwythwch y lefel arwyddocâd leiaf er mwyn casglu bod nifer cymedrig y tocynnau a gyflwynir bob diwrnod gwaith wedi cynyddu.

Datrysiaid

- (a) Boed i μ ddynodi nifer cymedrig y tocynnau a gyflwynir bob diwrnod gwaith ar ôl cyflogi warden ychwanegol. Mae angen profi $H_0 : \mu = 1.4$ yn erbyn $H_1 : \mu > 1.4$. A bwrw bod dosraniad Poisson yn dal yn briodol, dosraniad X yw $Po(5\mu)$.

Lefel arwyddocâd y rheol "Gwrthod H_0 os $X \geq 10$ " yw $P(X \geq 10 \text{ pan fydd } \mu = 1.4)$.

Gan gyfeirio at Dabl 2 ar gyfer dosraniad Poisson gyda chymedr $5 \times 1.4 = 7$, y lefel arwyddocâd yw 0.1685.

- (b) O wybod bod $X = 11$, y gwerth- p yw

$$P(X \geq 11 \text{ pan fydd } \mu = 1.4) = 0.0985,$$

gan ddefnyddio Tabl 2 ar gyfer dosraniad Poisson gyda chymedr 7.

Trwy hyn, y lefel arwyddocâd leiaf ar gyfer gwrthod H_0 yw 0.0985, neu ychydig dan 10%.

Enghraifft 3

Mae brethyn a gynhyrchir yn cael ei gymeradwyo ar gyfer ei werthu os yw nifer y diffygion am bob metr o'r brethyn yn llai na 0.5. Mae'r penderfyniad a ddylid cymeradwyo rholyn o frethyn ai peidio yn seiliedig ar nifer y diffygion a arsylwyd mewn hyd o 100 m o'r rholyn.

Gan ddynodi'r nifer hwn gydag X , darganfyddwch reol benderfyniad gyda lefel arwyddocâd o tua 0.01.

Gellir cymryd bod gan nifer y diffygion ddosraniad Poisson.

Datrysiaid

Boed i μ ddynodi nifer cymedrig y diffygion ym mhob metr o'r brethyn. Y rhagdybiaeth nwl a'r rhagdybiaeth arall priodol yn yr achos hwn yw $H_0 : \mu = 0.5$ ac $H_1 : \mu < 0.5$. Gan mai X yw nifer y diffygion mewn 100 metr, dosraniad X yw $Po(100\mu)$. Yn benodol, os yw H_0 yn wir, yna mae gan X ddosraniad $Po(50)$. Oherwydd natur H_1 , mae'n rhaid i'r rheol benderfyniad fod ar ffurf

Gwrthod H_0 yn unig os $X \leq c$,

lle mae c yn gyfanrif positif. Mae angen darganfod cyfanrif positif c fel bod y lefel arwyddocâd tua 0.01.

Gan nad yw Tabl 2 yn cynnwys y dosraniad Poisson gyda chymedr 50, byddwn yn defnyddio'r brasamcan normal gyda chymedr ac amrywiant hafal i 50. Felly, wrth gymhwyso'r cywiriad ar gyfer didoriant, mae angen datrys

$$P(X \leq c) \equiv P(X < c + 0.5) \approx P\left(Z < \frac{c + 0.5 - 50}{\sqrt{50}}\right) \approx 0.01$$

Gan gyfeirio at Dabl 4 darganfyddwn mai datrysiaid yr hafaliad hwn yw

$$\frac{c + 0.5 - 50}{\sqrt{50}} \approx -2.326.$$

Trwy hyn, $c \approx 50 - 0.5 - 2.326\sqrt{50} \approx 33.053$.

Rydym nawr yn talgrynnu i lawr i'r cyfanrif agosaf a chael $c = 33$. Mae'n ddoeth talgrynnu i lawr er mwyn sicrhau bod y lefel arwyddocâd (y tebygolrwydd o wrthod H_0 ar gam) yn llai na'r lefel a ragnodwyd. Felly, dylai'r rheol benderfyniad fod : ni ddylid cymeradwyo'r rhodyn oni bai fod $X \leq 33$.

Ymarfer 3.3.3

1. Mae gan nifer y diffygion mewn hyd penodol o frethyn ddosraniad Poisson. Mae'r gwneuthurwr yn honni bod nifer cymedrig y diffygion ym mhob metr yn 0.2. I brofi'r honiad hwn yn erbyn y rhagdybiaeth arall bod nifer cymedrig y diffygion ym mhob metr yn fwy na 0.2, penderfynir archwilio hyd 10 cm o'r brethyn a gwrthod yr honiad os yw'n cynnwys 6 neu fwy o ddiffygion. Darganfyddwch lefel arwyddocâd y prawf hwn. Darganfyddwch hefyd y nifer o ddiffygion y dylid ei ddefnyddio yn lle'r 6 uchod er mwyn i'r rheol newydd fod â lefel arwyddocâd o tua 0.05.
2. Mae gan nifer y gweithiau y mae ar gyfrifiadur angen sylw ddosraniad Poisson, a'r nifer cymedrig bob mis yw 4.25. Yn ystod y mis cyntaf ar ôl i'r cyfrifiadur gael atgyweiriad mawr nid oedd arno angen sylw ond ar un achlysur.

Gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 5% darganfyddwch a ellir casglu bod yr atgyweiriad mawr wedi lleihau nifer cymedrig y gweithiau y mae ar y cyfrifiadur angen sylw.

