CBAC
WJEC

MATHEMATEG

Ystadegaeth
Uned S1

I G Evans

SAFON UG/UWCH

Cyhoeddwyd gan Uned Iaith Genedlaethol Cymru,
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru,
245 Rhodfa'r Gorllewin,
Caerdydd
CF5 2YX

Mae Uned Iaith Genedlaethol Cymru
yn rhan o WJEC CBAC Cyf.,
cwmni a gyfyngir gan warant
ac a reolir gan awdurdodau unedol Cymru.

Mathemateg Safon UG/Uwch CBAC
Ystadegaeth
Uned S1

Cyhoeddwyd dan nawdd Cynllun Cyhoeddiadau
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru

Cyhoeddwyd gyntaf 2001

Argraffwyd gan Wasg Gomer,
Llandysul, Ceredigion, SA44 4QL

ISBN: 1 86085 505 9

RHAGYMADRODD

Prif amcan y gyfrol hon yw cwmpasu'n gyflawn gynnwys maes llafur Uned S1 cynllun Mathemateg Uwch Gyfrannol/Uwch Cyd-bwyllgor Addysg Cymru. Ystyrir y bydd y cynnwys hefyd yn addas ar gyfer manylebau cyfatebol byrddau arholi eraill.

Mae Pennod 3 (Tebygolrwydd) yn union yr un fath â Phennod 1 y testun a ysgrifennwyd ar gyfer Modwl S1, ac mae Pennod 4 (Hapnewidynnau Arwahanol) yn cynnwys detholiad o'r pynciau perthnasol o Bennod 2 y gyfrol Modwl S1. Mae Pennod 1 (Dulliau Samplu) a Phennod 2 (Ystadegaeth Ddisgrifiadol) yn bynciau newydd ar y lefel hon ond wedi eu cynnwys yn y Cwricwlwm Cenedlaethol.

Fel yn nhestun Modwl S1, mae pob pennod wedi ei rhannu'n adrannau, pob un yn cwmpasu pwnc penodol ac yn cael ei dilyn gan enghreifftiau wedi eu datrys ac ymarferion i arddangos y dulliau gweithio a gyflwynwyd. Ar derfyn pob un o'r Penodau 2, 3 a 4 mae set o ymarferion amrywiol ar bynciau'r bennod, y rhai ar ddiwedd Penodau 3 a 4 yn cynnwys cwestiynau o gyn-bapurau a osodwyd gan CBAC. Ar ddiwedd y gyfrol rhoddir atebion rhifyddol pob un o'r ymarferion, ynghyd â mynegai.

Y tablau binomial a Poisson a ddefnyddir yn yr enghreifftiau ym Mhennod 4 yw'r rhai a geir yn yr *Elementary Statistical Tables* a gyhoeddwyd yn flaenorol gan Gyhoeddiadau RND (Caerdydd) ond a gyhoeddir bellach gan CBAC. Bydd yn ofynnol i fyfyrwyr sy'n defnyddio'r set o dablau a gymeradwyir yn y *Statistical Tables* gan Murdoch a Barnes (cyhoeddwyr Macmillan) gymhwyso'r atebion hynny sy'n galw am ddefnydd o dablau.

Gwnaed pob ymdrech i gynhyrchu testun nad yw'n cynnwys unrhyw wallau. Ond os dewch chi ar draws unrhyw rai a aeth trwy'r rhwyd, byddai'r awdur neu CBAC yn ddiolchgar pe byddech yn eu dwyn i'w sylw.

CYNNWYS

Pennod 1

Dulliau Samplu

1.1 Poblogaeth a samplu

Ymchwiliad sydd â'r nod o gywain gwybodaeth am nodweddion arbennig (a all fod yn newidynnau ansoddol neu rai meintiol) casgliad o eitemau yw ymchwiliad ystadegol. Cyfeirir at y casgliad dan sylw fel y **boblogaeth.** Rydym yn gyfarwydd â'r term 'poblogaeth' yn golygu'r casgliad o bobl mewn ardal (e.e. tref, sir neu wlad) ond mae gan y term ystyr ehangach mewn Ystadegaeth, oherwydd gall yr eitemau yn y boblogaeth fod yn bobl, planhigion, anifeiliaid, ffermydd, archfarchnadoedd, nwyddau masgynnyrch, ac yn y blaen.

Gelwir ymchwiliad sy'n cywain yr wybodaeth sydd ei hangen gan bob eitem mewn poblogaeth yn **gyfrifiad**. Mae Swyddfa Arolygon, Cyfrifiadau a Phoblogaeth y Deyrnas Unedig (un o asiantaethau'r llywodraeth) yn cynnal cyfrifiad o boblogaeth y D.U. bob 10 mlynedd, a chynhelir yr un nesaf yn 2001. Yn y cyfrifiad hwn mae'r boblogaeth dan sylw yn cynnwys pob teulu yn y D.U. Yn y cyfrifiad a gynhaliwyd ym Mehefin 1991 roedd yn ofynnol i bob penteulu roi gwybodaeth am nifer o faterion. Mae'r llywodraeth yn defnyddio data o'r cyfrifiad i'w chynorthwyo wrth lunio polisïau ar gyfer rheoli'r wlad yn y dyfodol. Mae'n amlwg bod y cyfrifiad hwn yn dasg enfawr ac, er gwaethaf y cynnydd mewn technoleg gyfrifiadurol, mae oedi sylweddol rhwng cywain y data a chyhoeddi'r canlyniadau.

Enghraifft o gyfrifiad ar raddfa lai yw un lle mae'r boblogaeth yn cynnwys pob disgybl mewn ysgol benodol, lle mae'r newidynnau dan sylw yn gallu cynnwys oedran, blwyddyn ysgol, arian poced wythnosol, amser a dreulir yn gwylio'r teledu bob wythnos, perchen ar anifail anwes, ac yn y blaen.

Mae gan y llywodraeth ddigon o adnoddau (o ran arian ac amser) i gynnal y cyfrifiad bob deng mlynedd, ond nid yw cyrff eraill mor ffodus. Pan na ellir cynnal cyfrifiad oherwydd y gost a'r amser sy'n angenrheidiol, mae'n rhaid i'r ymchwilydd fodloni ar gywain yr wybodaeth sydd ei hangen gan is-set o'r boblogaeth. Cyfeirir at yr eitemau yn yr is-set a ddewisir fel **sampl** o'r boblogaeth a chyfeirir at yr ymchwiliad fel **arolwg sampl.** Yn yr achos arbennig lle mai pobl yw'r boblogaeth a mynegiad barn yw'r newidyn dan sylw, cyfeirir at yr ymchwiliad fel **arolwg barn**, a'r arolygon barn mwyaf cyfarwydd yw'r rhai a gynhelir gan nifer o gyrff cyn etholiad cyffredinol mewn ymgais i ddarogan canlyniad yr etholiad.

Dylid nodi bod samplu yn anochel mewn sefyllfa lle mai'r unig ffordd o gael yr wybodaeth ar eitem yw trwy ddinistrio'r eitem, er enghraifft, wrth ymchwilio i hyd oes bylbiau golau trydan neu fatrïau.

Cynhelir arolygon sampl yn aml heddiw ac mae'r canlyniadau a geir ar gael yn rhwydd yn y wasg a'r cyfryngau eraill. Mae'r data a gyhoeddir gan y llywodraeth ar faterion megis diweithdra a chwyddiant yn seiliedig ar arolygon sampl. Mae Cymdeithas y Defnyddwyr, cyhoeddwyr y cylchgrawn *Which?*, yn cynnal arolygon sampl o'u haelodau yn rheolaidd ac un o amcanion yr arolygon hyn yw cymharu brandiau gwahanol o gynnyrch er mwyn argymell yr un gorau i'w brynu.

Gan mai bwriad arolwg sampl yw canfod gwybodaeth am y boblogaeth, mae'n amlwg y dylid sicrhau bod y sampl yn wirioneddol gynrychioli'r boblogaeth yr ymchwilir iddi. Enghraifft dda o hyn yw sampl gwaed a gymerir gan glaf, gan ei bod yn rhesymol tybio bod gwaed y claf yn gyson trwy ei gorff. Nid felly, fodd bynnag, mewn sefyllfaoedd ymarferol o'r math a ystyrir yma. Wrth ddewis sampl o boblogaeth mae'n amlwg ei bod yn angenrheidiol osgoi **tuedd wrth ddethol,** sy'n digwydd pan gynhelir y samplu yn y fath fodd fel bod rhai eitemau yn y boblogaeth yn fwy tebygol o gael eu dethol nag eraill. Profwyd bod proses ddethol sy'n seiliedig ar ddoethineb unigolyn yn debygol iawn o fod yn dueddol hyd yn oed os nad yw'r person sy'n dethol yn gwneud hynny yn fwriadol. Er enghraifft, ystyriwch sefyllfa lle gofynnir i berson dynnu llond llaw o ddarnau arian allan o fag sy'n cynnwys nifer mawr o ddarnau arian gyda gwerthoedd gwahanol. Mae'n debygol mai'r darnau mwyaf (o ran maint) a fydd yn cael eu dethol yn bennaf.

Y modd mwyaf diogel o osgoi tuedd wrth ddethol yw defnyddio dull mecanyddol sy'n sicrhau bod gan bob sampl posibl o'r maint dynodedig yr un siawns o gael ei ddethol. Mae'n debygol (er nad yw'n sicr) y bydd sampl o'r fath yn gynrychiadol o'r boblogaeth. Cyfeirir at ddull o'r fath fel **hapsamplu syml,** a ddisgrifir yn yr adran nesaf pan fo'r boblogaeth yn feidraidd a'r eitemau ar gael ar restr wedi'i rhifo.

Ymarfer 1.1

1. Eglurwch yn fyr brif fantais a phrif anfantais cyfrifiad o'i gymharu ag arolwg sampl.

2. Pam mae'n fanteisiol cael sampl sy'n gynrychiadol o'r boblogaeth?

3. Mae ar athrawes angen dewis sampl o 5 disgybl o'i dosbarth ar gyfer rhyw bwrpas arbennig. Mae'n dewis y 5 sy'n eistedd yn y rhes flaen. Awgrymwch newidyn posibl y gellir ei gysylltu â disgyblion lle mae'n amlwg nad yw'r sampl yn gynrychiadol o'r dosbarth cyfan.

4. Gofynnwyd i ddisgybl gynnal arolwg sampl i ymchwilio i gyfran y boblogaeth sy'n byw yn yr ardal sy'n gwylio'r rhaglen sebon deledu *Coronation Street*. Dewisodd y disgybl sampl o ddisgyblion yr ysgol. Rhowch sylwadau.

1.2 Hapsamplu syml

Fel y soniwyd uchod, mae dull hapsamplu syml yn un sy'n sicrhau bod gan bob sampl posibl o'r maint dynodedig yr un siawns o gael ei ddewis. Wedyn, cyfeirir at y sampl a ddetholwyd fel **hapsampl syml** o'r boblogaeth. Dylid nodi bod y term 'hapsamplu' yn cyfeirio at y dull samplu ac nid at y sampl ei hun. Ystyriwn yma ddull hapsamplu lle mae'r boblogaeth yn feidraidd a'r eitemau yn y boblogaeth ar gael ar restr wedi'i rhifo.

Enghraifft 1

Detholwch hapsampl syml o 6 disgybl allan o gyfanswm o 22 ddisgybl y mae eu henwau yn ymddangos ar restr wedi'i rhifo.

DULL 1

Casglwch becyn o 22 cerdyn wedi'u rhifo o 1 i 22. Cymysgwch y cardiau yn dda ac yna dosbarthwch 6 cherdyn. Yna, y rhifau ar y cardiau a ddosbarthwch yw rhifau'r disgyblion sydd i'w cynnwys yn y sampl.

Mae'n amlwg y bydd y dull hwn yn llawer mwy o waith os yw'r boblogaeth yn fawr. Ceir dull mwy ymarferol trwy ddefnyddio **hapddigidau**, sef dilyniant o'r deg digid 0, 1, 2, …, 9 lle mae pob digid a gofnodir yr un mor debygol o fod yn unrhyw un o'r deg digid. Mae tablau o hapddigidau ar gael yn hawdd; yn arbennig Tabl 15 yn nhablau RND a Thabl 24 yn nhablau Murdoch a Barnes. Mae allwedd ar y rhan fwyaf o gyfrifianellau (fel arfer, wedi'i labelu â'r llythrennau RAN) sy'n rhoi hapddigidau wrth gael ei bwyso dro ar ôl tro.

Mae'r tabl canlynol yn rhoi 500 o hapddigidau wedi'u trefnu mewn 25 rhes a 20 colofn. Dyma sut y defnyddir y tabl hwn i gael hapsampl fel a nodwyd yn Enghraifft 1.

Rhif	Rhif Colofn																			
Rhes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	5	9	9	6	0	1	3	6	8	8	7	7	9	0	4	5	5	9	6	4
2	7	2	0	8	5	9	4	4	6	7	9	8	5	6	6	5	1	4	9	6
3	1	0	9	1	4	6	9	6	8	6	1	9	8	3	5	2	4	7	5	3
4	6	5	0	0	5	1	9	3	5	1	3	0	8	0	0	5	1	9	2	9
5	5	6	2	3	2	7	1	9	0	3	7	3	5	2	9	3	7	0	5	0
6	4	8	2	1	4	7	7	4	6	3	1	7	2	7	2	7	5	1	2	6
7	3	5	9	6	2	9	0	0	4	5	8	4	9	0	9	0	6	5	7	7
8	6	3	9	9	2	5	6	9	0	2	0	9	0	4	0	3	3	5	7	8
9	1	9	7	9	9	5	0	7	2	1	0	2	8	4	4	8	5	1	9	7
10	2	8	5	5	5	3	0	9	4	8	8	6	2	8	3	0	0	2	3	5
11	7	1	3	0	3	2	0	6	4	7	9	3	7	4	2	1	8	6	3	3
12	4	1	9	4	5	4	0	6	5	7	4	8	2	8	0	1	8	3	8	4
13	0	9	1	1	2	1	9	1	7	3	9	7	2	8	4	4	7	4	0	6
14	2	2	3	0	9	5	6	9	7	2	3	8	5	8	2	2	1	4	7	9
15	2	4	3	2	1	2	3	8	4	2	3	3	5	6	9	0	9	2	5	7
16	8	9	1	7	9	5	8	8	2	9	0	2	3	9	5	6	0	3	4	6
17	9	7	7	4	0	6	5	6	1	7	1	4	2	3	9	8	6	1	6	7
18	7	0	5	2	8	5	0	1	5	0	0	1	8	4	0	2	7	8	4	3
19	1	0	6	2	9	8	1	9	4	1	1	8	8	3	9	9	4	7	9	9
20	4	6	4	0	6	6	4	4	5	2	9	1	3	6	7	4	4	3	5	3
21	3	0	8	2	1	3	5	4	0	0	7	8	4	5	6	3	9	8	3	5
22	5	5	0	3	3	6	6	7	6	8	4	9	0	8	9	6	2	1	4	4
23	2	5	2	7	9	9	4	1	2	8	0	7	4	1	0	8	3	4	6	6
24	1	9	4	2	7	4	3	9	9	1	4	1	9	6	5	3	7	8	7	2
25	3	7	5	6	0	8	1	8	0	9	7	7	5	3	8	4	4	6	4	7

DULL 2

Er mwyn defnyddio'r tabl, rhaid i ni ddewis yn fympwyol bwynt dechreuol yn y tabl a'r cyfeiriad i fynd o'r pwynt hwnnw i gynhyrchu digidau dilynol. I gael y pwynt dechreuol, caewch eich llygaid a rhowch eich bys ar y tabl; y digid dechreuol yw'r un agosaf at flaen eich bys. Er hwylustod, fe symudwn i'r dde o'r pwynt dechreuol bob tro a symud fesul rhes.

Tybiwch mai ein pwynt dechreuol yw'r digid 2 yn Rhes 13 a Cholofn 5 (sydd wedi'i chylchu yn y tabl). Gan fod maint y boblogaeth (22) yn rhif dau ddigid, bydd angen i ni gymryd y digidau mewn parau olynol er mwyn cynhyrchu'r rhifau ar gyfer ein sampl. Dylid nodi y bydd angen diystyru unrhyw bâr sy'n fwy na 22 yn ogystal ag unrhyw bâr sy'n ymddangos fwy nag unwaith. Wrth symud yn y ffordd a nodwyd uchod, dyma'r parau olynol o ddigidau, lle nodir y parau derbyniol mewn print trwm.

21, 91, 73, 97, 28, 44, 74, **06** (yn Rhes 13)
22, 30, 95, 69, 72, 38, 58, 22, **14**, 79 (yn Rhes 14)
24, 32, **12**, 38, 42, 33, 56, 90, 92, 57 (yn Rhes 15)
89, **17**

Gallwn stopio nawr gan ein bod wedi cynhyrchu 6 rhif gwahanol. Felly, bydd ein hapsampl syml yn cynnwys y disgyblion sydd wedi'u rhifo ar y rhestr fel

$$6, 12, 14, 17, 21, 22.$$

Gellir dangos (trwy ddefnyddio dull a roddir ym Mhennod 3) bod 74613 sampl posibl o 6 eitem allan o boblogaeth o 22. Mae'r dull uchod yn un sy'n sicrhau bod gan bob un o'r posibiliadau hyn siawns gyfartal o fod yn y sampl a ddewisir.

Mae'n bosibl, er ei bod yn annhebygol, na fydd y sampl a ddewisir yn gynrychiadol o'r boblogaeth (e.e. gan ddewis y 6 disgybl talaf lle mai taldra yw'r newidyn dan sylw). Pe baem yn ddigon anffodus i gael sampl anghynrychiadol gallem o leiaf gysuro ein hunain trwy gofio bod hyn wedi digwydd trwy hap yn hytrach nag yn fwriadol.

Un o'r problemau gyda'r dull uchod yw ein bod wedi gorfod cynhyrchu 30 pâr o ddigidau er mwyn cael 6 phâr gwahanol. Y prif reswm dros hyn oedd bod yn rhaid i ni anwybyddu pob pâr o ddigidau a oedd yn fwy na 22. Gallwn wella ar hyn trwy ddefnyddio'r dull canlynol.

DULL 3 **Dull y Gweddill**

Gyda'r dull hwn, byddwn yn dyrannu mwy nag un pâr o ddigidau rhwng 00-99 i bob rhif a restrir. I sicrhau cydraddoldeb, rhaid sicrhau bod yr un nifer o barau yn cael eu dyrannu i bob rhif a restrir. Gan fod $\frac{100}{22} = 4$ gyda gweddill 12, gallwn ddyrannu pedwar pâr o ddigidau i bob rhif a restrir. Y ffordd gyfleus i wneud hyn yw drwy gyfyngu'r dyraniad i'r rhifau 00-87, gan gymryd 00 i gyfateb i rif 22 yn y rhestr ac anwybyddu pob pâr rhwng 88 a 99. Dyma un dyraniad sy'n hawdd i'w ddeall:

Rhif y Disgybl	Parau o ddigidau
1	01, 23, 45, 67
2	02, 24, 46, 68
3	03, 25, 47, 69
.	.
.	.
.	.
21	21, 43, 65, 87
22	00, 22, 44, 66

Dylid nodi mai'r pâr cyntaf ym mhob rhes, heblaw yr un olaf, yw rhif y disgybl ar y rhestr, a'r pâr cyntaf yn y rhes olaf yw 22. Ceir y parau eraill mewn rhes trwy adio 22 dro ar ôl tro nes bod gennych bedwar pâr. Ffordd arall o edrych ar hyn yw nodi, pan rennir y parau o ddigidau mewn unrhyw res â 22 (sef maint y boblogaeth), bod y gweddill yr un peth. Er enghraifft, drwy rannu pob un o'r pedwar pâr o ddigidau sy'n cyfateb i ddisgybl rhif 1, gwelir mai 1 yw'r gweddill ym mhob achos. Oherwydd hyn, cyfeirir at y dull hwn fel **dull y gweddill.**

Drwy ddefnyddio'r dull hwn gyda'r parau olynol o ddigidau a gafwyd yn Null 2, cawn

Pâr o ddigidau: 21, 91, 73, 97, 28, 44, 74, 06, 22, 30, 95, 69

Gweddill: **21**, A, **7**, A, **6**, **0**, **8**, 6, 0, 8, A, **3**

lle mae A yn dynodi pâr a anwybyddwyd oherwydd ei fod yn fwy nag 87 ac mae'r rhifau mewn print trwm yn cyfateb i rifau'r disgyblion a ddewisir. Dylid nodi ein bod hefyd yn anwybyddu unrhyw rif (gweddill) a geir fwy nag unwaith (6, 0 ac 8 uchod). Felly mae'r dull hwn wedi rhoi i ni'r sampl sy'n cynnwys disgyblion rhif

3, 6, 7, 8, 21, 22.

Cofiwch fod gweddill sero yn cyfateb i'r disgybl olaf (rhif 22) ar y rhestr.

Cafwyd y sampl angenrheidiol o 6 trwy ddefnyddio 12 pâr o ddigidau yn unig o'i gymharu â 30 wrth ddefnyddio Dull 2, sef gostyngiad o 60%.

Bydd dull y gweddill yn fanteisiol bob amser ar gyfer unrhyw boblogaeth gyda maint dau ddigid sy'n llawer llai na 100. Pam felly?

Er mwyn cyffredinoli dull y gweddill, ystyriwch boblogaeth â maint n lle mae n yn rhif dau ddigid (h.y. rhif rhwng 10 a 99). Y dull felly yw:

Cam 1

Ystyriwch yn gyntaf gyfanrif sy'n rhan o $\dfrac{100}{n}$; os k yw'r cyfanrif, yna pan weithredir y broses bydd pob pâr o ddigidau sy'n fwy na $n \times k$ yn cael eu hanwybyddu. Er enghraifft, pan fydd $n = 44$, $k = 2$, bydd pob pâr sy'n fwy na $44 \times 2 = 88$ yn cael eu hanwybyddu.

Cam 2

Gan ddarllen yr hapddigidau mewn parau, rhannwch bob pâr nas anwybyddwyd ag n a chofnodwch y gweddill. Mae'r gweddill hwn yn rhoi rhif yr eitem sydd i'w dethol, gan nodi bod gweddill o 0 yn cyfateb i'r eitem olaf (sef yr n^{fed} eitem) ar y rhestr. Daliwch ati nes i chi gael y nifer angenrheidiol o eitemau yn y sampl.

Gellir ehangu'r dull yn rhwydd i boblogaeth sydd â'i maint yn fwy na 99. Er enghraifft, ystyriwch boblogaeth gyda maint n lle mae n yn rhif tri digid (h.y. rhwng 100 a 999). Dilynir nawr yr un dull ag uchod ond gyda 1000 yn lle 100. Dangosir hyn yn yr enghraifft ganlynol.

Enghraifft 2

Defnyddiwch ddull y gweddill i gael hapsampl syml o 8 eitem allan o boblogaeth o 180 eitem.

Nodwch yn gyntaf bod angen cymryd yr hapddigidau mewn triawdau gan fod maint y boblogaeth yn rhif tri digid.

Cam 1: Y rhan o $\frac{1000}{180}$ sy'n gyfanrif yw 5 ac felly gellir dyrannu 5 triawd i bob un o'r 180 eitem sydd wedi'u rhifo. Byddwn yn anwybyddu unrhyw driawd sy'n fwy na $180 \times 5 = 900$.

Cam 2: Rhannwch bob triawd o ddigidau rhwng 000 ac 899 â 180 a chofnodwch y gweddill. Y gweddill yw'r eitem wedi'i rhifo sydd i'w dethol, er bod gweddill o 0 yn cyfateb i'r eitem olaf wedi'i rhifo (h.y. yr 180*fed* eitem).

Gan ddefnyddio'r un pwynt dechreuol a chyfeiriad ag o'r blaen, dyma'r triawdau o ddigidau a'r gweddillion a geir ar ôl rhannu â 180:

Triawd o ddigidau	219	173	972	844	740	622	309	569	723
Gweddill	**39**	**173**	**A**	**124**	**20**	**82**	**129**	**29**	**3**

Felly, yr 8 eitem sydd i'w samplu yw eitemau rhif

3, 20, 29, 39, 82, 124, 129, 173.

Ymarfer 1.2

Ym mhob un o gwestiynau 1-5 isod, defnyddiwch Ddull 2 a dull y gweddill i gynhyrchu'r hapsampl angenrheidiol, gan ddefnyddio'r tabl o hapddigidau a roddwyd yn gynharach yn y bennod hon a chan ddefnyddio'r pwynt dechreuol a roddir yn y cwestiwn. Rhowch sylwadau ar faint o ymdrech sy'n cael ei harbed trwy ddefnyddio dull y gweddill.

1. Sicrhewch hapsampl o 8 eitem allan o boblogaeth o 30 o eitemau, gan gymryd y digid yn Rhes 13 a Cholofn 5 fel eich pwynt dechreuol.

2. Sicrhewch hapsampl o 10 eitem allan o boblogaeth o 80 o eitemau, gan gymryd y digid yn Rhes 5 a Cholofn 2 fel eich pwynt dechreuol.

3. Sicrhewch hapsampl o 5 eitem allan o boblogaeth o 145 o eitemau, gan gymryd y digid yn Rhes 2 a Cholofn 15 fel eich pwynt dechreuol.

4. Sicrhewch hapsampl o 6 eitem allan o boblogaeth o 162 o eitemau, gan gymryd y digid yn Rhes 1 a Cholofn 1 fel eich pwynt dechreuol.

5. Sicrhewch hapsampl o 10 eitem allan o boblogaeth o 3428 o eitemau, gan gymryd y digid yn Rhes 4 a Cholofn 2 fel eich pwynt dechreuol. [Yn yr achos hwn bydd yn rhaid i chi gofnodi'r digidau fel pedryblau gan fod maint y boblogaeth yn rhif pedwar digid.]

1.3 Samplu haenedig

Tybiwch fod arolwg sampl i'w gynnal i ymchwilio i weithgareddau chwaraeon disgyblion mewn ysgol gydaddysgol. Pe cymerid hapsampl o ddisgyblion o'r ysgol gellid cael sampl lle roedd y disgyblion a ddewiswyd yn fechgyn yn bennaf neu'n ferched yn bennaf. Mae'n debyg bod y chwaraeon a chwaraeir gan fechgyn a merched yn wahanol (mae mwy o fechgyn na merched yn chwarae rygbi tra bo mwy o ferched na bechgyn yn chwarae pêl-rwyd). Pe ceid sampl gyda bechgyn yn bennaf neu gyda merched yn bennaf, mae'n amlwg na fyddai'r sampl yn rhoi darlun cywir o weithgareddau chwaraeon yr holl ddisgyblion yn yr ysgol. Mae hyn yn awgrymu y dylai ein dull samplu sicrhau bod nifer rhesymol o fechgyn a nifer rhesymol o ferched yn ein sampl. Cyfeirir at sampl o'r fath fel **sampl haenedig**. Gellir cael hyn trwy rannu'r boblogaeth yn ddau grŵp, sef y bechgyn a'r merched. Cyfeirir at y grwpiau hyn fel y **strata**. Y dull wedyn yw hapsamplu o'r ddau grŵp hyn ar wahân.

Argymhellir haenu bob amser pan fo'n hysbys y gellir rhannu poblogaeth o eitemau yn ddau (neu ragor) o grwpiau a lle mae'n debygol bod yr ymatebion a geid gan un grŵp yn dra gwahanol i'r ymatebion a geid gan grŵp arall.

Felly, dewisir strata oherwydd y disgwylir y bydd ymatebion o fewn un stratwm yn fwy tebyg nag ymatebion o strata eraill.

Wedi nodi'r strata a phenderfynu ar faint y sampl cyfan, mae angen pennu maint y sampl sydd i'w gymryd ym mhob stratwm. Os maint y strata (h.y. niferoedd yr eitemau yn y strata) yw'r unig wybodaeth sydd gennym, yna mae'n briodol cymryd **dyraniad cyfraneddol**. Mae hyn yn golygu bod meintiau samplau'r strata mewn cyfrannedd union â meintiau'r strata.

Un o fanteision pwysig hapsamplu haenedig o'i gymharu â hapsamplu'r boblogaeth gyfan yw ei fod yn fwy tebygol o roi sampl sy'n gynrychiadol o'r boblogaeth. Mae hefyd yn galluogi'r ymchwilydd i gymharu'r ymatebion a geir gan y gwahanol strata.

Mae'r enghreifftiau canlynol yn dangos sut y defnyddir dyrannu cyfraneddol mewn hapsamplu haenedig.

Enghraifft 1

Cynhelir arolwg sampl i ymchwilio i arferion darllen y disgyblion mewn ysgol gydaddysgol. Gan ei bod yn debygol y bydd arferion darllen merched a bechgyn yn wahanol, penderfynir cymryd hapsampl haenedig. O wybod bod cyfanswm nifer y bechgyn yn yr ysgol yn 270 a bod cyfanswm nifer y merched yn 580 canfyddwch ddyraniad cyfraneddol meintiau'r samplau sydd i'w cymryd os yw maint y sampl cyfan yn 100.

Cyfanswm nifer y disgyblion yw $270 + 580 = 850$. Felly mae'r dyraniad cyfraneddol fel a ganlyn:

Nifer y bechgyn i'w samplu = $\frac{270}{850} \times 100 = 31.8$

Nifer y merched i'w samplu = $\frac{580}{850} \times 100 = 68.2$.

Gan dalgrynnu'r ffigurau uchod, dylai'r sampl gynnwys 32 o fechgyn a 68 o ferched.

Enghraifft 2

Mae gan gwmni dair ffatri A, B ac C a leolir mewn rhannau gwahanol o'r wlad. Mae'r cwmni'n bwriadu cynnal arolwg sampl o bellterau teithio'r gweithwyr. Gan sylweddoli y gallai'r pellterau amrywio o'r naill ffatri i'r llall oherwydd eu lleoliadau, penderfynir cynnal samplu haenedig. O wybod bod niferoedd y gweithwyr yn y tair ffatri yn 1200, 2000 a 3600, yn ôl eu trefn, a bod maint y sampl cyfan i fod yn 200, canfyddwch feintiau'r samplau y dylid eu cymryd o'r tair ffatri.

Cyfanswm nifer y gweithwyr yw $1200 + 2000 + 3600 = 6800$.

Dyraniad meintiau'r samplau yw:

Ffatri A: $\frac{1200}{6800} \times 200 = 35.3$,

Ffatri B: $\frac{2000}{6800} \times 200 = 58.8$,

Ffatri C: $\frac{3600}{6800} \times 200 = 105.9$.

Gan dalgrynnu'r ffigurau a gyfrifwyd, dylai meintiau'r samplau fod yn 35, 59 a 106, yn ôl eu trefn.

Ymarfer 1.3

1. Cynhelir arolwg sampl i ymchwilio i faint o arian poced a gaiff y bechgyn ym Mlynyddoedd 12 a 13 bob wythnos. Penderfynir cymryd sampl haenedig â maint cyfan o 24 gyda dyraniad cyfraneddol. Mae 35 o fechgyn ym Mlwyddyn 12, a 25 ym Mlwyddyn 13.
   (a) Canfyddwch feintiau'r samplau.
   (b) A chymryd bod rhestrau wedi'u rhifo ar gael o'r bechgyn yn y ddwy flynedd, defnyddiwch ddull y gweddill i benderfynu pa fechgyn y dylid eu dethol o flwyddyn 12. Defnyddiwch y tabl o hapddigidau a roddir yn y bennod hon a dechreuwch o dop y tabl ar y chwith (Rhes 1, Colofn 1) a symudwch i'r dde o'r naill res i'r llall.
2. Mewn arolwg sampl o'r cyflogau a delir i weithwyr mewn ffatri fawr, awgrymwch newidyn ar gyfer defnyddio samplu haenedig.
3. Cynhelir arolwg sampl i ymchwilio i agweddau disgyblion mewn ysgol at olygfeydd treisgar a ddangosir ar y teledu. Ystyrir y gall agweddau'r disgyblion amrywio yn ôl eu hoedran, ac felly penderfynir haenu poblogaeth yr ysgol yn ôl y grwpiau oedran 11-13, 14-16, a 17+. Niferoedd y disgyblion yn yr ysgol yn y grwpiau oedran hyn yw 352, 284 a 103, yn ôl eu trefn. Os yw cyfanswm maint y sampl am fod yn 120, canfyddwch feintiau'r hapsamplau sydd i'w cymryd o'r tri grwp oedran. Defnyddiwch ddull y gweddill i ganfod nifer y disgyblion y dylid eu samplu yn y grwp oedran 17+.

1.4 Clwstwr-samplu

Efallai y bydd poblogaeth yn rhannu'n naturiol yn grwpiau gwahanol gyda'r eitemau ym mhob grŵp yn cael eu rhestru. Er enghraifft, mae disgyblion ysgol mewn dosbarthiadau ac mae'r etholwyr mewn etholiad cyffredinol yn y gwahanol etholaethau. Cyfeirir at grwpiau o'r fath fel **clystyrau**. Mewn sefyllfa o'r fath, efallai y byddai'n fwy cyfleus o safbwynt gweinyddol ac yn fwy cost-effeithiol mewn arolwg sampl i ddethol hapsampl o glystyrau i ddechrau. Yna gellid cynnwys pob eitem mewn clwstwr a samplwyd neu gymryd hapsampl o eitemau o bob clwstwr.

Mae gwahaniaeth hanfodol rhwng strata a chlystyrau. Gyda strata disgwylir i'r ymatebion o fewn stratwm fod yn fwy tebyg na'r ymatebion o strata gwahanol, ond gyda chlystyrau mae'n debyg y byddai'r ymatebion o fewn clwstwr yn debyg yn y clystyrau i gyd.

Tybiwch fod y Cynulliad Cenedlaethol yn dymuno cynnal arolwg sampl i gael gwybodaeth am holl ddisgyblion ysgolion cynradd Cymru. Byddai cymryd hapsampl o'r holl ddisgyblion yn dasg fawr. Gweinyddir yr ysgolion cynradd gan y gwahanol awdurdodau addysg lleol, sy'n ffurfio clystyrau naturiol. Felly, dull da i ddechrau fyddai hapddethol rhai awdurdodau addysg lleol (gyda'r union nifer i'w bennu yn ôl ystyriaethau eraill). Y cam nesaf fyddai cael rhestr o bob ysgol gynradd ym mhob ardal; os oes llawer o ysgolion, efallai y byddai angen dethol hapsampl o bob rhestr. Yn olaf, gallai'r arolwg gynnwys pob disgybl ym mhob ysgol gynradd yn y sampl neu gallai gymryd hapsamplau o ddisgyblion o bob ysgol a ddetholwyd. Mae hyn yn dangos yn glir bod clwstwr-samplu yn dechneg a ddefnyddir er mwyn sicrhau llai o waith gweinyddol.

Ymarfer 1.4

1. Nodwch yn fyr y gwahaniaeth rhwng samplu haenedig a chlwstwr-samplu. Rhowch un enghraifft o bob techneg.
2. Cynhelir arolwg sampl ar rai nodweddion o'r boblogaeth o fechgyn mewn ysgol. Awgrymwch sut y gellir rhannu'r boblogaeth yn glystyrau. Nodwch y fantais yma o ddefnyddio clwstwr-samplu o'i gymharu â hapsamplu'r boblogaeth gyfan.

Pennod 2

Ystadegaeth Ddisgrifiadol

2.1 Cyflwyniad

Mae Ystadegaeth Ddisgrifiadol yn ymwneud â chynrychioli set o ddata (gwerthoedd newidyn a arsylwir) yn ystyrlon a chan gyfleu gwybodaeth. Gall cynrychioliad o'r fath fod ar ffurf tabl, diagram, neu fesurau crynhoi i feintioli rhai o nodweddion pwysig y data. Byddwch wedi astudio Ystadegaeth Ddisgrifiadol yn adran Trin Data eich cwrs TGAU mewn Mathemateg. Yn y bennod hon byddwn yn ystyried testunau nad ydynt yn Lefel Ganolradd y cwrs TGAU. Cymerir yn ganiataol eich bod yn gyfarwydd â'r termau canlynol.

Dosraniadau amlder arwahanol a diagramau fertigol,
Modd, canolrif a chymedr; Amrediad ac Amrediad rhyngchwartel,
Dosraniadau a diagramau amlder wedi'u grwpio (lled cyfwng cyfartal), gan gynnwys diagramau amlder cronnus.

Dyma rai o'r testunau sydd i'w trafod yn y bennod hon:

Cymedr a gwyriad safonol set o ddata (heb eu grwpio ac wedi'u grwpio)
Defnyddio histogramau ac amlder cronnus i gynrychioli dosraniad amlder wedi'i grwpio pan nad yw cyfyngau'r dosbarthiadau i gyd yr un lled.

Ymarfer 2.1 (Adolygu)

1. Cyflymder teipio un ar ddeg o ysgrifenyddion, mewn geiriau fesul munud, oedd:

$$36, 40, 51, 42, 43, 40, 46, 45, 46, 39, 42\ .$$

Canfyddwch gymedr, canolrif, amrediad ac amrediad rhyngchwartel y cyflymderau hyn.

2. Dyma ddosraniad amlder nifer y plant ym mhob teulu mewn 40 teulu.

Nifer y plant yn y teulu	1	2	3	4	5
Nifer y teuluoedd	11	10	8	7	4

Canfyddwch gymedr, canolrif, Amrediad ac Amrediad rhyngchwartel y dosraniad hwn.

3. Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder wedi'i grwpio o daldra 30 o fechgyn, wedi'i fesur yn gywir i'r centimetr agosaf.

Taldra a fesurwyd (cm)	158-160	161-163	164-166	167-169	170-172	173-175
Nifer y bechgyn	1	4	10	8	5	2

(a) Dangoswch y dosraniad fel diagram amlder wedi'i grwpio.

(b) Lluniwch ddiagram amlder cronnus ar gyfer y dosraniad. Defnyddiwch eich diagram i amcangyfrif (i) y canolrif, (ii) amrediad rhyngchwartel y taldra.

(c) Cyfrifwch amcangyfrif o daldra cymedrig y 30 bachgen.

2.2 Cymedr a gwyriad safonol set o ddata heb eu grwpio

Dwy nodwedd set o ddata sy'n haeddu mesurau crynhoi yw:

(1) gwerth sy'n gynrychiadol o'r arsylwadau - cyfeirir ato fel **mesur lleoliad** (neu fesur o duedd ganolog),

(2) gwerth sy'n dangos amrywiad yr arsylwadau yn y set o ddata - cyfeirir ato fel **mesur gwasgariad**.

Cymerir yn ganiataol eich bod yn gyfarwydd â'r mesurau lleoliad canlynol:

y modd, y canolrif a'r cymedr.

Cymerir yn ganiataol eich bod yn gyfarwydd â'r mesurau gwasgariad canlynol:

yr amrediad a'r amrediad rhyngchwartel.