3. Mae gan nifer y galwadau brys a wneir bob awr i gwmni nwy dros benwythnos ddosraniad Poisson gyda chymedr 0.7. Awgrymwyd y byddai'r cymedr yn fwy na 0.7 dros benwythnos oer iawn. Yn ystod penwythnos oer iawn yn y gaeaf derbyniwyd 11 galwad frys yn y swyddfa yn ystod y 10 awr gyntaf.
Dangoswch, gyda lefel arwyddocâd 5%, nad yw hyn yn darparu digon o dystiolaeth i gasglu bod nifer cymedrig y galwadau dros y penwythnos yn fwy na 0.7. Ysgrifennwch y lefel arwyddocâd leiaf a fyddai'n cyfiawnhau'r casgliad hwnnw.
4. Mae cyflogwr yn chwilio am deipydd y gellir dibynnu arni i beidio â chamdeipio mwy nag un llythyren ar bob tudalen ar gyfartaledd. Rhoddwyd i ymgeisydd am y swydd bedair tudalen i'w teipio a chafwyd ei bod wedi camdeipio cyfanswm o saith llythyren. Defnyddiwch lefel arwyddocâd 10% i brofi'r rhagdybiaeth bod nifer cymedrig y llythrennau a gamdeipir ganddi yn 1 yn erbyn y rhagdybiaeth arall ei fod yn fwy nag 1. Cymerwch fod gan nifer y llythrennau a gamdeipir ar bob tudalen ddosraniad Poisson.
5. Mae angen profi $H_0 : \mu = 2$ yn erbyn $H_1 : \mu \neq 2$, lle mae μ yn cynrychioli cymedr dosraniad Poisson. Seilir y prawf ar hap-sampl o bum arsylw ar y dosraniad.
 - (a) Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfyniad sy'n gwrthod H_0 os yw cymedr y sampl yn < 0.4 neu os yw'n > 3.4 .
 - (b) A bwrw bod y lefel arwyddocâd yn 0.06, pa gasgliad y dylid ei dynnu os oedd cymedr y sampl yn 0.8?
6. Mae gan hapnewidyn X ddosraniad Poisson gyda chymedr μ . Roedd swm hap-sampl o 23 arsylw yn hafal i 30. Defnyddiwch lefel arwyddocâd 5% i brofi $H_0 : \mu = 1.7$ yn erbyn $H_1 : \mu < 1.7$.
7. Nifer y cytrefi bacteriol a ddatblygodd mewn 10 dysgl Petri agored oedd :
12, 13, 8, 17, 16, 8, 18, 15, 9, 11
Profwch, ar lefel arwyddocâd 1%, y rhagdybiaeth bod nifer cymedrig y cytrefi bacteriol a fydd yn datblygu ym mhob dysgl Petri o dan yr un amodau yn hafal i 10 yn erbyn y rhagdybiaeth arall ei fod yn fwy na 10.
8. Honnwyd bod nifer cymedrig yr amhureddau ym mhob llen o wydr a gynhyrchir gan wneuthurwr penodol yn 2.5. Profwch yr honiad hwn, gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 5%, o wybod bod nifer yr amhureddau mewn 100 llen o wydr yn 278. Cymerwch fod gan nifer yr amhureddau ym mhob llen o wydr ddosraniad Poisson.

9. Roedd niferoedd y ceir a gyrhaeddodd gyffordd mewn 45 cyfnod olynol o bum munud fel a ganlyn :

Nifer y ceir yn cyrraedd	0	1	2	3	4	5
Nifer y cyfnodau	6	13	11	9	3	3

A bwrw bod gan nifer y ceir sy'n cyrraedd mewn cyfnod o bum munud ddosraniad Poisson, profwch, ar lefel arwyddocâd 1%, y rhagdybiaeth bod cymedr y dosraniad yn hafal i 1.5 yn erbyn y rhagdybiaeth arall nad yw'n hafal i 1.5.

10. Dros gyfnod hir roedd nifer cyfartalog yr achlysuron pan oedd ar offeryn angen ei drwsio gan dechnegydd yn 1.9 gwaith y mis. Cyflogwyd technegydd newydd yn unswydd i gymryd cyfrifoldeb dros gynnal a chadw'r offeryn hwn. Gellir cymryd bod gan nifer yr achlysuron y mis y mae angen i'r technegydd hwn drwsio'r offeryn ddosraniad Poisson. Ym mhob un o'r achosion a ganlyn, defnyddiwch lefel arwyddocâd 5% i brofi a yw nifer cymedrig yr atgyweiriadau y mis yn wahanol i 1.9.
- (a) Yn ystod y tri mis cyntaf roedd ar y technegydd newydd angen atgyweirio'r offeryn ddwywaith.
- (b) Yn ystod y 30 mis cyntaf roedd arno angen atgyweirio'r offeryn 43 o weithiau.

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 3

1. Gludedd y brand o olew peiriant a ddefnyddir gan yrrwr rasio yw 145 uned. Er mwyn profi a oes gan frand newydd ludedd gwahanol, mae'n penderfynu mesur gludedd 12 sampl o'r olew newydd. Gellir cymryd bod yr offer a ddefnyddir yn rhoi darlleniadau sydd â dosraniad normal gyda chymedr hafal i'r gwir ludedd a gwyriad safonol 6 uned. Y darlleniadau a gafwyd oedd:

139, 152, 143, 154, 145, 153, 147, 146, 161, 147, 148, 149.

Boed i μ ddynodi gwir ludedd yr olew newydd. Darganfyddwch y gwerth-p wrth brofi $H_0 : \mu = 145$ yn erbyn $H_1 : \mu > 145$. Trwy hyn, nodwch y casgliad y dylid ei dynnu os yw'r lefel arwyddocâd a ragnodwyd yn 0.05.

2. Mae peiriant yn llenwi tuniau â diod oren gan roi ym mhob un faint sydd â dosraniad normal gyda gwyriad safonol of 6 ml. Nid yw'r gwneuthurwr yn dymuno rhoi rhy ychydig yn y tuniau na gormod chwaith.
- Gosodwyd y peiriant i roi cyfartaledd o 335 ml ym mhob tun. Mewn hap-sampl o 15 o duniau cafwyd bod y cynnwys cymedrig yn 338.6 ml.

Profwch, ar lefel arwyddocâd 5%, a yw'r maint cymedrig a roddir yn wahanol i 335 ml.