Yn y bennod hon, cyflwynir y mesur gwasgariad a ddefnyddir amlaf, sef y **gwyriad safonol.**

Diffinnir cymedr set o ddata fel

$$\frac{\text{Swm yr arsylwadau yn y set o ddata}}{\text{Nifer yr arsylwadau yn y set o ddata}}$$

Pan ddefnyddir x i ddynodi'r newidyn a arsylwir, fel arfer, defnyddir $\bar{x}$ i ddynodi'r cymedr (a yngenir yn 'x bar'). Felly os ceir *n* arsylw gyda'r gwerthoedd $x_1, x_2, \ldots, x_n$, yna swm yr arsylwadau yw

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Σ yw'r brif lythyren Roegaidd 'sigma', ac fe'i defnyddir yma i ddynodi 'swm'. Yn y nodiant hwn, y cymedr yw

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} .$$

Enghraifft 1

Mae teulu yn defnyddio'r meintiau canlynol o drydan mewn wythnos, mewn cilowat-oriau (kW awr) yn ystod cyfnod o 5 wythnos: 338, 354, 341, 353, 351. Cyfrifwch y defnydd cymedrig o drydan bob wythnos.

Datrysiad

Swm yr arsylwadau yw $\Sigma x = 338 + 354 + 341 + 353 + 351 = 1737$

a'r defnydd cymedrig yw

$$\bar{x} = \frac{1737}{5} = 347.4 \text{ kW awr}$$

Gwyriad safonol

Gydag $\bar{x}$ fel ein mesur lleoliad, mae'n gwneud synnwyr i ni gael mesur gwasgariad sy'n dibynnu ar wyriadau'r arsylwadau unigol oddi wrth $\bar{x}$ (sef $x_i - \bar{x}$). Y gwyriadau yn ein henghraifft yw:

$$(338 - 347.4), (354 - 347.4), (341 - 347.4), (353 - 347.4), (351 - 347.4)$$
$$= \ -9.4,\ +6.6,\ -6.4,\ +5.6,\ +3.6.$$

Ystyriwch nawr sut y gellir cyfuno'r rhain mewn rhyw ffordd i roi gwerth rhifiadol ar gyfer y mesur gwasgariad. Fel gydag unrhyw set o ddata, swm y gwyriadau hyn yw sero, ac felly nid yw eu cyfartaledd (cymedr) yn briodol fel mesur gwasgariad. Yn lle hynny, ystyriwch gymryd cyfartaledd sgwariau'r gwyriadau fel y mesur gwasgariad. Gelwir hwn yn **amrywiant** y set o ddata ac fe'i dynodir gan Var. Ar gyfer yr enghraifft uchod, cymedr y gwyriadau wedi'u sgwario yw

$$\text{Var} = \left[\frac{(-9.4)^2 + (6.6)^2 + (-6.4)^2 + (5.6)^2 + (3.6)^2}{5}\right] = 43.44 \text{ kW awr}^2.$$

Nodwch mai sgwâr unedau'r newidyn (kW awr^2 yma) fydd unedau'r Var bob amser. Er mwyn cael mesur gwasgariad sydd â'r un unedau â'r newidyn, rydym yn cymryd ail isradd y Var, a elwir yn **wyriad safonol** y set o ddata ac fe'i dynodir gan GS.

Ar gyfer yr enghraifft uchod, y gwyriad safonol yw

$$\text{GS} = \sqrt{43.44} = 6.591 \text{ kW awr (yn gywir i dri lle degol).}$$

Er mwyn cyffredinoli'r uchod, ystyriwch yr n arsylw $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sydd â chymedr $\bar{x}$. Swm sgwariau'r gwyriadau oddi wrth $\bar{x}$ yw

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots (x_n - \bar{x})^2 \equiv \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

fel bod yr amrywiant yn

$$\text{Var} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} \qquad (1)$$

a'r gwyriad safonol yn GS = $\sqrt{\text{Var}}$.

Gellir symleiddio'r rhifyddeg a ddefnyddir i ganfod GS trwy ddefnyddio'r unfathiant

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} \qquad (2)$$

Gofynnir i chi brofi hyn fel ymarfer. Trwy ddefnyddio (2), gellir gosod ar ffurf tabl y ffordd y cyfrifir gwyriad safonol y data yn Enghraifft 1 fel a ganlyn.

	x	x^2
	338	114244
	354	125316
	341	116281
	353	124609
	351	123201
Cyfanswm	1737	603651

Felly, mae $\Sigma x = 1737$ a $\Sigma x^2 = 603651$. Trwy amnewid y gwerthoedd yn (2) a defnyddio (1) cawn

$$\text{Var} = \frac{1}{5}\left(603651 - \frac{1737^2}{5}\right) = 43.44$$

a $\qquad \text{GS} = \sqrt{43.44} = 6.591$ yn gywir i dri lle degol, fel a gafwyd uchod.

Os oes gan eich cyfrifiannell fodd Ystadegaeth (neu SD), mae'r gwaith cyfrifo yn symlach fyth. Bydd yn rhaid i chi gyfeirio at lawlyfr eich cyfrifiannell i weld sut mae'n gweithio. Mae gan lawer o gyfrifianellau sydd â'r modd hwn allwedd wedi'i labelu ag $\bar{x}$ (ar gyfer y cymedr) a dwy allwedd wedi'u labelu s_n ac s_{n-1} neu σ_n a σ_{n-1}. Dylid defnyddio'r allwedd gyda'r is-nod *n* ar gyfer y gwyriad safonol fel y'i diffinnir yma.

Ymarfer 2.2

Yng Nghwestiynau 1 i 6 cyfrifwch gymedr a gwyriad safonol pob set o ddata, gan roi eich atebion yn gywir i dri lle degol.

1. Nifer y dyddiau yr oedd 5 disgybl yn absennol yn ystod blwyddyn ysgol oedd: 4, 3, 8, 6, a 4, yn ôl eu trefn.

2. Taldra 7 bachgen, mewn cm, oedd : 159, 167, 170, 170, 174, 173, 162.

3. Hydoedd 10 wy cwcw, mewn mm, oedd:

18, 21, 19, 20, 18, 18, 19, 21, 20, 18.

4. Y marciau a gafodd disgybl mewn 8 pwnc oedd (%):

36, 49, 62, 74, 25, 39, 53, 62.

5. Cyflymder teipio 10 clerc sy'n gweithio mewn swyddfa fawr, mewn geiriau fesul munud, oedd: 37, 45, 41, 37, 39, 41, 41, 38, 43, 40.

6. Nifer yr eiliadau a enillwyd (gwerthoedd positif) neu a gollwyd (gwerthoedd negatif) gan 10 oriawr dros gyfnod o 24 awr oedd:

+1.1, +4.2, −2.3, +3.4, +0.7, −4.1, +3.9, −3.0, +3.1, +1.0

7. Amserau chwarae pum casét C60 math A, mewn munudau, oedd:

42.3, 42.1, 53.2, 48.6, 51.8,

ac amserau chwarae pum casét C60 math B oedd:

44.1, 46.5, 50.1, 48.2, 52.1.

(a) Pa fath oedd â'r amser chwarae cymedrig hiraf?

(b) Pa fath oedd â'r amser chwarae mwyaf amrywiol?

(c) Nodwch, gan roi rheswm dros eich dewis, pa fath y byddech yn argymell i rywun ei brynu.

8. Cafwyd set o 10 gwerth a arsylwyd ar gyfer newidyn x, lle roedd

$$\Sigma x = 290 \quad \text{a} \quad \Sigma x^2 = 8469.$$

Cyfrifwch gymedr ac amrywiant y data.

9. Mewn 5 batiad criced olynol sgoriodd batiwr: 11, 58, 36, 0, 41.

(a) Canfyddwch faint o rediadau y mae angen i'r batiwr hwn eu sgorio yn ei fatiad nesaf er mwyn iddo gael sgôr cymedrig o 30 dros y 6 batiad.

(b) A chymryd bod sgôr cymedrig y batiwr dros y 6 batiad yn 30, cyfrifwch wyriad safonol y 6 sgôr, gan roi eich ateb yn gywir i dri lle degol.

10. Cymedr y 5 rhif 5, 7, 8, a, b yw 6 a'u hamrywiant yw 2. O wybod bod b yn fwy nag a, canfyddwch werthoedd a a b.

2.3 Cymedr a gwyriad safonol dosraniad amlder arwahanol

Enghraifft

Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder nifer y matsys ym mhob blwch mewn 50 blwch o fatsys. Cyfrifwch gymedr a gwyriad safonol nifer y matsys ym mhob blwch.

Nifer y matsys yn y blwch (x)	43	44	45	46	47	48
Nifer y blychau (amlder f)	3	8	14	16	8	1

Datrysiad

Gan fod 3 o'r blychau yn cynnwys 43 matsen, 8 yn cynnwys 44 matsen, ac yn y blaen, cyfanswm nifer y matsys yn y 50 blwch yw

$$\Sigma x = 3 \times 43 + 8 \times 44 + 14 \times 45 + 16 \times 46 + 8 \times 47 + 1 \times 48 = 2271.$$

Felly, nifer cymedrig y matsys ym mhob blwch yw $\bar{x} = \dfrac{2271}{50} = 45.42.$

Yn yr un modd, swm sgwariau niferoedd y matsys yn y blychau yw

$$\Sigma x^2 = 3\times43^2 + 8\times44^2 + 14\times45^2 + 16\times46^2 + 8\times47^2 + 1\times48^2 = 103\,217.$$

Trwy ddefnyddio (2) yn Adran 2.2, ceir

$$\Sigma(x - \bar{x})^2 = 103217 - \left(\frac{2271^2}{50}\right) = 68.18.$$

Mae'n dilyn mai amrywiant y dosraniad yw

$$\text{Var} = \frac{68.18}{50} = 1.3636$$

a'r gwyriad safonol yw GS = $\sqrt{1.3636} = 1.168$ yn gywir i dri lle degol.

Er mwyn cyffredinoli, ystyriwch set o ddata gydag n arsylw sydd â'r gwerthoedd **arwahanol** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sy'n digwydd gydag amledd $f_1, f_2, \ldots, f_n$, yn ôl eu trefn, fel a ddangosir yn y tabl canlynol.

Gwerth y newidyn	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Amlder	f_1	f_2	f_3	…	f_n

Cymedr y dosraniad hwn yw

$$\bar{x} = \frac{(f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots f_nx_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n},$$

lle mae $n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ yn cynrychioli cyfanswm yr amlder.

Swm sgwariau'r n arsylw i gyd yw

$$f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + f_3x_3^2 + \ldots + f_nx_n^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2$$

Yr amrywiant yw

$$\text{VAR} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i\right)^2}{n}\right]$$

Mae'r mynegiadau hyn yn cynnig dull tablaidd cyfleus ar gyfer canfod cymedr a gwyriad safonol dosraniad amlder a roddir, fel a ddangosir isod ar gyfer ein henghraifft.

	x	f	fx	fx^2
	43	3	129	5547
	44	8	352	15488
	45	14	630	28350
	46	16	736	33856
	47	8	376	17672
	48	1	48	2304
Cyfanswm		50	2271	103217

[Dalier sylw mae pennawd y golofn olaf yw $fx^2 = f \times x^2 = f \times x \times x$.]

O res olaf y tabl ceir

$$n = 50,\ \Sigma fx = 2271,\ \Sigma fx^2 = 103217$$

fel a gafwyd uchod.

[Mae gan rai cyfrifianellau gyfleuster wedi'i raglennu eisoes ar gyfer canfod cymedr a gwyriad safonol dosraniad amlder arwahanol. Edrychwch i weld a oes gennych allwedd wedi'i labelu ag f ar eich cyfrifiannell; os felly, dylid cyfeirio at y llawlyfr i weld sut i'w defnyddio.]

Ymarfer 2.3

Cyfrifwch gymedr a gwyriad safonol pob un o'r dosraniadau amlder canlynol, yn gywir i dri lle degol.

1. Mae'r tabl yn dangos dosraniad amlder nifer y plant ym mhob teulu mewn 30 o deuluoedd.

Nifer y plant	0	1	2	3	4
Nifer y teuluoedd	6	9	11	3	1

2. Dangosir y sgoriau a gafwyd mewn 50 tafliad dis ciwbigol yn y tabl canlynol.

Sgôr	1	2	3	4	5	6
Amlder	8	12	15	10	3	2

3. Anfonodd busnes 40 o lythyrau gyda phost dosbarth cyntaf un diwrnod a chanfu wedyn pryd cafodd y llythyrau eu dosbarthu. Mae'r dosraniad canlynol yn cynrychioli nifer y dyddiau cyn dosbarthu'r llythyrau.

Nifer y dyddiau cyn dosbarthu	1	2	3	4
Nifer y llythyrau	14	12	10	4

4. Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad nifer yr archebion a dderbyniwyd gan gwmni bob wythnos trwy 1999.

Nifer yr archebion	50	51	52	53	54	55	56
Nifer yr wythnosau	4	6	8	10	15	7	2

5. Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder nifer y 'swigod' ym mhob potel wydr mewn sampl o 40 o boteli.

Nifer y 'swigod'	0	1	2	3	4
Nifer y poteli	15	11	10	3	1

6. Cofnodwyd nifer y damweiniau a ddigwyddodd ar y ffyrdd bob dydd mewn gwlad arbennig dros gyfnod o 100 diwrnod, gyda'r canlyniadau canlynol.

Nifer y damweiniau	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nifer y dyddiau	5	15	22	23	17	10	5	2	1

7. Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder meintiau esgidiau 36 bachgen.

Maint esgidiau	$6\frac{1}{2}$	7	$7\frac{1}{2}$	8	$8\frac{1}{2}$	9
Nifer y bechgyn	3	6	12	8	5	2

8. Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder nifer enillwyr y wobr fawr pan dynnir y *Loteri Genedlaethol* 25 o weithiau.

Nifer yr enillwyr	0	1	2	4	5	8
Nifer y tyniadau	2	3	8	6	4	2

2.4 Cymedr a gwyriad safonol pan roddir dosraniad amlder wedi'i grwpio

Pan fo set o ddata ar gael ar ffurf dosraniad amlder wedi'i grwpio yn unig, ni ellir cyfrifo union werthoedd y cymedr a'r gwyriad safonol gan nad yw'r gwerthoedd unigol a arsylwir yn hysbys. Fodd bynnag, gellir cael amcangyfrifon rhesymol. Mae'r dull yn seiliedig ar y dybiaeth bod yr arsylwadau mewn unrhyw gyfwng dosbarth yn cael eu dosrannu'n gyfartal dros y cyfwng ac, os felly, gellir cyfiawnhau rhoi gwerth ei ganolbwynt yn lle pob cyfwng dosbarth. Y cyfiawnhad yw bod lluoswm canolbwynt y cyfwng a'r amlder yn hafal i swm yr arsylwadau yn y cyfwng. Felly, mae'r broblem yn lleihau i ddosraniad amlder a gellir defnyddio'r dull yn yr adran flaenorol i ganfod amcangyfrifon ar gyfer y cymedr a'r gwyriad safonol. Dangosir hyn yn yr enghreifftiau canlynol o ddosraniadau amlder wedi'u grwpio, lle nad yw'r cyfyngau dosbarth i gyd yr un lled.

Enghraifft 1

Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder wedi'i grwpio o oedran y 55 person a laddwyd mewn damweiniau ffyrdd mewn sir arbennig, yn ôl eu pen-blwydd diwethaf.

Oedran (blynyddoedd)	0-19	20-29	30-49	50-79	80-99
Amlder	13	23	11	5	3

Amcangyfrifwch, i'r mis agosaf, gymedr a gwyriad safonol yr oedrannau.

Datrysiad

Y cam cyntaf yn y datrysiad yw rhoi gwerth ei ganolbwynt yn lle pob cyfwng dosbarth (grŵp oedran). Gan fod yr oedrannau yn cael eu cofnodi mewn blynyddoedd yn ôl pen-blwydd diwethaf y person, bydd y cyfwng 0-19 yn cynnwys pawb nad ydynt wedi cyrraedd 20 mlwydd oed; canolbwynt y cyfwng hwn yw $\frac{1}{2}(0 + 20) = 10$.
Yn yr un modd, canolbwynt y cyfwng 20-29 yw $\frac{1}{2}(20 + 30) = 25$,
canolbwynt y cyfwng 30-49 yw $\frac{1}{2}(30 + 50) = 40$,
canolbwynt y cyfwng 50-79 yw $\frac{1}{2}(50 + 80) = 65$,
a chanolbwynt y cyfwng olaf, sef 80-99 yw $\frac{1}{2}(80 + 100) = 90$.

Trwy roi ei ganolbwynt yn lle pob cyfwng dosbarth, ceir y dosraniad amlder canlynol.

Canolbwynt oedran (*x* mlynedd)	10	25	40	65	90
Amlder (a)	13	23	11	5	3

Datrysiad

Gofynnir i chi, fel ymarfer, ddefnyddio'r dull yn Adran 2.3 i ddangos bod amcangyfrif yr oedran cymedrig yn $\overline{x} = 31.6364$ mlynedd = 31 mlynedd 8 mis, ac amcangyfrif y gwyriad safonol yn GS = 20.7376 mlynedd = 20 mlynedd 9 mis.

Enghraifft 2

Mesurwyd straen dorri 150 rhaff, yn gywir i'r cilogram agosaf, a dangosir y canlyniadau yn y tabl canlynol. Amcangyfrifwch, yn gywir i'r cilogram agosaf, gymedr a gwyriad safonol y straeniau torri.

Straen dorri (kg)	100-149	150-299	300-499	500-599	600-699
Nifer y rhaffau	16	33	50	41	10

Datrysiad

Yn yr enghraifft hon, cofnodwyd y mesuriadau yn gywir i'r cilogram agosaf. Felly, er enghraifft, mae'r cyfwng dosbarth 100-149 yn cynnwys yr holl raffau gyda straen dorri rhwng 99.5 kg a 149.5 kg, ac felly y canolbwynt yw $\frac{1}{2}(99.5 + 149.5) = 124.5$.

Noder mai'r gwerth hwn hefyd yw cymedr pwyntiau terfyn y cyfwng dosbarth 100-149, sy'n rhoi dull symlach o ganfod y canolbwyntiau yn yr enghraifft hon. Trwy drin y cyfyngau dosbarth eraill yn yr un modd, ceir dosraniad amlder canolbwyntiau'r cyfyngau fel a ganlyn:

Gwerth y canolbwynt (kg)	124.5	224.5	399.5	549.5	649.5
Amlder	16	33	50	41	10

Gofynnir i chi eto, fel ymarfer, ddefnyddio'r dull yn Adran 2.3 i ddangos bod amcangyfrif cymedr a gwyriad safonol y straeniau torri yn 389 kg a 158 kg, yn ôl eu trefn, yn gywir i'r cilogram agosaf.

Ymarfer 2.4

Cyfrifwch amcangyfrifon o'r cymedr a'r gwyriad safonol o wybod y dosraniadau amlder canlynol wedi'u grwpio.

1. Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder wedi'i grwpio oedran 50 dyn, mewn blynyddoedd, pan briodasant.

Oedran yn priodi (blynyddoedd)	16-21	22-27	28-33	34-39	40-45	46-63
Nifer y dynion	7	14	12	8	4	5

2. Mesurwyd indecs ceffalig (sef mesur siâp pen) 100 o ddisgyblion i'r rhif cyfan agosaf a dyma'r canlyniadau.

Indecs Ceffalig	69-	75-	77-	79-	81-	83-	87-91
Nifer y disgyblion	4	12	26	28	19	9	2

3. Mae'r tabl canlynol yn dangos tabl o amlder wedi'i grwpio y pellterau, mewn miloedd o gilometrau, a yrrwyd gan 100 o yrwyr ceir mewn blwyddyn arbennig.

Pellter (x mil km)	*Nifer y gyrwyr*
$2 \le x < 10$	6
$10 \le x < 26$	34
$26 \le x < 34$	36
$34 \le x < 42$	15
$42 \le x < 50$	9

4. Dyma ddosraniad amlder wedi'i grwpio masau 150 o orennau, wedi'u mesur i'r gram agosaf.

Màs (g)	100-139	140-179	180-199	200-219	220-239	240-279	280-320
Nifer yr orennau	8	15	24	41	45	12	5

5. Dyma ddosraniad amlder wedi'i grwpio masau'r parseli, i'r cilogram agosaf, a bostiwyd mewn un diwrnod mewn swyddfa bost.

Màs (kg)	1	2	3-4	5-6	7-9	10-15
Nifer y parseli	3	5	12	18	21	24

6. Dangosir yn y tabl isod ddosraniadau oedran 100 o breswylwyr mewn ystâd o dai mewn tref a 200 o breswylwyr mewn ystâd o dai mewn tref wyliau ar lan y môr.

Oedran (blynyddoedd)	0-14	15-29	30-44	45-59	60-74	75-89
Nifer yn y dref	12	22	30	19	12	5
Nifer yn y dref wyliau	4	24	42	52	62	16

Defnyddiwch eich gwerthoedd ar gyfer y cymedrau a'r gwyriadau safonol i roi sylwadau ar y prif wahaniaethau rhwng y ddau ddosraniad ac awgrymwch reswm dros y gwahaniaethau.

2.5 Histogramau

Histogram yw diagram sy'n addas ar gyfer dangos dosraniad amlder wedi'i grwpio, yn enwedig pan nad yw'r cyfyngau dosbarth i gyd yr un lled. Mae'r enghreifftiau canlynol yn dangos y dull ar gyfer llunio histogram o wybod dosraniad amlder wedi'i grwpio.

Enghraifft 1

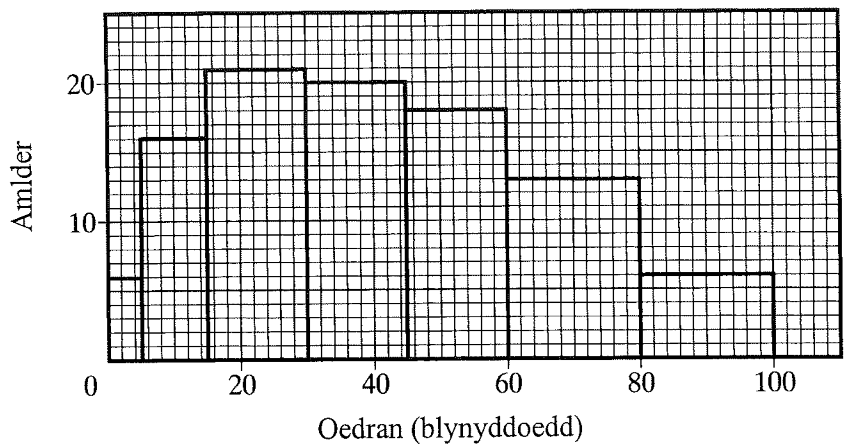
Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder wedi'i grwpio oedrannau 100 o bobl sy'n byw ar ystâd o dai.

Oedran (blynyddoedd)	0-4	5-14	15-29	30-44	45-59	60-79	80-99
Amlder	6	16	21	20	18	13	6

Dangoswch y dosraniad mewn diagram.

Datrysiad

Tybiwch ein bod wedi penderfynu dangos y dosraniad ar ffurf diagram amlder wedi'i grwpio trwy adeiladu petryal uwchben pob cyfwng dosbarth gyda'i uchder yn hafal i'r amlder cyfatebol. Dangosir y diagram a geir yn Ffigur 1a.



Ffigur 1a

Cymharwch y petryal cyntaf â'r petryal olaf. Mae ganddynt yr un uchder (amlder 6) ond mae lled y petryal olaf (20 mlynedd) yn bedair gwaith lled y petryal cyntaf (5 mlynedd). Felly, o safbwynt yr arwynebedd, mae'r petryal olaf bedair gwaith cymaint â'r petryal cyntaf. Gan ein bod yn ystyried maint petryal fel ei arwynebedd, byddai'r diagram uchod yn awgrymu bod pedair gwaith cymaint o bobl 80-99 mlwydd oed ag sydd o blant 0-4 mlwydd oed, tra bo, mewn gwirionedd, 6 pherson o fewn pob grŵp oedran. Er mwyn cael diagram priodol, mae'n amlwg, pan nad yw lled y cyfyngau i gyd yn gyfartal, bod rhaid ystyried y lledau wrth gynrychioli'r dosraniad mewn diagram. Gellir gwneud hyn trwy ddefnyddio **dwyseddau amlder** yn lle'r amlder, lle mae

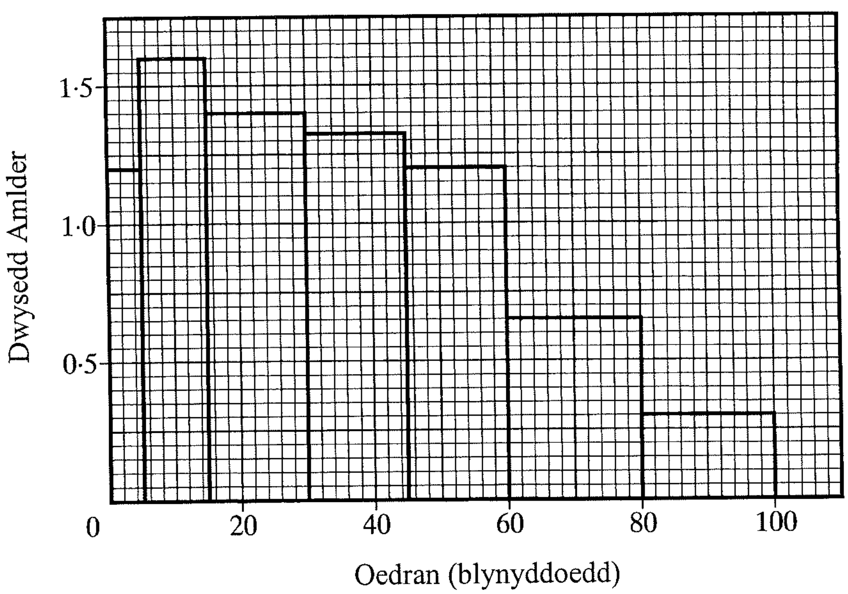
$$\text{dwysedd amlder cyfwng} = \frac{\text{Amlder y cyfwng}}{\text{Lled y cyfwng}},$$

sef, yn syml, yr amlder am bob uned o'r newidyn. Dangosir y dull ar gyfer Enghraifft 1 yn y tabl canlynol a'r diagram a geir o ganlyniad (Ffigur 1b), a elwir yn **histogram**.

Oedran (blynyddoedd)	0-4	5-14	15-29	30-44	45-59	60-79	80-99
Lled y cyfwng (ll)	5	10	15	15	15	20	20
Amlder (a)	6	16	21	20	18	13	6
Dwysedd amlder (a/ll)	1.2	1.6	1.4	1.33	1.2	0.65	0.3

Priodwedd hanfodol histogram yw bod "arwynebedd" y petryal uwchben cyfwng dosbarth (a geir trwy luosi lled y cyfwng â'r dwysedd amlder) yn hafal yn rhifiadol i amlder y cyfwng hwnnw. Felly, mae cymharu "arwynebeddau" y petryalau yn gyfystyr â chymharu amlderau. Yn arbennig, mae cyfanswm yr "arwynebedd" o dan yr histogram yn hafal yn rhifiadol i gyfanswm yr amlderau (sef nifer yr arsylwadau yn y set o ddata a geir).

Gyda dosraniad amlder wedi'i grwpio sydd â lledau cyfwng anghyfartal, gelwir y cyfwng sydd â'r dwysedd amlder uchaf yn **ddosbarth modd.** Yn yr enghraifft uchod, y grŵp oedran gyda'r amlder uchaf yw 15-29 ond y dosbarth modd yw 5-14, sef y cyfwng gyda'r dwysedd amlder uchaf.



Ffigur 1b

Enghraifft 2

Mesurwyd masau 80 o athletwyr i'r cilogram agosaf a lluniwyd y dosraniad amlder wedi'i grwpio canlynol gyda'r canlyniadau. Dangoswch y dosraniad fel histogram

Màs (kg)	75-82	83-84	85-86	87-88	89-93	94-98
Amlder	10	5	10	11	34	10

Datrysiad

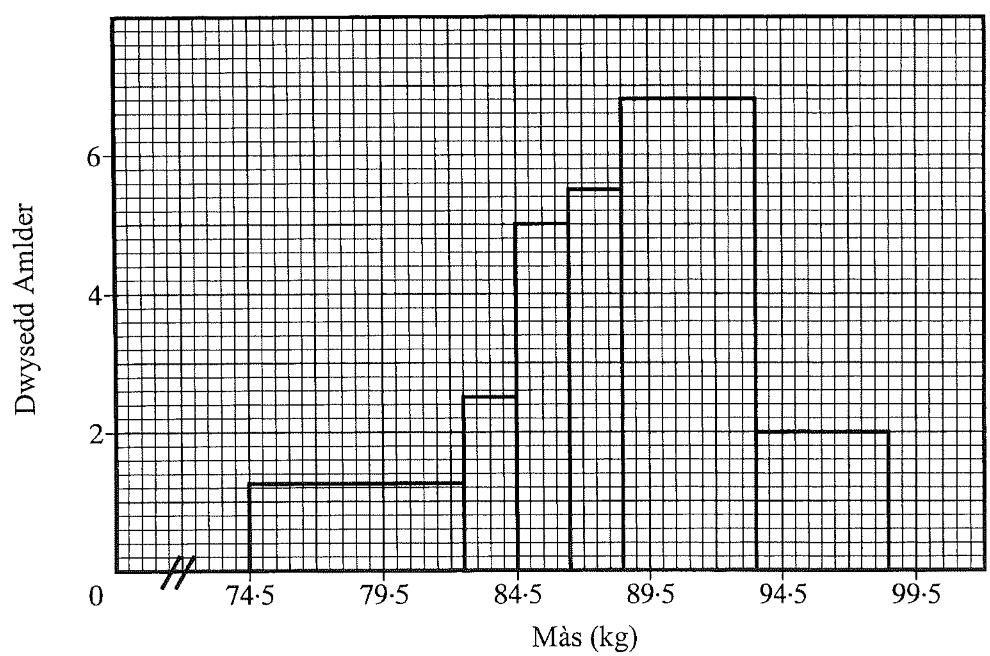
Gan fod y masau wedi'u mesur i'r cilogram agosaf, mae'r cyfwng 75-82 yn cynnwys pob athletwr sydd â màs rhwng 74.5 kg ac 82.5 kg. Cyfeirir yn aml at y rhain fel **terfynau dosbarth** y cyfwng 75-82. Dehonglir y cyfyngau eraill yn yr un modd. Mae'r tabl canlynol yn dangos sut mae'r dwyseddau amlder yn cael eu cyfrifo.

Màs (kg)	74.5-82.5	82.5-84.5	84.5-86.5	86.5-88.5	88.5-93.5	93.5-98.5
Lled (ll)	8	2	2	2	5	5
Amlder (a)	10	5	10	11	34	10
Dwysedd amlder (a/ll)	1.25	2.5	5	5.5	6.8	2

Dangosir yr histogram yn *Ffigur 2.*

Yn yr enghraifft hon mae'n digwydd bod mai cyfwng y dosbarth modd (89-93) yw'r un gyda'r amlder uchaf hefyd, ond nid yw hyn yn wir bob amser, fel y gwelwyd yn Enghraifft 1.

Cofiwch mai canolrif set o ddata yw gwerth yr arsylw yn y canol, pan roddir yr arsylwadau yn nhrefn eu maint. Gan nad oes gennym werthoedd yr arsylwadau unigol yma, y peth gorau y gallwn ei wneud yw amcangyfrif y canolrif. Yr amcangyfrif yw'r gwerth ar gyfer y newidyn lle mae'r "arwynebedd" o dan yr histogram i'r chwith (neu i'r dde) iddo yn hanner cyfanswm yr "arwynebedd" o dan yr histogram. Yn yr un modd, y chwartel isaf yw'r gwerth hwnnw ar gyfer y newidyn lle mae'r "arwynebedd" o dan yr histogram i'r chwith iddo yn hafal i chwarter cyfanswm yr "arwynebedd" o dan yr histogram, a'r chwartel uchaf yw'r gwerth hwnnw ar gyfer y newidyn lle mae'r "arwynebedd" o dan yr histogram i'r chwith iddo yn dri chwarter cyfanswm yr "arwynebedd" o dan yr histogram. Mae cyfrifo'r gwerthoedd hyn o histogram yn gallu bod yn waith diflas. Byddwn yn disgrifio dull symlach o lawer yn yr adran nesaf.



Ffigur 2

Mae siapiau'r histogramau yn *Ffigur 1b* a *Ffigur 2* yn wahanol iawn. Yn *Ffigur 1b* mae'r "gynffon" i'r dde o'r dosbarth modd yn hirach na'r "gynffon" i'r chwith.

Dywedir bod dosraniad o'r fath â **sgiw bositif** (neu ar sgiw i'r dde). Yn *Ffigur 2* mae'r "gynffon" i'r chwith o'r dosbarth modd yn hirach na'r "gynffon" i'r dde; dywedir bod dosraniad o'r fath â **sgiw negatif** (neu ar sgiw i'r chwith). Pan fydd y "cynffonnau" ar y ddwy ochr yn gyfartal, dywedir bod y dosraniad yn **gymesur.** Gyda dosraniad cymesur, bydd y cymedr a'r canolrif yn gyfartal. Gyda dosraniad â sgiw bositif, bydd y cymedr yn fwy na'r canolrif, gan fod y gwerthoedd sy'n gymharol fawr yn cael eu hystyried wrth gyfrifo'r cymedr ond nid ydynt yn effeithio ar y canolrif. Yn yr un modd, gyda dosraniad â sgiw negatif, bydd y cymedr yn llai na'r canolrif.

Ymarfer 2.5

1-5 Ar gyfer pob un o'r dosraniadau amlder wedi'u grwpio yng Nghwestiynau 1-5 yn Ymarfer 2.4,

(a) dangoswch y dosraniad fel histogram,

(b) nodwch siâp y dosraniad,

(c) ysgrifennwch gyfwng y dosbarth modd,

(d) nodwch a yw'r cymedr yn fwy, yn llai, neu tua'r un maint â'r canolrif.

2.6 Dosraniad amlder cronnus

Cofiwch mai amlder cronnus unrhyw werth mewn set o ddata yw nifer yr arsylwadau yn y set sy'n llai na'r gwerth hwnnw neu'n hafal iddo. O wybod dosraniad amlder wedi'i grwpio o'r arsylwadau yn unig, nid oes modd cyfrifo amlder cronnus pob gwerth a arsylwyd. Mewn gwirionedd, dim ond amlderau cronnus y terfynau dosbarth uchaf y gallwn eu cyfrifo. Drwy blotio'r amlderau cronnus yn erbyn y terfynau dosbarth uchaf cyfatebol a chysylltu'r pwyntiau sydd wedi'u plotio gyda llinellau syth, cawn ffordd arall o gynrychioli dosraniad amlder wedi'i grwpio mewn diagram, a gelwir y diagram hwn yn **bolygon amlder cronnus**. Gellir cyfiawnhau cysylltu'r pwyntiau wedi'u plotio gyda llinell syth os yw'r arsylwadau mewn unrhyw gyfwng dosbarth yn cael eu dosbarthu yn unffurf dros y cyfwng hwnnw (sef yr un dybiaeth yn union ag a wnaethom wrth amcangyfrif y cymedr a'r gwyriad safonol mewn dosraniad amlder wedi'i grwpio).

Mae'r polygon amlder cronnus yn darparu ffordd syml o amcangyfrif y canolrif a'r chwartelau. Os yw cyfanswm nifer yr arsylwadau yn n, yna gellir canfod y canolrif gyda'r polygon amlder cronnus trwy ddarllen gwerth y newidyn pan fo'r amlder cronnus yn hafal i $\frac{1}{2}$n (hyd yn oed pan nad yw hwn yn gyfanrif). Yn yr un modd, gellir amcangyfrif y chwartelau trwy ddarllen gwerthoedd y newidyn pan fo gwerthoedd yr amlder cronnus yn $\frac{1}{4}$n a $\frac{3}{4}$n, yn ôl eu trefn. Dangosir y dull yn yr enghreifftiau canlynol. Gellir cyfrifo'r gwerthoedd hefyd trwy ddefnyddio rhyngosodiad llinol o fewn y cyfwng dosbarth sy'n cynnwys y mesur sy'n cael ei amcangyfrif. Mae'r dulliau a ddisgrifiwyd uchod yn cael eu dangos yn yr enghraifft a roddir isod. Chwartelau set o ddata yw tri gwerth ar gyfer y newidyn sy'n rhannu'r arsylwadau trefnedig yn bedair rhan. Gellir ehangu'r syniad hwn. Er enghraifft, y **degraddau** yw naw gwerth ar gyfer y newidyn sy'n rhannu'r arsylwadau trefnedig yn 10 rhan, gyda degfed o'r arsylwadau yn llai na'r degradd isaf (cyntaf), degfed rhan yn fwy na'r degradd uchaf (olaf), a degfed rhan rhwng unrhyw ddau ddegradd olynol. Gan ehangu'r syniad ymhellach, y **canraddau** yw'r gwerthoedd ar gyfer y newidyn sy'n rhannu'r arsylwadau trefnedig yn 100 rhan, gydag 1% o'r arsylwadau gyda gwerthoedd rhwng unrhyw ddau ganradd olynol. Yn yr un modd ag y gellir defnyddio'r amrediad rhyngchwartel fel mesur gwasgariad, gellir defnyddio amrediadau rhyngcanradd a ddewisir yn briodol hefyd fel mesurau gwasgariad. Un amrediad rhyngcanradd a ddefnyddir yn aml fel mesur gwasgariad yw'r un 10-90, sef y 90^{fed} canradd tynnu'r 10^{fed} canradd. Nodwch mai'r canolrif yw'r 50^{fed} canradd, y chwartel isaf yw'r 25^{ed} canradd a'r chwartel uchaf yw'r 75^{ed} canradd, ac felly'r amrediad rhyngchwartel yw'r amrediad rhyngcanradd 25-75.

Enghraifft

Amcangyfrifwch y canolrif, yr amrediad rhyngchwartel, a'r amrediad rhyngcanradd 10-90 o wybod y dosraniad amlder wedi'i grwpio yn Enghraifft 2 yn yr adran flaenorol.

Datrysiad.

Dyma dabl y terfynau dosbarth uchaf a'r amlderau cronnus.

Màs (kg)	74.5	82.5	84.5	86.5	88.5	93.5	98.5
Amlder cronnus (AC)	0	10	15	25	36	70	80

Nodwch fod y pâr cyntaf o ddata wedi cael eu cynnwys gan ein bod yn gwybod nad oedd athletwr gyda màs llai na 74.5 kg. Dangosir y polygon amlder cronnus yn *Ffigur 3*. Nodwch y dylid cael graddfeydd sy'n hawdd i'w darllen ar hyd y ddwy echelin gan y byddwn yn cymryd darlleniadau oddi wrth y graff.