3. Mae'n hysbys fod gan faint y tar mewn brand penodol o sigarennau ddosraniad normal gyda gwyriad safonol 0.7. Meintiau'r tar (mewn mg) mewn hap-sampl o 10 sigarét o'r fath oedd : 17.1, 19.2, 18.3, 18.2, 18.9, 17.8, 18.5, 18.3, 16.9, 17.8. Defnyddiwch lefel arwyddocâd 5% i brofi'r rhagdybiaeth bod maint cymedrig y tar ym mhob sigarét yn 17.6 mg yn erbyn y rhagdybiaeth arall ei fod yn fwy na 17.6 mg.
4. Mae gwyddonydd yn gwybod bod offeryn y mae'n ei ddefnyddio i ddarganfod pwysau amhuredd mewn cemegyn yn rhoi darlleniadau sydd â dosraniad normal gyda chymedr hafal i'r gwir bwysau a gwyriad safonol 2.6 mg. Cymerodd 16 sampl o 100 g yr un o swp penodol o'r cemegyn a mesur maint yr amhuredd ym mhob sampl. Cyfrifodd fod pwysau cymedrig y sampl yn 6.836 mg.
Profwch a all gwir faint yr amhuredd ym mhob 100 g yn y swp fod yn 8.0 mg, gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 5%.
5. Y tebygolrwydd y bydd hadyn o fath arbennig yn egino yw p (anhysbys). Gadewch i X ddynodi'r nifer o blith 20 hadyn o'r fath a fydd yn egino. Mae angen profi'r rhagdybiaeth nwl fod $p = 0.6$.
Darganfyddwch y cyfanrif r fel bod gan y rheol benderfynu sy'n gwrthod y rhagdybiaeth nwl os oes gan $X \leq 12 - r$ neu $X \geq 12 + r$ lefel arwyddocâd o tua 0.01.
6. Mae Cliff yn honni wrth daflu ceiniog fod ganddo well siawns nag un cyfartal o allu galw'r canlyniad yn gywir. Mae Alice a Bill yn herio'r honiad hwn. Gofynna Alice i Cliff daflu ceiniog 20 o weithiau ac fe fydd hi'n barod i dderbyn honiad Cliff os caiff o leiaf 14 o'r canlyniadau'n gywir. Gofynna Bill i Cliff daflu'r geiniog 50 o weithiau ac fe fydd Bill yn barod i dderbyn honiad Cliff os caiff o leiaf 31 o'r canlyniadau yn gywir.
Dangoswch fod lefelau arwyddocâd y rheolau penderfynu a ddefnyddiwyd gan Alice a Bill yn hafal, yn gywir i ddau le degol.
Penderfynwch ba un o'r ddwy reol benderfynu sy'n fwyaf tebygol o dderbyn honiad Cliff os 0.7 yw'r gwir debygolrwydd y bydd ef yn galw'n gywir.
7. Mae ffatri'n cynhyrchu losin mewn amrywiaeth o liwiau. Mae peiriant yn dethol y losin ar hap ac yna'n eu pacio mewn blychau o 20. Mewn hap-sampl o 100 blwch mae'r nifer o losin du yn y blychau i'w gweld yn y tabl canlynol.

Profi Rhagdybiaethau 1

<i>Nifer o losin du</i>	0	1	2	3	4	5
<i>Nifer o flychau</i>	11	29	27	22	7	4

Cyfrifwch y gyfran a oedd yn ddu yn y 2000 losin a samplwyd.

Gadewch i θ ddynodi gwir gyfran y losin a gynhyrchir sy'n ddu. Darganfyddwch werth-p y data uchod pan yn profi $H_0: \theta = 0.09$ yn erbyn $H_1: \theta \neq 0.09$. Nodwch i ba gasgliad y dylid dod iddo os yw'r lefel arwyddocâd yn 0.05.

8. Yn un o daleithiau America, mae gan yr olwynion roulette sydd yn cael eu caniatáu mewn casinos 38 adran, gyda dau o'r rheini wedi eu labelu'n "0" ac yn golygu buddugoliaeth i'r casino. Yn ôl y gyfraith mae'n rhaid i gasinos gynnal profion rheolaidd ar yr olwynion roulette er mwyn sicrhau nad yw'r tebygolrwydd o gael "0" yn fwy na $1/19$. Mae'r profion yn golygu troelli'r olwyn 380 gwaith a chofnodi faint o weithiau y cafwyd "0". Mewn un prawf o'r fath cafwyd "0" 27 gwaith.

Gan dybio lefel arwyddocâd o 1%, penderfynwch a yw'r olwyn benodol hon yn cydymffurfio â'r gofynion cyfreithiol.

9. Mae gan nifer y gollyngiadau ym mhob munud o ffynhonnell ymbelydrol ddosraniad Poisson. Gadewch i μ ddynodi nifer cymedrig y gollyngiadau ym mhob munud o ffynhonnell benodol. Mae angen profi'r rhagdybiaeth nwl $H_0: \mu = 2$ yn erbyn y rhagdybiaeth arall $H_1: \mu > 2$.

- (a) Un prawf posibl yw cyfrif nifer X y gollyngiadau o'r ffynhonnell mewn cyfnod o 1 munud. Ysgrifennwch ffurf y rheol benderfynu sy'n addas yn yr achos hwn. Dewch o hyd i'r rheol benderfynu sydd â lefel arwyddocâd mor agos i 0.05 â phosibl ac ysgrifennwch ei wir lefel arwyddocâd.
- (b) Prawf posibl arall yw cyfrif nifer Y y gollyngiadau o'r ffynhonnell mewn cyfnod o 2 funud. Dewch o hyd i'r rheol benderfynu (yn nhermau Y) sydd â lefel arwyddocâd mor agos i 0.05 â phosibl.

10. Y data yn y tabl canlynol yw'r cyfrif arsylwedig misol o nifer y marw-anedig mewn sir dros gyfnod o 132 mis.

<i>Nifer y marw-anedig</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>Nifer y misoedd</i>	7	18	33	32	20	11	3	6	2

Gan dybio fod gan nifer y marw-anedig ym mhob mis ddosraniad Poisson, profwch y rhagdybiaeth mai cymedr y nifer ym mhob mis yw 2.8 yn erbyn y rhagdybiaethau eraill ei fod yn fwy na 2.8.

11. (S2 1996) Mae chwaraewr dartiau yn honni fod ganddo'r gallu i daro'r "bwl" gyda 40% o'i dafladau. Er mwyn profi'r honiad hwn, mae'r chwaraewr yn cymryd rhan mewn arbrawf sy'n cael ei reoli ac yntau'n taflu dart 250 o weithiau. Mae'n taro'r "bwl" 92 gwaith.
- (a) Sefydlwch fodel ystadegol o'r sefyllfa hon a nodwch ragdybiaethau nwl ac arall addas. [2]
 - (b) Cyfrifwch werth-p y canlyniad a gafwyd yn yr arbrawf. Dehonglwch y gwerth hwn yng nghyd-destun y broblem. [5]
12. (S2 1996) Mewn proses creu poteli'n awtomatig, mae modd modelu nifer y poteli anfoddhaol sy'n cael eu cynhyrchu bob awr gan ddosraniad Poisson gyda chymedr μ . Pan fo'r broses yn gweithio'n iawn, 4 yw gwerth μ . Er mwyn sicrhau nad yw μ wedi cynyddu, cynhelir profion rheolaidd sydd yn pennu nifer y poteli anfoddhaol, X , sy'n cael eu cynhyrchu mewn awr arbennig. Os yw $X \geq 7$, mae'r broses yn cael ei hatal dros dro er mwyn gwneud gwaith cynnal a chadw.
- (a) Ysgrifennwch y rhagdybiaethau nwl ac arall addas a darganfyddwch lefel arwyddocâd y drefn brofi. [3]
 - (b) Darganfyddwch y tebygolrwydd fod y drefn brofi yn methu â darganfod fod μ wedi cynyddu pan fo $\mu = 7$, mewn gwirionedd. [2]
 - (c) Mae ystadegydd y cwmni yn awgrymu efallai y byddai'n well pennu nifer y poteli anfoddhaol, Y , a gynhyrchir mewn cyfnod o 2 awr. Byddai'r broses yn cael ei hatal dros dro er mwyn gwneud gwaith cynnal a chadw os yw $Y \geq K$, gyda K yn gyfanrif positif wedi ei ddewis i roi lefel arwyddocâd mor agos i 10% â phosibl.
 - (i) Darganfyddwch werth K .
 - (ii) Darganfyddwch y tebygolrwydd fod y drefn brofi newydd hon yn methu â darganfod fod μ wedi cynyddu pan fo $\mu = 7$, mewn gwirionedd.
 - (iii) Nodwch, gyda rheswm, a ydych chi'n credu fod y drefn brofi newydd hon yn well na'r un flaenorol. [5]
13. (A3 1996) Pan fo gwyddonydd yn mesur crynodiad toddiant, gall y darlleniad gael ei fodelu gan hapnewidyn sydd wedi ei ddosrannu'n normal gyda chymedr μ uned, yn hafal i'r gwir grynodiad, a gwyriad safonol 1.6 uned.
- Mae'r gwyddonydd yn derbyn toddiant i'w ddadansoddi, gyda chydweithiwr o'r farn fod crynodiad y toddiant yn fwy na 25 uned. Mae'n gwneud pedwar mesuriad annibynnol o grynodiad y toddiant, gan gael y canlyniadau canlynol: 25.1, 27.8, 26.9, 25.8

- (a) Nodwch y rhagdybiaethau nwl ac arall addas ar gyfer prawf i benderfynu a oes digon o dystiolaeth i gefnogi barn y cydweithiwr. [1]
- (b) Cyfrifwch gymedr y sampl $\bar{x}$. [1]
- (c) Cyfrifwch werth-p $\bar{x}$ a dehonglwch hwnnw yng nghyd-destun y broblem. [5]
14. (A3 1997) Mae David yn honni ei fod yn gallu taflu dis teg mewn ffordd sydd yn golygu fod y tebygolrwydd o gael “6” yn fwy na $\frac{1}{6}$. Er mwyn profi hyn, mae’n penderfynu taflu’r dis 200 o weithiau a chofnodi faint o weithiau y ceir “6”.
- (a) Sefydlwch fodel tebygolrwydd o’r sefyllfa hon a nodwch ragdybiaethau nwl ac arall addas. [2]
- (b) Mae’n cael “6” mewn 40 o’r 200 taflad.
- (i) Cyfrifwch, yn fras, werth-p y canlyniad hwn.
- (ii) Nodwch y casgliad y dylid dod iddo os yw’r lefel arwyddocâd yn cael ei osod ar 10%. [5]
15. (S2 1997) Gadewch i p ddynodi’r tebygolrwydd y bydd pin bawd sydd yn cael ei ollwng ar fwrdd yn dod i orwedd â’r pwynt yn wynebu tuag i fyny. Astudiodd mathemategydd ddimensiynau ffisegol y pin bawd gan honni fod p yn hafal i 0.4. Er mwyn profi hyn caiff y pin ei ollwng ar y bwrdd 20 gwaith. Penderfynir gwrthod honiad y mathemategydd os yw $X \leq 3$ neu $X \geq 12$, gydag X yn cynrychioli faint o weithiau y daw’r pin i orwedd â’r pwynt yn wynebu tuag i fyny.
- (a) Darganfyddwch lefel arwyddocâd y rheol benderfynu hon. [3]
- (b) Eglurwch beth yw ystyr y term “lefel arwyddocâd” yng nghyd-destun y cwestiwn hwn. [1]
16. (S2 1997) Dros gyfnod hir o amser mae nifer y damweiniau mewn ffatri wedi digwydd ar gyfradd gyfartalog o 1.5 y mis. Gosodwyd dyfeisiadau diogelwch ychwanegol am gyfnod arbrolfol o 6 mis yn y gobaith y byddai hynny’n lleihau’r gyfradd ddamweiniau. Yn ystod y cyfnod arbrolfol hwn bu 3 damwain. Cysylltodd rheolwr y ffatri ag ystadegydd i gael cyngor ynghylch a fyddai’r dyfeisiadau diogelwch ychwanegol yn arwain at leihau’r gyfradd ddamweiniau. Tybiodd yr ystadegydd fod dosraniad Poisson yn addas. Yn seiliedig ar y wybodaeth a ddarparwyd, cyfrifodd yr ystadegydd fod y gwerth-p yn 0.0212.
- (a) Ysgrifennwch y rhagdybiaethau nwl ac arall sydd yn addas yma. [1]
- (b) Dangoswch sut y cyfrifwyd y gwerth-p. [2]
- (c) Nodwch, gan roi rheswm am eich dewis, pa rai o’r argymhellion canlynol y byddech chi’n eu crybwyll wrth reolwr y ffatri.

- (i) bydd y dyfeisiadau diogelwch ychwanegol bron yn sicr o arwain at leihau'r gyfradd ddamweiniau,
- (ii) mae'r dyfeisiadau diogelwch ychwanegol yn annhebygol o arwain at leihau'r gyfradd ddamweiniau,
- (iii) mae'r dystiolaeth hyd yn hyn yn amhendant, felly dylai'r dyfeisiadau diogelwch aros yn eu lle am gyfnod arbrofol pellach cyn dod i gasgliad.

[1]

17. (A3 1998) Yn ystod hanner cyntaf tymor, cymedr nifer y goliau a sgoriwyd ym mhob gêm gan dîm hoci oedd 2.2. Cyflwynodd y rheolwr ddulliau hyfforddi newydd ar gyfer ail hanner y tymor ac mae hi'n gobeithio sefydlu a fydd cymedr nifer y goliau a sgorir ym mhob gêm yn cynyddu o ganlyniad. Mae hi'n penderfynu tybio, yn annibynnol ar gyfer pob gêm yn ail hanner y tymor, y gellir modelu nifer y goliau a sgorir ym mhob gêm gyda dosraniad Poisson sydd â chymedr μ . Yn ystod pum gêm gyntaf ail hanner y tymor, sgoriodd y tîm gyfanswm o 19 gôl.