Gan fod cyfanswm nifer yr arsylwadau yn n = 80, y canolrif c yw'r màs lle mae $AC = \frac{80}{2} = 40$, a gwelir ar y graff mai 89 kg yw hwn.

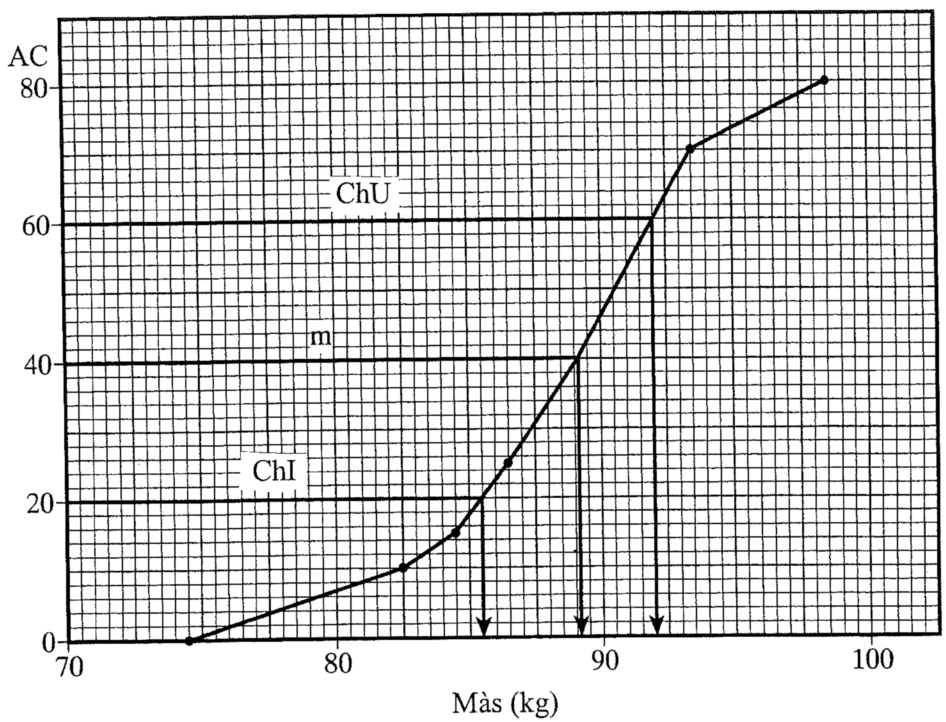
Y chwartel isaf, ChI, yw'r màs lle mae $AC = \frac{80}{4} = 20$, a gwelir ar y graff bod ChI= 85.5kg. Y chwartel uchaf, ChU, yw'r màs lle mae $AC = \frac{3}{4} \times 80 = 60$.

Ar y graff, mae'r ChU = 92 kg. Felly, yr amrediad rhyngchwartel (ARhCh) yw $92 - 85.5 = 6.5$ kg .

Ar gyfer yr amrediad rhyngcanradd 10-90, mae arnom angen gwerthoedd y 90^{fed} canradd a'r 10^{fed} canradd. Y 90^{fed} canradd yw'r màs lle mae AC = 90% o 80 = 72, a gwelir ar y graff bod hwn yn hafal i 94.5 kg.

Y 10^{fed} canradd yw'r màs lle mae AC = 10% o 80 = 8, a gwelir ar y graff bod hwn yn hafal i 81 kg.

Yr amrediad rhyngcanradd 10-90 yw 94.5 – 81 = 13.5 kg.



Ffigur 3

Ffordd arall o gyfrifo'r amcangyfrifon uchod yw trwy ddefnyddio rhyngosodiad llinol, a fydd yn rhoi amcangyfrifon mwy manwl gywir fel rheol.

Y canolrif yw'r gwerth lle mae AC = 40.

Oddi wrth y tabl a roddir, gwelwn fod AC = 40 yn syrthio yn y cyfwng 88.5-93.5.

Yr AC ar gyfer 88.5 yw 36 a'r AC ar gyfer 93.5 yw 70. Trwy ddefnyddio rhyngosodiad llinol yn y cyfwng hwn, gwerth c lle mae AC = 40 yw

$$c = 88.5 + \frac{40-36}{70-36} \times (93.5 - 88.5)$$

$$= 89.1 \text{ kg (i 1 lle degol).}$$

Y chwartel isaf (ChI) yw'r màs lle mae AC = 20, sy'n syrthio i'r cyfwng 84.5 – 86.5. Yr AC ar y pwynt terfyn isaf yw 15 a'r AC ar y pwynt terfyn uchaf yw 25. Felly, trwy ddefnyddio rhyngosodiad llinol, dyma'r chwartel isaf

$$\text{ChI} = 84.5 + \frac{20-15}{25-15} \times (86.5 - 84.5) = 85.5 \text{ kg}$$

Yn yr un modd, dyma'r chwartel uchaf

$$\text{ChU} = 88.5 + \frac{60-36}{70-36} \times (93.5 - 88.5) = 92.0 \text{ kg}.$$

Felly, yr amrediad rhyngchwartel (ARhCh) yw ARhCh = 92.0 – 85.5 = 6.5 kg.
Yn olaf, amcangyfrifir y 90^{fed} canradd (AC = 90% o 80 = 72)) fel

$$93.5 + \frac{72-70}{80-70} \times (98.5 - 93.5) = 94.5 \text{ kg}$$

ac amcangyfrifir y 10^{fed} canradd (AC = 10% o 80 = 8) fel

$$74.5 + \frac{8-0}{10-0} \times (82.5 - 74.5) = 80.9.$$

Felly, yr amrediad rhyngcanradd 10-90 yw 94.5 – 80.9 = 13.6.

Ymarfer 2.6

1. Amcangyfrifwch ganolrif ac amrediad rhyngchwartel oedrannau 50 o ddynion o wybod y dosraniad amlder wedi'i grwpio a roddwyd yng Nghwestiwn 1 yn Ymarfer 2.4.

2. O wybod dosraniad amlder wedi'i grwpio yr indecsau ceffalig yng Nghwestiwn 2, Ymarfer 2.4, gwnewch amcangyfrifon, gyda graff neu fel arall, o'r canolrif a'r amrediad rhyngcanradd 10-90.

3. Amcangyfrifwch amrediad rhyngchwartel y pellterau teithio a roddwyd yn y dosraniad amlder wedi'i grwpio yng Nghwestiwn 3, Ymarfer 2.4.

4. Amcangyfrifwch ganolrif a 70^{fed} canradd masau'r orennau yng Nghwestiwn 4, Ymarfer 2.4.

5. Amcangyfrifwch ganolrif ac amrediad rhyngchwartel masau'r parseli a roddwyd yng Nghwestiwn 5, Ymarfer 2.4.

6. Lluniwch y polygonau amlder cronnus ar gyfer y ddau ddosraniad oedran yng Nghwestiwn 6, Ymarfer 2.4. Defnyddiwch eich graffiau i amcangyfrif canolrif ac amrediad rhyngchwartel pob dosraniad. Rhowch sylwadau ar y gwahaniaethau. [Cymharwch y rhain â'ch atebion i Gwestiwn 6, Ymarfer 2.4.]

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 2

1. Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad amlder nifer yr atebion anghywir a roddwyd gan 50 o bobl mewn papur prawf dewis lluosog.

Nifer yr atebion anghywir	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nifer o bobl	2	3	5	6	10	9	8	6	1

Cyfrifwch fodd, canolrif, cymedr, amrediad rhyngchwartel a gwyriad safonol y dosraniad.

2. Archwiliwyd sampl o 60 llyfr mewn llyfrgell a chafwyd y dosraniad amlder canlynol ar gyfer y nifer o weithiau roedd y llyfrau wedi cael eu benthyg yn ystod y flwyddyn flaenorol.

Nifer o fenthyciadau	1	2	3	4	5
Nifer o lyfrau	27	16	8	5	4

(a) Cyfrifwch ganolrif ac amrediad rhyngchwartel y dosraniad.

(b) Cyfrifwch gymedr a gwyriad safonol y dosraniad.

3. Mae'r tabl yn dangos dosraniad amlder wedi'i grwpio ar gyfer y masau, wedi'u mesur i'r gram agosaf, a enillwyd gan 30 mochyn dros gyfnod o 30 diwrnod.

Màs a enillwyd (g)	7-16	17-21	22-26	27-31	32-36	37-44
Nifer y moch	4	6	9	6	3	2

(a) Cyfrifwch amcangyfrifon o gymedr a gwyriad safonol yr enillion.

(b) Gan ddefnyddio graff, neu fel arall, cyfrifwch amcangyfrifon o ganolrif ac amrediad rhyngchwartel yr enillion.

4. Cafwyd y dosraniad amlder wedi'i grwpio canlynol ar gyfer cynnyrch y gwenith a dyfwyd mewn 200 o gaeau, i'r degfed rhan o gilogram agosaf.

Cynnyrch (kg)	1.3-1.9	2.0-2.4	2.5-2.8	2.9-3.2	3.3-3.9
Amlder	20	42	78	36	24

(a) Lluniwch histogram o'r dosraniad.

(b) Amcangyfrifwch ganolrif a chymedr y cynnyrch ym mhob cae. Rhowch sylwadau ar eu gwerthoedd cymharol.

5. Mae'r tabl canlynol yn dangos dosraniad oedran sampl 120 o fyfyrwyr mewn prifysgol ar eu pen-blwyddi diwethaf.

Oedran (blynyddoedd)	18	19	20	21	22	23
Nifer o fyfyrwyr	50	32	22	8	6	2

(a) Amcangyfrifwch oedran cymedrig y myfyrwyr, gan roi eich ateb mewn blynyddoedd a misoedd, yn gywir i'r mis agosaf.

(b) Amcangyfrifwch ganolrif ac amrediad rhyngcanradd 10-90 yr oedrannau, i'r mis agosaf ym mhob achos.

6. Mae ffatri yn cyflogi cyfanswm o 200 person, ac mae 120 yn gweithio yn y ffatri ers dros 10 mlynedd. Yn y tabl canlynol rhoddir dosraniad amlder wedi'i grwpio hyd gwasanaeth y 120 person sydd â thros 10 mlynedd o wasanaeth.

Hyd gwasanaeth (x mlynedd)	$10<x\leq15$	$15<x\leq20$	$20<x\leq25$	$25<x\leq30$	$30<x\leq40$
Nifer o bobl	30	42	25	15	8

(a) Lluniwch histogram i ddangos y dosraniad hwn.

(b) Amcangyfrifwch ganolrif ac amrediad rhyngchwartel y dosraniad.

(c) Amcangyfrifwch ganolrif hyd gwasanaeth yr holl 200 o weithwyr.

(d) O wybod mai 4.25 mlynedd yw hyd gwasanaeth cymedrig yr 80 o weithwyr sydd â 10 mlynedd neu lai o wasanaeth, amcangyfrifwch hyd gwasanaeth cymedrig yr holl 200 o weithwyr.

Pennod 3

Tebygolrwydd

3.1 Haparbrofion

Mae tebygolrwydd, fel pwnc, wedi cael ei ddatblygu er mwyn ymdrin â sefyllfaoedd lle mae ansicrwydd. Un dosbarth o sefyllfaoedd o'r fath yw'r sefyllfa lle mae'r ansicrwydd yn gysylltiedig â *haparbrawf*, a ddiffinnir fel a ganlyn.

Diffiniad. Haparbrawf yw gweithred neu gyfres o weithrediadau na ellir rhagfynegi ei chanlyniad a lle gall ail-wneud treialon (perfformiadau) o'r weithred roi canlyniadau gwahanol.

Dyma rai enghreifftiau o haparbrofion syml;

1. Taflu darn arian.
2. Taflu dis ciwbigol cyffredin.
3. Codi dau gerdyn o becyn cyffredin o gardiau chwarae.

Diffiniad. Yr enw ar y set o bob canlyniad posibl haparbrawf yw *gofod sampl* ac fe'i dynodir gan S.

Enghraifft 1

Wrth daflu ceiniog a nodi pa wyneb sydd i fyny, gellir cael pen (P) neu gynffon (C) fel canlyniad. Yn yr achos hwn, $S = \{P, C\}$, gyda'r bachau cyrliog yn nodi bod trefn yr elfennau ynddynt yn amherthnasol, ac felly gallem hefyd ysgrifennu $S = \{C, P\}$.

Enghraifft 2

Wrth daflu dis ciwbigol cyffredin a nodi'r sgôr a geir, gellid cael unrhyw un o blith 1, 2, 3, 4, 5, 6 fel canlyniad. Felly,

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Enghraifft 3

Wrth godi cerdyn o becyn cyffredin 52 o gardiau chwarae a nodi'i siwt, gellid cael unrhyw un o blith Calonnau, Clybiau, Diemwnt, Rhawiau, fel canlyniad. Yn yr achos hwn,

$$S = \{\textit{Calonnau, Clybiau, Diemwntiau, Rhawiau}\}$$

Enghraifft 4

Ystyriwch arbrawf lle teflir dis ciwbigol ddwywaith. Os nodir y sgoriau unigol a geir, yna gellir ysgrifennu'r gofod sampl fel

$$S = \{(x, y): x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

sy'n cynnwys 36 elfen, pob un yn bâr trefnedig o rifau, a'r rhif cyntaf (x) yw'r sgôr ar y tafliad cyntaf a'r ail rif (y) yw'r sgôr ar yr ail dafliad. Os, yn lle hynny, nodir swm y ddwy sgôr a geir, y gofod sampl fydd

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Ymarfer 3.1

Ysgrifennwch y gofod sampl priodol ar gyfer pob un o'r haparbrofion canlynol.

1. Codir dyrnaid o 4 cerdyn o becyn cyffredin o 52 o gardiau chwarae a chyfrifir sawl âs sydd yn y dyrnaid.

2. Archwilir torllwyth o chwech o gathod bach er mwyn penderfynu faint ohonynt sy'n fenywol.

3. Mae blwch yn cynnwys 3 pêl wen ac un bêl goch. Bydd y peli yn cael eu tynnu o'r blwch fesul un nes ceir y bêl goch. Nodir nifer y peli a dynnir.

4. Tynnir dwy bêl y naill ar ôl y llall o fag sy'n cynnwys nifer o beli coch a nifer o beli gwyn. Cofnodir lliwiau'r peli yn y drefn y maent yn cael eu tynnu.

5. Teflir ceiniog deirgwaith. (a) Nodir canlyniadau'r tri thafliad. (b) Nodir nifer y pennau a geir.

6. Teflir ceiniog nes ceir pen. Nodir sawl gwaith y teflir y geiniog.

3.2 Digwyddiadau

Diffiniad. *Digwyddiad* yw priodwedd gysylltiedig â chanlyniadau haparbrawf, neu, yn nherminoleg damcaniaeth setiau, is-set y gofod sampl.

Er enghraifft, pan deflir dis ciwbigol, gallai'r digwyddiadau hyn fod o ddiddordeb:

(a) bod y sgôr a geir yn eilrif; (b) bod y sgôr a geir yn lluosrif 3.

Dynodir digwyddiad gan briflythyren o ddechrau'r wyddor (A, B, C, …).

Enghraifft 1

Codir cerdyn o becyn cyffredin o gardiau chwarae ac fe nodir ei siwt. Y gofod sampl yw S = {Calonnau, Clybiau, Diemwnt, Rhawiau }.

Enghreifftiau o ddigwyddiadau yn yr achos hwn yw

A = bydd y cerdyn a godir yn goch = {Calonnau, Diemwnt},

B = nid Calon fydd y cerdyn a godir = { Clybiau, Diemwnt, Rhawiau }.

Enghraifft 2

Teflir dau ddis gyda'i gilydd ac fe gofnodir swm y sgoriau.

Y gofod sampl yw S = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Enghreifftiau o ddigwyddiadau cysylltiedig â'r arbrawf hwn yw

A = bydd swm y sgoriau yn sgwâr perffaith = {4, 9},

B = bydd swm y sgoriau yn eilrif = {2, 4, 6, 8, 10, 12}.

Enghraifft 3

Teflir ceiniog deirgwaith a chofnodir y canlyniadau yn y drefn y maent yn digwydd. Y gofod sampl yw

S = {(PPP), (PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP), (CCC)},

lle mae'r elfen (CPP), er enghraifft, yn cyfateb i'r canlyniad lle mae'r tafliad cyntaf yn rhoi cynffon, yr ail yn rhoi pen a'r trydydd yn rhoi pen. Rhai enghreifftiau o ddigwyddiadau yn yr achos hwn yw:

A = dau ben yn union fydd yn cael eu taflu = {(PPC), (PCP), (CPP)}

B = bydd y trydydd tafliad yn rhoi pen = {(PPP), (PCP), (CPP), (CCP)}

C = bydd y tri thafliad i gyd yn rhoi'r un canlyniad = {(PPP), (CCC)}

Diffiniad. *Cyflenwad* digwyddiad A, a ddynodir gan A′, yw'r digwyddiad "na fydd A yn digwydd". Bydd elfennau A′ yn cynnwys pob elfen S nad yw mewn A. Er enghraifft, gydag A a B yn cael eu diffinio fel yn Enghraifft 2 uchod, dyma

A′ = ni fydd swm y sgoriau yn sgwâr perffaith = {2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12},

B′ = ni fydd swm y sgoriau yn eilrif = {3, 5, 7, 9, 11} (h.y. odrif).

Digwyddiadau cyfunol

Diffiniadau. Ar gyfer unrhyw ddau ddigwyddiad A a B

(a) mae'r digwyddiad "bydd A neu B neu'r ddau yn digwydd" yn cael ei alw yr *uniad* o A a B ac fe'i hysgrifennir fel $A \cup B$;

(b) mae'r digwyddiad "bydd A a B yn digwydd" yn cael ei alw y *croestoriad* o A a B ac fe'i hysgrifennir fel $A \cap B$.

Gydag A a B wedi'u diffinio yn Enghraifft 2 mae gennym

$A \cup B$ = bydd swm y sgoriau yn sgwâr perffaith neu yn eilrif
= {2, 4, 6, 8, 9, 10, 12},
a geir trwy gasglu elfennau A ac elfennau B ynghyd.
$A \cap B$ = bydd swm y sgoriau yn sgwâr perffaith ac yn eilrif = {4},
a geir trwy restru'r elfennau sy'n gyffredin i A a B.

Enghraifft 4

Ar gyfer y digwyddiadau a ddiffiniwyd yn Enghraifft 3 uchod rhowch ddisgrifiad geiriol a rhestrwch elfennau'r digwyddiadau (a) $A \cup B$, (b) $A \cap C$, (c) $A \cap B'$.
O Enghraifft 3,
S = {(PPP), (PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP), (CCC)}
A = bydd dau ben yn cael eu taflu = {(PPC), (PCP), (CPP)}
B = bydd y trydydd tafliad yn rhoi pen = {(PPP), (PCP), (CPP), (CCP)}
C = bydd y tri thafliad yn rhoi'r un canlyniad = {(PPP), (CCC)}
(a) $A \cup B$ = bydd dau ben yn cael eu taflu neu bydd y trydydd tafliad yn rhoi pen
= {(PPC), (PCP), (CPP), (PPP), (CCP)},
a geir trwy gasglu elfennau A ac elfennau B ynghyd (h.y. trwy ysgrifennu elfennau A ac yna ychwanegu'r elfennau yn B nad ydynt yn A),
(b) $A \cap C$ = bydd dau ben yn cael eu taflu a bydd y tri thafliad yn rhoi'r un canlyniad.
Gwelir nad oes gan A ac C elfen yn gyffredin, ac felly na all $A \cap C$ ddigwydd.
(c) $A \cap B'$ = bydd dau ben yn cael eu taflu ac ni fydd y trydydd tafliad yn rhoi pen.
B' = ni fydd y trydydd tafliad yn rhoi pen = {(PPC), (PCC), (CPC), (CCC)],
a geir trwy restru'r elfennau yn S nad ydynt yn B.
Mae'n dilyn fod

$A \cap B'$ = {(PPC)}, gan mai (PPC) yw'r unig elfen gyffredin yn A a B'.

Diffiniad. Dywedir bod dau ddigwyddiad na all ddigwydd ar yr un pryd yn **gyd-anghynhwysol**.
Ystyr hyn yw nad oes elfen yn S a fydd yn arwain at y ddau ddigwyddiad yn digwydd.
Mae A ac C yn Enghraifft 4 uchod yn ddigwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol.
Estynnir y nodiant uniad a chroestoriad i fwy na dau ddigwyddiad mewn modd amlwg.
Felly, ar gyfer tri digwyddiad A, B ac C,
(a) $A \cup B \cup C$ = bydd o leiaf un o blith A, B, C yn digwydd,
a cheir elfennau $A \cup B \cup C$ trwy gasglu elfennau'r tri digwyddiad ynghyd,
(b) $A \cap B \cap C$ = bydd y tri digwyddiad i gyd yn digwydd,
a bydd elfennau $A \cap B \cap C$ yn cynnwys pob elfen sy'n gyffredin i A, B ac C.

Enghraifft 5

Gydag A, B ac C wedi'u diffinio yn Enghraifft 4 uchod, rhestrwch elfennau $(A\cup B)\cap C$.

Yn Enghraifft 4 dangoswyd bod

$$A\cup B = \{(PPC), (PCP), (CPP), (PPP), (CCP)\},$$

ac $C = \{(PPP), (CCC)\}$.

Gan ddethol yr elfennau cyffredin, mae'n dilyn fod

$$(A\cup B)\cap C = \{(PPP)\}.$$

Ymarfer 3.2

1. Teflir dis ciwbigol cyffredin. Boed i A ddynodi'r digwyddiad y bydd y sgôr yn eilrif, B y digwyddiad y bydd y sgôr yn llai na 3, ac C y digwyddiad y bydd y sgôr yn lluosrif 3.

(a) Rhestrwch elfennau S, A, B ac C. Nodwch ba ddau ddigwyddiad sy'n gyd-anghynhwysol.

(b) Rhowch ddisgrifiadau geiriol a rhestrwch elfennau'r digwyddiadau
(i) A', (ii) $A\cap B$, (iii) $A\cup C'$, (iv) $A\cup B\cup C$, (v) $(A\cup B)\cap C$.

2. Teflir dis ciwbigol ddwywaith. Ysgrifennwch y gofod sampl ar gyfer y canlyniad, gan fynegi pob elfen fel pâr trefnedig. Dewch o hyd i elfennau pob un o'r digwyddiadau hyn:

(a) A = bydd swm y sgoriau yn rhanadwy gan 4,

(b) B = bydd y ddwy sgôr yr un fath,

(c) C = bydd y ddwy sgôr yn eilrif,

(d) D = bydd gwahaniaeth o 4 o leiaf rhwng y sgoriau,

(e) $A\cap C$, (f) $B\cup D$, (g) $B\cap A'$.

Pa barau (os oes rhai) o'r digwyddiadau A, B, C a D sy'n gyd-anghynhwysol?

3. Rhennir dau gerdyn o becyn o 5 cerdyn gyda'r rhifau 1 hyd 5, a chofnodir swm y ddau rif a rennir. Ysgrifennwch 7 elfen y gofod sampl a dewch o hyd i elfennau'r digwyddiadau hyn:

(a) A = bydd y swm yn fwy na 7,

(b) B = bydd y swm yn rhif cysefin,

(c) C = bydd y swm yn odrif,

(d) $A\cup C$, (e) $B\cap C$, (f) $A\cap B'$, (g) $(A\cup B)'$, (h) $A'\cap B\cap C$.

1.3 Tebygolrwyddau digwyddiadau

Diffiniad. Tebygolrwydd digwyddiad cysylltiedig â haparbrawf yw <u>cyfrannedd</u> y troeon y bydd y digwyddiad yn digwydd mewn nifer mawr amhendant o dreialon (perfformiadau) o'r haparbrawf.

Os bydd digwyddiad yn sicr o ddigwydd, bydd yn digwydd ym mhob treial ac felly mae'n amlwg bod ei debygolrwydd yn hafal i 1. Yn benodol, wrth ystyried y gofod sampl S fel digwyddiad, gwelir bod y tebygolrwydd y bydd S yn digwydd yn cael ei roi gan $P(S) = 1$. Yn yr un modd mae tebygolrwydd digwyddiad na all ddigwydd yn hafal i 0. Er enghraifft, pan gaiff dis ciwbigol ei daflu, ni all digwyddiad A = "sgôr sy'n lluosrif 7" ddigwydd ac felly $P(A) = 0$. Yn benodol os yw A a B yn gyd-anghynhwysol, felly $P(A \cap B) = 0$. Gan nad yw perfformio arbrawf nifer amhenodol o fawr o droeon yn ymarferol, ceir amcangyfrif o debygolrwydd unrhyw fath arall o ddigwyddiad gan gyfrannedd y troeon y bydd y digwyddiad yn digwydd mewn nifer meidraidd o dreialon o'r haparbrawf. Mwyaf yn y byd y nifer o dreialon, agosaf yn y byd y disgwylir i'r amcangyfrif fod i'r tebygolrwydd gwirioneddol. Mewn Ystadegaeth mae cyfrannedd y troeon y mae digwyddiad yn digwydd mewn nifer of dreialon yn cael ei alw yn *amlder cymharol* y digwyddiad yn y treialon hyn. Tybiwch y gwelir digwyddiad A yn digwydd yn union r o droeon mewn n treial o haparbrawf. Amlder Cymharol A yw $R_n(A) = r / n$, sy'n darparu amcangyfrif ar gyfer P(A), sef y tebygolrwydd y bydd A yn digwydd mewn unrhyw dreial yn y dyfodol. Gan fod A wedi digwydd mewn r o'r n treial mae'n dilyn bod A′, sef cyflenwad A, wedi digwydd n - r o weithiau, ac felly fod amlder cymharol A′ yn yr n treial yn cael ei roi gan

$$R_n(A') = \frac{n-r}{n} = 1 - \frac{r}{n} = 1 - R_n(A)$$

Mae'n rhesymol tybio y bydd y berthynas hon yn dal hyd yn oed ar gyfer nifer amhenodol o fawr o dreialon. Ceir felly y rheol a ganlyn:

Rheol 1:

Ar gyfer unrhyw ddigwyddiad A, rhoddir tebygolrwydd na fydd A yn digwydd gan

$$\boxed{P(A') = 1 - P(A).}$$

Ystyriwch nawr ddau ddigwydd A a B sy'n gyd-anghynhwysol. (Cofiwch fod digwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol yn rhai na all ddigwydd gyda'i gilydd). Tybiwch fod digwyddiad A wedi digwydd r_A o weithiau a bod digwyddiad B wedi digwydd r_B o weithiau mewn n treial.

Mae'n dilyn bod $A \cup B$ (naill ai A neu B) wedi digwydd mewn $(r_A + r_B)$ o'r treialon, ac felly fod amlder cymharol $A \cup B$ yn yr n treial yn

$$R_n(A \cup B) = \frac{r_A + r_B}{n} = R_n(A) + R_n(B),$$

sy'n rhoi i ni y rheol a ganlyn:

Rheol 2:

Os yw A a B yn ddigwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol, yna

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$$

Ystyriwch nawr ddau ddigwyddiad, A a B, nad ydynt yn gyd-anghynhwysol. Mewn n treial, tybiwch i A ddigwydd r_A tro, i B ddigwydd r_B tro, ac i $A \cap B$ (sef y ddau ddigwyddiad A a B) ddigwydd r_{AB} tro. Gan fod r_A yn cynnwys yr r_{AB} tro ac r_B hefyd yn cynnwys yr r_{AB} tro y mae $A \cap B$ wedi digwydd, nifer y troeon y mae $A \cup B$ (sef A neu B neu'r ddau) wedi digwydd yw $(r_A + r_B - r_{AB})$. Felly, amlder cymharol $A \cup B$ yn yr n treial yw

$$R_n(A \cup B) = \frac{r_A + r_B - r_{AB}}{n} = R_n(A) + R_n(B) - R_n(A \cap B),$$

sy'n rhoi i ni reol arall :

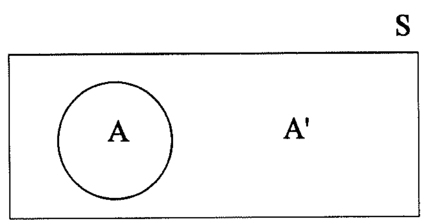
Rheol 3:

Ar gyfer unrhyw ddau ddigwyddiad A a B

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).}$$

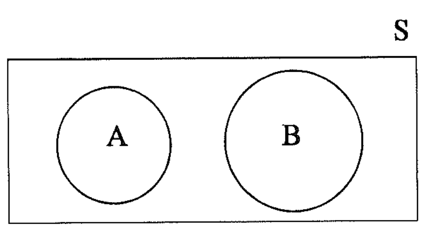
Noder bod hyn yn lleihau i Reol 2 pan fo A a B yn gyd-anghynhwysol.

Gellir arddangos y rheolau uchod gan ddefnyddio diagramau *Venn*. Mewn diagram Venn llunnir petryal er mwyn cynrychioli'r gofod sampl S. Dychmygwch fod holl ganlyniadau haparbrawf yn wasgaredig fel pwyntiau trwy'r petryal hwn. Defnyddir arwynebeddau er mwyn cynrychioli tebygolrwyddau. Gan fod $P(S) = 1$ cymerir bod gan y petryal arwynebedd unedol. Nawr boed i A ddynodi digwyddiad a gynrychiolir gan y cylch a ddangosir yn Ffigur 1. Cymerir bod y digwyddiadau wedi'u gwasgaru yn y petryal fel bod pob elfen A y tu mewn i'r cylch. Mae arwynebedd y cylch hwn yn cynrychioli P(A). Gan fod pob elfen A′ y tu allan i gylch A, mae'n dilyn bod $P(A') = 1 - P(A)$, fel a ddangosir yn Ffigur 1.



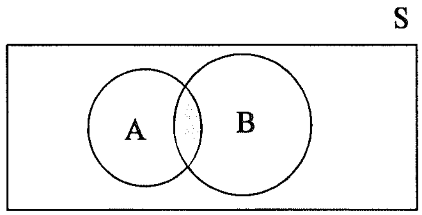
Ffigur 1. $P(A') = 1 - P(A)$

Mae Ffigur 2 yn dangos dau ddigwyddiad A a B sy'n gyd-anghynhwysol. O ystyried yr arwynebeddau gwelir bod $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ fel a roddir gan Reol 2 uchod.



Ffigur 2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Mae Ffigur 3 yn dangos dau ddigwyddiad A a B nad ydynt yn gyd-anghynhwysol. Mae'r rhan o'r ddau gylch sy'n gorgyffwrdd (y rhan dywyll) yn cynrychioli $A \cap B$ ac yn cynnwys yr holl ganlyniadau sy'n elfennau cyffredin i A a B. Arwynebedd y rhan hon yw $P(A \cap B)$ ac fe welir o'r diagram fod $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, fel a nodir yn Rheol 3.



Ffigur 3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

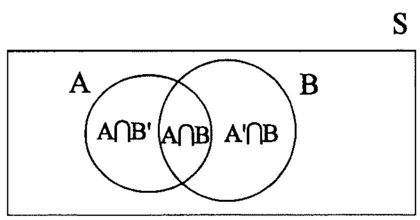
Gall ystyried amlderau cymharol neu ddiagramau Venn gynhyrchu rhagor o reolau ar gyfer tebygolrwyddau. Rhoddir dwy reol ychwanegol isod.

Rheol 4

Ar gyfer unrhyw ddau ddigwyddiad A a B

$$\boxed{P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)}$$

Dangosir hyn yn Ffigur 4. Noder bod y rhan o'r cylch A sydd y tu allan i'r gorgyffyrddiad yn cynnwys pob canlyniad sy'n elfen o A ond nid yn elfen o B; hynny yw, y digwyddiad $A \cap B'$. Noder hefyd mai $P(A \cap B')$ yw'r tebygolrwydd y bydd A yn digwydd ac na fydd B yn digwydd.



Ffigur 4. $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

Yn yr un modd, rhoddir y tebygolrwydd y bydd B yn digwydd ac na fydd A yn digwydd gan

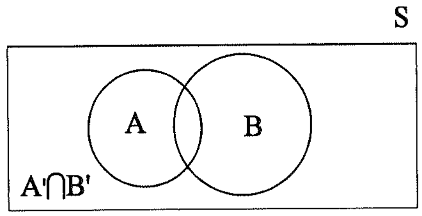
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Rheol 5:

Ar gyfer unrhyw ddau ddigwyddiad A a B,

$$\boxed{P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)}$$

Mae hyn yn dilyn o Reol 1 wrth sylwi mai $A' \cap B'$ yw cyflenwad $A \cup B$, ac fe'i dangosir yn Ffigur 5, lle mae $A' \cap B'$ yn cynrychioli'r rhanbarth y tu allan i'r cylchoedd A a B.



Ffigur 5. $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

Enghraifft 1

Mae dau ddigwyddiad A a B, lle mae

$$P(A) = 0.6, \ \ P(B) = 0.3, \ \text{a} \ \ P(A \cap B) = 0.2$$

Enrhifwch (a) $P(A')$, (b) $P(A \cup B)$, (c) $P(A \cap B')$, (d) y tebygolrwydd mai dim ond un digwyddiad o blith A a B fydd yn digwydd.

Datrysiad

(a) Gan ddefnyddio Rheol 1 ceir bod

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

(b) Gan ddefnyddio Rheol 3 ceir bod

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.6 + 0.3 - 0.2 = 0.7.$$

(c) Gan ddefnyddio Rheol 4 ceir bod

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

(d) Bydd "dim ond un digwyddiad o blith A a B" yn digwydd naill ai (i) pan fydd A yn digwydd a B ddim yn digwydd ($A \cap B'$) neu (ii) pan na fydd A yn digwydd ond y bydd B yn digwydd ($A' \cap B$).

Hynny yw, dim ond un digwyddiad o blith A a B = $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Gan fod $A \cap B'$ ac $A' \cap B$ yn ddigwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol, mae'n dilyn o Reol 2 fod P(dim ond un fydd yn digwydd) = $P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0.4 + P(A' \cap B)$.

Gan ddefnyddio Rheol 4 (a chyfnewid A a B) ceir

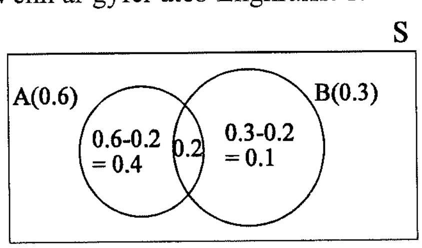
$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1.$$

Mae'n dilyn fod P(dim ond un fydd yn digwydd) = 0.4 + 0.1 = 0.5

Neu fel arall,

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$
$$= 0.6 + 0.3 - 2 \times 0.2 = 0.5$$

Dangosir isod y diagram Venn ar gyfer ateb Enghraifft 1.



Enghraifft 2

Dau ddigwyddiad yw A a B fel bod

$$P(A) = P(B) = p, \quad P(A \cap B) = 0.4, \text{ a } P(A \cup B) = 0.7$$

Enrhifwch (a) p, (b) $P(A' \cap B)$, (c) $P(A' \cap B')$.

Datrysiad

(a) Gan ddefnyddio Rheol 3

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.7 = p + p - 0.4 = 2p - 0.4.$$

O hyn mae'n dilyn bod $2p = 0.7 + 0.4 = 1.1$, felly $p = 1.1/2 = 0.55$.

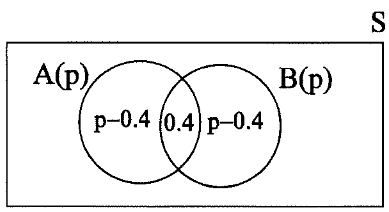
(b) Gan ddefnyddio Rheol 4

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.55 - 0.4 = 0.15$$

(c) Gan ddefnyddio Rheol 5

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$$

Dangosir isod y diagram Venn ar gyfer ateb yr enghraifft hon.



Ymarfer 3.3

1. Dau ddigwyddiad yw A a B fel bod

$$P(A) = 0.7, \quad P(B) = 0.2, \quad \text{a } P(A \cap B) = 0.1.$$

Enrhifwch (a) $P(A')$, (b) $P(A \cup B)$, (c) $P(A \cap B')$.

2. Dau ddigwyddiad sy'n gyd-anghynhwysol yw A a B fel bod

$$P(A) = 0.5 \text{ a } P(B) = 0.1.$$

Enrhifwch (a) $P(A \cup B)$, (b) $P(A' \cap B')$, (c) $P(A' \cup B')$.

3. Mae A a B yn ddau ddigwyddiad fel bod

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad \text{a } P(A \cup B) = 0.58.$$

Enrhifwch (a) $P(A \cap B)$, (b) $P(A' \cap B)$, (c) $P(A' \cup B)$.

4. Dau ddigwyddiad yw A a B fel bod $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.40$ a $P(A \cap B) = 0.15$. Darganfyddwch (a) $P(A')$, (b) $P(A \cup B)$, (c) $P(A' \cap B')$, (d) $P(A \cap B')$, (e) $P(A' \cap B)$.

5. Dau ddigwyddiad yw A a B fel bod $P(A) = 0.36$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cap B') = 0.24$. Enrhifwch (a) $P(A')$, (b) $P(A \cap B)$, (c) $P(A' \cap B)$, (d) y tebygolrwydd mai dim ond un o blith A a B fydd yn digwydd.

6. Tri digwyddiad yw A, B ac C gydag A a B yn gyd-anghynhwysol ac fel bod $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.1$, a $P(A \cap C) = 0.08$. Gan ddefnyddio diagram Venn, neu fel arall, enrhifwch

(a) $P(A' \cap C)$, (b) $P(B \cup C)$, (c) $P(A \cup B \cup C)$,

(d) y tebygolrwydd na fydd yr un o'r digwyddiadau A, B nac C yn digwydd.

7. Mae A, B ac C yn ddigwyddiadau fel bod

$$P(A) = \tfrac{1}{2},\ P(B) = \tfrac{1}{3},\ P(C) = \tfrac{1}{4} \text{ a } P(A \cap B) = \tfrac{1}{6}.$$

Cyfrifwch (a) $P(A' \cup B')$, (b) $P(A' \cap B')$, (c) $P(A \cap B')$.

(d) O wybod bod A ac C yn gyd-anghynhwysol a bod B ac C hefyd yn gyd-anghynhwysol, cyfrifwch $P(A \cup B \cup C)$.

3.4 Canlyniadau sy'n hafal debygol

Mewn rhai haparbrofion mae'n rhesymol tybio bod y canlyniadau posibl i gyd yn hafal debygol ac felly fod gan bob canlyniad yr un tebygolrwydd o ddigwydd. Mae enghreifftiau o'r fath haparbrofion fel a ganlyn:

(1) Taflu dis ciwbigol y mae'n wybyddus ei fod yn deg (h.y. yn berffaith gytbwys), lle mae gan bob sgôr bosibl yr un tebygolrwydd o ddigwydd, sef 1/6.

(2) Codi cerdyn o becyn o gardiau chwarae cyffredin sydd wedi'u cymysgu, fel bod gan bob cerdyn yr un tebygolrwydd (1/52) o gael ei godi.

(3) Dethol un gwrthrych 'heb edrych' o blith casgliad o wrthrychau, fel bod gan bob gwrthrych yn y casgliad yr un tebygolrwydd o gael ei ddethol. Cyfeirir at y fath ddetholiad 'heb edrych' fel *hapddetholiad.*

Ystyriwch haparbrawf gyda gofod sampl S sy'n cynnwys N elfen ac y bydd treial o'r arbrawf yn cael ei berfformio yn y fath fodd fel y bydd yn rhesymol tybio bod pob un o'r N canlyniad yn hafal debygol. Mae hyn yn golygu bod gan bob canlyniad posibl debygolrwydd o 1/N o ddigwydd. Boed i A ddynodi digwyddiad sy'n cynnwys n(A) elfen, fel bod A yn digwydd os un o n(A) elfen A yw'r canlyniad. Yna mae'n rhesymol diffinio'r tebygolrwydd y bydd A yn digwydd mewn treial o'r haparbrawf fel

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

Enghraifft 1

Dewisir un cerdyn ar hap o blith pecyn o 20 o gardiau wedi'u rhifo o 1 hyd 20. Boed i A ddynodi'r digwyddiad y bydd y rhif ar y cerdyn a ddewisir yn lluosrif 5 a boed i B ddynodi'r digwyddiad y bydd y rhif ar y cerdyn a ddewisir yn fwy na 14. Enrhifwch (a) $P(A)$, (b) $P(B)$, (c) $P(A \cap B)$, (d) $P(A \cup B)$, (e) $P(A' \cap B)$.

Datrysiad

Gan fod y cerdyn yn cael ei ddewis ar hap, mae'r rhif a geir yn hafal debygol o fod yn unrhyw un o'r 20 rhif, ac felly mae $N = 20$.

(a) A = lluosrif 5 = $\{5, 10, 15, 20\}$, ac felly mae $n(A) = 4$ a $P(A) = 4/20 = 1/5$.

(b) B = mwy na $14 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, ac felly mae $n(B) = 6$ a $P(B) = 6/20 = 3/10$.

(c) Trwy ddewis yr elfennau sy'n gyffredin i A a B rydym yn darganfod bod $A \cap B = \{15, 20\}$, ac felly fod $n(A \cap B) = 2$ a $P(A \cap B) = 2/20 = 1/10$.

(d) Trwy gasglu elfennau A a B ynghyd, ceir $A \cup B = \{5, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, ac felly mae $n(A \cup B) = 8$ a $P(A \cup B) = 8/20 = 2/5$.

(e) Trwy ddewis yr elfennau sydd yn B ac nad ydynt yn A ceir $A' \cap B = \{16, 17, 18, 19\}$, ac felly mae $n(A' \cap B) = 4$ a $P(A' \cap B) = 4/20 = 1/5$.
[Fel arall, trwy ddefnyddio Rheol 4 a'r atebion i (b) a (c)

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 6/20 - 2/20 = 4/20 = 1/5].$$

Enghraifft 2

Teflir darn arian diduedd deirgwaith. Darganfyddwch y tebygolrwydd mai'r canlyniad fydd (a) tri phen, (b) o leiaf un pen, (c) un pen neu un cynffon.

Datrysiad

Gan fod y darn arian yn un diduedd gallwn gymryd yn ganiataol fod pob canlyniad posibl yr un mor debygol o ddigwydd. Y gofod sampl ar gyfer canlyniadau trefnedig y tri thafliad yw

$$S = \{(PPP), (PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP), (CCC)\}$$

ac felly cyfanswm nifer y canlyniadau yw $N = 8$, sydd yn hafal debygol.

(a) Boed i A ddynodi'r canlyniad lle ceir tri phen. Felly mae $A = \{(PPP)\}$ ac felly mae $n(A) = 1$. Mae'n dilyn bod $P(A) = 1/8$.

(b) Boed i B ddynodi'r canlyniad lle ceir o leiaf un pen. Felly mae $B = \{(PPP), (PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP)\}$, a $n(B) = 7$, ac felly mae $P(B) = 7/8$.
[Neu fel arall, noder mai cyflenwad B yw B' = dim pen = $\{(CCC)\}$, ac felly fod $n(B') = 1$ a $P(B') = 1/8$. Gan ddefnyddio Rheol 1 felly, ceir

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - 1/8 = 7/8]$$

(c) Boed i C ddynodi'r canlyniad lle ceir un pen neu un gynffon.
Gwelir bod $C = \{(PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP)\}$,
ac felly bod $n(C) = 6$ a $P(C) = 6/8 = 3/4$.
[Neu fel arall, boed i C_1 ddynodi'r canlyniad "un pen" ac C_2 y canlyniad "un gynffon". Gan nodi bod $C = C_1 \cup C_2$ a bod C_1 ac C_2 yn gyd-anghynhwysol, mae'n dilyn o Reol 2 bod

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) = 3/8 + 3/8 = 6/8 = 3/4].$$

Ymarfer 3.4a

1. Dewisir un cerdyn ar hap o blith 13 cerdyn wedi'u rhifo o 1 hyd 13. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y rhif ar y cerdyn a ddewisir (a) yn llai na 5, (b) yn lluosrif 4, (c) yn sgwâr perffaith, (d) yn sgwâr perffaith neu yn lluosrif 4, (e) yn sgwâr perffaith <u>ac</u> yn fwy na 5.

2. Mewn chweched dosbarth o 20 o ddisgyblion, mae 5 yn astudio Mathemateg, mae 4 yn astudio Ffiseg ac mae 2 yn astudio Mathemateg a Ffiseg. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod disgybl a ddewisir ar hap yn astudio Mathemateg neu Ffiseg neu'r ddau. [Awgrym: Lluniwch ddiagram Venn].

3. Mae gan ddis ciwbigol ddau wyneb wedi'u rhifo yn 1, dau wyneb wedi'u rhifo yn 2, ac mae'r ddau wyneb sy'n weddill wedi'u rhifo yn 3. Pan deflir y dis y sgôr a geir yw'r rhif ar yr wyneb sy'n wynebu i fyny. Teflir y dis hwn ddwywaith. Cyfrifwch y tebygolrwydd (a) y bydd y sgôr ar y tafliad cyntaf yn 3, ac y bydd y sgôr ar yr ail dafliad yn llai na 3 (b) y bydd o leiaf un o'r ddwy sgôr yn 2, (c) y bydd cyfanswm y ddwy sgôr yn 4.

4. Teflir dis ciwbigol diduedd gyda'i wynebau wedi'u rhifo o 1 hyd 6 ddwywaith. Cyfrifwch y tebygolrwydd (a) y bydd cyfanswm y ddwy sgôr yn (i) 6, (ii) 7;
(b) y bydd lluoswm y ddwy sgôr a geir yn 10 neu yn fwy, (c) y bydd un o'r sgoriau a geir yn union 2 yn fwy na'r llall. [Awgrym: Fel a nodir yn Enghraifft 4 o Adran 3.1 bydd gan y gofod sampl 36 elfen].

Cymorth wrth rifo

Yn Enghraifft 2 uchod, rhestrwyd pob canlyniad trefnedig posibl wrth daflu darn arian diduedd deirgwaith a chafwyd hyd i N drwy gyfrif faint ohonynt oedd. Gall rhestru pob canlyniad posibl haparbrawf fod yn ddiflas iawn, er enghraifft, os teflir ceiniog neu ddis chwe gwaith neu fwy. Byddai o fantais petai gennym ddull o ddod o hyd i N heb orfod rhestru pob canlyniad posibl. Er mwyn dangos dull o'r fath, tybiwn fod dis ciwbigol yn cael ei daflu ddwywaith. Bydd pob canlyniad yn bâr trefnedig, sy'n cynnwys y sgôr a geir ar y tafliad cyntaf ac yna y sgôr a geir ar yr ail dafliad. Rhaid paru pob un o'r 6 sgôr bosibl ar y tafliad cyntaf gyda phob un o'r 6 sgôr bosibl ar yr ail dafliad, ac felly cyfanswm y parau trefnedig yw $6 \times 6 = 36$. Nawr, os teflir y dis deirgwaith, mae'n rhaid cyfuno pob un o'r 36 pâr trefnedig hyn gyda phob un o'r 6 sgôr bosibl ar y trydydd tafliad, ac felly nifer canlyniadau posibl (triawdau trefnedig) y tri thafliad yw $36 \times 6 = 216$. Gall y dull hwn hefyd fod yn ddefnyddiol ar gyfer darganfod nifer yr elfennau n(A) i ddigwyddiad A. Wrth gyffredinoli, mae gennym:

Yr egwyddor lluosi

Os perfformir k haparbrawf ar yr un pryd neu mewn dilyniant a bod gan yr i^{fed} arbrawf N_i canlyniad posibl ($i = 1, 2, \ldots, k$) felly nifer canlyniadau *trefnedig* y k arbrawf i gyd yw $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$.

Enghraifft 3

Codir dau gerdyn o becyn o gardiau chwarae cyffredin sydd wedi eu cymysgu. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod o leiaf un o'r ddau gerdyn yn âs.

Datrysiad

Boed i A ddynodi'r canlyniad fod o leiaf un âs. Cyflenwad A yw'r digwyddiad A' na chodir âs. [Yn yr achos hwn, mae'n haws mewn gwirionedd enrhifo $P(A')$ na $P(A)$.] Gall y cerdyn cyntaf a godir fod yn unrhyw un o blith y 52 cerdyn yn y pecyn a gall yr ail fod yn unrhyw un o blith y 51 cerdyn sy'n weddill yn y pecyn. Gan ddefnyddio'r egwyddor lluosi, cyfanswm nifer y canlyniadau paredig posibl ar gyfer y ddau gerdyn a godir yw $N = 52 \times 51 = 2652$. [Gyda nifer mor fawr mae'n ffodus y gellir osgoi gorfod rhestru holl elfennau S].

Ystyriwch nawr A', sef nad yw'r naill gerdyn na'r llall yn âs. Gan fod 48 o'r 52 cerdyn yn y pecyn heb fod yn âs, bydd y digwyddiad A' yn digwydd os bydd y cerdyn cyntaf yn unrhyw un o'r 48 cerdyn hyn a'r ail yn unrhyw un o'r 47 an-âs sy'n weddill yn y pecyn. Gan ddefnyddio'r egwyddor lluosi, mae gennym $n(A') = 48 \times 47 = 2256$. Mae'n dilyn bod

$$P(A') = \frac{2256}{2652} = \frac{188}{221},$$

ac wrth ddefnyddio Rheol 1:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{188}{221} = \frac{33}{221}.$$

[Neu fel arall, gallem ysgrifennu $A = A_1 \cup A_2$, lle mae A_1 yn dynodi'r digwyddiad fod un âs yn union yn cael ei godi, ac mae A_2 yn dynodi'r digwyddiad fod dau âs yn cael eu codi. Wrth nodi bod A_1 ac A_2 yn gyd-anghynhwysol, mae'n dilyn o Reol 2 fod $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$. Gadewir hyn fel ymarfer i chi ddangos bod hyn yn rhoi'r un ateb ag a geir uchod. [Bydd yn rhaid i chi nodi bod A_1 yn digwydd os yw'r canlyniad yn (Âs, an-Âs) neu yn (an-Âs, Âs)].

Enghraifft 4 (Problem glasurol y pen-blwyddi)

Darganfyddwch y tebygolrwydd fod o leiaf ddau berson o blith grŵp o n o bobl yn cael eu pen-blwydd ar yr un diwrnod.

Datrysiad

Gan anwybyddu'r posibilrwydd fod person wedi'i eni ar 29 Chwefror, cymerir yn ganiataol fod pen-blwydd pawb yr un mor debyg o syrthio ar unrhyw un o'r 365 diwrnod mewn blwyddyn. Bydd dyddiadau pen-blwydd yr n person yn n-awd (d_1, d_2, d_3, …, d_n), lle mae pob d_i yn un o'r cyfanrifau o 1 hyd 365. Gan ddefnyddio'r egwyddor lluosi, nifer yr n-awdau o'r fath yw $N = 365^n$.

Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod o leiaf dau o blith y d_i yr un fath â'i gilydd (h.y. bod o leiaf ddau o'r bobl yn rhannu'r un pen-blwydd). Y digwyddiad cyflenwadol A′ yw bod y d_i i gyd yn wahanol (h.y. nad oes dau o'r bobl sy'n rhannu'r un pen-blwydd). Fel mae'n digwydd mae'n haws o lawer darganfod n(A′) nag n(A).
Ym mhob elfen A′ mae'r d_i i gyd yn wahanol ac felly mae
$n(A') = 365 \times 364 \times \ldots (366 - n)$, o gymryd bod $n < 366$.
(Os yw $n \geq 366$, y tebygolrwydd fod o leiaf ddau o'r bobl yn rhannu'r un pen-blwydd yw 1). Mae'n dilyn bod

$$P(A') = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (366 - n)}{365^n}$$

a bod $P(A) = 1 - P(A')$.
Mae'r tabl canlynol yn rhoi P(A) ar gyfer rhai gwerthoedd penodol o n.

n	10	20	22	23	30	40	50	60
P(A)	0.117	0.411	0.476	0.507	0.706	0.891	0.971	0.984

Gwelir ei bod yn fwy tebygol na pheidio bod grŵp o 23 neu fwy o bobl yn cynnwys o leiaf ddau berson sy'n rhannu yr un pen-blwydd a'i bod bron yn sicr bod grŵp o 50 neu fwy o bobl yn cynnwys o leiaf ddau berson sy'n rhannu yr un pen-blwydd.

Ymarfer 3.4b

1. Codir un cerdyn o becyn o gardiau chwarae cyffredin sydd wedi eu cymysgu. Fe'i rhoddir yn ôl yn y pecyn, sydd yna'n cael ei gymysgu a chodir cerdyn ohono eto. Cyfrifwch y tebygolrwyddau fod (a) y cerdyn cyntaf yn âs, (b) o leiaf un o'r ddau gerdyn a godir yn âs. [Cymharwch eich atebion gyda'r rhai a geir yn Enghraifft 3 uchod.]

2. Rhifir dau wyneb dis ciwbigol diduedd yn 1, dau wyneb yn 2, a'r ddau arall yn 3. Pan deflir y dis y sgôr a geir yw'r rhif ar yr wyneb sy'n wynebu i fyny. O wybod bod y dis yn cael ei daflu deirgwaith, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y tair sgôr a geir (a) yn gyfartal, (b) yn adio i 6.

3. Gan ddatgan unrhyw ragdybiaethau a wnewch, darganfyddwch fynegiad ar gyfer y tebygolrwydd fod o leiaf ddau o blith grŵp o n o bobl wedi cael eu geni yn yr un mis o'r flwyddyn. Diddwythwch yr n lleiaf lle mae'n fwy tebygol na pheidio fod y grŵp yn cynnwys o leiaf ddau berson sydd wedi cael eu geni yn yr un mis o'r flwyddyn.

4. Teflir tri dis ciwbigol diduedd gyda'i gilydd. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod y tair sgôr (a) i gyd yn wahanol (b) yn dri chyfanrif olynol.

5. Tynnir dwy bêl ar hap, y naill ar ôl y llall, o fag sy'n cynnwys 10 pêl goch, 30 pêl wen ac 20 pêl las. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd (a) y ddwy bêl yn wyn, (b) y bêl gyntaf yn wyn a'r ail yn las, (c) o leiaf un bêl las yn cael ei thynnu.

6. Gwnewch gwestiwn 5 eto ond y tro hwn gyda'r bêl gyntaf a dynnir yn cael ei dychwelyd i'r bag cyn i'r ail bêl gael ei thynnu.

7. Dewisir dau gerdyn ar hap o becyn o 15 o gardiau wedi'u rhifo o 1 i 15, yn ôl eu trefn. (i) Os yw'r cerdyn cyntaf yn cael ei roi yn ôl cyn i'r ail gerdyn gael ei ddewis, cyfrifwch y tebygolrwydd fod (a) y rhif cyntaf a ddewisir yn llai na 10 a'r ail rif a ddewisir yn fwy na 9, (b) cyfanswm y ddau rif a ddewisir yn 8.

(ii) Gwnewch hyn eto gan gymryd nad yw'r cerdyn cyntaf yn cael ei roi yn ôl cyn i'r ail gerdyn gael ei ddewis.

8. Nodir ar 4 wyneb dis tetrahedrol y rhifau 1, 2, 3 a 4, yn ôl eu trefn. Pan deflir y dis ar arwyneb caled y sgôr a geir yw'r rhif ar yr wyneb sy'n cyffwrdd â'r arwyneb, sydd yn hafal debygol o fod yn unrhyw un o'r pedwar wyneb. Teflir y dis ddwywaith. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd

(a) swm y ddwy sgôr yn 5,

(b) y gwahaniaeth rhwng y ddwy sgôr yn 1,

(c) lluoswm y ddwy sgôr yn 4.

Canlyniadau anhrefnedig

Yn y gwaith uchod cymerwyd i ystyriaeth ym mha drefn y cafwyd canlyniadau pan berfformiwyd dau neu fwy o haparbrofion ar yr un pryd neu mewn dilyniant. Mewn llawer o broblemau nid yw'r drefn yn bwysig. Mae hyn yn sicr yn wir mewn llawer o gemau cardiau lle'r hyn sy'n bwysig yw gwerthoedd y cardiau ac nid y drefn y cânt eu rhannu i'r chwaraewyr. Os tynnir sampl o k gwrthrych o blith casgliad o n gwrthrych heb eu rhoi yn ôl cyn tynnu'r un nesaf, ac os nad yw'r drefn y cânt eu tynnu yn bwysig, yna cyfeirir at y k gwrthrych a dynnir fel *sampl anhrefnedig o faint* k. Mae'n amlwg y bydd y gofod sampl ar gyfer sampl anhrefnedig o faint penodol yn llai (h.y. bydd yn cynnwys llai o elfennau) na phan gymerir y drefn i ystyriaeth.

Enghraifft 5

Dewisir tri cherdyn o blith pecyn o chwech o gardiau wedi'u rhifo o 1 i 6. Darganfyddwch nifer y cyfuniadau gwahanol o rifau sy'n bosibl. Bydd y canlyniadau yn cynnwys pob cyfuniad posibl o dri rhif gwahanol a ddewisir o 1 i 6, sef

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{3, 5, 6\}$, $\{4, 5, 6\}$.

Gwelir bod 20 cyfuniad posibl o dri rhif gwahanol. Mae'n amlwg bod y dull hwn o restru'r posibiliadau i gyd yn ddiflas iawn yn enwedig pan fyddwn yn ymdrin â rhifau mwy na'r 3 a 6 yn yr enghraifft uchod. Ystyriwch un o'r cyfuniadau yn yr enghraifft uchod, dyweder $\{1, 2, 3\}$. Nifer y trefnau gwahanol o gael y cyfuniad penodol hwn yw $3 \times 2 = 6$, gan fod y rhif cyntaf a ddewiswyd yn gallu bod yn unrhyw un o blith 1, 2, 3, a'r ail yn unrhyw un o blith y ddau rif arall, tra nad oes dewis ar ôl ar gyfer y trydydd rhif. Yn yr un modd, gallai pob un o'r cyfuniadau uchod ddod mewn chwe threfn wahanol. Felly, nifer y cyfuniadau gwahanol yw union 1/6 o gyfanswm nifer y canlyniadau trefnedig. Nifer y canlyniadau trefnedig yw $6 \times 5 \times 4 = 120$, ac mae'n dilyn bod nifer y cyfuniadau gwahanol yn $120/6 = 20$, sef y rhai sy'n cael eu rhestru uchod.

Mae'r enghraifft ganlynol yn ystyried sefyllfa lle byddai rhestru pob posibilrwydd yn ormodol.

Enghraifft 6

Darganfyddwch gyfanswm y nifer o ddyrneidiau gwahanol pan rennir 9 cerdyn o becyn o gardiau chwarae cyffredin sydd wedi'u cymysgu.

Datrysiad

Y nifer o ffyrdd *trefnedig* o rannu dyrnaid penodol o 9 cerdyn yw

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\ ,$$

a ysgrifennir fel 9! (gan ddweud "9 ffactorial" neu "ffactorial 9"). Mae'n dilyn bod pob dyrnaid o 9 cerdyn yn gallu cael ei ffurfio mewn 9! trefn wahanol wrth rannu'r cardiau. Pan gymerir y drefn i ystyriaeth, cyfanswm nifer y posibiliadau yw

$$52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 = \frac{52!}{43!},$$

lle mae $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

Mae'n dilyn mai nifer y dyrneidiau gwahanol yw

$$\frac{52!}{43!} \div 9! = \frac{52!}{43! \times 9!}\ ,$$

a ysgrifennir fel $\begin{pmatrix} 52 \\ 9 \end{pmatrix}$ neu fel ${}^{52}C_9$. Mae gan y rhan fwyaf o gyfrifianellau fotwm wedi'i labelu yn n! (neu x!) ac un arall ag arno'r label ${}^{n}C_r$. Gwir werth ${}^{52}C_9$ yw 3 679 075 400.

Yn gyffredinol ceir y canlyniad a ganlyn:

Cyfanswm nifer y samplau anhrefnedig o r gwrthrych a ddewisir heb eu rhoi yn ôl o blith casgliad o n gwrthrych yw

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Enghraifft 7

Mae blwch yn cynnwys 5 pêl goch, 7 pêl las ac 8 pêl wen. Tynnir tair pêl ar hap o'r blwch (heb eu rhoi yn ôl). Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y peli a dynnir fel a ganlyn: (a) bydd dwy yn goch ac un yn las, (b) ni fydd dwy yr un lliw â'i gilydd, (c) bydd y tair i gyd yr un lliw.

Datrysiad

Gan fod y blwch yn cynnwys 20 pêl, cyfanswm nifer y cyfuniadau o'r tair pêl yw $N = \binom{20}{3} = 1140$, sydd yn hafal debygol.

(a) Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod 2 bêl goch ac un bêl las yn cael eu tynnu. Nifer y ffyrdd o ddewis 2 bêl goch o blith 5 yw $\binom{5}{2} = 10$ a nifer y ffyrdd o ddewis 1 bêl las o blith 7 yw $\binom{7}{1} = 7$.

Gan y gellir cyfuno pob dewis o 2 bêl goch gyda phob dewis o bêl las, ceir

$$n(A) = 10 \times 7 = 70,$$

ac mae

$$P(A) = \frac{70}{1140} = \frac{7}{114}.$$

(b) Boed i B ddynodi'r digwyddiad fod gan y peli a dynnir liwiau gwahanol; hynny yw, 1 bêl goch o blith 5, 1 bêl las o blith 7 ac 1 bêl wen o blith 8. Nifer y ffyrdd y gall hyn ddigwydd yw

$$n(B) = \binom{5}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{8}{1} = 5 \times 7 \times 8 = 280$$

ac felly mae

$$P(B) = \frac{280}{1140} = \frac{14}{57}.$$

(c) Boed i C ddynodi'r digwyddiad fod gan y peli a dynnir yr un lliwiau. Gellir ysgrifennu

$$C = C_R \cup C_B \cup C_W,$$

lle mae C_R yn cynrychioli'r digwyddiad fod y tair i gyd yn goch, C_B y digwyddiad fod y tair i gyd yn las, ac C_W y digwyddiad fod y tair i gyd yn wyn. Trwy nodi bod y digwyddiadau hyn yn gyd-anghynhwysol, ceir bod $P(C) = P(C_R) + P(C_B) + P(C_W)$. Hefyd mae

$$n(C_R) = \binom{5}{3} = 10, \quad n(C_B) = \binom{7}{3} = 35, \quad n(C_W) = \binom{8}{3} = 56$$

Mae'n dilyn bod

$$P(C) = \frac{10 + 35 + 56}{1140} = \frac{101}{1140}.$$

Ymarfer 3.4c

1. Mae blwch yn cynnwys 5 pêl goch, 4 pêl wen a 3 pêl las. Tynnir tair pêl ar hap (heb eu rhoi yn ôl). Cyfrifwch y tebygolrwydd y tynnir (a) 3 pêl goch, (b) 3 pêl o'r un lliw, (c) o leiaf un bêl goch.

2. Mae pwyllgor yn cynnwys 6 dyn a 4 menyw. Dewisir is-bwyllgor o 4 ar hap. Cyfrifwch y tebygolrwydd y dewisir (a) 4 dyn, (b) 2 ddyn a 2 fenyw, (c) mwy o ddynion nac o fenywod.

3. Tynnir pedwar cerdyn ar hap (heb eu rhoi yn ôl) o becyn o 8 cerdyn wedi'u rhifo o 1 i 8. Cyfrifwch y tebygolrwydd (a) y bydd 1 ac 8 yn cael eu tynnu, (b) mai 6 fydd y rhif mwyaf a dynnir, (c) y bydd dau eilrif a dau odrif yn cael eu tynnu.

4. Tynnir dyrnaid o dri cherdyn o becyn o gardiau chwarae cyffredin sydd wedi'u cymysgu. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y dyrnaid yn (a) 3 brenin, (b) 2 âs ac 1 brenin, (c) 1 âs, 1 brenin ac 1 frenhines.

5. Dewisir pedwar rhif ar hap (heb eu rhoi yn ôl) o blith casgliad o 11 rhif, y mae 6 ohonynt yn bositif a 5 yn negatif. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd lluoswm y pedwar rhif a ddewisir yn bositif.

6. Dewisir is-bwyllgor o 3 ar hap o blith pwyllgor o 10 menyw, y mae 2 ohonynt yn ddwy chwaer. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd yr is-bwyllgor yn cynnwys (a) un, a dim ond un, o'r ddwy chwaer, (b) y ddwy chwaer.

7. Mae'r rhawiau i gyd wedi cael eu tynnu o becyn o gardiau chwarae cyffredin, gan adael pecyn o 39 cerdyn (13 calon, 13 clwb a 13 diemwnt). Cymysgir y pecyn hwn a rhennir 5 cerdyn. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y 5 cerdyn a rennir yn cynnwys (a) 2 galon, 2 glwb ac 1 diemwnt, (b) dim ond asau a brenhinoedd, (c) dim âs, dim brenin, dim brenhines a dim jac.

8. O blith y 12 o felysion mewn pecyn mae 5 siocled a 7 toffi. Dewisir chwech o'r melysion ar hap. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod

(a) y 6 a ddewisir i gyd yn felysion toffi

(b) dau yn union o'r rhai a ddewisir yn siocledi

(c) y mwyafrif o'r rhai a ddewisir yn felysion toffi.

3.5 Tebygolrwydd amodol

Enghraifft 1

Dewiswyd un cerdyn ar hap o blith 7 cerdyn wedi'u rhifo o 1 i 7. O wybod bod y rhif a ddewiswyd yn eilrif, beth yw'r tebygolrwydd fod y rhif a ddewiswyd yn lluoswm 3?

Datrysiad

Y gofod sampl ar gyfer y rhif a ddewiswyd yw $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod y rhif a ddewiswyd yn eilrif. Gan y gwyddom fod y rhif a ddewiswyd yn eilrif, y gofod sampl *effeithiol* ar gyfer y canlyniad yw $A = \{2, 4, 6\}$ mewn gwirionedd, ac mae ei elfennau yn hafal debygol. Boed i B ddynodi'r digwyddiad fod y rhif a ddewiswyd yn lluoswm 3. O wybod bod A wedi digwydd, ni fydd B wedi digwydd hefyd oni bai mai 6 oedd y rhif a ddewiswyd. Gan fod $n(A) = 3$ mae'n dilyn mai'r tebygolrwydd fod y rhif a ddewiswyd yn lluoswm 3 yw $\frac{1}{3}$.

Enghraifft syml o debygolrwydd amodol yw hyn, a'r amod oedd yr wybodaeth a roddwyd bod y rhif a ddewiswyd yn eilrif. Byddwn yn ysgrifennu $P(B|A)$ ar gyfer y tebygolrwydd amodol fod B wedi digwydd o wybod bod A wedi digwydd. Yn yr enghraifft uchod $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

Ystyriwn nawr yr achos cyffredinol o haparbrawf sydd wedi cael ei berfformio ac fe roddir i ni yr wybodaeth fod digwyddiad A wedi digwydd. Mae'n dilyn bod y canlyniad gwirioneddol yn elfen o A. Efallai fod gennym ddiddordeb nawr mewn darganfod $P(B|A)$, sef y tebygolrwydd fod B wedi digwydd hefyd.

O gofio dehongliad amlder cymharol o debygolrwydd, $P(B|A)$ yw gwerth terfannol amlder cymharol B yn y treialon hynny pryd digwyddodd A. Mewn n treial o'r haparbrawf, tybiwch y gwelwyd A yn digwydd r_A gwaith, B yn digwydd r_B gwaith, ac A a B yn digwydd r_{AB} gwaith. Felly, ar gyfer yr r_A treial pan ddigwyddodd A, rhoddir amlder cymharol B gan

$$R_n(B|A) = \frac{r_{AB}}{r_A} \equiv \frac{r_{AB}/n}{r_A/n} \equiv \frac{R_n(A \cap B)}{R_n(A)} .$$

Gan adael i n gynyddu yn amhenodol, gellir newid yr amlderau cymharol am debygolrwyddau gan roi

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} . \qquad (1)$$

Cymerir hyn fel diffiniad cyffredinol o $P(B|A)$ ar gyfer unrhyw haparbrawf boed ei ganlyniadau yn hafal debygol neu beidio, cyn belled â bod $P(A) \neq 0$.

Yn Enghraifft 1 uchod $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ a $B = \{3, 6\}$, ac felly $A \cap B = \{6\}$. Mae'n dilyn bod $n(A \cap B) = 1$, ac felly $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$, ac $n(A) = 3$ ac felly $P(A) = \frac{3}{7}$.

Trwy hyn, $$P(B \mid A) = \frac{1/7}{3/7} = \frac{1}{3},$$ fel a gafwyd o'r blaen.

O gyfnewid A a B yn hafaliad (1) uchod, tebygolrwydd amodol A o wybod bod B wedi digwydd yw

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2)$$

Trwy gyfuno'r ddau ganlyniad, ceir

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B), \qquad (3)$$

cyn belled â bod $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$.

Enghraifft 2

Dewiswyd is-bwyllgor o bum person ar hap o blith pwyllgor sy'n cynnwys 10 dyn ac 8 menyw. O wybod bod yr is-bwyllgor a ddewisir yn cynnwys o leiaf un fenyw, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol y dewiswyd dwy fenyw yn union.

Datrysiad

Cyfanswm nifer y cyfuniadau ar gyfer yr is-bwyllgor yw

$$N = \binom{18}{5} = 8568 ,$$

sydd yn hafal debygol oherwydd bod y dewis wedi ei wneud ar hap. Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod o leiaf un fenyw wedi'i dewis a boed i B ddynodi'r digwyddiad fod 2 fenyw wedi'u dewis. Mae arnom angen darganfod $P(B|A)$. Defnyddir diffiniad (1) uchod:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Er mwyn dod o hyd i $P(A)$ byddwn yn gyntaf yn dod o hyd i $P(A')$, lle mae A' yn cynrychioli'r digwyddiad o beidio â dewis unrhyw fenyw. Bydd A' yn digwydd os dynion yn unig fydd yn cael eu dewis a gwelir bod

$$n(A') = \binom{10}{5} = 252.$$

Mae'n dilyn bod $P(A') = 252/8568$, ac felly fod $P(A) = 1 - P(A') = 8316/8568$. Bydd y digwyddiad $A \cap B$ yn digwydd os bydd yr is-bwyllgor yn cynnwys o leiaf un fenyw ac yn cynnwys dwy fenyw yn union, sy'n cyfateb i ddwy fenyw yn union yn cael eu dewis, ac felly bydd $A \cap B$ yn digwydd os bydd dwy fenyw a thri dyn yn cael eu dewis. Nifer y ffyrdd y gall hyn ddigwydd yw

$$n(A \cap B) = \binom{10}{3} \times \binom{8}{2} = 120 \times 28 = 3360 .$$

Felly,

$$P(A \cap B) = \frac{3360}{8568},$$

a'r ateb yw

$$P(A|B) = \frac{3360/8568}{8316/8568} = \frac{3360}{8316} = \frac{40}{99}.$$

Enghraifft 3

Dau ddigwyddiad yw A a B fel bod P(A) = 0.4, P(B) = 0.3, a P(B|A) = 0.5.
Enrhifwch (a) $P(A \cap B)$, (b) $P(A|B)$, (c) $P(B'|A)$, (d) $P(A'|B')$.

Datrysiad

(a) O (3)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.5 \times 0.4 = 0.2.$$

(b) O (2)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

(c) Gan ddefnyddio Rheol 1, $P(B'|A) = 1 - P(B|A) = 0.5$

(d) O ddiffiniad tebygolrwydd amodol, ceir

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')}.$$

Nawr,

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - (P(A \cap B)\} \\ &= 1 - (0.4 + 0.3 - 0.2) = 0.5. \end{aligned}$$

Hefyd $\quad P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7.$

Felly

$$P(A'|B') = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7}.$$

Ymarfer 3.5

1. Tynnir dwy bêl ar hap o flwch sy'n cynnwys 10 pêl, y mae 7 ohonynt yn ddu. O wybod bod y bêl gyntaf a dynnir yn ddu, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod yr ail bêl a dynnir hefyd yn ddu.
2. Taflwyd darn arian diduedd deirgwaith. O wybod bod y ddau dafliad cyntaf yr un fath â'i gilydd (h.y. dau ben neu ddwy gynffon) cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod y trydydd tafliad wedi rhoi pen.

3. Mae blwch yn cynnwys tair pêl goch wedi'u rhifo yn 1, 2 a 3, a dwy bêl wen wedi'u rhifo yn 1 a 2. Tynnwyd dwy bêl ar hap o'r blwch heb eu rhoi yn ôl. Darganfyddwch y tebygolrwydd amodol fod y ddwy bêl a dynnwyd yn wyn o wybod (a) bod o leiaf un o'r peli a dynnwyd yn wyn, (b) mai un o'r peli a dynnwyd oedd y bêl wen â'r rhif 1 arni.

4. Dau ddigwyddiad yw A a B fel bod $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ a $P(A \cap B) = 0.2$. Enrhifwch (a) $P(A|B)$, (b) $P(B|A)$, (c) $P(A'|B)$, (d) $P(A'|B')$.

5. Codwyd pedwar cerdyn ar hap o becyn o wyth cerdyn wedi'u rhifo o 1 i 8. O wybod mai 7 oedd y rhif mwyaf a godwyd, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol mai 3 oedd y rhif lleiaf a godwyd.

6. Mae teulu yn cynnwys 4 bachgen a 4 merch. Dewisir dau o'r plant ar hap. (a) O wybod bod o leiaf un o'r rhai a ddewiswyd yn ferch, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod y ddau blentyn yn ferched. (b) O wybod mai'r ferch ieuengaf oedd un o'r rhai a ddewiswyd, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod y plentyn arall a ddewiswyd hefyd yn ferch.

7. Tri digwyddiad yw A, B ac C fel bod $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$ a $P(C) = 0.5$.
O wybod bod $P(A \cap C) = 0.2$ a bod $P(B \cap C) = 0.25$, darganfyddwch werthoedd (a) $P(C|B)$, (b) $P(A' \cap C')$.

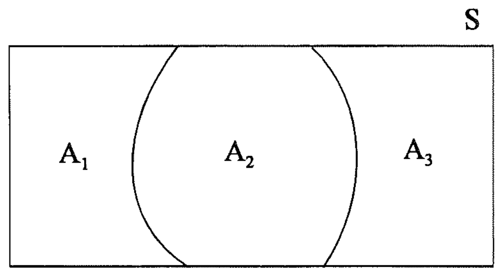
8. Tynnir pum pêl ar hap, heb eu rhoi yn ôl, o fag sy'n cynnwys 6 phêl goch, 5 pêl las a 4 pêl wen. (a) O wybod bod 2 yn union o'r peli a dynnir yn goch, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod y 3 arall yn cynnwys 2 bêl las ac 1 bêl wen. (b) O wybod bod y 5 pêl yr un lliw â'i gilydd, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol eu bod yn goch.

9. Teflir dau ddis diduedd. O wybod bod cyfanswm y sgôr yn eilrif, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod y sgoriau ar y ddau ddis yn eilrifau.

10. Mae dosbarth yn cynnwys 30 o ddisgyblion. O blith y rhain mae 15 yn astudio Ffrangeg, 17 yn astudio Economeg a 5 yn astudio'r ddau bwnc. Dewisir aelod o'r dosbarth ar hap. Boed i F ddynodi'r digwyddiad fod y disgybl a ddewisir yn astudio Ffrangeg a boed i E ddynodi'r digwyddiad fod y disgybl a ddewisir yn astudio Economeg. Cyfrifwch (a) $P(F)$ (b) $P(F|E)$ (c) $P(F|E')$

3.6 Tebygolrwydd cyflawn a fformiwla Bayes

Cofiwn fod digwyddiadau $A_1, A_2, \ldots, A_r$ yn gyd-anghynhwysol os na all dau ohonynt ddigwydd ar yr un pryd. Dywedwn fod digwyddiadau o'r fath hefyd yn *ddisbyddol* os yw pob canlyniad posibl yr haparbrawf cysylltiedig yn elfen o un digwyddiad ac un digwyddiad yn unig. Mae'r diagram Venn canlynol yn dangos tri digwyddiad sy'n gyd-anghynhwysol ac sy'n ddisbyddol.



Ffigur 6 Digwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol ac sy'n ddisbyddol

Ar gyfer digwyddiad A, noder bod A ac A′ yn gyd-anghynhwysol ac yn ddisbyddol. Boed i B fod yn ddigwyddiad arall. Yna, mae'n rhaid bod B yn digwydd mewn cysylltiad un ai ag A neu ag A′. Hynny yw, mae

$$B = (A\cap B) \cup (A'\cap B).$$

Gan fod $(A\cap B)$ ac $(A'\cap B)$ yn gyd-anghynhwysol mae'n dilyn bod

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A\cap B) + P(A'\cap B). \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A'). \end{aligned}$$

Ystyriwch nawr dri digwyddiad A_1, A_2, A_3 , digwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol ac sy'n ddisbyddol, a boed i B ddynodi digwyddiad arall. Os yw B am ddigwydd mae'n rhaid iddo fod yn gysylltiedig ag un o blith A_1, A_2, neu A_3. Hynny yw, mae

$$B = (A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup(A_3\cap B),$$

ac felly mae

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) + (A_3\cap B) \\ &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3). \end{aligned}$$

Gan gyffredinoli, ceir y rheol ganlynol, sef rheol *Tebygolrwydd Cyflawn*.