- (i) Darganfyddwch werth-p y canlyniad hwn wrth brofi'r rhagdybiaeth nwl $\mu = 2.2$ yn erbyn y rhagdybiaeth arall $\mu > 2.2$.
- (ii) I ba gasgliad y byddech yn dod iddo ynghylch gwerth μ gan ddefnyddio lefel arwyddocâd o 1%?
- (iii) Nodwch un rheswm pam na fyddai'r model a roddwyd o anghenraid yn disgrifio'r sefyllfa'n gywir.

[5]

18. (S21998) Pan fydd proses yn gweithio'n iawn fe fydd cyfran yr eitemau diffygiol sydd yn cael eu cynhyrchu yn hafal i 0.01. Cynhelir archwiliadau bob yn hyn a hyn i ofalu nad yw cyfran yr eitemau diffygiol sydd yn cael eu cynhyrchu wedi cynyddu. Mae pob archwiliad o'r fath yn golygu cymryd hap-sampl o eitemau o'r llinell gynhyrchu a chyfrif y nifer, X , o eitemau diffygiol yn y sampl. Mae'r rheol benderfynu a ddefnyddir yn datgan fod angen atal y broses gynhyrchu er mwyn ymchwilio'n bellach os yw X yn 3 neu fwy.

- (a) Sefydlwch ragdybiaethau nwl ac arall addas ar gyfer y sefyllfa hon. [1]
- (b) Penderfynwch ar lefel arwyddocâd y rheol benderfynu sydd yn cael ei defnyddio. [2]
- (c) Cyfrifwch y tebygolrwydd na fydd archwiliad yn arwain at atal y broses gynhyrchu er bod cyfran yr eitemau diffygiol sy'n cael eu cynhyrchu wedi codi i 0.02. [2]
- (d) Nodwch un rhinwedd anaddas i'r rheol benderfynu sydd yn cael ei defnyddio.

[1]

19. (S2 1998) Gellir modelu nifer y galwadau ffôn yn hwyr yn y nos i feddygfa benodol gan ddosraniad Poisson. Mae cofnodion yr ychydig fisoedd diwethaf yn dangos mai cymedr nifer y galwadau mewn noson oedd 2. Credir fod y cymedr hwn wedi cynyddu. Er mwyn profi a yw hyn yn wir ai peidio, penderfynwyd cadw golwg ar y sefyllfa bob nos. Ym mhob un o'r canlynol penderfynwch ar y gwerth-p, neu frasmcan iddo, wrth brofi a yw'r cymedr wedi cynyddu ai peidio, a nodwch eich casgliad.
- (a) Derbyniwyd cyfanswm o 15 galwad dros 5 noson. [4]
 - (b) Derbyniwyd cyfanswm o 101 galwad dros 40 noson. [5]
20. (A3 1999) Yn annibynnol ar gyfer pob tudalen, gellir modelu nifer y gwallau ym mhob tudalen a wneir gan fyfyrwr teipio gan ddosraniad Poisson gyda chymedr μ . Mae'r teipiwr yn honni fod $\mu = 1.5$ ond mae ei athro yn honni fod $\mu > 1.5$. O ganlyniad maent yn gosod y rhagdybiaeth $H_0: \mu = 1.5$ yn erbyn $H_1: \mu > 1.5$ ac mae'r teipiwr yn cytuno i gymryd rhan mewn arbrawf sydd yn gofyn iddo deipio nifer penodol o dudalennau.
- (a) Yn wreiddiol, mae'n teipio 10 tudalen ac yn gwneud cyfanswm o 22 gwall. Cyfrifwch a dehonglwch y gwerth-p i'r canlyniad hwn. [4]
 - (b) Yn dilyn hyn, gofynnir iddo gymryd rhan mewn arbrawf arall lle mae gofyn iddo deipio 50 o dudalennau. Mae'n gwneud 93 o wallau y tro hwn. Gan ddefnyddio brasamcan normal, cyfrifwch a dehonglwch werth-p y canlyniad hwn. [6]
21. (S2 1999) Mae cyfaint y dŵr poeth sydd yn cael ei ddosbarthu i bob cwpan gan beiriant diodydd wedi ei ddosrannu'n normal gyda chymedr 5 ml. Pan fo'r peiriant yn gweithio'n gywir, y cyfaint cymedrig sydd yn cael ei ddosbarthu i bob cwpan yw 250 ml. Caiff ymchwiliadau eu gwneud bob yn hyn a hyn ar y peiriant, gyda phob ymchwiliad yn mesur cyfaint y dŵr sy'n cael ei ddosbarthu i 25 cwpan. Penderfynir atgyweirio'r peiriant os yw cymedr sampl cyfaint y dŵr ym mhob cwpan yn llai na 248 ml neu'n fwy na 252 ml.
- (a) Sefydlwch ragdybiaethau nwl ac arall sy'n addas ar gyfer ymchwiliadau o'r fath. [1]
 - (b) Penderfynwch ar lefel arwyddocâd y rheol a ddefnyddir i benderfynu a oes angen atgyweirio'r peiriant ai peidio. [5]
22. (S2 1999) Gellir defnyddio dosraniad Poisson i fodelu nifer y damweiniau ffordd difrifol sy'n digwydd mewn blwyddyn mewn sir arbennig. Mae cofnodion yn dangos mai cymedr nifer y damweiniau ffordd difrifol mewn blwyddyn yn y sir

oedd 15. Mewn ymgais i leihau'r nifer o ddamweiniau ffordd difrifol, gosododd y sir fwy o gyfyngiadau cyflymder.

- (a) Yn y flwyddyn ar ôl gosod y cyfyngiadau cyflymder newydd bu 11 damwain ffordd ddifrifol yn y sir. Penderfynwch ar y gwerth-p wrth brofi a yw'r gyfradd ddamweiniau wedi lleihau ai peidio. Nodwch, gyda rheswm, y casgliad yr ydych yn dod iddo o edrych ar y gwerth-p. [4]
- (b) Yn y tair blynedd ar ôl gosod y cyfyngiadau cyflymder newydd bu cyfanswm o 28 damwain ffordd ddifrifol yn y sir. Penderfynwch ar frasmcan i'r gwerth-p wrth brofi a yw'r gyfradd ddamweiniau wedi lleihau ai peidio. Nodwch, gyda rheswm, y casgliad yr ydych yn dod iddo o edrych ar y gwerth-p hwn. [7]

ATEBION RHIFYDDOL

Ymarfer 1.1

1. (a) $\frac{1}{64}$ (b) $\frac{81}{256}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{95}{176}$ 2. $133\frac{1}{3}, \frac{2}{9}$ 3. (a) $\frac{49}{256}$ (b) $\frac{49}{128}$ (c) $\frac{79}{128}$
 4. (a)(i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$ 5. (a) 0.1 (b)(i) 0 (ii) 1 6. (a) $\frac{9}{14}$ (b) $\frac{1}{56}$ (d) $\frac{31}{56}$
 7. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{32}$ 8. (a)(i) $\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{47}{72}$ (b) 200 9. (a) 0.936 (b) 0.008
 10. (a) $\frac{7}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$