RHEOL 6:

Os yw A_1, A_2, …, A_r yn ddigwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol ac sy'n ddisbyddol a B yn ddigwyddiad arall, felly mae

$$\boxed{P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_r)P(A_r).}$$

Enghraifft 1

Tynnir dwy bêl ar hap, heb eu dychwelyd, o flwch sy'n cynnwys 12 pêl goch ac 8 pêl las. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd yr ail bêl a dynnir yn las.

Datrysiad

Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod y bêl gyntaf a dynnir yn las, ac felly A′ yw'r digwyddiad fod y bêl gyntaf a dynnir yn goch. Boed i B ddynodi'r digwyddiad y bydd yr ail bêl a dynnir yn las. Gan fod A ac A′ yn gyd-anghynhwysol ac yn ddisbyddol mae'n dilyn o Reol 6 fod

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A').$$

$P(A)$ = tebygolrwydd fod y bêl gyntaf a dynnir yn las = 8/20 ac felly mae $P(A') = 1 - P(A) = 12/20$.

$P(B|A)$ yw'r tebygolrwydd y bydd yr ail bêl yn las o wybod bod y bêl gyntaf yn las. Os oedd y bêl gyntaf yn las, yna ar gyfer tynnu'r ail bêl mae'r blwch yn cynnwys 12 pêl goch a 7 pêl las ac felly mae $P(B|A) = 7/19$. Yn yr un modd, os oedd y bêl gyntaf yn bêl goch, yna ar gyfer tynnu'r ail bêl mae'r blwch yn cynnwys 11 pêl goch ac 8 pêl las ac felly mae $P(B|A') = 8/19$.

Trwy hyn, mae
$$P(B) = \frac{7}{19}\times\frac{8}{20}+\frac{8}{19}\times\frac{12}{20} = \frac{8}{20}.$$
sef yn union yr un tebygolrwydd â bod y bêl gyntaf a dynnir yn las.

[Rhowch eglurhad syml pam mae hyn yn wir.]

Enghraifft 2

Bob dydd mewn ffatri cynhyrchir 40% o gydran benodol ar beiriant A, 10% ar beiriant B, a 50% ar beiriant C. Mae 60% o'r cydrannau a gynhyrchir ar beiriant A yn goch ac mae 40% yn wyrdd. Mae 30% o'r cydrannau a gynhyrchir ar beiriant B yn goch ac mae 70% yn wyrdd. Mae 50% o'r cydrannau a gynhyrchir ar beiriant C yn goch ac mae 50% yn wyrdd. (a) Cyfrifwch y tebygolrwydd fod cydran a ddewisir ar hap o blith yr holl gynnyrch dyddiol yn wyrdd. (b) O wybod bod y gydran yn wyrdd, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol ei bod wedi'i chynhyrchu ar beiriant A.

Datrysiad

(a) Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod y gydran a ddewiswyd wedi'i chynhyrchu ar beiriant A, B y digwyddiad ei bod wedi'i chynhyrchu ar beiriant B, ac C y digwyddiad ei bod wedi'i chynhyrchu ar beiriant C. Mae'r digwyddiadau A, B ac C yn gyd-anghynhwysol ac yn ddisbyddol ac o'r wybodaeth a roddwyd, mae
$$P(A) = 0.4,\ \ P(B) = 0.1,\ \ P(C) = 0.5.$$
Boed i G ddynodi'r digwyddiad fod y gydran a ddewiswyd yn wyrdd. O'r wybodaeth a roddwyd, mae $\quad P(G|A) = 0.4,\ \ P(G|B) = 0.7,\ \ P(G|C) = 0.5$

Gan ddefnyddio Rheol 6 ceir bod
$$\begin{aligned} P(G) &= P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C) \\ &= 0.4 \times 0.4 + 0.7 \times 0.1 + 0.5 \times 0.5 = 0.48. \end{aligned}$$
(b) Ymma, mae arnom angen cyfrifo $P(A|G)$. Nawr, mae
$$\begin{aligned} P(A|G) = \frac{P(A\cap G)}{P(G)} &= \frac{P(G|A)(P(A)}{P(G)} \\ = \frac{0.4\times 0.4}{0.48} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Yn y datrysiad blaenorol rydym wedi defnyddio achos arbennig o fformiwla a olrheiniwyd gan y Parchedig Thomas Bayes ym 1763. Dyma fersiwn cyffredinol y fformiwla hon:

Fformiwla Bayes

Os yw $A_1, A_2, \ldots, A_r$ yn ddigwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol ac sy'n ddisbyddol, yna ar gyfer unrhyw ddigwyddiad B arall, tebygolrwydd amodol A_i ($i = 1, 2, \ldots, r$), o wybod bod B wedi digwydd, yw

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}.$$

lle mae P(B) fel y'i rhoddir yn Rheol 6.

Ymarfer 3.6

1. Dewisir dau gerdyn ar hap o becyn cyffredin o gardiau chwarae.

(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd yr ail gerdyn a ddewisir yn âs.

(b) O wybod bod yr ail gerdyn yn âs, darganfyddwch y tebygolrwydd amodol fod y cerdyn cyntaf hefyd yn âs.

2. Mae tri pheiriant, A, B ac C, mewn ffatri yn cynhyrchu 50%, 25% a 25%, yn ôl eu trefn, o'r cynnyrch dyddiol o gydran arbennig. Mae'n hysbys bod 2% o'r cydrannau hynny a gynhyrchir ar beiriant A ac ar beiriant B yn ddiffygiol, a bod 3% o'r rheiny a gynhyrchir ar beiriant C yn ddiffygiol. Dewisir un gydran ar hap o blith y cynnyrch dyddiol.

(a) Cyfrifwch y tebygolrwydd ei bod yn ddiffygiol.

(b) O wybod bod y gydran a ddewiswyd yn ddiffygiol, penderfynwch ar ba beiriant yr oedd fwyaf tebygol o fod wedi'i chynhyrchu.

3. Mae tîm pêl-droed lleol yn chwarae yr un faint o gemau cartref a gemau oddi cartref mewn tymor. Y tebygolrwydd y bydd yn ennill gêm gartref yw 0.75 a'r tebygolrwydd y bydd yn ennill gêm oddi cartref yw 0.4. O wybod bod y tîm hwn wedi ennill gêm a ddewiswyd ar hap y llynedd, darganfyddwch y tebygolrwydd amodol mai gêm oddi cartref oedd honno.

4. Dewisir un blwch ar hap o blith tri blwch a labelwyd yn A, B ac C. Mae blwch A yn cynnwys 5 pêl goch a 5 pêl wen; mae blwch B yn cynnwys 4 pêl goch a 6 phêl wen; mae blwch C yn cynnwys 3 pêl goch a 7 pêl wen. Tynnir dwy bêl ar hap o'r blwch a ddewiswyd.

(a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y ddwy bêl a dynnir (i) ill dwy yn goch, (ii) yr un lliw â'i gilydd.

(b) O wybod bod y ddwy bêl a dynnir yr un lliw â'i gilydd, penderfynwch pa flwch oedd yr un mwyaf tebygol o fod wedi'i ddewis.

5. Mae peiriant gwerthu diodydd poeth yn darparu coffi, te a siocled. Mae'r galw am y diodydd hyn yn ôl y gymhareb 4:3:3. Mae'r tebygolrwydd y bydd y peiriant yn methu darparu coffi yn 0.02, mae'r tebygolrwydd y bydd yn methu darparu te yn 0.03 a'r tebygolrwydd y bydd yn methu darparu siocled yn 0.02. O wybod bod y peiriant wedi methu darparu dewis cwsmer penodol, cyfrifwch y tebygolrwyddau fod y cwsmer wedi dewis (a) coffi, (b) te, (c) siocled.

6. Gall llys barn mewn gwlad benodol gyhoeddi unrhyw un o dair rheithfarn sef 'euog', 'di-euog' neu 'heb ei brofi'. O'r achosion a glywyd gan y llys hwn roedd 70% o'r rheithfarnau yn 'euog', 20% yn 'ddi-euog', a 10% 'heb eu profi'. Tybiwch fod y tebygolrwydd fod y cyhuddedig heb droseddu yn 0.05 pan fo'r llys yn ei ddyfarnu'n 'euog', bod y tebygolrwydd ei fod heb droseddu yn 0.95 pan fo'r dyfarniad yn 'ddi-euog' a bod y tebygolrwydd ei fod heb droseddu yn 0.25 pan fo'r llys yn dyfarnu bod yr achos 'heb ei brofi'. Darganfyddwch y tebygolrwydd amodol y ceir person sydd heb droseddu yn 'euog'.

7. Mae gan brawf sgrinio'r fron debygolrwydd o 0.95 o roi canlyniad cywir (hynny yw, dweud bod canser yn bresennol mewn menyw sydd â chanser, a dweud nad oes canser mewn menyw nad oes ganddi ganser). Gan dybio bod canser gan 1% o'r menywod sy'n derbyn y prawf, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod canser gan fenyw o wybod bod y prawf wedi dweud nad oes ganddi ganser.

8. Gwerthir melysion o flasau gwahanol mewn tiwbiau, gyda 10 o felysion ym mhob tiwb. Yn ôl y broses becynnu mae 30% o'r tiwbiau yn cynnwys 2 o felysion blas oren, mae 40% yn cynnwys 3 o felysion blas oren, ac mae 30% yn cynnwys 4 o felysion blas oren. Dewiswyd tiwb ar hap, yna dewiswyd tri o felysion ar hap ohono ac fe gafwyd mai dim ond 1 ohonynt oedd â blas oren. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod y 7 o felysion sy'n weddill yn y tiwb yn cynnwys 2 yn union o felysion blas oren.

9. Dangosodd cyfrifiad fod 20% o'r parau priod oedd yn byw mewn ardal benodol yn ddi-blant, bod gan 50% ohonynt un plentyn, a chan 30% ohonynt ddau neu ragor o blant. Dangosodd y cyfrifiad hefyd fod y gŵr a'r wraig yn gweithio mewn 70% o'r parau oedd heb blant, mewn 30% o'r parau gydag un plentyn, ac mewn 10% o'r parau gyda dau neu ragor o blant. Dewisir un pâr priod ar hap.

(a) Cyfrifwch y tebygolrwydd fod y gŵr a'r wraig yn gweithio.

(b) O wybod bod y gŵr a'r wraig yn gweithio, cyfrifwch y tebygolrwydd fod gan y pâr o leiaf un plentyn.

10. Mae blwch A yn cynnwys 4 pêl wen a 6 phêl ddu. Mae blwch B yn cynnwys 3 pêl wen a 3 pêl ddu. Mae dwy bêl yn cael eu tynnu ar hap o flwch A a'u rhoi ym mlwch B. Yna tynnir un bêl ar hap o flwch B. O wybod bod y bêl hon a dynnir o flwch B yn ddu, darganfyddwch y tebygolrwydd fod y ddwy bêl a drosglwyddwyd o A i B yn ddu.

11. Mewn papur arholiad, mae cwestiwn aml-ddewis yn rhoi n ateb ond dim ond un ohonynt sy'n gywir. Tybiwch mai p yw'r tebygolrwydd fod ymgeisydd yn gwybod yr ateb. Os nad yw'n gwybod yr ateb, mae'n dyfalu gan ddewis un o'r atebion ar hap. Dangoswch, o wybod ei fod yn dewis yr ateb cywir, mai'r y tebygolrwydd ei fod o ddifrif yn gwybod yr ateb cywir yw $\dfrac{np}{1+(n-1)p}$.

12. Mae tri drôr mewn cist. Mae'r cyntaf yn cynnwys dau ddarn aur, mae'r ail yn cynnwys darn aur a darn arian, ac mae'r trydydd yn cynnwys dau ddarn arian. Dewisir drôr ar hap ac yna dewisir darn sydd ynddo ar hap. O wybod bod y darn a ddewisir yn arian, darganfyddwch y tebygolrwydd mai aur yw'r darn arall yn y drôr a ddewisir.

3.7 Diagramau coeden tebygolrwydd

Ystyriwch haparbrawf sy'n cynnwys n cam. Rydym eisoes wedi dod ar draws haparbrofion o'r fath. Er enghraifft, mae tynnu tair pêl ar hap o flwch sy'n cynnwys peli gyda gwahanol liwiau yn cynnwys tri cham, sef tynnu'r bêl gyntaf, tynnu'r ail bêl a thynnu'r drydedd bêl. Boed i A_1 ddynodi digwyddiad cysylltiedig â chanlyniad y cam cyntaf, A_2 ddigwyddiad cysylltiedig â chanlyniad yr ail gam, ac ati. Y tebygolrwydd y bydd A_1 ac A_2 yn digwydd yw

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1).$$

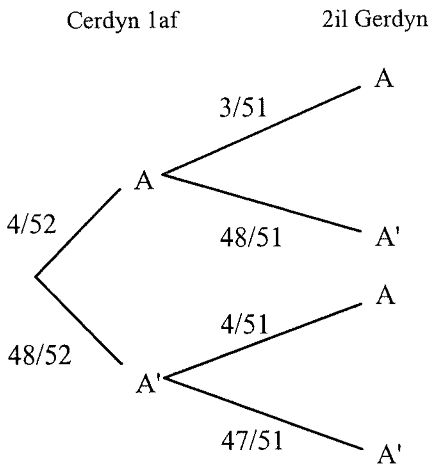
Y tebygolrwydd y bydd A_1, A_2 ac A_3 yn digwydd yw

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \cap A_3|A_1) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

Mae'r rheol luoswm hon yn estyn mewn ffordd amlwg ar gyfer $n > 3$. Mae'r rheol yn ein galluogi i ddatrys problemau sy'n ymwneud â haparbrofion sy'n cynnwys gwahanol gamau gan ddefnyddio *diagramau coeden tebygolrwydd*, fel a ddangosir yn yr enghreifftiau canlynol.

Enghraifft 1 (Enghraifft 3 o Adran 3.4)
Dewisir dau gerdyn o becyn o gardiau chwarae cyffredin sydd wedi eu cymysgu. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod o leiaf un o'r ddau gerdyn yn âs.

Datrysiad
Mae'r diagram coeden canlynol yn dangos yr holl ganlyniadau posibl gan nodi a yw cerdyn yn âs ai peidio, lle mae A yn dynodi âs ac mae A′ yn dynodi an-âs. Ar hyd pob cangen dangosir tebygolrwydd y canlyniad a ddangosir ar ben y gangen. Felly, er enghraifft, os yw'r cerdyn cyntaf yn âs, yna dewisir yr ail gerdyn o becyn sy'n cynnwys 3 âs a 48 an-âs, ac felly y tebygolrwydd amodol fod yr ail gerdyn yn âs, o wybod bod y cerdyn cyntaf yn âs, yw 3/51.



Canlyniad	Tebygolrwydd
(AA)	4 x 3/52 x 51 = 12/2652
(AA')	4 x 48/52 x 51 = 192/2652
(A'A)	48 x 4/52 x 51 = 192/2652
(A'A')	48 x 47/52 x 51 = 2256/2652

[Noder bod yn rhaid i gyfanswm tebygolrwyddau'r holl ganghennau o un pwynt fod yn 1 mewn diagram coeden, a bod yn rhaid i gyfanswm tebygolrwyddau'r canlyniadau trefnedig hefyd fod yn 1; dylid gwirio'r rhain ar ôl llunio'r diagram.]

Dewisir o leiaf un âs os (AA) neu (AA′) neu (A′A) yw'r canlyniad. Gan fod y rhain yn gyd-anghynhwysol, mae

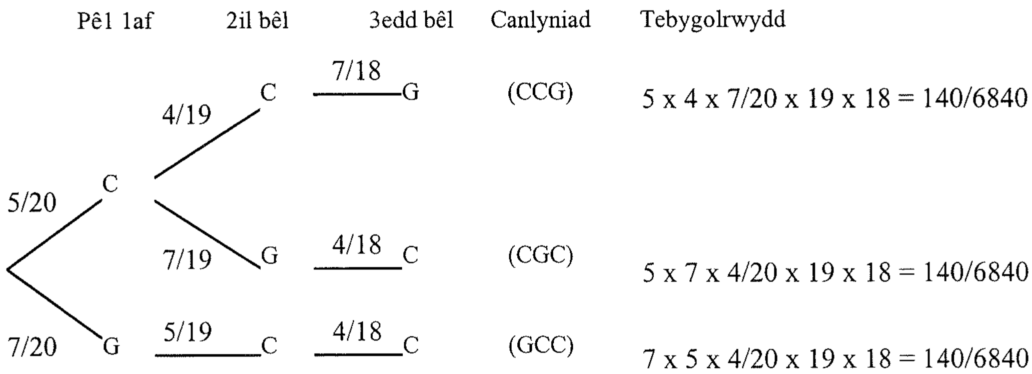
$$\begin{aligned} \text{P(o leiaf un âs)} &= P(AA) + P(AA') + P(A'A) \\ &= (12 + 192 + 192)/2652 = 396/2652 = 33/221. \end{aligned}$$

[Neu fel arall, gan mai "dim âs" yw cyflenwad "o leiaf un âs", ceir bod

$$\begin{aligned} \text{P(o leiaf un âs)} &= 1 - \text{P(dim âs)} = 1 - P(A'A') \\ &= 1 - 2256/2652 = 33/221] \end{aligned}$$

Enghraifft 2 (Rhan o Enghraifft 7 o Adran 3.4)
Mae blwch yn cynnwys 5 pêl goch, 7 pêl las ac 8 pêl wen. Tynnir tair pêl ar hap (heb eu rhoi yn ôl) o'r blwch hwn. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd y peli a dynnir fel a ganlyn (a) dwy yn goch ac un yn las, (b) y tair i gyd yr un lliw. (c) O wybod bod pob pêl a dynnir yr un lliw, darganfyddwch y tebygolrwydd eu bod yn goch.

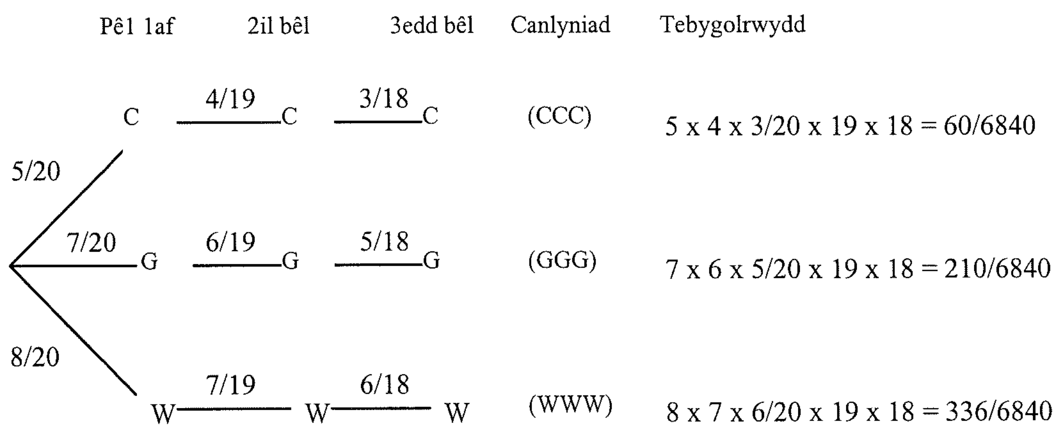
Datrysiad
Arbrawf 3 cham yw hwn ac mae tri chanlyniad posibl ar bob cam (coch, glas a gwyn), sy'n golygu y bydd cyfanswm o $3 \times 3 \times 3 = 27$ canlyniad trefnedig. Bydd y diagram coeden yn fawr er mwyn cynnwys y posibiliadau hyn i gyd. Gellir osgoi hyn trwy gyfyngu ystyriaeth i'r canghennau hynny yn unig sy'n arwain at y digwyddiad dan sylw.
(a) Ni fydd y digwyddiad "mae 2 yn goch ac mae un yn las" yn digwydd oni bai bod y canlyniad trefnedig yn un o blith (CCG), (CGC), (GCC), lle mae C yn dynodi pêl goch ac G yn dynodi pêl las. Dangosir canghennau cyfatebol y diagram coeden isod.



Mae'n dilyn bod

$$P(2 \text{ bêl goch ac 1 las}) = 3 \times 140/6840 = 420/6840 = 7/114.$$

(b) Ni fydd y digwyddiad "mae'r tair i gyd yr un lliw" yn digwydd oni bai bod y canlyniad trefnedig yn un o blith (CCC), (GGG), (WWW), lle mae W yn dynodi pêl wen. Mae canghennau angenrheidiol y diagram coeden fel a ganlyn.



Felly, mae

$$P(\text{i gyd yr un lliw}) = (60 + 210 + 336)/6840 = 101/1140$$

(c) Gellir defnyddio fformiwla Bayes er mwyn darganfod y tebygolrwydd fod y peli i gyd yn goch, o wybod eu bod i gyd yr un lliw, fel a ganlyn.

$$P(CCC \mid \text{I gyd yr un lliw}) = \frac{P(CCC)}{P(CCC)+P(GGG)+P(WWW)}$$

$$= \frac{60/6840}{60/6840 + 210/6840 + 336/6840}$$

$$= 10/101.$$

Gellir ateb llawer o'r enghreifftiau a'r ymarferion yn Adrannau 3.4 a 3.6 trwy ddefnyddio diagramau coeden, ac efallai y bydd yn well gan rai y dull hwn.

Ymarfer 3.7

1. Tynnir tair falf ar hap o flwch sy'n cynnwys tair falf ddiffygiol a saith falf dda.

(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd o leiaf un falf dda yn cael ei thynnu.

(b) O wybod bod y falf gyntaf a dynnwyd yn dda darganfyddwch y tebygolrwydd amodol fod pob un o'r tair a dynnwyd yn dda.

2. Gall llygoden mewn drysfa siâp T mewn labordy ddewis rhwng troi i'r chwith a chael bwyd neu droi i'r dde a chael sioc drydanol wan. Y tro cyntaf, mae llygoden yr un mor debygol o droi i'r chwith ag y mae o droi i'r dde. Unrhyw dro arall, y tebygolrwydd y bydd y llygoden yn troi i'r chwith yw (i) 0.6 os yw wedi cael bwyd y tro blaenorol, a (ii) 0.8 os yw wedi cael sioc y tro blaenorol. Trwy lunio diagram coeden, neu fel arall, darganfyddwch y tebygolrwydd

(a) y bydd y llygoden yn troi i'r chwith ar ei hail rediad,

(b) y bydd y llygoden yn troi i'r chwith ar ei thrydedd rhediad.

3. Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd y tri cherdyn cyntaf a godir o becyn o gardiau cyffredin sydd wedi'u cymysgu (a) yn dair rhaw, (b) yn ddwy raw ac un galon, (c) yn perthyn i dair siwt wahanol.

4. Teflir dis ciwbigol diduedd. Os yw'r sgôr a geir yn lluoswm 3, tynnir pêl ar hap o flwch sy'n cynnwys 5 pêl goch, 3 pêl wen ac 8 pêl las. Os nad yw'r sgôr a geir yn lluoswm 3, tynnir pêl ar hap o flwch sy'n cynnwys 3 pêl goch a 5 pêl wen.

(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y tynnir pêl goch.

(b) O wybod bod y bêl a dynnwyd yn wyn, darganfyddwch y tebygolrwydd fod y sgôr a gafwyd ar y dis yn (i) lluoswm 3, (ii) 5.

5. Mae bag A yn cynnwys 4 pêl wen a 3 pêl goch, ac mae bag B yn cynnwys 2 bêl wen a 5 pêl goch. Mae gan geiniog y fath duedd fel bod y tebygolrwydd o gael pen yn $\frac{2}{3}$ pan gaiff ei thaflu. Teflir y geiniog hon; os ceir pen bydd pêl yn cael ei thynnu ar hap o fag A, fel arall bydd pêl yn cael ei thynnu ar hap o fag B.

(a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y tynnir pêl goch.

(b) O wybod i bêl goch gael ei thynnu, darganfyddwch y tebygolrwydd iddi ddod o fag A.

6. Mae Anwen, Bethan a Carys yn rhannu fflat. Ar unrhyw ddiwrnod y tebygolrwydd mai Anwen sy'n coginio'r pryd nos yw 0.5, y tebygolrwydd mai Bethan sy'n ei goginio yw 0.3, a'r tebygolrwydd mai Carys sy'n ei goginio yw 0.2. Mae'r tebygolrwydd fod y pryd nos yn fethiant yn 0.02 pan fo Anwen yn ei goginio, yn 0.03 pan fo Bethan yn ei goginio, ac yn 0.04 pan fo Carys yn ei goginio.

(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd pryd nos yn fethiant.

(b) O wybod bod pryd nos yn foddhaol darganfyddwch y tebygolrwydd mai Bethan a'i coginiodd.

7. Mae Alec a Bill yn chwarae gêm sy'n cynnwys dau gam. Yn y cam cyntaf bydd dau ddis diduedd yn cael eu taflu. Yn yr ail gam bydd un o'r bechgyn yn tynnu cerdyn ar hap o becyn o 10 cerdyn sydd wedi'u rhifo o 1 i 10. Alec fydd yn tynnu'r cerdyn os yw swm y sgoriau ar y ddau ddis yn 6 neu yn llai; fel arall Bill fydd yn tynnu'r cerdyn. Os bydd y bachgen sy'n tynnu'r cerdyn yn cael un gyda rhif 1 neu 2, mae'n ennill y gêm; fel arall, mae'r bachgen arall yn ennill y gêm.

(a) Dangoswch mai'r tebygolrwydd y bydd Alec yn ennill y gêm yw 0.55.

(b) O wybod bod Alec wedi ennill y gêm, darganfyddwch y tebygolrwydd mai Alec a dynnodd y cerdyn.

3.8 Digwyddiadau annibynnol ac arbrofion annibynnol

Diffiniad. Dywedir bod dau ddigwyddiad yn annibynnol os nad effeithir ar y tebygolrwydd fod unrhyw un yn digwydd gan yr wybodaeth fod y llall wedi digwydd.
Gan ddefnyddio symbolau, mae dau ddigwyddiad A a B yn annibynnol os yw

$$P(A \mid B) = P(A). \qquad (1)$$

Gan ddefnyddio (1) gwelir bod

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = P(B). \qquad (2)$$

Trwy gyfuno (1) a (2) mae'n dilyn bod dau ddigwyddiad A a B yn annibynnol os yw

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(A)P(B), \qquad (3)$$

sy'n ffurf fwy defnyddiol yn ymarferol.

Mae'r cyfdro hefyd yn wir. Hynny yw, os yw A a B yn annibynnol, yna mae (1), (2) a (3) yn wir.

Rydym eisoes wedi dod ar draws sawl enghraifft yn Adrannau 3.5 a 3.6 o ddigwyddiadau nad ydynt yn annibynnol. Er enghraifft, ystyriwch Enghraifft 1 yn Adran 3.6 lle tynnir dwy bêl ar hap o flwch sy'n cynnwys 12 pêl goch ac 8 pêl las.

Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod y bêl gyntaf a dynnir yn las a boed i B ddynodi'r digwyddiad fod yr ail bêl a dynnir yn las.

Dangoswyd bod

$$P(B \mid A) \;=\; \frac{7}{19} \text{ ond fod } P(B) \;=\; \frac{8}{20},$$

ac felly nid yw A a B yn annibynnol.

Dangosir nawr, os yw A a B yn annibynnol, fod A a B′ hefyd yn annibynnol.

Gan ddefnyddio Rheol 4

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \text{ gan (3) uchod} \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B'), \end{aligned}$$

sy'n profi bod A a B′ hefyd yn annibynnol. Yn ogystal, mae A′ a B yn annibynnol, ac mae A′ a B′ yn annibynnol, a gofynnir i chi brofi'r canlyniadau hyn yng Nghwestiwn 4 yn yr ymarfer canlynol.

Enghraifft 1

Mae'r ddau ddigwyddiad A a B yn annibynnol fel bod $P(A) = 0.2$ a $P(A \cup B) = 0.4$. Enrhifwch (a) $P(B)$ a (b) $P(A' \cap B)$.

Datrysiad

(a) Gan ddilyn Rheol 3

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B), \text{ gan ddefnyddio (3).} \end{aligned}$$

Trwy ddefnyddio'r tebygolrwyddau a roddir, ceir

$$0.4 = 0.2 + P(B) - 0.2P(B),$$

neu $$0.8P(B) = 0.2,$$

ac o hyn mae'n dilyn bod $P(B) = 0.25$.

(b) Gan fod A a B yn annibynnol, mae A′ a B hefyd yn annibynnol. Felly mae

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(A')P(B) \\ &= (1 - 0.2) \times 0.25 = 0.2 \end{aligned}$$

Enghraifft 2

Teflir darn arian diduedd deirgwaith. Boed i A ddynodi'r digwyddiad y teflir tri phen neu dair cynffon, B y digwyddiad y teflir o leiaf dau ben, ac C y digwyddiad y teflir dau ben ar y mwyaf. Dangoswch (a) fod A a B yn annibynnol, (b) nad yw A ac C yn annibynnol.

Datrysiad

Mae 8 canlyniad trefnedig posibl ar gyfer y tri thafliad, sef

(PPP), (PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP), (CCC) ac mae'r rhain yn hafal debygol.

A = 3 phen neu 3 cynffon = {(PPP), (CCC)}

B = o leiaf 2 ben = {(PPP), (PPC), (PCP), (CPP)}

C = 2 ben ar y mwyaf = {(PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP), (CCC)}.

Ceir

$A \cap B = \{(PPP)\}$, $A \cap C = \{(CCC)\}$

(a) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$, $P(A) = \dfrac{2}{8}$, $P(B) = \dfrac{4}{8}$.

Gan fod $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/8$, mae'n dilyn bod A a B yn annibynnol.

(b) $P(A \cap C) = \dfrac{1}{8}$, $P(A) = \dfrac{2}{8}$, $P(C) = \dfrac{7}{8}$.

Gan fod $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$, nid yw A ac C yn annibynnol.

Ymarfer 3.8a

1. O wybod bod A a B yn ddigwyddiadau annibynnol, a bod $P(A) = 0.5$ a $P(B) = 0.4$, enrhifwch (a) $P(A \cap B)$, (b) $P(A \cup B)$.

2. O wybod bod A a B yn ddau ddigwyddiad lle mae $P(A) = 0.6$, $P(B') = 0.7$, a $P(A \cup B) = 0.72$, dangoswch fod A a B yn annibynnol.

3. Dau ddigwyddiad yw A a B lle mae $P(A) = 0.3$, $P(B|A) = 0.2$ a $P(A \cup B) = 0.44$. Dangoswch fod A a B yn annibynnol.

4. O wybod bod A a B yn annibynnol, dangoswch fod (a) A′ a B yn annibynnol, (b) A′ a B′ yn annibynnol.

5. Mae digwyddiadau annibynnol A, B, lle mae

$$P(A \cup B) = 0.44; \quad P(A \cap B) = 0.06.$$

Darganfyddwch werthoedd posibl P(A) a P(B).

6. Tynnir un cerdyn ar hap o becyn cyffredin o gardiau chwarae. Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod y cerdyn a ddewisir yn galon a boed i B ddynodi'r digwyddiad ei fod yn gerdyn lliw (âs, brenin, brenhines neu jac). Dangoswch fod A a B yn annibynnol.

7. Teflir dis ciwbigol diduedd coch a dis ciwbigol diduedd gyda'i gilydd. Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod y sgôr ar y dis coch yn 1 a boed i B ddynodi'r digwyddiad fod swm y ddwy sgôr yn 7. Penderfynwch a yw A a B yn annibynnol ai peidio.

8. Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod gan deulu blant o'r ddau ryw, a B y digwyddiad fod gan deulu un ferch ar y mwyaf. Gellir rhagdybio bod pob dosraniad posibl o ran rhyw ymhlith plant trefnedig yn ôl eu hoed, yn hafal debygol mewn teulu. Dangoswch (a) fod A a B yn annibynnol os oes gan deulu 3 o blant, (b) nad yw A a B yn annibynnol os oes gan deulu 2 o blant.

9. Tynnir dau gerdyn ar hap o becyn cyffredin o gardiau chwarae. Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod y cerdyn cyntaf yn rhaw, B y digwyddiad fod yr ail gerdyn yn frenin, ac C y digwyddiad fod y cerdyn cyntaf naill ai yn âs neu'n frenin. Penderfynwch pa barau o blith A, B ac C sy'n annibynnol.

10. Mae dosbarth yn cynnwys 20 o ddisgyblion. O blith y rhain, mae 15 yn astudio Mathemateg ac mae 8 yn astudio Gwyddoniaeth. Dewisir disgybl ar hap. Boed i M ddynodi'r digwyddiad fod y disgybl a ddewisir yn astudio Mathemateg a boed i G ddynodi'r digwyddiad fod y disgybl a ddewisir yn astudio Gwyddoniaeth.

(a) O wybod bod 5 disgybl yn y dosbarth yn astudio Mathemateg a Gwyddoniaeth, dangoswch nad yw M ac G yn annibynnol.

(b) O wybod bod x disgybl yn y dosbarth yn astudio Mathemateg a Gwyddoniaeth, a bod M ac G yn annibynnol, darganfyddwch werth x.

Haparbrofion annibynnol

Diffiniad. Dywedir bod dau neu ragor o haparbrofion yn *annibynnol* os cânt eu perfformio mewn modd sy'n gwneud i debygolrwyddau canlyniadau posibl unrhyw un ohonynt fod yr un fath beth bynnag yw canlyniadau'r lleill.

Rhai enghreifftiau o haparbrofion annibynnol yw:

(1) Taflu dis a cheiniog.

(2) Taflu ceiniog sawl gwaith.

(3) Tynnu gwrthrychau ar hap o blith casgliad o wrthrychau *a'u dychwelyd bob tro.*

Ystyriwch ddau haparbrawf annibynnol. Boed i A_1 ac A_2 ddynodi digwyddiadau mewn perthynas â'r haparbrawf cyntaf a'r ail haparbrawf, yn ôl eu trefn. Mae'n amlwg bod A_1 ac A_2 yn ddigwyddiadau annibynnol ac felly mae $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Wrth estyn y canlyniad hwn i k haparbrawf annibynnol, os yw A_i yn ddigwyddiad cysylltiedig â'r i$^{\text{fed}}$ arbrawf ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$), yna mae

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \ldots \times P(A_k),$$

sy'n ffurf arbennig ar y rheol luoswm yn Adran 3.7.

Enghraifft 3

Teflir dis ciwbigol diduedd bedair gwaith. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod (a) pob tafliad yn rhoi sgôr sy'n eilrif, (b) o leiaf un 6 yn cael ei daflu.

Datrysiad

Pedwar haparbrawf annibynnol yw'r tafliadau, a theflir y dis unwaith ym mhob un.

(a) Boed i A_1, A_2, A_3 ac A_4 ddynodi'r digwyddiadau fod y tafliad cyntaf, yr ail dafliad, y trydydd tafliad a'r pedwerydd tafliad yn rhoi sgôr sy'n eilrif. Gan fod tebygolrwydd cael eilrif mewn un tafliad o ddis diduedd yn ½, mae $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = ½$. Gan fod y tafliadau yn annibynnol, mae

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times P(A_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

(b) Er mwyn darganfod y tebygolrwydd fod o leiaf un 6 yn cael ei daflu gallem ddarganfod y tebygolrwydd o daflu un, dau, tri a phedwar 6 ac yna eu hadio (gan eu bod yn gyd-anghynhwysol). Fodd bynnag, mae'n haws darganfod tebygolrwydd y digwyddiad cyflenwol, sef nad yw 6 yn cael ei daflu. Boed i B_1, B_2, B_3, a B_4 ddynodi'r digwyddiadau nad yw'r tafliad cyntaf, yr ail dafliad, y trydydd tafliad a'r pedwerydd tafliad yn rhoi 6. Mae gan bob un o'r rhain debygolrwydd o 5/6 a'r tebygolrwydd o beidio â thaflu unrhyw 6 yw

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = P(B_1) \times P(B_2) \times P(B_3) \times P(B_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

Trwy hyn, y tebygolrwydd o gael o leiaf un 6 yw $1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$

Enghraifft 4

Mae tad a mab yn tanio gynnau ar faes saethu. Yn annibynnol, ar gyfer pob ergyd y mae'r tad yn ei thanio, y tebygolrwydd y bydd yn taro'r targed yw 0.8 ac ar gyfer y mab y tebygolrwydd cyfatebol yw 0.4.

(a) Os bydd y ddau yn tanio dwy ergyd yr un at y targed darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd pob un o'r pedair ergyd yn taro'r targed.

(b) Os dwywaith yn unig y caiff y mab danio at y targed, darganfyddwch y nifer lleiaf o ergydion y dylai'r tad eu cael, er mwyn cael tebygolrwydd o 0.99, o leiaf, fod un neu fwy o'r ergydion a daniwyd gan y ddau yn taro'r targed.

Datrysiad

(a) Boed i T_1 a T_2 ddynodi'r digwyddiadau fod ergyd gyntaf ac ail ergyd y tad, yn ôl eu trefn, yn taro'r targed. Boed i M_1 a M_2 ddynodi'r digwyddiadau fod ergyd gyntaf ac ail ergyd y mab, yn ôl eu trefn, yn taro'r targed. Gan fod y pedwar digwyddiad hyn yn annibynnol, y tebygolrwydd fod y pedair ergyd i gyd yn taro'r targed yw

$$\begin{aligned} P(T_1 \cap T_2 \cap M_1 \cap M_2) &= P(T_1) \times P(T_2) \times P(M_1) \times P(M_2) \\ &= 0.8 \times 0.8 \times 0.4 \times 0.4 = 0.1024. \end{aligned}$$

(b) Tybiwch fod y tad yn cael tanio n ergyd at y targed. Boed i E ddynodi'r digwyddiad fod y targed yn cael ei daro unwaith neu ragor gan yr (n + 2) ergyd, ac felly E′ yw'r digwyddiad fod yr (n + 2) ergyd i gyd yn methu'r targed.

Gan estyn y nodiant yn (a) ceir bod

$$\begin{aligned} P(E') &= P(M_1' \cap M_2' \cap T_1' \cap T_2' \cap \ldots \cap T_n') \\ &= P(M_1') \times P(M_2') \times P(T_1') \times P(T_2') \times \ldots \times P(T_n') \\ &= 0.6^2 \times 0.2^n = 0.36 \times 0.2^n \end{aligned}$$

Felly, mae $P(E) = 1 - 0.36 \times 0.2^n$.

Dymunwn gael yr n lleiaf lle mae

$$1 - 0.36 \times 0.2^n \geq 0.99,$$

sy'n cyfateb i

$$0.2^n \leq 0.01/0.36$$

Wrth gymryd logarithmau, ceir bod

$$n \geq \frac{\ln(0.01/0.36)}{\ln 0.2} = 2.23.$$

Mae arwydd yr anhafaledd wedi'i gildroi oherwydd ein bod wedi rhannu'r anhafaliad â rhif negatif, sef (ln 0.2).