Ymarfer 1.2

1. (a) $k = 9$ 2. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{19}{30}, \frac{19}{22}$ 3. (a) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{5}{8}$ 4. (a) $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{12}$
 5. $a = 1, b = -\frac{1}{27}$

Ymarfer 1.3

1. (a) 2, $1\frac{1}{3}$, 4 (b) $3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 4\frac{3}{4}$ (c) $k = \frac{3}{7}, 1.36, 1.21, 1.48$ (d) 0.14, 0.07, 0.23
 2. (a) 2.36, 1.57, 2.74; 2.40 (b) 0.75, 0.375, 1.25; 1.55 (c) 6.33, 5.45, 7.17; 2.93
 3. 1.55, 1, 0.89, 1.56 4. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4}$

Ymarfer 1.4

1. (a) $1\frac{3}{5}, \frac{8}{75}$ (b)(i) $3\frac{4}{5}, \frac{24}{25}$ (ii) 2, $2\frac{2}{3}$ (c) $\frac{8}{21}$ 2. (a) 0, $\frac{5}{21}$ (b) 10, 105
 3. (a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{18}$ (b)(i) $4\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{3}$ 4. (a) $c = \frac{3}{4}, a = 2$ (b) $1\frac{1}{5}$ 5. $\frac{8}{15}, \frac{11}{225}$
 6. $\frac{34}{25}, \frac{94}{625}$ 7. (a) $\frac{1}{25}$ (b) 5, $4\frac{1}{6}$ (c) £3.96 8. $a = \frac{2}{5}, b = \frac{2}{15}$ 9. $1\frac{1}{2}, \frac{11}{12}$
 10. (a) $\frac{2}{3}\lambda, \frac{1}{18}\lambda^2$ (b) 16, £3.

Ymarfer 1.5

1. (a)(i) $\frac{1}{4}$ (ii) 6 (iii) $5\frac{1}{3}$ (b)(i) $\frac{1}{5}$ (ii) 3 (iii) $8\frac{1}{3}$ 2. (a) $\frac{7}{8}$ (b) $1\frac{1}{2}$
 3. 52, 595.2 4. (a) $13\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{4}$ 5. (a) 24 (b) $\frac{2}{3}$ 6. $\frac{2r^2}{\pi}$
 7. 0.588 8. $\frac{7}{10}, \frac{2}{3}$

Ymarfer 1.6a

1. 0.97 2. 0.14 3. 0.98 4. 0.53 5. 0.10 6. 0.16 7. 0.03 8. 0.02
 9. 0.32 10. 2.10 11. 1.88 12. -1.93

Ymarfer 1.6b

1. (a)(i) 0.5 (ii) 0.951 (iii) 0.472 (iv) 0.819 (v) 0.375 (b)(i) 4.58 (ii) 0.718
 2. (a) 0.758 (b) 0.829 (c) 0.094 (d) 0.381 3. (a) 0.5 (b) 0.012 (c) 0.344 4. 0.533
 5. (a) B (b) A 6. A: ≥ 93 , B: 78-92, C: 61-77, D: ≤ 60 7. (a) 0.0455 (b) 0.3173
 8. 11.88 9. 25 ceiniog 10. (a) 0.82 (b) 12.13 cm^3 11. 47.92 munud, 7.34 munud
 12. (a) B (b) B (c) A 13. 47 14. (a) 2 (b) 48 (c) 239 15. 51.28, 20.50
 16. (a) 0.4012 (b) 0.0015 17. £23.42 18. (a) 0.106 (b) 219

Ymarfer 1.7a

1. (a) 0.162 (0.160) (b) 0.022 (0.021) (c) 0.935 (0.936)
 2. (a) 0.111 (0.111) (b) 0.903 (0.902) (c) 0.708 (0.706) 3. 0.973

4. (a) 0.040 (b) 0.040 (c) 0.140 5. 0.864 6. 0.023 7. (a) 0.007 (b) 0.755
8. 0.250 9. (a) 0.016 (b) 0.849 (c) 0.016 10. 0.492 11. 0.095, 0.0004

Ymarfer 1.7b

1. (a) 0.104 (0.099) (b) 0.041 (0.048) (c) 0.378 (0.395)
2. (a) 0.054 (b) 0.531 (c) 0.036 3. 0.729 4. (a)(i) 0.054 (ii) 0.824 (b) 301
5. (a) 0.261 (b) 0.063 6. (a) 0.997 (b) 0.924 7. (a) 0.156 (b) 0.873 (c) 0.308

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 1

1. (a) 0.06 (b) 219 2. (a) 0.75, 0.0375 (b) 1.5, 0.75
3. (i) $1\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $*0.923$ 4. 3, 3.4 5. (i) 0.48 (ii) 0.387
6. (ii) 2.4, (iii) 3.1875 (iv) $*1 + \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{7}$.
7. (i) 0.159 (ii) 29.26 8. (i) $b \leq 2$ (iii) $a = \frac{2}{15}$, $b = 1$
9. (i) $1\frac{1}{3}$ (ii) 3 (iii) $*1.29$, 1.13 , 1.50 10. 0.04 11. 0.6, 0.04; 3, 1
12. (i) 0.3 (ii) $4\ln 2 \approx 2.773$, 8; $4\ln 2 - 2 \approx 0.773$ 13. (i) 0.227 (ii) 9.34
14. (b) 1.4 (c) 0.65 (d) $*1.261$, 0.625, 2.064 15. (a) 7.9% (b) 15.5%
16. (b)(i) 0.352 (ii) 1.56 awr 17. (ii) $1\frac{2}{3}$ 18. (a) $1\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) 2.260 (e) $*1.856$
19. (b) 182-183 20. (a) 0.669 (b) 1.61 m 21. (a)(i) 8 (ii) $\frac{5}{6}$ (iii) $\frac{5}{9}$ (c) $*51$ mun
22. (a) 6.7% 23. (a)(ii) $\frac{13}{27}$ (b) 1.6 24. (b) 1.15, 0.0595 25. (b) 2.4, 0.64

Ymarfer 2.1

1. (a) 11 (b) 10 (c) 15 (d) 32 (e) 23 2. (b) 1.5 3. (a) 1, $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ 4. (a) 1, 2