Mae'n dilyn y dylid caniatáu o leiaf 3 ergyd i'r tad er mwyn cael tebygolrwydd o 0.99, o leiaf, y bydd y targed yn cael ei daro.

Ymarfer 3.8b

1. Y tebygolrwydd y gall Jên ddatrys problem benodol yw 0.4 a'r tebygolrwydd y gall Alys ei datrys yw 0.3. Os bydd y ddwy yn ceisio gwneud hyn yn annibynnol, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd y broblem yn cael ei datrys gan o leiaf un o'r ddwy ferch.

2. Teflir dis diduedd a thynnir cerdyn ar hap o becyn cyffredin o gardiau chwarae. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod (a) y sgôr a deflir yn eilrif a'r cerdyn a dynnir yn goch, (b) y sgôr a deflir yn eilrif *neu* y cerdyn a dynnir yn goch.

3. Mae peiriant penodol yn cynnwys tair cydran ac ni fydd y peiriant yn gweithio'n iawn oni bai bod y tair cydran i gyd yn gweithio. Gan dybio bod y tair cydran yn gweithio yn annibynnol a bod ganddynt debygolrwyddau methu o 0.02, 0.05, a 0.1, yn ôl eu trefn, darganfyddwch y tebygolrwydd na fydd y peiriant yn gweithio yn iawn. O wybod nad yw'r peiriant yn gweithio'n iawn darganfyddwch y tebygolrwydd fod hyn oherwydd bod un yn union o'r cydrannau wedi methu.

4. Mae gan dri dyn ar faes saethu debygolrwyddau o 0.17, 0.25 a 0.33 o daro canol y targed ag un ergyd. (a) Mae pob dyn yn tanio un ergyd. (i) Cyfrifwch y tebygolrwydd fod un yn union o'r tair ergyd yn taro'r canol. (ii) O wybod mai dim ond un ergyd a lwyddodd i daro'r canol, darganfyddwch y tebygolrwydd iddi gael ei thanio gan y dyn â'r tebygolrwydd lleiaf o daro'r canol. (b) Ar gyfer pob un o'r dynion, darganfyddwch y nifer lleiaf o ergydion y dylai eu tanio er mwyn sicrhau tebygolrwydd o 0.9, o leiaf, y bydd un neu ragor o'i ergydion yn taro'r canol.

5. Yn annibynnol, mae tri brawd yn dweud y gwir gyda thebygolrwyddau o 0.9, 0.8 a 0.7, yn ôl eu trefn. Un diwrnod gofynnwyd i bawb pwy oedd yn gyfrifol am gamymddygiad penodol. Darganfyddwch y tebygolrwyddau y bydd (a) y tri i gyd yn dweud y gwir, (b) dau yn unig ohonynt yn dweud y gwir.

6. Mae merch yn chwarae tair gêm, a'r tebygolrwydd y bydd yn ennill, cael gêm gyfartal, a cholli yw 0.5, 0.25 a 0.25, yn ôl eu trefn. Darganfyddwch y tebygolrwyddau y bydd hi'n ennill mwy o gemau nag y bydd yn eu colli.

7. Mae dau blentyn, Ann a Brian, yn taflu dis yn eu tro a'r cyntaf i daflu '6' sy'n ennill. O wybod mai Ann sy'n taflu gyntaf, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd Brian yn ennill

(a) ar ei dafliad 1af,

(b) ar ei 2il dafliad,

(c) ar ei nfed tafliad.

Defnyddiwch (c) i gyfrifo'r tebygolrwydd y bydd Brian yn ennill y gêm.

3.9 Crynodeb o'r rheolau tebygolrwydd

Rhestrir isod y gwahanol reolau tebygolrwydd a gyflwynwyd yn y bennod hon.

1. $P(A') = 1 - P(A)$.

2. Os yw A, B, C, … yn ddigwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol, mae

$$P(A \cup B \cup C \cup \ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots$$

3. Ar gyfer unrhyw ddau ddigwyddiad A a B

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

(b) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$,

(c) $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$; $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$,

(d) $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$.

4. Os yw $A_1, A_2, \ldots A_k$ yn ddigwyddiadau sy'n gyd-anghynhwysol ac sy'n ddisbyddol, yna ar gyfer unrhyw ddigwyddiad arall B,

(a) $P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \ldots + P(B \mid A_k)P(A_k)$

(b) $P(A_i \mid B) = \dfrac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$ ar gyfer unrhyw $i = 1, 2, \ldots k$.

5. Os yw $A_1, A_2, \ldots A_k$, yn ôl eu trefn, yn k digwyddiad sy'n gysylltiedig â k gwahanol cam o haparbrawf neu â k gwahanol haparbrawf, yna mae

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

6. Os yw $A_1, A_2, \ldots A_k$ yn k digwyddiad annibynnol, yna mae

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_k)$$

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 3

1. (1987) Dau ddigwyddiad yw A a B lle mae $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, a $P(A \cup B) = 0.4$.

(i) Penderfynwch a yw A a B yn annibynnol ai peidio,

(ii) Enrhifwch $P(B \mid A')$. [4]

2. (1987) Mae pecyn o 52 o gardiau chwarae yn cynnwys 4 âs, 12 cerdyn lliw, a 36 cerdyn arall. Dewisir dyrnaid o 13 cerdyn ar hap heb eu rhoi yn ôl yn y pecyn.

(i) Ysgrifennwch fynegiadau, ond **peidiwch** â'u symleiddio, ar gyfer y tebygolrwyddau y bydd y dyrnaid yn cynnwys (a) 2 âs yn union ac 11 cerdyn lliw, (b) 2 âs yn union ac 8 cerdyn lliw yn union.

(ii) Boed i p_1 ddynodi'r tebygolrwydd y bydd y dyrnaid yn cynnwys 8 cerdyn lliw yn union a dim âs, a boed i p_2 ddynodi'r tebygolrwydd y bydd y dyrnaid yn cynnwys 3 âs yn union a 6 cherdyn lliw yn union. Dangoswch fod $p_1/p_2 = 6/7$. [6]

3. (1987) Mae blwch yn cynnwys deg ceiniog. Mae pedair o'r ceiniogau yn rhai diduedd tra, ar gyfer pob un o'r chwe cheiniog arall, y tebygolrwydd o gael pen wrth eu taflu yw $\frac{1}{4}$.

(i) Mae un geiniog yn cael ei dewis ar hap o'r blwch a'i thaflu ddwywaith. Boed i A ddynodi'r digwyddiad fod y tafliad cyntaf yn rhoi pen a boed i B ddynodi'r digwyddiad fod yr ail dafliad yn rhoi pen. Dangoswch nad yw A a B yn annibynnol. [7]

(ii) Tybiwch, yn lle hynny, fod dwy geiniog yn cael eu dewis ar hap o blith y deg ceiniog yn y blwch ac yn cael eu taflu gyda'i gilydd unwaith.

(a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y ceir un pen ac un gynffon.

(b) O wybod y cafwyd un pen ac un gynffon cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod o leiaf un o'r ddwy geiniog a ddewiswyd yn ddarn arian diduedd. [8]

4. (1988) Dau ddigwyddiad yw A a B lle mae $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$, a $P(A|B) = 0.3$.

(i) Nodwch, gan roi rheswm, a yw A a B yn annibynnol. [1]

(ii) Darganfyddwch werthoedd $P(A \cup B)$ a $P(B|A)$. [3]

5. (1989) Tynnir tri cherdyn ar hap, heb eu rhoi yn ôl, o becyn o ddeg cerdyn. Mae chwech o'r cardiau yn y pecyn yn goch ac maent wedi'u rhifo o 1 i 6, yn ôl eu trefn, tra bo'r cardiau eraill yn las ac wedi'u rhifo o 1 i 4, yn ôl eu trefn. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd (i) dau gerdyn coch yn union yn cael eu tynnu, (ii) un rhif 2 yn union yn cael ei dynnu. [4]

6. (1989) (a) Dewisir pwyllgor o 9 person o blith grŵp o 13 person, y mae 7 ohonynt yn ddynion a 6 yn fenywod. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd mwy o fenywod nag o dynion yn cael eu dewis ym mhob un o'r achosion os

(i) gwneir y dewis ar hap,

(ii) gwneir y dewis ar hap ond yn amodol ar gael o leiaf 4 menyw ar y pwyllgor. [7]

(b) Tri digwyddiad yw A, B ac C lle mae

$$P(A)=\frac{1}{5},\ P(B)=\frac{1}{10},\ P(A\cup C)=\frac{7}{15},\ P(B\cup C)=\frac{23}{60},$$

ac mae digwyddiadau A ac C yn annibynnol.

(i) Dangoswch fod $P(C) = 1/3$.

(ii) Penderfynwch a yw B ac C yn annibynnol ai peidio.

(iii) O wybod hefyd fod A a B yn gyd-anghynhwysol, enrhifwch $P(A\cup B|C)$. [8]

7. (1990) Dau ddigwyddiad yw A a B lle mae $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, a $P(A\cap B) = 0.1$. Cyfrifwch (i) $P(A\cup B)$, (ii) $P(A'\cap B)$, (iii) y tebygolrwydd fod un yn union o'r ddau ddigwyddiad yn digwydd. [5]

8. (1990) Mae bag yn cynnwys naw pêl y mae pedair ohonynt yn goch, tair yn las a dwy yn wyn. Dewisir tair o'r peli hyn ar hap heb eu dychwelyd.

(i) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd un bêl o bob lliw yn cael eu dewis.

(ii) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd gan y tair pêl a ddewisir yr un lliw.

(iii) O wybod nad yw'r tair pêl a ddewiswyd o'r un lliw, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod dwy o'r peli a ddewiswyd yn goch. [7]

9. (1990) Defnyddir dau beiriant, A a B, er mwyn cynhyrchu eitemau unfath. Yn annibynnol ar gyfer pob eitem a gynhyrchir ar beiriant A y tebygolrwydd ei bod yn ddiffygiol yw 0.01, tra ar gyfer eitem a gynhyrchir ar beiriant B y tebygolrwydd cyfatebol yw 0.03.

O gyfanswm yr eitemau a gynhyrchir mewn diwrnod, cynhyrchir 60% ar beiriant A a 40% ar beiriant B.

(i) Os dewisir un eitem ar hap o blith cynnyrch y diwrnod, dangoswch fod y tebygolrwydd ei bod yn eitem anddiffygiol yn 0.982.

(ii) Dewisir dwy eitem ar hap o blith cynnyrch diwrnod a cheir bod y ddwy yn anddiffygiol. Cyfrifwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd amodol fod y naill eitem wedi'i chynhyrchu ar beiriant A a'r llall ar beiriant B. [7]

10. (1991) Dau ddigwyddiad yw A a B lle mae $P(A) = 0.6$, $P(A\cap B) = 0.2$ a $P(A\cup B)= 0.7$. Cyfrifwch (i) $P(B)$, (ii) $P(B'|A)$. [3]

11. (1991) Mae cwmni yswiriant sy'n cynnig polisïau i yrwyr ceir yn dosbarthu pob ymgeisydd yn risg uchel, risg canolig a risg isel. Yn annibynnol ar gyfer pob blwyddyn, y tebygolrwydd y bydd gyrrwr risg uchel yn cyflwyno cais yw 0.4; mae'r tebygolrwyddau cyfatebol ar gyfer gyrrwr risg canolig a gyrrwr risg isel yn

0.2 a 0.1, yn ôl eu trefn. Y cyfraneddau o'r dalwyr polisïau sydd wedi'u dosbarthu yn risg uchel, risg canolig a risg isel yw 0.3, 0.6 a 0.1, yn ôl eu trefn.

(i) Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd daliwr polisi a ddewisir ar hap yn cyflwyno cais mewn blwyddyn.

(ii) O wybod bod daliwr polisi a ddewiswyd ar hap wedi cyflwyno cais mewn un flwyddyn, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol ei fod yn yrrwr risg uchel.

(iii) Cyfrifwch y tebygolrwydd amodol y bydd daliwr polisi a ddewisir ar hap o blith y rhai sy'n cyflwyno cais mewn un flwyddyn hefyd yn cyflwyno cais y flwyddyn ganlynol. [8]

12. (1992) Mae blwch yn cynnwys 10 fideo gyda 6 ohonynt yn ffilmiau a 4 yn addysgol. Os dewisir 4 o'r fideos hyn ar hap cyfrifwch y tebygolrwyddau (i) y bydd y pedwar i gyd yn ffilmiau, (ii) y bydd dau yn ffilmiau a'r ddau arall yn addysgol. [3]

13. (1992) Mae gan ffatri dri pheiriant A, B ac C sy'n cynhyrchu math arbennig o eitem. Mewn diwrnod, cynhyrchir 50% o'r eitemau ar beiriant A, 30% ar B ac 20% ar C. Y tebygolrwydd y bydd eitem a ddewisir ar hap o blith y rhai a gynhyrchwyd ar beiriant A yn ddiffygiol yw 0.01, a'r tebygolrwyddau cyfatebol ar gyfer eitemau a gynhyrchwyd ar B ac C yw 0.02 a 0.03 yn ôl eu trefn.

(i) Os dewisir eitem ar hap o blith cynnyrch diwrnod, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd yn ddiffygiol.

(ii) O wybod bod dwy eitem a ddewiswyd ar hap o blith cynnyrch diwrnod wedi cael eu cynhyrchu ar yr un peiriant a bod y ddwy yn ddiffygiol, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod y ddwy eitem wedi'u cynhyrchu ar beiriant A. [5]

14. (1993) Mae A a B yn ddau ddigwyddiad sy'n gysylltiedig â haparbrawf lle, mewn unrhyw dreial o'r arbrawf, y tebygolrwydd y bydd A yn digwydd yw 0.8 a'r tebygolrwydd y bydd B yn digwydd yw 0.5.

(a) Mewn un treial o'r arbrawf, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd A a B yn digwydd.

(b) Mewn un treial o'r arbrawf, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd o leiaf un o blith A a B yn digwydd. [3]

15. (1994) Teflir dau ddis diduedd ar yr un pryd. Cyfrifwch y tebygolrwydd bod

(i) y sgoriau ar y ddau ddis yn 3 o leiaf,

(ii) gwahaniaeth o 2 rhwng y sgoriau. [4]

16. (1994) Mae blwch yn cynnwys 4 pêl goch a 2 bêl las. Dewisir hapsampl o 3 pêl o'r blwch. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod 2 bêl goch ac 1 bêl las yn cael eu dewis o wybod bod y dewis yn cael ei wneud (i) heb eu rhoi yn ôl, (ii) wrth eu dychwelyd bob tro. [4]

17. (1994) Mae'n hysbys bod 1% o'r boblogaeth yn dioddef o glefyd penodol. Mae prawf diagnostig ar gyfer y clefyd yn rhoi ymateb cadarnhaol gyda thebygolrwydd o 0.98 os yw'r clefyd yn bresennol. Os nad yw'r clefyd yn bresennol, y tebygolrwydd o gael ymateb cadarnhaol yw 0.005.

(a) Rhoddir y prawf i aelod o'r boblogaeth a ddewiswyd ar hap.

(i) Dangoswch mai 0.01475 yw'r tebygolrwydd o gael ymateb cadarnhaol.

(ii) O wybod y cafwyd ymateb cadarnhaol, cyfrifwch y tebygolrwydd fod y person yn dioddef o'r clefyd.

(b) Rhoddir y prawf i berson a ddewiswyd ar hap ac mae'r ymateb yn gadarnhaol. Rhoddir y prawf i'r person hwn eto. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod yr ail brawf hwn yn gadarnhaol. [7]

18. (1994) Tri digwyddiad yw A, B ac C lle mae

$$P(B) = \frac{1}{4},\ P(C) = \frac{1}{3},\ P(A \cup B) = \frac{3}{5},\ P(A \cup C) = \frac{2}{3}.$$

Mae'r digwyddiadau A, B yn annibynnol ac mae'r digwyddiadau B, C yn gyd-anghynhwysol.

(i) Darganfyddwch P(A).

(ii) Penderfynwch a yw A, C yn annibynnol ai peidio.

(iii) Dangoswch fod $P(B \cup C \mid A) = \dfrac{15}{28}$ [8]

19. (1995) Mae pwyllgor yn cynnwys 6 dyn a 4 menyw. Mae is-bwyllgor o 4 aelod i'w ffurfio a phenderfynir eu dewis ar hap. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod yr is-bwyllgor yn cynnwys o leiaf un dyn ac o leiaf un fenyw. [4]

20. (1995) Mae'r digwyddiadau A, B yn annibynnol. O wybod bod $P(A) = 0.2$ a $P(A \cup B) = 0.5$, cyfrifwch (a) P(B), (b) $P(A' \cap B')$, (c) $P(A|A \cup B)$. [5]

21. (S1 Ionawr 1996) Dau ddigwyddiad yw A a B lle mae $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.6$.

(a) Penderfynwch a yw A, B yn annibynnol ai peidio.

(b) Enrhifwch $P(B|A')$. [5]

22. (S1 Ionawr 1996) Defnyddir prawf diagnostig i ganfod clefyd penodol y mae'n hysbys ei fod yn effeithio ar 3% o'r boblogaeth. Pan roddir y prawf i berson sydd â'r clefyd, mae'n rhoi ymateb cadarnhaol gyda thebygolrwydd o 0.95; pan roddir ef i berson nad yw'n dioddef o'r clefyd, mae'n rhoi ymateb cadarnhaol gyda thebygolrwydd o 0.01. Rhoddir y prawf i aelod o'r boblogaeth a ddewiswyd ar hap.

(a) Cyfrifwch y tebygolrwydd y ceir ymateb cadarnhaol.

(b) O wybod y cafwyd ymateb cadarnhaol, cyfrifwch y tebygolrwydd fod y person yn dioddef o'r clefyd. [5]

23. (S1 Mehefin 1996) Dau ddigwyddiad annibynnol yw A a B lle mae

$P(A) = x$; $P(B) = y$; $P(A \cup B) = 0.58$; $P(A \cap B) = 0.12$.

(a) Ysgrifennwch ddau hafaliad sy'n cysylltu x ac y.

(b) O wybod bod A yn fwy tebygol o ddigwydd na B, darganfyddwch werth x. [4]

24. (A3 1996) Mae A a B yn ddigwyddiadau annibynnol sy'n gysylltiedig â haparbrawf. Rhoddir y tebygolrwyddau y bydd A, B yn digwydd mewn treial unigol o'r arbrawf gan

$P(A) = 0.3$; $P(B) = 0.4$.

(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd

(i) A a B yn digwydd mewn treial unigol,

(ii) un yn union o blith A neu B yn digwydd mewn treial unigol. [3]

25. (A3 Mehefin 1996) Mae clwb pêl-droed yn cyflwyno loteri wythnosol newydd. Mae cefnogwyr yn prynu cardiau ac yn nodi arnynt bedwar rhif gwahanol a ddewisir o blith y cyfanrifau 1, 2, 3,..., 20. Bob nos Sadwrn, tynnir pedair pêl ar hap, heb eu dychwelyd, o blith ugain pêl sydd wedi'u rhifo 1, 2, 3, . . ., 20, yn ôl eu trefn. Y rhifau ar y pedair pêl a ddewiswyd yw'r rhifau sy'n ennill. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd cefnogwr sy'n prynu un cerdyn yn cael

(a) 4 rhif sy'n ennill, (b) 2 rif sy'n ennill, mewn wythnos benodol. [5]

Pennod 4

Hapnewidynnau Arwahanol

4.1 Hapnewidynnau

Diffiniad. *Hapnewidyn* yw disgrifiad geiriol o reol ar gyfer neilltuo gwerth rhifiadol i bob canlyniad haparbrawf. Dynodir hapnewidyn gan briflythyren yn agos at ddiwedd yr wyddor (e.e. W, X, Y, Z), ac fe ddynodir gwerth mympwyol y sylwyd arno gan y llythyren fach gyfatebol (e.e. w, x, y, z).

Enghraifft 1

Ystyriwch yr haparbrawf lle caiff ceiniog ei thaflu deirgwaith. Y gofod sampl, mewn nodiant amlwg, yw

$$S = \{(PPP), (PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP), (CCC)\}.$$

Dau hapnewidyn posibl y gellir eu cysylltu â'r arbrawf hwn yw:

(1) X = nifer y pennau a deflir, llw mae $x = 0, 1, 2, 3$ yn dynodi'r gwerthoedd posibl.

(2) Y = y gwahaniaeth rhwng nifer y pennau a nifer y cynffonnau a deflir, lle mae $y = 1, 3$ yn dynodi'r gwerthoedd posibl.

Enghraifft 2

Ystyriwch yr haparbrawf lle caiff ceiniog ei thaflu nes ceir pen.

Boed i Z = nifer y tafliadau a wneir. Felly gwerthoedd posibl Z yw $z = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Enghraifft 3

Ystyriwch yr haparbrawf lle rhennir dyrnaid o 13 cerdyn o becyn cyffredin o gardiau chwarae. Dau hapnewidyn posibl yn yr achos hwn yw

(1) X = nifer y cardiau coch a rennir, lle mae $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 13$ yn dynodi'r gwerthoedd posibl.

(2) Y = nifer yr asau a rennir, lle mae $y = 0, 1, 2, 3, 4$ yn dynodi'r gwerthoedd posibl.

Ym mhob un o'r enghreifftiau uchod, gellir rhestru gwerthoedd posibl yr hapnewidyn yn unigol. Dywedir bod hapnewidyn o'r fath yn *arwahanol* a bydd y bennod hon yn cael ei chyfyngu i hapnewidynnau arwahanol. (Ystyriwn hapnewidynnau na ellir rhestru eu gwerthoedd posibl yn yr Uned nesaf, S2.)

Ymarfer 4.1

Ysgrifennwch holl werthoedd pob un o'r hapnewidynnau canlynol.

1. Nifer y pennau pan deflir ceiniog ddwywaith.

2. Nifer y bechgyn mewn teulu lle mae pedwar o blant.

3. Nifer y cardiau lliw (brenin, brenhines neu jac) mewn dyrnaid o 13 cerdyn a rennir o becyn cyffredin o gardiau chwarae.

4. Y sgôr uchaf a geir pan deflir dis ciwbigol deirgwaith.

5. Nifer y galwadau ffôn a wneir i ysgol mewn wythnos.

6. Sawl gwaith y teflir dis ciwbigol nes cael sgôr o 6.

4.2 Dosraniad hapnewidyn arwahanol

Ar ôl rhestru gwerthoedd posibl hapnewidyn, y cam nesaf yw penderfynu ar eu tebygolrwyddau o ddigwydd. Wrth wneud hyn, gwiriwch bob amser fod cyfanswm y tebygolrwyddau yn 1 (gan fod yn rhaid i un o'r gwerthoedd a restrir ddigwydd). Os yw x yn werth posibl yr hapnewidyn X ysgrifennwn $P(X = x)$ ar gyfer y tebygolrwydd mai x fydd gwerth X yr arsylwir arno. Cyfeirir at restr o holl werthoedd posibl X a'u tebygolrwyddau cyfatebol fel *dosraniad* X. (Yn fwy manwl gywir, *dosraniad tebygolrwydd* X ydyw gan fod un uned o debygolrwydd yn cael ei dosrannu dros bob gwerth posibl X.)

Enghraifft 1

Teflir darn arian diduedd deirgwaith. Darganfyddwch ddosraniad nifer y pennau a geir.

Datrysiad

Y gofod sampl ar gyfer canlyniadau'r tri thafliad yw

$$S = \{(PPP), (PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP), (CCC)\}$$

a chan fod y darn arian yn un diduedd mae'r 8 canlyniad hyn yn hafal debygol.
Boed i X ddynodi nifer y pennau a deflir; gwerthoedd posibl x yw x = 0, 1, 2, 3. Bydd X = 0 yn digwydd os na fydd pen yn cael ei daflu; hynny yw, os yw'r canlyniad yn (CCC). Mae'n dilyn bod P(X = 0) = 1/8.
Bydd X = 1 yn digwydd os caiff un pen ei daflu, hynny yw, os yw'r canlyniad yn un o blith (PCC), (CPC) neu (CCP), ac felly mae P(X = 1) = 3/8.
Yn yr un modd, ceir bod P(X = 2) = 3/8 a bod P(X = 3) = 1/8.
Gellir dangos dosraniad X yn yr achos hwn mewn tabl fel a ganlyn.

x	0	1	2	3
P(X = x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Sylwer bod cyfanswm y tebygolrwyddau yn 1 fel y dylent fod.

Enghraifft 2

Tynnir pedair pêl, heb eu dychwelyd, o fag sy'n cynnwys 7 pêl goch a 6 phêl las. Darganfyddwch ddosraniad nifer y peli coch a dynnir.

Datrysiad

Boed i X ddynodi nifer y peli coch a dynnir. Gwerthoedd posibl X yw x = 0, 1, 2, 3, 4.

$$P(X = 0) = P(4 \text{ pêl las}) = \binom{6}{4}\Big/\binom{13}{4} = \frac{15}{715} = \frac{3}{143},$$

$$P(X = 1) = P(3 \text{ pêl las ac 1 bêl goch}) = \binom{6}{3}\times\binom{7}{1}\Big/\binom{13}{4} = \frac{140}{715} = \frac{28}{143},$$

$$P(X = 2) = P(2 \text{ bêl las a 2 bêl goch}) = \binom{6}{2}\times\binom{7}{2}\Big/\binom{13}{4} = \frac{315}{715} = \frac{63}{143}$$

$$P(X = 3) = P(1 \text{ bêl las a 3 pêl goch}) = \binom{6}{1}\times\binom{7}{3}\Big/\binom{13}{4} = \frac{210}{715} = \frac{42}{143}$$

$$P(X = 4) = P(4 \text{ pêl goch}) = \binom{7}{4}\Big/\binom{13}{4} = \frac{35}{715} = \frac{7}{143}.$$

Dangosir dosraniad X yn y tabl canlynol.

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	$\frac{3}{143}$	$\frac{28}{143}$	$\frac{63}{143}$	$\frac{42}{143}$	$\frac{7}{143}$

(I wirio hyn rydym yn cadarnhau mai 1 yw cyfanswm y tebygolrwyddau.) Sylwer mai'r nifer mwyaf tebygol o beli coch fydd yn cael eu tynnu yw 2 oherwydd bod gan $X = 2$ y tebygolrwydd mwyaf o ddigwydd.

Dull arall o ateb Enghraifft 2 heb ddefnyddio cyfuniadau yn ffurfiol yw ystyried canlyniadau trefnedig. Ni fydd y digwyddiad $X = 0$ yn digwydd oni bai bod dilyniant y lliwiau a dynnir yn GGGG, lle mae G yn dynodi pêl las. Gan ddefnyddio'r rheol luoswm ar gyfer tebygolrwyddau ceir bod

$$P(X = 0) = \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{143}.$$

Bydd y digwyddiad $X = 1$ yn digwydd os bydd dilyniant y lliwiau yn unrhyw un o blith GGGC, GGCG, GCGG, CGGG, lle mae C yn dynodi pêl goch. Tebygolrwydd y dilyniant GGGC yw

$$\frac{6}{13} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{143}$$

Gwireddir yn hawdd bod gan bob un o'r tri dilyniant arall hefyd y tebygolrwydd hwn o ddigwydd (yr unig wahaniaeth fydd y drefn y mae'r rhifiaduron yn ymddangos). Felly mae

$$P(X = 1) = 4 \times \frac{7}{143} = \frac{28}{143}.$$

Rhoddir hyn fel ymarfer i chi ddangos bod y dull hwn yn rhoi gwerthoedd $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ a $P(X = 4)$ a ddangosir yn y tabl uchod.

Enghraifft 3

Darganfyddwch ddosraniad sawl tro y mae'n rhaid taflu dis diduedd nes bydd lluoswm 3 yn digwydd.

Datrysiad

Boed i Y ddynodi sawl tro y mae'r dis yn cael ei daflu nes bod lluoswm 3 yn digwydd. Gwerthoedd posibl Y yw $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Gan nad yw'n hysbys beth fydd gwerth mwyaf Y nid yw'n ymarferol enrhifo $P(Y = y)$ ar gyfer pob gwerth posibl Y. Yn lle hynny, ceisiwn ddarganfod mynegiad cyffredinol ar gyfer $P(Y = y)$, lle mae y yn werth mympwyol o Y.

Yna, bydd $Y = y$ yn digwydd os bydd pob un o'r $(y - 1)$ tafliad cyntaf yn rhoi sgôr nad yw'n lluoswm 3 ac os bydd yr y^{fed} tafliad yn rhoi sgôr sydd yn lluoswm 3. Gan fod y tafliadau yn annibynnol ac ym mhob tafliad y tebygolrwydd o gael sgôr sy'n lluoswm 3 (h.y. 3 neu 6) yw 1/3, mae'n dilyn bod

$$P(Y = y) = \left(\frac{2}{3}\right)^{y-1} \times \frac{1}{3}, \text{ ar gyfer } y = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Gellir gwireddu mai 1 yw cyfanswm y tebygolrwyddau hyn trwy ddefnyddio'r fformiwla ar gyfer cyfanswm cyfres geometrig sydd â'i therm cyntaf a = 1/3 a'i chymhareb gyffredin r = 2/3.

Ymarfer 4.2

1. Teflir dis ciwbigol diduedd ddwywaith. Darganfyddwch ddosraniad sawl tro y ceir 6.

2. Tynnir tair pêl ar hap, heb eu rhoi yn ôl, o flwch sy'n cynnwys 3 pêl wen a 9 pêl ddu. Darganfyddwch ddosraniad nifer y peli gwyn a gaiff eu tynnu.

3. Y tebygolrwydd y bydd diffyg ar eitem a fasgynhyrchir yw 0.01. Darganfyddwch ddosraniad nifer yr eitemau diffygiol mewn sampl o ddwy ohonynt.

4. Mae bag yn cynnwys 24 pêl ac mae 5 ohonynt yn goch. Tynnir hapsampl o 3 pêl o'r bag y naill ar ôl y llall. Darganfyddwch ddosraniad nifer y peli coch a gaiff eu tynnu ym mhob achos pan fydd

(a) y samplu yn digwydd heb ddychwelyd y peli,

(b) y peli yn cael eu dychwelyd.

5. Mae gan yr hapnewidyn arwahanol X y dosraniad a ddangosir yn y tabl isod. Darganfyddwch werth α.

x	0	1	2	3
P(X = x)	α	α^2	$\alpha^2 + \alpha$	$3\alpha^2 + 2\alpha$

6. Tynnir tair pêl ar hap, heb eu rhoi yn ôl, o flwch sy'n cynnwys 6 phêl goch, 3 pêl wen a 2 bêl las. Mae pob pêl goch a dynnir yn sgorio 2 bwynt, Mae pob pêl wen a dynnir yn sgorio 3 phwynt ac mae pob pêl las a dynnir yn sgorio 5 pwynt. Darganfyddwch ddosraniad cyfanswm y tair sgôr.

7. Pan deflir ceiniog dueddol, y tebygolrwydd o gael pen yw 0.4. Teflir y geiniog nes ceir pen. Darganfyddwch ddosraniad sawl tro y mae'r geiniog yn cael ei thaflu.

8. Mae pum amlen mewn blwch. Mae tair o'r amlenni hyn i gyd yn cynnwys 3 disg coch ac 1 disg gwyn tra bo'r ddwy amlen arall i gyd yn cynnwys 2 ddisg coch a 2 ddisg gwyn. Caiff dwy o'r amlenni eu dewis ar hap a thynnir un disg ar hap o bob un o'r amlenni a ddewiswyd. Darganfyddwch ddosraniad nifer y disgiau coch a dynnir.

9. Mewn ymchwiliad i ymddygiad anifeiliaid mae'n rhaid i lygoden ddewis rhwng pedwar drws tebyg. Mae un drws yn arwain at fwyd tra bo pob drws arall yn rhoi sioc drydanol wan i'r llygoden. Os bydd y llygoden yn dewis drws sy'n rhoi sioc drydanol iddi, caiff ei rhoi yn ôl yn y man cychwyn er mwyn gwneud yr arbrawf eto. Mae hyn yn parhau nes bydd y llygoden yn dewis y drws sy'n arwain at fwyd neu nes ei bod wedi cael pedwar ymgais os nad yw'n cael hyd i'r bwyd gyntaf. Boed i X ddynodi nifer yr ymgeision gan y llygoden. Darganfyddwch ddosraniad X ym mhob un o'r achosion canlynol.

(a) Ym mhob ymgais, mae'r llygoden yn hafal debygol o ddewis unrhyw un o blith y pedwar drws.

(b) Ym mhob ymgais, mae'r llygoden yn hafal debygol o ddewis unrhyw un o blith y drysau nad ydynt wedi'u dewis eisoes.

(c) Nid yw'r llygoden byth yn dewis yr un drws ddwywaith yn olynol. Ac eithrio hynny, mae'n dewis drws ar hap.

4.3 Gwerth disgwyliedig

Ystyriwch hapnewidyn arwahanol X sy'n gysylltiedig â haparbrawf penodol. Dynodwch werthoedd posibl X gan $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$. Tybiwch yr arsylwir bod X yn cymryd gwerth x_1 mewn n_1 o n treial annibynnol o'r arbrawf, gwerth x_2 mewn n_2 o'r treialon, … , a gwerth x_k mewn n_k o'r treialon, lle mae $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Gwerth *cyfartalog* neu *gymedrig* X yn yr n treial yw

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots n_kx_k}{n} = x_1R_n(x_1) + x_2R_n(x_2) + \cdots + x_kR_n(x_k)$$

lle, ar gyfer $i = 1, 2, \ldots, k$, mae $R_n(x_i)$ yn cynrychioli amledd cymharol gwerth x_i yn yr n treial. Trwy ganiatáu i n gynyddu yn amhenodol er mwyn i ni allu rhoi $p_i = P(X = x_i)$ yn lle $R_n(x_i)$, ceir y mynegiad canlynol ar gyfer gwerth cyfartalog (cymedrig) X yn y tymor hir

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k \equiv \sum_{i=1}^{k} x_iP(X = x_i), \qquad (1)$$

sef diffiniad o *werth disgwyliedig* X. Ysgrifennir hyn fel E(X).

Enghraifft 1

Darganfyddwch nifer disgwyliedig y pennau a geir pan deflir darn arian diduedd deirgwaith.

Datrysiad

Boed i X ddynodi nifer y pennau o geir. O Enghraifft 1 yn Adran 4.2, dangosir dosraniad X yn y tabl canlynol.

x	0	1	2	3
P(X = x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Trwy hyn, o (1), mae

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 1\frac{1}{2}.$$

Felly nifer disgwyliedig y pennau yw 1½. Sylwer bod hyn yn gwrthdaro â'n dehongliad arferol o'r gair 'disgwyliedig', gan ei bod yn sicr na fyddai neb yn rhoi'r ateb "1½" i'r cwestiwn "Sawl pen fyddech chi'n ei ddisgwyl wrth daflu ceiniog ddwywaith?". Mae'n bwysig sylweddoli mai gwerth cyfartalog X mewn nifer *amhenodol* o fawr o dreialon o'r haparbrawf dan sylw yw'r diffiniad uchod o E(X). Fel mae ein henghraifft yn dangos, nid yw gwerth E(X) o anghenraid yn gyfartal i un o werthoedd posibl X.

Sylwer bod y dosraniad uchod yn gymesurol o amgylch $x = 1½ = E(X)$. Mae'n wir bob amser bod E(X) yn hafal i gyfartaledd gwerthoedd posibl X (pwynt cymesuredd) ar gyfer hapnewidyn X y mae ei ddosraniad yn gymesurol.

Enghraifft 2

Tynnir pedair pêl ar hap, heb eu rhoi yn ôl, o fag sy'n cynnwys 7 pêl goch a 6 phêl las. Darganfyddwch nifer disgwyliedig y peli coch a dynnir.

Datrysiad

Boed i X ddynodi nifer y peli coch a dynnir. Dangoswyd yn Enghraifft 2 yn Adran 4.2 fod dosraniad X fel a ganlyn:

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	$\frac{3}{143}$	$\frac{28}{143}$	$\frac{63}{143}$	$\frac{42}{143}$	$\frac{7}{143}$

Felly, o (1) mae

$$E(X) = 0\times\frac{3}{143}+1\times\frac{28}{143}+2\times\frac{63}{143}+3\times\frac{42}{143}+4\times\frac{7}{143} = \frac{308}{143} = 2.154$$

yn gywir i dri lle degol.

Enghraifft 3

Darganfyddwch nifer disgwyliedig tafliadau dis diduedd a wneir nes ceir sgôr sy'n lluoswm 3.

Datrysiad

Boed i Y ddynodi nifer y tafliadau y mae eu hangen. Dangoswyd yn Enghraifft 3 yn Adran 4.2 mai dosraniad Y yw:

$P(Y = y) = pq^{y-1}$, ar gyfer $y = 1, 2, 3, 4, \ldots$, lle mae $p = 1/3$ a $q = 1 - p = 2/3$.

O (1) mae
$$\begin{aligned} E(Y) &= 1\times p + 2p\times q + 3p\times q^2 + 4p\times q^3 + \ldots, \\ &= p + 2pq + 3pq^2 + 4pq^3 + \ldots, \\ &= p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots) \\ &= p\frac{d}{dq}(q+q^2+q^3+q^4+\cdots) \end{aligned}$$

Mae'r gyfres mewn cromfachau yn gyfres geometrig anfeidraidd gyda'i therm cyntaf $a = q$ a'i chymhareb gyffredin $r = q$, a'i chyfanswm yw $q/(1-q)$.
Mae differu hwn mewn perthynas â q yn rhoi $1/(1-q)^2 = 1/p^2$.

Trwy hyn, mae $$E(Y) = p \times \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Yn yr enghraifft hon, $p = 1/3$, felly mae'n dilyn mai nifer disgwyliedig y tafliadau yw 3.

Ymarfer 4.3a

1. Darganfyddwch werth disgwyliedig X ar gyfer pob un o'r dosraniadau canlynol.

(a)

x	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(b)

x	0	1	2
$P(X=x)$	0.82	0.14	0.04

(c)

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(d)

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.1	0.3	p	0.2

(e)

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	α	α^2	$\alpha^2+\alpha$	$3\alpha^2+2\alpha$

2. 1 a 5 yw'r unig werthoedd posibl ar gyfer yr hapnewidyn X.
O wybod bod $E(X) = 4$, enrhifwch $P(X = 1)$.

3. Mae troellwr yn hafal debygol o roi sgôr o 1, 2, 3, neu 4. Mewn un troelliad mae chwaraewr yn colli 10c os 1 yw'r sgôr, yn ennill 3c os 3 yw'r sgôr, ac yn ennill 5c os 2 neu 4 yw'r sgôr. Darganfyddwch enillion disgwyliedig y chwaraewr am bob tro.

4. Mewn gêm mae chwaraewr yn talu 5c am gael taflu dis diduedd. Os yw'n taflu 6 mae'r chwaraewr yn derbyn 15c; os yw'n taflu odrif mae'n derbyn 5c; fel arall, nid yw'n derbyn dim. Dangoswch fod y gêm yn deg yn yr ystyr bod enillion disgwyliedig y chwaraewr am bob tafliad yn sero.

5. Mae gan berson set o dair allwedd. Dim ond un o'r allweddi sy'n agor clo'r drws y mae'r person yn dymuno ei ddatgloi. Mae'r person yn dewis un allwedd ar hap ac yn rhoi cynnig arni. Os dewiswyd allwedd anghywir, mae'r person yn dewis un o blith y ddwy allwedd arall ar hap. Darganfyddwch nifer disgwyliedig yr allweddi y mae'r person yn rhoi cynnig arnynt er mwyn agor y drws.

6. Mae torllwyth o 8 llygoden yn cynnwys 3 sy'n fenywol a 5 sy'n wrywol. Os cymerir hapsampl o bedair llygoden o'r dorllwyth, darganfyddwch nifer disgwyliedig y llygod benywol yn y sampl.

7. Mae blwch yn cynnwys 4 pêl wen a 6 phêl ddu.

(a) Os tynnir hapsampl o 3 pêl, heb eu rhoi yn ôl, o'r blwch darganfyddwch nifer disgwyliedig y peli du a dynnir.

(b) Os tynnir peli o'r blwch y naill ar ôl y llall, heb eu rhoi yn ôl, nes tynnir pêl ddu, darganfyddwch nifer disgwyliedig y peli a dynnir.

8. Mae pwyllgor yn cynnwys 12 dyn ac 8 menyw. Dewisir pedwar o blith y rhain ar hap er mwyn ffurfio is-bwyllgor. Darganfyddwch nifer disgwyliedig y menywod ar yr is-bwyllgor.

9. Mewn unrhyw fis, mae gan nifer, X, cwsmeriaid gwerthwr papurau newydd a fydd yn prynu cylchgrawn misol arbenigol y dosraniad canlynol.

x	3	4	5	6
P(X = x)	0.4	0.3	0.2	0.1

Mae'r siopwr yn talu 50c am bob copi a'i werthu am £1. Ar ddiwedd y mis mae'n rhaid iddo daflu unrhyw gopïau nad ydynt wedi'u gwerthu. Mae'r siopwr yn archebu ymlaen llaw nifer y copïau y bydd yn eu derbyn bob mis. Darganfyddwch faint o gopïau y dylai eu harchebu bob mis er mwyn cael yr elw disgwyliedig mwyaf o werthu'r cylchgrawn.

Gwerth disgwyliedig ffwythiant hapnewidyn

Boed i h(X) ddynodi ffwythiant yr hapnewidyn arwahanol X y mae ei ddosraniad

$$P(X = x_i) = p_i \text{ , ar gyfer } i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Diffiniad. Diffinnir *gwerth disgwyliedig* h(X) fel

$$E[h(X)] = h(x_1)p_1 + h(x_2)p_2 + h(x_3)p_3 + \cdots + h(x_k)p_k \equiv \sum_{i=1}^{k} h(x_i)p_i\,. \qquad (2)$$

Noder pan fo h(X) = X bod hyn yn lleihau i'r mynegiad ar gyfer E(X).
Dyma rai enghreifftiau eraill.

$$E(X^2) = x_1^2 \times p_1 + x_2^2 \times p_2 + x_3^2 \times p_3 + \cdots + x_k^2 \times p_k$$
$$E(3X - 1) = (3x_1 - 1) \times p_1 + (3x_2 - 1) \times p_2 + \dots + (3x_k - 1) \times p_k$$

Enghraifft 4

Darganfyddwch werth disgwyliedig lluoswm nifer y pennau a nifer y cynffonnau a geir pan deflir darn arian diduedd deirgwaith.

Datrysiad

Boed i X ddynodi nifer y pennau yn y tri thafliad, ac felly nifer y cynffonnau a deflir yw (3 – X). Lluoswm nifer y pennau a nifer y cynffonnau yw Y = X(3 – X). Rydym am ddarganfod E(Y).

O Enghraifft 1 yn Adran 4.2, dosraniad X yw:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Gan ddefnyddio (2), mae

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \times (3-1) \times \frac{1}{8} + 1 \times (3-1) \times \frac{3}{8} + 2 \times (3-2) \times \frac{3}{8} + 3 \times (3-3) \times \frac{1}{8} \\ &= 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 1\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

[Neu fel arall, gellid darganfod $E(Y)$ trwy olrhain dosraniad Y o ddosraniad X yn gyntaf; gadewir hyn i chi fel ymarfer.]

Priodwedd ddefnyddiol yn perthyn i E

Boed i c_1 a c_2 ddynodi cysonion a boed i $h_1(X)$ a $h_2(X)$ ddynodi unrhyw ddau ffwythiant o X. Yna mae

$$E[c_1h_1(X) + c_2h_2(X)] = c_1E[h_1(X)] + c_2E[h_2(X)], \qquad (3)$$

a ellir ei estyn yn rhwydd i gyfuniad llinol o dri neu ragor o ffwythiannau o X. Mae'r achosion penodol canlynol yn haeddu sylw.

(1) Gydag $c_1 = c$ (cysonyn), $h_1(X) = 1$, ac $c_2 = 0$, mae'r hafaliad uchod yn lleihau i $E(c) = c$; mae'n amlwg bod hyn yn wir o gofio bod E yn werth cyfartalog tymor hir.

(2) Gydag $c_1 = a$, $h_1(X) = X$, $c_2 = b$ ac $h_2(X) = 1$, lle mae a a b yn gysonion, ceir bod $E(aX + b) = aE(X) + b$; e.e. $E(5X - 3) = 5E(X) - 3$.

Mae'r enghreifftiau canlynol yn dangos rhai achosion arbennig arall o hafaliad (3):

$$E(2X^2 + 3X) = 2E(X^2) + 3E(X),$$

$$E[(2X-3)^2] \equiv E(4X^2 - 12X + 9) = 4E(X^2) - 12E(X) + 9.$$

Nawr profwn hafaliad (3). Tybiwch fod gan X y dosraniad

$$P(X = x_i) = p_i \text{ , ar gyfer } i = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

O'r diffiniad a roddwyd uchod, ceir bod

$$\begin{aligned} E[c_1h_1(X) + c_2h_2(X)] &= \sum_{i=1}^{k}[c_1h_1(x_i) + c_1h_2(x_i)]p_i \\ &= c_1\sum h_1(x_i)p_i + c_2\sum h_2(x_i)p_i \\ &= c_1E[h_1(X)] + c_2E[h_2(X)]. \end{aligned}$$

Nawr mae gennym ddull arall o ateb Enghraifft 4. Yn yr enghraifft honno roedd arnom angen gwerth disgwyliedig $Y = X(3 - X)$; X yw nifer y pennau mewn tri thafliad o ddarn arian diduedd. O'r briodwedd uchod ceir bod

$$E(Y) = E[X(3 - X)] = E(3X - X^2) = 3E(X) - E(X^2).$$

Darganfuwyd eisoes fod E(X) = 1½ yn Enghraifft 1. Gan ddefnyddio dosraniad X fel a roddwyd yn Enghraifft 4, ceir bod

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3.$$

Trwy hyn, mae

$$E(Y) = 3E(X) - E(X^2) = 4\tfrac{1}{2} - 3 = 1\tfrac{1}{2},$$

fel a gafwyd yn Enghraifft 4.

Ymarfer 4.3b

1. Defnyddiwch y briodwedd uchod o eiddo E i ehangu (a) $E(2X - 1)$, (b) $E(3 - 2X)$, (c) $E(3X^2 - 5X)$, (d) $E[X(2X - 3)]$, (e) $E[(X - 1)(2X + 3)]$.

2. Ar gyfer pob un o'r dosraniadau yn Enghreifftiau 1 a 2 uchod gwireddwch fod $E(X^2) \neq [E(X)]^2$.

3. Mae gan yr hapnewidyn X werthoedd posibl $x = 0, 1, 2$. O wybod bod $P(X = 0) = P(X = 1) = p$ a bod $E(X^2) = E(X)$, darganfyddwch werth p.

4. Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad

$$P(X = x) = \frac{3x+1}{22}, \text{ for } x = 0, 1, 2, 3.$$

Darganfyddwch werthoedd (a) $E(X)$, (b) $E(X^2)$, (c) $E(2X^2 - 3X + 1)$.

5. Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad canlynol

x	1	2	3	4
P(X = x)	0.1	0.4	0.3	0.2

(a) Gwireddwch fod $E\left(\frac{1}{X}\right) \neq \frac{1}{E(X)}$, (b) Enrhifwch $E(2X^2 - X + \frac{2}{X})$.

6. Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad

x	1	4	9
P(X = x)	0.1	0.4	0.5

Enrhifwch (a) $E(X^2)$, (b) $E(X^{1/2})$

7. Tynnir 3 pêl ar hap, heb eu dychwelyd, o flwch sy'n cynnwys 3 pêl goch a 6 phêl las. Darganfyddwch werth disgwyliedig lluoswm y niferoedd o beli coch a pheli glas a dynnir.

4.4 Cymedr ac amrywiant dosraniad

Dwy briodwedd ddefnyddiol sydd gan ddosraniad yw:

(1) *mesur lleoliad*, neu *fesur canolog*, sy'n dangos lle mae'r dosraniad ar linell raddedig,

(2) *mesur lledaeniad,* neu *wasgariant,* sy'n dangos gwasgariad y dosraniad.

Defnyddir y *cymedr* fel ein mesur lleoliad, sef yn syml gwerth E(X), gwerth cyfartalog tymor hir X, ac fe ddynodir y cymedr gan y llythyren Roegaidd μ.

Defnyddir y *gwyriad safonol* fel ein mesur lledaeniad. Cyn diffinio'r gwyriad safonol, ystyriwn yn gyntaf *amrywiant* dosraniad.

Diffiniad. Diffinnir *amrywiant* dosraniad fel

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] \tag{1}$$

a ddynodir gan σ^2; σ yw'r llythyren Roeg 'sigma'.

Os oes gan X y dosraniad

$$P(X = x_i) = p_i \text{, ar gyfer } i = 1, 2, 3, \dots , k,$$

a'r cymedr E(X) = μ, yna o hafaliad (2) yn Adran 4.3,

$$\mathrm{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_k - \mu)^2 p_k . \tag{2}$$

Os oes gan X unedau mesur (e.e. cm) yna sgwâr unedau X a fydd gan Var(X) (e.e. cm^2). Oherwydd hyn, cymerir ail isradd positif Var(X) fel y mesur gwasgariant gan amlaf ac fe ddiffinnir yr isradd hwn fel *gwyriad safonol* y dosraniad, a ddynodir gan GS(X) neu σ.

Enghraifft 1

Darganfyddwch wyriad safonol yr hapnewidyn X sydd â dosraniad fel a ganlyn.

x	1	2	3	4
P(X = x)	0.1	0.4	0.3	0.2

Datrysiad

Yn gyntaf darganfyddwn werth μ = E(X).

$$E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 2.6 .$$

Gan ddefnyddio hafaliad (2) ceir bod

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= (1 - 2.6)^2 \times 0.1 + (2 - 2.6)^2 \times 0.4 + (3 - 2.6)^2 \times 0.3 + (4 - 2.6)^2 \times 0.2 \\ &= 2.56 \times 0.1 + 0.36 \times 0.4 + 0.16 \times 0.3 + 1.96 \times 0.2 = 0.84.\end{aligned}$$

Y gwyriad safonol yw

$$GS(X) = \sqrt{0.84} = 0.9165\text{, yn gywir i bedwar lle degol.}$$

Wrth ehangu hafaliad (1) ceir bod

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2, \text{ gan fod } \mu \text{ yn gysonyn.}\end{aligned}$$

Wrth roi E(X) yn lle μ, a symleiddio, ceir bod

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \qquad (3)$$

sef fformiwla sydd yn aml yn fwy cyfleus ar gyfer darganfod amrywiant, yn enwedig pan nad yw E(X) yn gyfanrif, fel yn achos Enghraifft 1 uchod (er bod X yn gorfod cymryd gwerthoedd cyfannol).

O'r dosraniad yn Enghraifft 1 ceir bod

$$E(X^2) = 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.4 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.2 = 7.6.$$

Gan ddefnyddio hafaliad (3) a'r gwerth E(X) = 2.6 a gafwyd uchod, mae

$$\mathrm{Var}(X) = 7.6 - 2.6^2 = 0.84,$$

fel a gafwyd gan ddefnyddio hafaliad (1) yn Enghraifft 1.

Enghraifft 2

Tynnir pedair pêl ar hap, heb eu rhoi yn ôl, o fag sy'n cynnwys 7 pêl goch a 6 phêl las. Darganfyddwch ddosraniad nifer y peli coch a dynnir a dewch o hyd i gymedr a gwyriad safonol y dosraniad.

Datrysiad

O Enghraifft 2 yn Adran 4.2 mae dosraniad X = nifer y peli coch a dynnir fel a ganlyn.

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	$\frac{3}{143}$	$\frac{28}{143}$	$\frac{63}{143}$	$\frac{42}{143}$	$\frac{7}{143}$

Yn Enghraifft 2 yn Adran 4.3 dangoswyd bod E(X) = 308/143 = 28/13.

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{143} + 1^2 \times \frac{28}{143} + 2^2 \times \frac{63}{143} + 3^2 \times \frac{42}{143} + 4^2 \times \frac{7}{143} = \frac{770}{143} = \frac{70}{13}.$$

Gan ddefnyddio hafaliad (3) ceir bod

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{70}{13} - \left(\frac{28}{13}\right)^2 = \frac{126}{169},$$

a'r gwyriad safonol yw

$$GS(X) = \sqrt{(126/169)} = 0.863, \text{ yn gywir i dri lle degol.}$$

Enghraifft 3

Mae gan yr hapnewidyn X gymedr 8.4 a gwyriad safonol 2.4. Darganfyddwch werth $E(X^2)$.

Datrysiad

Gan ddefnyddio hafaliad (3) ceir bod

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 .$$

Gan roi'r gwerthoedd a roddir ar gyfer E(X) a GS(X),

$$2.4^2 = E(X^2) - 8.4^2$$

ac felly mae

$$E(X^2) = 2.4^2 + 8.4^2 = 76.32.$$

Ymarfer 4.4a

1. Darganfyddwch y cymedr ac, i dri ffigur ystyrlon, y gwyriad safonol ar gyfer pob un o'r dosraniadau canlynol.

(a)

x	1	2	3
P(X = x)	0.2	0.4	0.4

(b)

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	0.1	0.1	0.3	0.3	0.2

(c)

x	5	10	15	20
P(X = x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

(d) $P(X = x) = kx^3$, $x = 1, 2, 3, 4$.

2. Mae blwch yn cynnwys 3 pêl goch a 6 phêl wen.

(a) Tynnir tair pêl o'r blwch ar hap, heb eu dychwelyd. Boed i X ddynodi nifer y peli coch a dynnir. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant X.

(b) Yn lle hynny, tynnir peli o'r blwch ar hap y naill ar ôl y llall, heb eu dychwelyd, nes caiff pêl wen ei thynnu. Boed i Y ddynodi nifer y peli a dynnir. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant Y.

3. Mae bag yn cynnwys pum cerdyn wedi'u rhifo o 1 i 5, yn ôl eu trefn. Tynnir tri cherdyn o'r bag ar hap, heb eu dychwelyd. Darganfyddwch gymedr a amrywiant y **mwyaf** o'r rhifau a dynnir.

4. Mewn gêm, mae chwaraewr yn taflu darn arian diduedd ac yna ddis ciwbigol diduedd. Os caiff gynffon ar y darn arian, ei sgôr yw'r rhif ar y dis, ond os caiff ben, ei sgôr yw dwywaith y rhif ar y dis. Darganfyddwch gymedr ac, i dri ffigur ystyrlon, wyriad safonol sgôr y chwaraewr.

5. Mae gan yr hapnewidyn X gymedr 20.7 a gwyriad safonol 3.5. Darganfyddwch werth $E(X^2)$.

Cymedr a amrywiant ffwythiant llinol

Ystyriwch yr hapnewidyn $Y = aX + b$, lle mae a a b yn gysonion, ac y dosrennir X gyda chymedr E(X) ac amrywiant Var(X). Beth yw cymedr ac amrywiant Y? Pe byddem yn gwybod dosraniad X yn llwyr gallem ddiddwytho dosraniad Y a'i ddefnyddio i ddarganfod E(Y) a Var(Y). Fel mae'n digwydd gallwn ddarganfod cymedr ac amrywiant Y heb wybod ei ddosraniad. Gan ddefnyddio priodweddau E a roddwyd yn Adran 4.3, cymedr Y yw

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Trwy ei ddiffiniad, amrywiant Y yw

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [a^2E^2(X) + 2abE(X) + b^2] \\ &= a^2[E(X^2) - E^2(X)] = a^2Var(X). \end{aligned}$$

Er enghraifft:

(a) Os yw $Y = 2X - 3$, yna mae $E(Y) = 2E(X) - 3$, ac mae $Var(Y) = 4Var(X)$.

(b) Os yw $W = 5 - 6X$, yna mae $E(W) = 5 - 6E(X)$ ac mae $Var(W) = 36Var(X)$.

Enghraifft 4

Wrth gyfeirio at Enghraifft 2 uchod tybiwch fod pob un o'r peli coch a dynnir yn sgorio 2 bwynt a bod pob pêl las a dynnir yn sgorio 4 pwynt. Darganfyddwch gymedr ac amrywiant gyfanswm y sgôr ar gyfer y pedair pêl a dynnir.

Datrysiad

Boed i X ddynodi nifer y peli coch a dynnir. Felly nifer y peli glas a dynnir yw $4 - X$ a chyfanswm y sgôr ar gyfer y pedair pêl yw

$$T = 2X + 4(4 - X) = 16 - 2X$$

Gan ddefnyddio canlyniadau a gafwyd eisoes ar gyfer E(X) a Var(X), mae

$$E(T) = 16 - 2E(X) = 16 - 2 \times \frac{28}{13} = \frac{152}{13},$$

$$Var(T) = 4\,Var(X) = 4 \times \frac{126}{169} = \frac{504}{169}.$$

Ymarfer 4.4b

1. Mae gan yr hapnewidyn X gymedr 10 a gwyriad safonol 2. Darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol (a) $Y = X + 1$, (b) $Z = 2X$, (c) $W = 3X - 5$, (d) $T = 1 - 2X$, (e) $U = \frac{1}{2}(X - 2)$.

2. Mae gan yr hapnewidyn X gymedr 8 a gwyriad safonol 4. Darganfyddwch werthoedd a a b os oes gan $Y = aX + b$ gymedr sero a gwyriad safonol 1.

3. Telir i werthwr ceir gyflog wythnosol sefydlog o £180 yr wythnos ynghyd â chomisiwn o £120 am bob car y mae'n ei werthu. Mae nifer y ceir newydd a werthir bob wythnos gan y person hwn yn hapnewidyn arwahanol sydd â chymedr 1.96 a gwyriad safonol 1.48. Darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol enillion wythnosol y gwerthwr.

4. Tynnir tair pêl ar hap, heb eu rhoi yn ôl, o flwch sy'n cynnwys 3 pêl goch a 7 pêl wen. Boed i X ddynodi nifer y peli coch a dynnir. Cyfrifwch gymedr a gwyriad safonol X. Os bydd pob pêl goch a dynnir yn sgorio 3 phwynt a phob pêl wen a dynnir yn sgorio 1 pwynt, diddwythwch gymedr a gwyriad safonol cyfanswm y sgôr ar gyfer y tair pêl a dynnir.

5. Mewn papur prawf aml-ddewis mae 50 cwestiwn. Mae'r nifer a atebir yn gywir yn hapnewidyn arwahanol sydd â chymedr 22 a gwyriad safonol 4. Mae pob ateb cywir yn ennill 4 marc ac fe dynnir 1 marc am bob ateb anghywir ac am bob cwestiwn na roddir cynnig arno. Darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol y marciau a geir.

6. Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad canlynol:

$$P(X = x) = kx^2, \quad \text{ar gyfer } x = 1, 2, 3,$$
$$P(X = x) = k(7 - x)^2, \quad \text{ar gyfer } x = 4, 5, 6.$$

Darganfyddwch gymedr ac amrywiant X. Diddwythwch gymedr ac amrywiant (a) $Y = 2X - 1$, (b) $W = 2(4 - X)$.

7. Ar gyfer hapnewidyn X mae $E(X) = 1$ ac mae $E[X(X - 1)] = 4$. Enrhifwch (a) $\mathrm{Var}(X)$, (b) $\mathrm{Var}(2 - 3X)$.

4.5 Y dosraniad binomaidd

Ystyriwch haparbrawf gyda dau ganlyniad posibl yn unig; cyfeirir yn aml at y prawf hwn fel *treial Bernoulli*. Gelwir y naill o'r canlyniadau yn Ll, sef 'llwyddiant', a'r llall yn M, sef 'methiant'. Boed i p fod y tebygolrwydd o lwyddiant ym mhob treial (perfformiad) o'r arbrawf. [Mae taflu ceiniog yn enghraifft o arbrawf o'r fath; os yw'r geiniog yn deg ac os ystyrir cael pen yn llwyddiant, yna mae $p = \frac{1}{2}$.] Boed i X ddynodi nifer y llwyddiannau a geir mewn n treial annibynnol o'r arbrawf. Mae gan ddosraniad

X ffurf safonol a elwir yn *ddosraniad binomaidd.* Cyn i ni olrhain y dosraniad hwn, ystyriwn rai enghreifftiau.

Enghraifft 1

Ar gyfer haparbrawf lle mae'r tebygolrwydd o lwyddiant yn p ym mhob treial, darganfyddwch ddosraniad nifer y llwyddiannau mewn (a) tri threial annibynnol, (b) pum treial annibynnol.

Datrysiad

(a) Boed i X ddynodi nifer y llwyddiannau mewn tri threial. Gwerthoedd posibl X yw $x = 0, 1, 2$ a 3.

Ni fydd $X = 0$ yn digwydd oni bai fod pob un o'r tri threial yn rhoi methiant. Gan mai tebygolrwydd methiant mewn unrhyw dreial yw $q = 1 - p$, a chan fod y treialon yn annibynnol, mae $P(X = 0) = q \times q \times q = q^3$.

Bydd $X = 1$ yn digwydd os bydd un treial yn rhoi llwyddiant a'r ddau arall yn rhoi methiant. Y posibiliadau trefnedig yw (LlMM), (MLlM), ac (MMLl). Tebygolrwydd pob un o'r rhain yw pq^2, ac felly mae $P(X = 1) = 3pq^2$.

Bydd $X = 2$ yn digwydd os bydd y canlyniad trefnedig yn un o blith (LlLlM), (LlMLl), ac (MLlLl), a thebygolrwydd pob un o'r rhain yw p^2q, ac felly mae $P(X = 2) = 3p^2q$.

Yn olaf, bydd $X = 3$ yn digwydd os (LlLlLl) yw'r canlyniad trefnedig, ac felly mae $P(X = 3) = p^3$. Felly, mae dosraniad X fel a ganlyn:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Sylwer mai'r termau olynol yn ehangiad binomaidd $(q + p)^3$ yw'r pedwar tebygolrwydd a'u cyfanswm yw 1 (gan fod $p + q = 1$).

(b) Boed i X ddynodi nifer y llwyddiannau mewn pum treial. Gwerthoedd posibl yr X hwn yw $x = 0, 1, 2, 3, 4$, a 5.

Bydd $X = 0$ yn digwydd os bydd pob un o'r pum treial yn rhoi methiant, ac felly mae $P(X = 0) = q^5$.

Bydd $X = 1$ yn digwydd os bydd pedwar o'r treialon yn rhoi methiant ac un yn rhoi llwyddiant. Mae nifer y canlyniadau trefnedig sy'n rhoi $X = 1$ yn cyfateb i nifer y ffyrdd o ddewis un methiant o blith y pum treial, sef $\binom{5}{1} = 5$. Tebygolrwydd pob un o'r rhain yw lluoswm un p a phedwar q, sef pq^4, ac felly mae $P(X = 1) = 5pq^4$.

Bydd $X = 2$ yn digwydd os bydd y canlyniad trefnedig yn cynnwys dau lwyddiant a thri methiant. Nifer y canlyniadau o'r fath yw $\binom{5}{2} = 10$, a thebygolrwydd pob un ohonynt yw p^2q^3, ac felly $P(X = 2) = 10p^2q^3$.

Yn yr un modd ceir bod

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}p^3q^2 = 10p^3q^2,$$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4}p^4q = 5p^4q \quad \text{a} \quad P(X = 5) = p^5.$$

Felly, y tebygolrwyddau fod X yn cymryd y gwerthoedd 0, 1, 2, 3 4, 5 yw, yn ôl eu trefn,

$$q^5,\ 5pq^4,\ 10p^2q^3,\ 10p^3q^2,\ 5p^4q,\ p^5,$$

sef y termau olynol yn ehangiad binomaidd $(q + p)^5$.

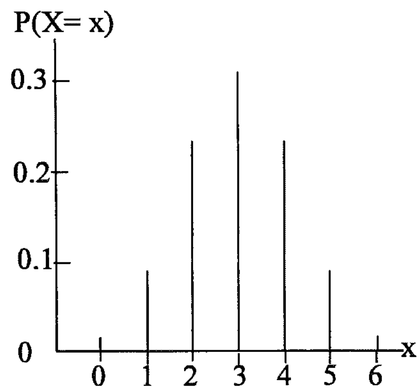
Ystyriwch nawr yr achos cyffredinol lle mae X yn dynodi nifer y llwyddiannau mewn n treial annibynnol. Gwerthoedd posibl X yw $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Boed i x fod yn unrhyw un o'r gwerthoedd hyn. Felly bydd $X = x$ yn digwydd os bydd y canlyniad trefnedig yn cynnwys x llwyddiant ac $(n - x)$ methiant. Nifer y canlyniadau o'r fath yw $\binom{n}{x}$. Bydd pob canlyniad o'r fath yn cynnwys Ll yn digwydd x gwaith ac M yn digwydd $(n - x)$ gwaith. Gan mai tebygolrwydd pob Ll yw p a thebygolrwydd pob M yw $q = 1 - p$, tebygolrwydd cael un o'r canlyniadau trefnedig hyn yw p^xq^{n-x}. Felly, dosraniad X yw:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}p^xq^{n-x}, \text{ ar gyfer } x = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

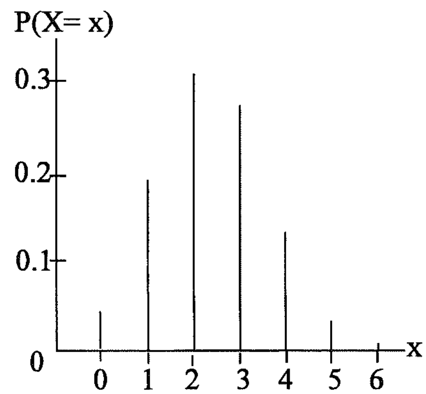
Y tebygolrwyddau yn hafaliad (1) yw'r termau olynol yn ehangiad $(q + p)^n$ a'u cyfanswm yw 1. Dywedir bod hapnewidyn X gyda'r dosraniad a roddir yn hafaliad (1) *wedi ei ddosrannu'n finomaidd* gydag indecs n a thebygolrwydd llwyddiant p. Talfyriad ar gyfer hyn yw X~B(n, p), lle mae X~ yn golygu "mae gan X y dosraniad". Pan fydd $p = q = ½$, bydd hafaliad (1) yn lleihau i

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

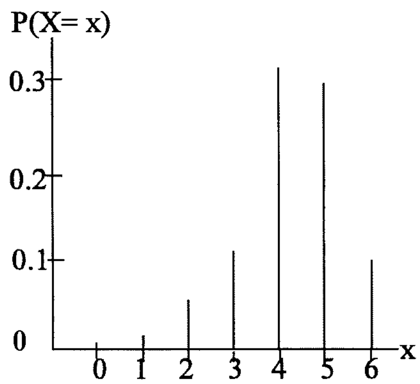
Gan fod $\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$ mae'r dosraniad hwn yn gymesurol o amgylch y canolwerth $x = \frac{1}{2}n$. Darlunnir hyn yn Ffigur 1 ar gyfer y dosraniad B(6, 0.5). Ar gyfer $p \neq 0.5$, bydd y dosraniad B(n, p) yn sgiw, fel a ddarlunnir yn Ffigurau 2 a 3 ar gyfer y dosraniadau B(6, 0.4) a B(6, 0.7).



Ffigur 1: B(6, 0.5)



Ffigur 2: B(6, 0.4)



Ffigur 3: B(6, 0.7)

Enghraifft 2

Darganfyddwch y tebygolrwydd y ceir sgôr o 6 mewn 12 tafliad o ddis diduedd (a) ddwywaith yn union, (b) o leiaf ddwywaith.

Datrysiad

Gan fod y dis yn ddiduedd, y tebygolrwydd o gael 6 ar unrhyw dafliad yw 1/6. Boed i X ddynodi sawl tro y ceir 6 mewn 12 tafliad o'r dis. Felly mae gan X y dosraniad binomaidd $B\left(12, \frac{1}{6}\right)$; hynny yw mae

$$P(X = x) = \binom{12}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{12-x}, \text{ ar gyfer } x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 12.$$

(a) $$P(X = 2) = \binom{12}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \frac{66 \times 5^{10}}{6^{12}} = 0.296,$$

yn gywir i dri lle degol.

(b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots + P(X = 12)$.

Yn yr achos hwn mae'n haws o lawer darganfod tebygolrwydd y digwyddiad cyflenwol a defnyddio

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}$$

$$= 1 - \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\right\}$$

$= 1 - 0.381 = 0.619$, yn gywir i dri lle degol.

Ymarfer 4.5a

1. Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad B(n, p). Ar gyfer pob un o'r achosion pan fydd (a) $n = 6$, $p = 0.4$ a (b) $n = 8$, $p = 0.3$, cyfrifwch, yn gywir i dri lle degol, werthoedd (i) $P(X = 3)$, (ii) $P(X \geq 3)$.

2. Teflir darn arian diduedd ddeg gwaith. Cyfrifwch y tebygolrwyddau, yn gywir i dri lle degol, o gael (a) dau ben yn union, (b) dau ben ar y mwyaf, (c) o leiaf ddau ben, (d) rhagor na dau ben.

3. Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd o daflu o leiaf dau 6 mewn pum tafliad o ddis diduedd. Darganfyddwch hefyd y nifer mwyaf tebygol o 6au a deflir.

4. A bwrw bod pob plentyn mewn teulu o dri o blant yn hafal debygol o fod yn fachgen neu'n ferch, cyfrifwch y tebygolrwyddau y bydd gan deulu sydd â thri o blant (a) un bachgen yn union, (b) o leiaf un bachgen, (c) o leiaf dau fachgen.

5. Mae 8 cwestiwn ar bapur prawf aml-ddewis, ac mae pob un yn cynnig pedwar ateb posibl gydag un unig ohonynt yn gywir. Ar gyfer ymgeisydd sy'n dyfalu'r ateb i bob cwestiwn, cyfrifwch y tebygolrwyddau y bydd yn ateb yn gywir
(a) 3 chwestiwn yn unig, (b) o leiaf 6 chwestiwn.

6. Wrth daflu ceiniog dueddol y tebygolrwydd o gael pen yw 2/3. Teflir y geiniog bum gwaith. Darganfyddwch y tebygolrwyddau y bydd nifer y pennau a deflir (a) yn 3 yn union, (b) yn fwy na 3.

7. Yn annibynnol ar gyfer pob ergyd sy'n cael ei thanio at darged gan berson penodol y tebygolrwydd y bydd yr ergyd yn taro'r targed yw 0.75. Os bydd y person yn tanio 7 ergyd, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd (a) 3 yn union yn taro'r targed, (b) 3 ar y mwyaf yn taro'r targed.

8. Y tebygolrwydd y bydd bwlb planhigyn tiwlip a ddewisir ar hap yn cynhyrchu blodyn melyn yw 0.7. Darganfyddwch y tebygolrwyddau y bydd 10 bwlb a ddewisir ar hap yn cynhyrchu(a) 6 blodyn melyn yn union, (b) o leiaf 8 blodyn melyn. Rhowch eich atebion yn gywir i 3 lle degol.

9. Mae dau berson yn taflu tair ceiniog ddiduedd yr un. Darganfyddwch y tebygolrwydd y byddant yn taflu niferoedd cyfartal o bennau.

10. (a) Darganfyddwch y gwerth neu werthoedd mwyaf tebygol ar gyfer X ym mhob un o'r achosion pan fydd (i) $X \sim B(6, 0.3)$, (ii) $X \sim B(4, 0.4)$

(b) Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad binomaidd B(n, p). Dangoswch fod

$$\frac{p_{x+1}}{p_x} = \frac{(n-x)p}{(x+1)q}$$

lle mae $q = 1 - p$ a $p_x = P(X = x)$. Trwy hyn dangoswch y canlynol:

(i) os nad yw $(n + 1)p$ yn gyfanrif mae gan X werth unigryw mwyaf tebygol lle mae x yn dynodi'r cyfanrif mwyaf sy'n llai nag $(n + 1)p$;

(ii) os yw $(n + 1)p$ yn gyfanrif mae gan X ddau werth cyfartal mwyaf tebygol lle mae $x = (n + 1)p - 1$ ac mae $x = (n + 1)p$.

Defnyddio tablau

Gall enrhifo tebygolrwyddau binomaidd fod yn waith llafurus iawn, yn enwedig pan fo n yn fawr. Er enghraifft, ystyriwch enrhifo $P(X \le 26)$ pan fo gan X y dosraniad B(50, 0.6). Oherwydd hyn, mae tablau wedi cael eu paratoi er mwyn hwyluso'r dasg. Mae rhai tablau yn rhoi gwerthoedd $P(X = x)$, tra bo tablau eraill yn rhoi $P(X \le x)$ neu $P(X \ge x)$, ar gyfer gwerthoedd dethol n a $p \le 0.5$. Mae *Elementary Statistical Tables* a gyhoeddwyd gan Gyhoeddiadau RND (Caerdydd) yn rhoi gwerthoedd $P(X \le x)$ tra bo *Statistical Tables* gan Murdoch a Barnes yn rhoi gwerthoedd $P(X \ge x)$, y ddau yn gywir i bedwar lle degol. Mae'r canlyniadau canlynol yn ddefnyddiol wrth drin tablau o'r fath.

$$P(X = x) \equiv P(X \le x) - P(X \le x - 1) \equiv P(X \ge x) - P(X \ge x + 1),$$
$$P(X \ge x) \equiv 1 - P(X \le x - 1) \quad ; \quad P(X \le x) \equiv 1 - P(X \ge x + 1),$$
$$P(r \le X \le s) \equiv P(X \le s) - P(X \le r - 1) \equiv P(X \ge r) - P(X \ge s + 1).$$

Mae'r enghreifftiau canlynol yn dangos sut i ddefnyddio tablau. Mae'r datrysiadau a roddir yn seiliedig ar dablau sy'n rhoi gwerthoedd $P(X \le x)$. Bydd angen addasu rhywfaint ar y rhain os yw'r tablau a ddefnyddir yn rhoi gwerthoedd $P(X \ge x)$.

Enghraifft 3

O wybod bod gan X y dosraniad B(20, 0.4) darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, werthoedd (a) $P(X = 5)$, (b) $P(4 \le X \le 12)$, (c) $P(X > 8)$.

Datrysiad

(a) $P(X = 5) \equiv P(X \le 5) - P(X \le 4) = 0.1256 - 0.0510$
$= 0.075$ yn gywir i dri lle degol

(b) $P(4 \le X \le 12) \equiv P(X \le 12) - P(X \le 3) = 0.9790 - 0.0160$
$= 0.963$ yn gywir i dri lle degol

(c) $P(X > 8) \equiv 1 - P(X \le 8) = 1 - 0.5956$
$= 0.404$ yn gywir i dri lle degol.

Fel a soniwyd uchod, mae tablau fel rheol yn cyfyngu gwerthoedd p i fod ≤ 0.5. Eto i gyd, gellir defnyddio'r tablau hyn i enrhifo tebygolrwyddau binomaidd pan fo $p > 0.5$. Tybiwch fod gan X y dosraniad B(n, p) lle mae gan p werth mwy na 0.5. Cofiwch mai X yw nifer y llwyddiannau mewn n treial o haparbrawf lle mae'r tebygolrwydd o lwyddiant yn p ym mhob achos. Nifer y methiannau yn y treialon hynny yw $Y = n - X$, a dosraniad Y yw B(n, q), lle mae $q = 1 - p$ yn < 0.5. Felly, gellir defnyddio'r tablau i bennu tebygolrwydd unrhyw ddigwyddiad sy'n cynnwys X trwy ddarganfod y digwyddiad cyfatebol sy'n cynnwys $Y = n - X$. Mae'r enghraifft ganlynol yn darlunio hyn.

Enghraifft 4

O wybod bod gan X y dosraniad B(50, 0.7) darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol werthoedd (a) $P(X = 30)$, (b) $P(25 \leq X \leq 35)$.

Datrysiad

Boed i $Y = 50 - X$; yna mae gan Y y dosraniad B(50, 0.3).

(a) Mae $X = 30$ (llwyddiant) yn cyfateb i $Y = 20$ (methiant). Trwy hyn

$$P(X = 30) \equiv P(Y = 20) \equiv P(Y \leq 20) - P(Y \leq 19) = 0.9522 - 0.9152$$
$$= 0.037 \text{ yn gywir i dri lle degol.}$$

(b) Mae nifer y llwyddiannau yn yr amrediad o 25 i 35 yn cyfateb i nifer y methiannau yn yr amrediad o 15 i 25. Trwy hyn mae

$$P(25 \leq X \leq 35) \equiv P(15 \leq Y \leq 25) = P(Y \leq 25) - P(Y \leq 14) = 0.9991 - 0.4468$$
$$= 0.552 \text{ yn gywir i dri lle degol.}$$

Ymarfer 4.5b

Ym mhob un o'r cwestiynau canlynol, defnyddiwch eich tablau i enrhifo'r tebygolrwyddau y mae eu hangen yn gywir i dri lle degol.

1. O wybod bod gan X y dosraniad B(20, 0.25) enrhifwch (a) $P(X = 8)$, (b) $P(X > 5)$, (c) $P(5 \leq X \leq 10)$.

2. O wybod bod gan X y dosraniad B(50, 0.4) enrhifwch (a) $P(X = 12)$, (b) $P(X \leq 16)$, (c) $P(X \geq 18)$, (d) $P(12 \leq X \leq 17)$.