Ymarfer 2a

1. $\frac{1}{4}$ 2. (a) 0.214 (b) 0.203 3. $\frac{3}{4}$ 4. (a) $\frac{1}{8}e^{-2}$ (b) $\frac{43}{24}e^{-2}$ 5. (a) $\frac{115}{648}$ (b) $\frac{35}{162}$
6. 4.9, 1.73

Ymarfer 2.2b

1. 0.0212 2. 0.260 3. (a) 0.0183 (b) 0.6288 4. (a) 0.7350 (b) $\frac{216}{625}$ 5. $\frac{3}{8}$

Ymarfer 2.2c

1. (a) 7 (b) 41 2. (b) 5.92 3. 6, 6 4. 2185 cm³ 5. $7\frac{1}{2}$, $26\frac{1}{4}$

Ymarfer 2.2d

1. (a) 9, 6.9, (b) 0, 38.4 (c) 1.5, 0.825 2. (a) 7 (b) $5\frac{5}{6}$ (c) $37\frac{11}{12}$ (d) $27\frac{5}{12}$
3. (a) 13, 13 (b) 1, 77 (c) 3, 13 4. 6, 6 5. (a) 1.9, 1.9 (b) 4.7, 13.1

Ymarfer 2.3

1. (a) 0.970 (b) 0.021 2. 0.2084 3. 0.1606 4. (a) 9, 14 (b) -1, 34 (c) 24, 1424
5. 512, 249856

Ymarfer 2.4a

1. (a) 0.1335 (b) 2, 25 2. (a) $\frac{25}{32}$ (b) $\frac{29}{32}$ 3. 196, 18326.4 4. 3, $4\frac{7}{9}$
5. $\frac{3}{4}$, $\frac{27}{80}$ 6. 15, $5\frac{2}{3}$ 7. (a) 20, 0.5 (b) 30, 0.75 8. (a) 0.375 (b) 0.701 9. 46, 321

Ymarfer 2.4b

1. 0.841 2. (a) 0.945 (b) 0.975 3. 0.048 4. (a) 275, 1.3 (b) 0.010 5. 0.380
6. (a) 0.826 (b) 0.540 7. (a) 0.006 (b) 0.008 8. (a) W ac Y (b) 530 (c) 0.006
9. (a) 0.100 (b) 0.261 10. (a) 0.052 (b) 0.029 (c) 0.794 (d) 0.239
11. (a) 0.880 (b) 0.212 (c) 0.230

Ymarfer 2.5

1. (a) 0.0082 (b) 0.8767 2. (a) 0.00135 (b) 0.07256 3. 0.9452 4. 0.8375 5. 44
6. (a) 0.1585 (b) 68 7. (a) 0.0122 (b) 24 8. 0.1056 9. (b) 0.14
10. (a) 0.07 (b) 0.04

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 2

1. (i) 1.4 (iii) 0.16 2. £430, £62.50
3. (a)(i) 0.19 (ii) 0.963 (iii) 0.039 (b)(i) 0.309 (ii) 4.464, 26.06976
4. (i) 44.65, 2.00 (ii) 0.140 (iii) 0.313
6. (b)(i) 0.045 (ii) 0.871 (iii) 0.572 (iv) 0.107
7. (a)(i) 5 (ii) 4.12 (b)(i) 0.007 (ii) 0.239 (iii) 0.641
8. (a)(i) 0.142 (ii) 0.059 (b) 0.973 9. (b) 0.101 10. (a) 0.067 (b) 0.75
12. (a) 241.5 eil, 3.273 eil (b) 0.3228 13. (a) 0.442 (b) 0.269 (c) 0.023
14. (b) 0.1248 (c) 0.1401 15. (b) 0.6179 16. (b) 0.9301 (c) 0.0668
17. (b) 0.6179 18. (a) 0.1151 (b) 0.0548 (c) 0.966 19. (c) X ac Y (d) 166, 39

Ymarfer 3.2.1

1. gwerth-p = 0.0062; casglu bod $\mu > 10$
2. (a) gwerth-p = 0.2076; ni ddylid gwrthod $\mu = 2.5$
(b) gwerth-p = 0.0114; casglu bod $\mu > 2.5$
3. (a) gwerth-p = 0.1977; ni ddylid ei dderbyn
(b) gwerth-p = 0.0043; dylid ei dderbyn.
4. gwerth-p = 0.006; dylid archwilio'r peiriant
5. gwerth-p = 0.009; casglu bod $\mu > 17.5$.

Ymarfer 3.2.2

1. gwerth-p = 0.078; methu cefnogi'r honiad.
2. gwerth-p = 0.52; dim digon o dystiolaeth.
3. gwerth-p = 0.118; methu cefnogi'r cystadleuydd.
4. gwerth-p = 0.133; methu ei gyfiawnhau.
5. gwerth-p = 0.0996; methu ei gyfiawnhau
6. gwerth-p = 0.115; methu cefnogi'r honiad
7. (a) gwerth-p = 0.172; methu cefnogi honiad Alan
(b) gwerth-p = 0.021; cefnogi'r honiad
8. (a) gwerth-p = 0.115; methu gwrthod y nodweddion diduedd

- (b) gwerth-p = 0.036; y geiniog â thuedd o orwedd â'i phen i fyny.
9. gwerth-p = 0.089; methu cefnogi'r honiad bod y gyfran yn $> 55\%$
10. gwerth-p = 0.123; methu cefnogi amheuaeth y botanegwr.
11. gwerth-p = 0.018; cefnogi honiad y meddyg
12. gwerth-p = 0.0005; mae'r olwyn yn annheg
13. gwerth-p = 0.016; casglu bod $\theta > 3$
14. gwerth-p = 0.021; casglu bod $\alpha < 2$

Ymarfer 3.2.3

1. gwerth-p = 0.032; casglu bod y cymedr wedi cynyddu
2. gwerth-p = 0.082; rhy fawr i gyfiawnhau casglu bod $\mu < 1.4$
3. gwerth-p = 0.067; rhy fawr i gasglu fod yr arwyddion yn effeithiol
4. gwerth-p = 0.034; cefnogi'r honiad.
5. gwerth-p = 0.085; rhy fawr i gyfiawnhau casglu fod y cymedr wedi newid.
6. gwerth-p = 0.028; casglu nad yw o fath A
7. gwerth-p = 0.238; rhy fawr i gyfiawnhau casglu fod y cymedr wedi cynyddu
8. (a) gwerth-p = 0.059; rhy fawr i gyfiawnhau casglu fod y chwistrell yn effeithiol
(b) gwerth-p = 0.013; casglu bod y chwistrell yn effeithiol.

Ymarfer 3.3.1

1. gwerth-p = 0.076; casglu bod y cymedr yn > 1243 .
2. gwerth-p = 0.044; casglu bod $\mu < 9.7$
3. (a) 0.055 (b) gwerth-p = 0.092; casglu bod yr hyfforddwr yn fuddiol
4. gwerth-p = 0.017 > lefel arwyddocâd; methu gwrthod $\mu = 1515$
5. (a) 0.456 (b) Gwrthod $\mu = 10$ os yw $\bar{X} \geq 10.06$ neu ≤ 9.94 (c) casglu bod $\mu < 10$

Ymarfer 3.3.2

1. 0.0861
2. 0.0355
3. (b) 0.1878 (c) derbyn yr honiad os yw $X \geq 39$; lefel arwyddocâd = 0.0342
4. Casglu fod tuedd os yw $X \geq 31$; lefel arwyddocâd = 0.0595
5. gwerth-p = 0.0355
(a) lefel arwyddocâd yn rhy fach i gyfiawnhau casglu fod gwelliant
(b) wedi lleihau.
6. (a) 0.0414
(b) gwerth-p = 0.1054;
lefel arwyddocâd yn rhy fach i gyfiawnhau casglu fod y geiniog â thuedd iddi
7. gwerth-p = 0.0726;
lefel arwyddocâd yn rhy fach i gyfiawnhau gwrthod fod y gyfran = 10%
8. gwerth-p = 0.057; gwrthod yr honiad
9. gwerth-p = 0.058; gwrthod yr honiad

10. gwerth-p = 0.342; lefel arwyddocâd yn rhy fach i wrthod yr honiad
11. gwerth-p = 0.035; casglu fod y geiniog â thuedd i orwedd â'i phen i fyny

Ymarfer 3.3.3

1. 0.0166; 5 ($\alpha = 0.0527$)
2. gwerth-p = 0.0749;
lefel arwyddocâd yn rhy fach i gasglu fod y cymedr wedi lleihau.
3. gwerth-p = 0.0985 > 0.05; 9.85%
4. gwerth-p = 0.1107; lefel arwyddocâd yn rhy fach i gyfiawnhau gwrthod $\mu = 1$.
5. (a) 0.0148 (b) gwerth-p 0.0586; casglu bod $\mu < 2$.
6. gwerth-p = 0.085; casglu bod $\mu < 1.7$ 7. gwerth-p = 0.004; casglu bod $\mu > 10$
8. gwerth-p = 0.082; lefel arwyddocâd yn rhy fach i gyfiawnhau gwrthod $\mu = 2 < 5$.
9. gwerth-p = 0.0055; casglu bod $\mu > 1.5$.
10. (a) gwerth-p = 0.15; lefel arwyddocâd yn rhy fach i gyfiawnhau gwrthod $\mu = 1.9$
(b) gwerth-p = 0.04; casglu bod $\mu < 1.9$.

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 3

1. 0.017; casglu bod $\mu > 145$
2. gwerth-p = 0.02; casglu bod $\mu > 335$
3. gwerth-p = 0.012; casglu bod $\mu > 17.6$
4. gwerth-p = 0.073; methu gwrthod $\mu = 17.6$
5. $r = 6$ (lefel arwyddocâd = 0.0101)
6. Lefel arwyddocâd = 0.06; rheol benderfynu Bill
7. 0.0985; 0.197; methu gwrthod $\theta = 0.09$
8. gwerth-p = 0.068;
lefel arwyddocâd yn rhy fach i gyfiawnhau casglu fod yr olwyn yn annheg
9. Gwrthod $\mu = 2$ (a) os yw $X \geq 5$ (lefel arwyddocâd = 0.0527)
(b) os yw $Y \geq 8$ (lefel arwyddocâd = 0.0511)
10. gwerth-p = 0.138; methu gwrthod $\mu = 2.8$ 11. (b) 0.166
12. (a) 0.1107 (b) 0.4497 (c)(i) $K = 12$ (ii) 0.260
13. (b) 26.4 (c) 0.04 14. (b)(i) 0.121 15. (a) 0.0725
17. (i) 0.0177 (ii) dim digon o dystiolaeth i gasglu bod $\mu > 2.2$
18. (b) 0.0138 (c) 0.9216
19. (a) gwerth-p = 0.0835; methu cefnogi'r amheuaeth
(b) gwerth-p = 0.011; casglu bod $\mu > 2$
20. (a) gwerth-p = 0.0531; argymhell mwy o brofion;
(b) gwerth-p = 0.0217; casglu bod $\mu > 1.5$
21. (b) 0.0455
22. (a) gwerth-p = 0.1848; methu cefnogi lleihad yn y gyfradd ddamweiniau
(b) gwerth-p = 0.007; casglu fod cymedr y gyfradd ddamweiniau wedi lleihau

MYNEGAI

amrediad rhyngchwartel	12	ffwythiant dosraniad cronrus	6
amrediad rhyng-ganraddol	12	ffwythiant dwysedd tebygolrwydd	2
brasamcan		gwerth disgwylidig	15, 44, 58
ar gyfer dosraniad binomaidd	33	gwerth-p	78
ar gyfer dosraniad Poisson	36	hapnewidynnau annibynnol	47, 58
canolrif	12	hap-sampl o arsylwadau	66
canradd	12		
cywiriad didoriant	37	lefel arwyddocâd	91
chwartelau	12	paramedr	76
		priodwedd adiol Poisson	49
dau neu ragor o hapnewidynnau	Pen.2	profi arwyddocâd	
dosraniad		cymedr normal	92
cyfuniad llinol o normalau		cymedr Poisson	101
annibynnol	62	tebygolrwydd	96, 98
cymedr syml	66	profi rhagdybiaeth	
normal	23	cymedr normal	79
swm hapnewidynnau Poisson		cymedr Poisson	87
annibynnol	49	tebygolrwydd	8
dosraniad binomaidd		rhagdybiaeth	
brasamcan normal	33	arall	77
prawf	83, 96	ddwy-ochrog	77
dosraniad di-dor	1	nwl	77
cymedr ac amrywiant	15	un-ochrog	77
normal	26	rhanbarth critigol	91
normal safonol	23	rheol benderfyniad	91
unffurf	19		
dosraniad normal		swm hapnewidynnau Poisson	
cyffredinol	26	annibynnol	49
cymedr ac amrywiant	24, 26		
safonol	23	ystadegau prawf	78
tabl	24		
dosraniad Poisson			
brasamcan normal	36		
priodwedd adiol	49		
profi cymedr	87, 101		
dosraniad unffurf	19		
cymedr ac amrywiant	20		