3. Os teflir darn arian teg 50 o weithiau, darganfyddwch y tebygolrwydd fod nifer y pennau a geir rhwng 20 a 30, yn gynwysedig.

4. Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad B(n, p). Enrhifwch $P(X \geq np)$ ym mhob un o'r achosion (a) $n = 20, p = 0.8$, (b) $n = 10, p = 0.25$.

5. Y tebygolrwydd y bydd bwlb planhigyn tiwlip a ddewisir ar hap yn cynhyrchu blodyn melyn yw 0.6. Os plennir 20 o fylbiau o'r fath darganfyddwch y tebygolrwyddau y bydd (a) 10 yn union ohonynt yn cynhyrchu blodau melyn, (b) rhwng 5 a 10 ohonynt, yn gynwysedig, yn cynhyrchu blodau melyn.

6. Mae 50 o gwestiynau ar bapur prawf aml-ddewis, ac mae pob un ohonynt yn cynnig pedwar ateb posibl a dim ond un ohonynt sy'n gywir. Ar gyfer ymgeisydd sy'n dyfalu'r ateb i bob cwestiwn, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd nifer y cwestiynau a atebir yn gywir (a) yn 11 yn union, (b) rhwng 10 a 20, yn gynwysedig.

7. Yn ystod sesiwn ymarfer mae chwaraewr rygbi yn cicio at y gôl o bellterau amrywiol. Yn annibynnol ar gyfer pob cic o bellter d metr mae'r tebygolrwydd y bydd y chwaraewr yn llwyddo yn 0.02 (60 – d). Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd nifer y ciciau llwyddiannus (a) yn 6 yn union, (b) yn o leiaf 6, ym mhob un o'r achosion pan fydd y chwaraewr yn cymryd (i) 10 cic o bellter 20 metr, (ii) 20 cic o bellter 40 metr. Rhowch un rheswm pam ei bod yn bosibl nad yw'r dosraniad binomaidd yn briodol yn y sefyllfa a ddisgrifir yma.

8. Mae cyfanswm o 1600 o ddisgyblion mewn ysgol, gan gynnwys 400 o dras Asiaidd. Mewn hapsampl o 50 o ddisgyblion yr ysgol boed i X ddynodi'r nifer sydd o dras Asiaidd yn y sampl.

(a) Eglurwch pam na ellir defnyddio'r dosraniad binomaidd fel model union gywir ar gyfer dosraniad X ond ei fod yn briodol fel model bras.

(b) Defnyddiwch y model bras binomaidd i gyfrifo, yn gywir i 3 lle degol, y tebygolrwydd fod 15 yn union o'r disgyblion yn y sampl o dras Asiaidd.

Cymedr ac amrywiant B(n, p)

Os $X \sim B(n, p)$, cymedr ac amrywiant X yw:

$$\mu \equiv E(X) = np \text{ a } \sigma^2 \equiv Var(X) = npq.$$

[Mae'r deilliannau a roddir isod ar gyfer y canlyniadau hyn yn defnyddio algebra gymhleth. Rhoddir dull symlach o lawer yn ddiweddarach, yn Llyfr S2.]

<u>Prawf</u>: Mae $E(X) = \sum_{x=0}^{n} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{n} x\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$.

Mae $x\binom{n}{x} \equiv x \times \frac{n!}{x!(n-x)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} = n \times \binom{n-1}{x-1}$

ac felly

$$\mu = E(X) = n \times \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^x q^{n-x} = np \times \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x}$$

$$= np\left\{ q^{n-1} + \binom{n-1}{1} pq^{n-2} + \binom{n-1}{2} p^2 q^{n-3} + \ldots + p^{n-1} \right\}$$

$$= np(q+p)^{n-1} = np, \text{ gan fod } p + q = 1$$

Mae $\quad E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$

Ar gyfer $1 \le x \le n$, mae

$$x^2 \binom{n}{x} = x^2 \times \frac{n!}{x!(n-x)!} = x \times \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}.$$

Gan ddefnyddio'r unfathiant $x \equiv (x-1) + 1$, ceir bod

$$x^2 \binom{n}{x} = \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} + \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}$$

$$= n(n-1) \times \binom{n-2}{x-2} + n \times \binom{n-1}{x-1}$$

Trwy hyn, mae

$$E(X^2) = n(n-1) \times \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^x q^{n-x} + n \times \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} p^x q^{n-x},$$

$$= n(n-1)p^2 (q+p)^{n-2} + np(q+p)^{n-1}$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

Mae'n dilyn bod

$$\text{Var}(X) \equiv E(X^2) - \mu^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$$

Enghraifft 5

Gwireddwch y canlyniadau hyn ar gyfer y dosraniad B(3, p).

Yn Enghraifft 1 dangoswyd mai'r dosraniad B(3, p) yw:

x	0	1	2	3
P(X = x)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Datrysiad

Ar gyfer y dosraniad hwn, mae

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times q^3 + 1 \times 3pq^2 + 2 \times 3p^2q + 3 \times p^3 \\ &= 3pq^2 + 6p^2q + 3p^3 = 3p(q+p)^2 = 3p, \end{aligned}$$

sydd yn gwireddu'r canlyniad uchod ar gyfer n = 3.

Mae $E(X^2) = 3pq^2 + 12p^2q + 9p^3 = 3p(q+p)(q+3p) = 3p(q+3p)$.

$$Var(X) = 3p(q+3p) - (3p)^2 = 3pq$$

sydd yn gwireddu'r canlyniad a roddir uchod ar gyfer n = 3.

Enghraifft 6

O wybod bod cymedr a gwyriad safonol dosraniad binomaidd yn 3.2 a 1.6, yn ôl eu trefn, darganfyddwch werthoedd n a p.

Datrysiad

Rhoddir i ni fod np = 3.2 a bod $np(1 - p) = 1.6^2 = 2.56$.

Trwy amnewid o'r cyntaf o'r hafaliadau hyn i mewn i'r ail, ceir bod

$$3.2(1 - p) = 2.56,$$

ac felly mae $1 - p = 2.56/3.2 = 0.8$ a $p = 0.2$.

Gan fod np = 3.2 mae'n dilyn bod n = 3.2/0.2 = 16.

Ymarfer 4.5c

1. Boed i X ddynodi sawl tro y ceir 6 mewn pedwar tafliad o ddis teg. Adnabyddwch ddosraniad X ac ysgrifennwch werthoedd ei gymedr a'i amrywiant. Gwireddwch eich atebion trwy greu tabl yn gyntaf sy'n dangos dosraniad X.
2. O wybod bod $X \sim B(10, p)$, lle mae $p < 0.5$, a bod Var(X) = 15/8, darganfyddwch (a) p, (b) E(X), ac (c) P(X = 2).
3. Ym mhob treial o haparbrawf mae tebygolrwydd cael llwyddiant yn 0.2. Darganfyddwch nifer y treialon annibynnol y mae angen eu cynnal os bydd cymedr dosraniad nifer y llwyddiannau yn yr n treial yn hafal i'w wyriad safonol.
4. Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad B(n, 0.8).

O wybod bod $P(X = 3) = 8P(X = 2)$, darganfyddwch gymedr y dosraniad.

5. Darganfyddwch werthoedd n a p y dosraniad binomaidd sydd â chymedr 3.5 ac amrywiant 1.05.
6. Telir i werthwr o ddrws i ddrws gyflog sylfaenol o £100 yr wythnos a chomisiwn o £5 am bob gwerthiant a wneir ganddo. Tybiwch fod y gwerthwr yn galw mewn 100 o dai bob wythnos a bod y tebygolrwydd fod ei ymweliad yn arwain at werthiant yn 0.2. Dewch o hyd i ddosraniad y nifer o werthiannau a wneir mewn wythnos ac ysgrifennwch ei gymedr a'i amrywiant. Diddwythwch gymedr a gwyriad safonol enillion wythnosol y gwerthwr.
7. Mae chwaraewr yn talu 10 ceiniog am gael taflu 5 darn arian teg ar yr un pryd. Os yw'n taflu X pen mae'n ennill X^2 ceiniog. Darganfyddwch y golled mae'r chwaraewr yn ei ddisgwyl am bob tafliad.

4.6 Dosraniad Poisson

Yn yr adran hon byddwn yn defnyddio'r ehangiad canlynol o gyfres esbonyddol:

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha^r}{r!} + \cdots \qquad (1)$$

Boed i X ddynodi hapnewidyn gyda'r dosraniad

$$P(X = x) = \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha} , \qquad \text{ar gyfer } x = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

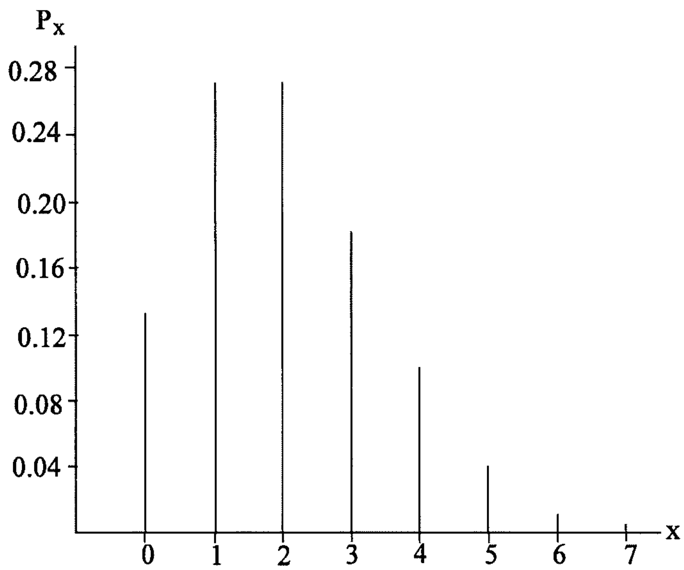
Noder bod

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha}$$

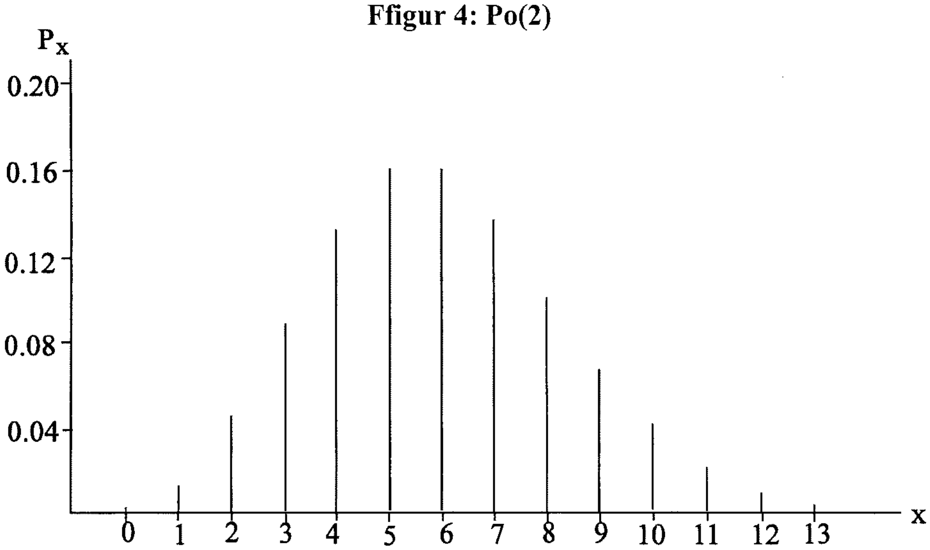
$$= e^{-\alpha}\left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha^r}{r!} + \cdots\right)$$

$$= e^{-\alpha} \times e^{\alpha} = 1,$$

fel sy'n angenrheidiol gyda dosraniad tebygolrwydd. Dywedir bod gan hapnewidyn gyda dosraniad (2), ddosraniad *Poisson* gyda pharamedr α, a dalfyrrir fel $X \sim Po(\alpha)$. Dangosir yn nes ymlaen mai α yw cymedr y dosraniad hwn mewn gwirionedd, ac felly wrth gadw at ein nodiant blaenorol gellir amnewid α a defnyddio μ. Mae ffigurau 4 a 5 yn dangos ffurfiau'r dosraniadau Po(2) a Po(6), yn ôl eu trefn.



Ffigur 4: Po(2)



Ffigur 5: Po(6)

Cafwyd bod y dosraniad hwn yn fodel priodol ar gyfer dosraniad sawl tro y mae digwyddiad yn digwydd mewn cyfwng o amser neu le. Mewn gwirionedd, gellir dod o hyd i'r dosraniad uchod yn fathemategol gan dybio bod

(a) y digwyddiadau yn digwydd ar hap ac yn annibynnol dros amser neu le,

(b) y digwyddiadau yn digwydd yn unigol,

(c) nifer cyfartalog y troeon y mae'r digwyddiad yn digwydd, mewn cyfwng sefydlog o amser neu le, mewn cyfrannedd union â lled y cyfwng hwnnw.

Mae rhai enghreifftiau o hapnewidynnau sy'n bodloni'r amodau uchod, o leiaf yn fras, fel a ganlyn:

(1) Nifer y galwadau ffôn a dderbynnir gan swyddfa yn ystod cyfnod penodol o amser.

(2) Nifer yr allyriannau o ffynhonnell ymbelydrol benodol mewn cyfnod penodol o amser.

(3) Nifer y ceir sy'n mynd heibio i bwynt penodol mewn cyfnod penodol o amser.

(4) Nifer y diffygion mewn hyd penodol o ddefnydd neu gebl.

(5) Nifer y celloedd gwaed sy'n weladwy trwy ficrosgop.

(6) Nifer y gronynnau organig sydd ar ffurf daliant mewn cyfaint penodol o hylif.

Enghraifft 1

Gellir modelu dosraniad nifer y damweiniau bob mis mewn ffatri gan ddefnyddio dosraniad Poisson, a nifer cyfartalog y damweiniau bob mis yw 2.6. Cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd llai na 3 damwain mewn mis.

Datrysiad

Boed i X ddynodi nifer y damweiniau mewn mis. Yna mae $X \sim Po(2.6)$; hynny yw,

mae $\quad P(X = x) = \dfrac{2.6^x}{x!}e^{-2.6} \quad , \text{ for } x = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Mae $\quad P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= e^{-2.6}\left(1 + 2.6 + \frac{2.6^2}{2!}\right) = e^{-2.6} \times 6.98 = 0.518,$$

yn gywir i dri lle degol.

Enghraifft 2

Gellir tybio bod gan nifer y diffygion sy'n digwydd mewn hyd penodol o ddefnydd llenni ddosraniad Poisson. Nifer cymedrig y diffygion sy'n digwydd ym mhob 10 metr o'r defnydd yw 0.8. Cyfrifwch y tebygolrwydd (a) nad yw hyd o 10 metr o'r defnydd yn cynnwys diffygion, (b) bod hyd o 30 metr o'r defnydd yn cynnwys o leiaf 4 o ddiffygion.

Datrysiad

(a) Boed i X ddynodi nifer y diffygion mewn hyd o 10 metr. Yna mae $X \sim Po(0.8)$, ac felly mae

$$P(X = 0) \;=\; \frac{0.8^x}{x!} \times e^{-0.8}, \qquad \text{ar gyfer } x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Mae $\quad P(X = 0) \;=\; e^{-0.8} \;=\; 0.449,$ yn gywir i dri lle degol.

(b) Boed i Y ddynodi nifer y diffygion mewn hyd o 30 metr. Nifer cyfartalog y diffygion mewn hydoedd o 30 metr yw $3 \times 0.8 = 2.4$, ac felly mae $Y \sim Po(2.4)$ ac mae

$$P(Y = y) = \frac{2.4^y}{y!} \times e^{-2.4} \quad , \text{ for } y = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Mae

$$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - \{P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)\}$$

$$= 1 - e^{-2.4}\left(1 + 2.4 + \frac{2.4^2}{2!} + \frac{2.4^3}{3!}\right)$$

$$= 1 - e^{-2.4} \times 8.584 = 0.221,$$

yn gywir i dri lle degol.

Enghraifft 3

Mae gan fodurdy bach dri char sydd ar gael bob dydd i'w hurio. Mae gan y galw dyddiol am y ceir hyn ddosraniad Poisson, cymedr 2. Mae'r perchennog yn codi £25 y dydd am bob car sy'n cael ei hurio ond mae'n rhaid iddo wario cyfanswm o £10 y dydd ar y ceir, faint bynnag ohonynt sy'n cael eu hurio. Darganfyddwch elw dyddiol disgwyliedig y perchennog o hurio'r ceir hyn.

Datrysiad

Boed i X ddynodi'r galw am geir mewn diwrnod. Yna mae $X \sim Po(2)$.

Boed i Y ddynodi y nifer sy'n cael eu hurio mewn diwrnod. Gan nad oes ond 3 char ar gael, gwerthoedd posibl Y yw $y = 0, 1, 2, 3$, gydag $y = 3$ pan fo $X \geq 3$.

Boed i £Z ddynodi'r elw mewn diwrnod. Gan fod cyfanswm y gwariant yn £10 a chan fod pob car a hurir yn dod â £25 i'r cwmni, mae'n dilyn bod

$$Z = 25Y - 10 \quad \text{a bod} \quad E(Z) = 25E(Y) - 10.$$

Darganfyddwn nawr ddosraniad Y.

Mae $P(Y = 0) = P(X = 0) = e^{-2}$.

Mae $P(Y = 1) = P(X = 1) = 2e^{-2}$.

Mae $P(Y = 2) = P(X = 2) = (2^2/2)e^{-2} = 2e^{-2}$.

Mae $P(Y = 3) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] = 1 - 5e^{-2}$.

Felly mae

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \times e^{-2} + 1 \times 2e^{-2} + 2 \times 2e^{-2} + 3(1 - 5e^{-2}) \\ &= 3 - 9e^{-2}, \end{aligned}$$

ac mae

$$\begin{aligned} E(Z) &= 25(3 - 9e^{-2}) - 10 = 65 - 225e^{-2} \\ &= 34.550 \quad \text{yn gywir i 3 lle degol.} \end{aligned}$$

Mae'n dilyn mai'r elw dyddiol disgwyliedig yw £34.55 yn gywir i'r geiniog agosaf.

Ymarfer 4.6a

Ym mhob un o'r cwestiynau canlynol rhowch eich ateb yn gywir i 3 lle degol.

1. O wybod bod $X \sim Po(3)$, enrhifwch (a) $P(X = 3)$, (b) $P(X \leq 2)$, (c) $P(X > 4)$.

2. O wybod bod $X \sim Po(2.8)$ enrhifwch (a) $P(X = 4)$, (b) $P(X < 3)$.

3. O wybod bod $P(X = 2) = 3P(X = 4)$ a bod gan X ddosraniad Poisson, darganfyddwch werthoedd (a) $P(X = 0)$ a (b) $P(X \leq 4)$.

4. Gellir tybio bod gan nifer y resins ym mhob tafell o deisen ffrwythau ddosraniad Poisson, cymedr 5. Cyfrifwch y tebygolrwydd (a) y bydd un dafell o'r deisen yn cynnwys (i) 5 resinen yn union, (ii) dim rhagor na 3 resinen, (b) y bydd dwy dafell o'r deisen yn cynnwys 5 resinen yn union.

5. Mae gan nifer y bacteria ym mhob mililitr o frechlyn ddosraniad Poisson, cymedr 2.5. Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd 1 mililitr o'r brechlyn yn cynnwys (a) 3 bacteriwm yn union, (b) o leiaf 3 bacteriwm.

6. Mae nifer y diffygion ym mhob hyd 10 metr o ddefnydd a weithgynhyrchir ddosraniad Poisson, cymedr 1.2. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod (a) hyd 10 metr yn cynnwys 2 ddiffyg ar y mwyaf, (b) hyd 20 metr yn cynnwys o leiaf 4 diffyg.

7. Caiff pob un o ddeg tiwb prawf sy'n cynnwys maethynnau ei frechu gydag 1 cc o hylif sy'n cynnwys cyfartaledd o 3 bacteriwm y cc. Gyda thybiaethau rhesymol, y dylech eu nodi, cyfrifwch y tebygolrwydd y bydd 7 yn union o blith y 10 tiwb prawf yn cynnwys o leiaf un bacteriwm.

8. Bob mis mae siopwr yn derbyn 15 copi o gylchgrawn misol, ac mae 10 ohonynt wedi'u harchebu gan gwsmeriaid. Gellir modelu'r galw misol am y 5 copi arall gan ddosraniad Poisson, cymedr 4. Boed i X ddynodi nifer y copïau a werthir mewn mis.

(a) Darganfyddwch, yn nhermau e, y tebygolrwyddau y X yn cymryd y gwerthoedd 10, 11, 12, 13, 14 a 15. Trwy hyn cyfrifwch werth disgwyliedig X yn gywir i ddau le degol.

(b) Mae'r siopwr yn gwneud elw o 30 ceiniog ar bob copi a werthir ond mae'n gwneud colled o 10 ceiniog ar bob copi nad yw'n cael ei werthu yn ystod y mis. Darganfyddwch yr elw misol disgwyliedig a geir o werthu'r cylchgrawn hwn.

(c) A bwrw bod dosraniad y galw misol yn aros yr un fath, penderfynwch a fyddai'r siopwr yn gwneud mwy o elw trwy leihau nifer y copïau y mae'n eu derbyn o 15 i 14.

Defnyddio tablau

Fel yn achos y dosraniad binomaidd, mae tablau ar gael i enrhifo tebygolrwyddau Poisson ar gyfer gwerthoedd dethol μ. Yn yr enghraifft ganlynol defnyddir tabl sy'n rhoi gwerthoedd $P(X \leq x)$, lle mae gan X ddosraniad Poisson. Bydd angen addasu'r datrysiadau a roddir yma os yw eich tabl yn rhoi gwerthoedd $P(X \geq x)$.

Enghraifft 4

Mae gan nifer y galwadau ffôn a dderbynnir gan switsfwrdd bob awr ddosraniad Poisson, cymedr 7.

(a) Defnyddiwch dablau i ddarganfod y tebygolrwydd, yn gywir i dri lle degol, y bydd nifer y galwadau a dderbynnir mewn awr (i) yn 7 yn union,
(ii) yn fwy na 12, (iii) yn llai na 5.

(b) Defnyddiwch dablau i ddarganfod y tebygolrwydd, yn gywir i 3 lle degol, y bydd nifer y galwadau a dderbynnir mewn cyfnod o 2 awr rhwng 10 a 15, yn gynwysedig.

Datrysiad

(a) Boed i X ddynodi sawl galwad a dderbynnir mewn awr.
Rhoddir bod $X \sim Po(7)$.

(i) Mae $P(X = 7) \equiv P(X \leq 7) - P(X \leq 6)$
$= 0.5987 - 0.4497 = 0.149$ yn gywir i dri lle degol.

(ii) Mae $P(X > 12) \equiv 1 - P(X \leq 12) = 1 - 0.9730$
$= 0.027$ yn gywir i dri lle degol.

(iii) Mae $P(X < 5) \equiv P(X \leq 4) = 0.1730 = 0.173$ yn gywir i dri lle degol.

(b) Boed i Y ddynodi sawl galwad a dderbynnir mewn cyfnod o ddwy awr.
Rydym yn gwybod bod $Y \sim Po(14)$.
Mae $P(10 \leq Y \leq 15) = P(Y \leq 15) - P(Y \leq 9) = 0.6694 - 0.1094$
$= 0.560$ yn gywir i dri lle degol.

Ymarfer 4.6b

1. O wybod bod $X \sim Po(9)$, defnyddiwch dablau i enrhifo
(a) $P(X = 9)$, (b) $P(X \leq 10)$, (c) $P(X > 12)$, (d) $P(7 \leq X \leq 13)$.

2. Mae gan siopwr stoc o chwe set deledu debyg sydd ar gael i'w hurio yn wythnosol. Mae gan y galw wythnosol am y setiau hyn ddosraniad Poisson, cymedr 3.8. Darganfyddwch y tebygolrwydd, yn gywir i dri lle degol, mewn wythnos (a) y bydd o leiaf ddwy o'r setiau yn cael eu hurio, (b) y bydd y galw yn fwy na'r nifer sydd ar gael.

3. Mae gan nifer y damweiniau sy'n digwydd wrth drogylch penodol ddosraniad Poisson, gyda 6 y mis ar gyfartaledd. Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd (a) mwy nag 8 damwain mewn mis, (b) mwy na 6 damwain mewn dau fis, (c) rhwng 8 a 16, yn gynwysedig, o ddamweiniau mewn cyfnod o ddau fis.

4. Mae gan nifer y cerbydau sy'n torri i lawr mewn diwrnod ar hyd rhan benodol o drafford ddosraniad Poisson, cymedr 2.6. Defnyddiwch dablau er mwyn darganfod y cyfanrif n lleiaf os yw'r tebygolrwydd o ragor nag n cerbyd yn torri i lawr mewn diwrnod yn llai na 0.04.

5. Mae gan nifer y gwallau argraffu ar dudalen papur newydd ddosraniad Poisson, cymedr 3.8.

(a) Darganfyddwch y tebygolrwydd, yn gywir i dri lle degol, y bydd mwy na 5 gwall argraffu ar dudalen benodol.

(b) Darganfyddwch y cyfanrif n lleiaf os yw'r tebygolrwydd o gael mwy nag n gwall argraffu ar dudalen yn llai na 0.1.

6. Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad Poisson, cymedr μ. Dangoswch fod

$$\sum_{x=0}^{r} xP(X = x) = \mu P(X \le r - 1).$$

Mae gan y galw dyddiol am eitem benodol mewn siop benodol ddosraniad Poisson, cymedr 10.

(a) Defnyddiwch dablau i ddarganfod, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd y galw am yr eitem mewn diwrnod (i) yn 21 neu fwy, (ii) yn 19 neu lai.

(b) Mae'r siop yn derbyn yr eitemau bob bore ac yn cymryd y nifer y mae eu hangen er mwyn dod â lefel y stoc hyd at 20 eitem. Mae'r siop yn gwneud elw o 50c am bob eitem a werthir. Dangoswch fod yr elw dyddiol disgwyliedig o werthu'r eitemau hyn bron yn £5.

7. Mae gan nifer y ceir sy'n croesi pont yn ystod cyfnod o t munud ddosraniad Poisson, cymedr 0.2 t. Darganfyddwch, yn gywir i 3 lle degol, y tebygolrwydd

(a) mewn cyfnod o 15 munud, y bydd o leiaf 4 car yn croesi'r bont.

(b) mewn cyfnod o 1 awr, y bydd rhwng 9 a 15 o geir, yn gynwysedig, yn croesi'r bont.

Cymedr ac amrywiant Po(α)

Os yw $X \sim Po(\alpha)$ yna mae

$$E(X) = \alpha \text{ ac mae } Var(X) = \alpha. \qquad (3)$$

Prawf:

Mae $\quad P(X=x)=\dfrac{\alpha^x}{x!}e^{-\alpha}$, ar gyfer x = 1, 2, 3, . . .

Mae
$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{x\alpha^x}{x!}e^{-\alpha} = e^{-\alpha}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\alpha^x}{(x-1)!}$$
$$= \alpha e^{-\alpha}\left\{1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\cdots\right\}$$
$$= \alpha e^{-\alpha}\times e^{\alpha} = \alpha.$$

Mae
$$E(X^2) = e^{-\alpha}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x^2\alpha^x}{x!} = \alpha e^{-\alpha}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x\alpha^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$= \alpha e^{-\alpha}\left[1+2\alpha+\frac{3\alpha^2}{2!}+\frac{4\alpha^3}{3!}+\cdots\right]$$
$$= \alpha e^{-\alpha}\left[\left\{1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots\right\}+\left\{\alpha+\frac{2\alpha^2}{2!}+\frac{3\alpha^3}{3!}+\ldots\right\}\right]$$
$$= \alpha e^{-\alpha}\left[e^{\alpha}+\alpha e^{\alpha}\right] = \alpha+\alpha^2$$

Gan fod $E(X) = \alpha$,

mae $\quad Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \alpha + \alpha^2 - \alpha^2 = \alpha.$

Ymarfer 4.6c

1. Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad Poisson, cymedr 4.8.

(a) Darganfyddwch gymedr ac amrywiant (i) $3X - 2$, (ii) $15 - 2X$.

(b) Enrhifwch $E(2X^2 - 3X + 1)$.

2. Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad Poisson gyda gwyriad safonol 3. Enrhifwch, yn gywir i dri lle degol,
(a) $P(X = 9)$, (b) $P(X \geq 9)$, (c) $P(5 \leq X \leq 11)$.

3. Mae gan sawl tro mewn diwrnod y bydd angen sylw ar beiriant ddosraniad Poisson, cymedr 1.5. Cost rhedeg y peiriant ar ddiwrnod pan fydd arno angen sylw X gwaith yw £$(12 + 5X^2)$.

(a) Cyfrifwch gost ddyddiol ddisgwyliedig rhedeg y peiriant.

(b) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd cost rhedeg y peiriant ar ddiwrnod a ddewisir ar hap yn fwy na £22.

4.7 Brasamcan Poisson a'r binomial

Pan fo n yn fawr a p yn fach gellir dangos bod y dosraniad Poisson yn dod yn agos at y dosraniad binomaidd B(n, p). Mae gan y dosraniad Poisson hwn gymedr $\mu = np$, sy'n hafal i gymedr y dosraniad binomaidd. Po fwyaf yw gwerth n a pho leiaf yw gwerth p, gorau yn y byd yw'r brasamcan. Gall y brasamcan hwn fod yn arbennig o ddefnyddiol pan fo n yn fwy na'r gwerth mwyaf a roddir mewn tablau binomaidd (yn fwy na 50, dyweder) a p yn fach (dyweder < 0.1).

Mae'r tabl canlynol, lle mae $X \sim B(n, p)$, yn darlunio'r brasamcan ar gyfer rhai gwerthoedd dethol o n a p.

n	p	$P(X \leq 3)$	$\mu = np$	brasamcan Poisson
50	0.02	0.9822	1	0.9810
50	0.01	0.9984	0.5	0.9982
100	0.02	0.8590	2	0.8571
100	0.01	0.9816	1	0.9810
500	0.004	0.8575	2	0.8572

Enghraifft 1

Mae gan eitem a weithgynhyrchir debygolrwydd 0.003 o fod yn ddiffygiol. Rhoddir eitemau mewn pacedi, gyda phob paced yn cynnwys 1000 eitem. Bydd prynwyr yn dychwelyd unrhyw baced sy'n cynnwys 3 neu ragor o eitemau diffygiol. Defnyddiwch frasamcan Poisson i gyfrifo

(a) cyfrannedd y pacedi a fydd yn cael eu dychwelyd,

(b) y tebygolrwydd amodol nad oes eitemau diffygiol mewn paced na chafodd ei ddychwelyd.

Datrysiad

Boed i X ddynodi nifer yr eitemau diffygiol mewn paced. Yna, mae gan X y dosraniad binomaidd B(1000, 0.003). Gan fod n yn fawr iawn a p yn fach iawn, gellir defnyddio dosraniad Y, lle mae $Y \sim Po(\mu)$ gyda $\mu = np = 3$, fel brasamcan ar gyfer y dosraniad hwn.

(a) Y cyfrannedd o bacedi na fydd yn cael eu dychwelyd yw

$$P(X \leq 2) \approx P(Y \leq 2) = e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!}\right) = 8.5e^{-3} = 0.423, \text{ yn gywir i 3 lle degol.}$$

(b) Y tebygolrwydd amodol y mae ei angen yw

P(dim eitem ddiffygiol mewn paced| paced heb ei ddychwelyd)

$$= P(X = 0|X \leq 2)$$
$$= \frac{P(X=0)}{P(X \leq 2)} \approx \frac{P(Y=0)}{P(Y \leq 2)} = \frac{e^{-3}}{8.5e^{-3}} = \frac{2}{17} = 0.118, \text{ yn gywir i dri lle degol.}$$

Dengys yr enghraifft ganlynol sut y gellir defnyddio brasamcan Poisson pan fo n yn fawr a p yn agos at 1.

Enghraifft 2

Yn Enghraifft 1 uchod, defnyddiwch frasamcan Poisson i gyfrifo'r tebygolrwydd y bydd paced yn cynnwys o leiaf 995 o eitemau nad ydynt yn ddiffygiol.

Datrysiad

Gan fod y tebygolrwydd fod eitem yn ddiffygiol yn 0.003, mae'r tebygolrwydd nad yw eitem yn ddiffygiol yn 0.997. Boed i W ddynodi nifer yr eitemau nad ydynt yn ddiffygiol mewn paced o 1000 o eitemau. Yna mae $W \sim B(1000, 0.997)$. Gofynnir i ni enrhifo $P(W \geq 995)$. Wrth nodi bod $W = 1000 - X$, lle mae X yn cael ei ddiffinio fel yn Enghraifft 1, mae'n dilyn bod

$$P(W \geq 995) \equiv P(X \leq 5).$$

Gan ddefnyddio $Y \sim Po(3)$ fel brasamcan ar gyfer dosraniad X, ceir bod

$$P(W \geq 995) \equiv P(X \leq 5) \approx P(Y \leq 5) = 0.916 \text{ yn gywir i 3 lle degol.}$$

Ymarfer 4.7

1. O wybod bod $X \sim B(150, 0.04)$, darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer
   (a) $P(X \leq 3)$, (b) $P(X = 5)$, (c) $P(X > 4)$.
2. Y tebygolrwydd y bydd eitem a fasgynhyrchir yn ddiffygiol yw 0.002. Mae'r eitemau yn cael eu bwndelu mewn blychau, sy'n cynnwys 500 eitem yr un. Gan ddefnyddio dosraniad priodol ar gyfer brasamcanu, darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd blwch yn cynnwys (a) yn union ddwy eitem ddiffygiol, (b) o leiaf dair eitem ddiffygiol.
3. Amcangyfrifir bod gan 0.7% o fenywod glefyd penodol. Darganfyddwch, yn fras, y tebygolrwydd nad yw'r clefyd gan ragor na phump o blith grŵp o 400 o fenywod.
4. Y tebygolrwydd y bydd baban yn farw-anedig yw 0.0001. O blith y 5000 genedigaeth nesaf darganfyddwch y tebygolrwydd (a) na fydd yr un ohonynt yn farw-anedig, (b) y bydd un yn union yn farw-anedig, (c) y bydd o leiaf ddau yn farw-anedig.
5. Mae gan awyren 196 o seddi. Mae profiad y gorffennol wedi dangos bod 1.5% o'r teithwyr sydd wedi archebu seddi yn methu cyrraedd. Os bydd y cwmni

awyrennau yn gwerthu 200 o docynnau ar gyfer taith benodol, darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer y tebygolrwydd (a) y bydd mwy na 196 o deithwyr yn cyrraedd, (b) y bydd un neu ragor o seddi gwag.

6. Mae gan fath penodol o set deledu warant na fydd arni angen sylw am bedair blynedd. Mae'r gwneuthurwyr yn hyderus y bydd 99.6% o'u setiau teledu yn gweithio yn ddidrafferth am bedair blynedd. Mewn cyflenwad o 200 o setiau teledu darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer y tebygolrwyddau (a) na fydd ar un ohonynt angen sylw yn ystod cyfnod y gwarant, (b) na fydd ar o leiaf 197 ohonynt angen sylw yn ystod cyfnod y gwarant.

7. Y tebygolrwydd y bydd eitem a fasgynhyrchir yn ddiffygiol yw 0.01. Darganfyddwch werthoedd bras ar gyfer y tebygolrwyddau, mewn hapsampl o 200 o eitemau, (a) y bydd 3 yn union yn ddiffygiol, (b) y bydd 2 ar y mwyaf yn ddiffygiol, (c) y bydd o leiaf 3 yn ddiffygiol.

Cwestiynau amrywiol ar Bennod 4

1. (1987) Mae gan y galw wythnosol am fideos mewn siop benodol ddosraniad Poisson, cymedr 4.

(i) Darganfyddwch, yn gywir i bedwar lle degol, y tebygolrwyddau y bydd y galw am fideos yn y siop mewn wythnos (a) yn 2 yn union, (b) yn 5 neu yn llai.

(ii) Derbynnir fideos gan y siop ar ddechrau pob wythnos yn unig, a'r polisi yw derbyn y nifer sy'n dod â lefel y stoc i fyny i 5. Dangoswch mai 5 yw'r nifer mwyaf tebygol o fideos a fydd yn cael eu *gwerthu* mewn wythnos, a darganfyddwch, yn gywir i ddau le degol, y nifer o fideos y disgwylir *gwerthu* mewn wythnos. [11]

2. (1987) Amser cinio, mae caffeteria hunanweini yn cynnig dau brif gwrs yn unig, A a B. Mae profiad yn dangos bod 60% o'r cwsmeriaid yn dewis A.

(i) Cyfrifwch y tebygolrwyddau ar unrhyw ddiwrnod (a) fod union 3 o'r 6 chwsmer cyntaf yn dewis A, (b) mai'r 4ydd cwsmer fydd y cyntaf i ddewis B. [3]

(ii) Defnyddiwch dablau er mwyn darganfod y tebygolrwydd y bydd 7 neu lai o blith y 10 cwsmer cyntaf ar unrhyw ddiwrnod yn dewis A. [2]

(iii) Ar ddiwrnod penodol dim ond 30 platiaid o A a 25 platiaid o B sydd ar gael. Defnyddiwch dablau i ddarganfod y tebygolrwyddau mai o blith y 50 cwsmer cyntaf ar y diwrnod hwnnw, (a) y gall pawb gael y bwyd mae'n ei ddymuno, (b) y bydd y nifer sy'n dewis A o leiaf ddwywaith y nifer sy'n dewis B. [6]

3. (1988) Ym mhob treial o haparbrawf, y tebygolrwydd y bydd digwyddiad A yn digwydd yw 0.6. Mewn wyth treial annibynnol o'r arbrawf cyfrifwch, yn gywir i bedwar lle degol, y tebygolrwyddau (a) y bydd A yn digwydd mewn pump yn union o'r treialon, (b) y bydd A yn digwydd mewn pum treial yn union, ac y bydd y treialon hyn yn dilyn ei gilydd yn olynol. [4]

4. (1988) Yn annibynnol ar bob diwrnod, mae gan nifer y troeon y bydd ar beiriant angen sylw ddosraniad Poisson, cymedr 1.2. Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwyddau (i) ar unrhyw ddiwrnod, y bydd ar y peiriant angen sylw deirgwaith yn union, (ii) ar ddau ddiwrnod olynol, y bydd ar y peiriant angen sylw ddwywaith ar un o'r diwrnodau ac unwaith ar y diwrnod arall. [4]

Cost rhedeg y peiriant ar ddiwrnod pan fydd arno angen sylw X tro yw £$(12 + 10X^2)$. Darganfyddwch gost ddisgwyliedig ei redeg am ddiwrnod. [4]

5. (1989) Mae gan yr hapnewidyn X y dosraniad canlynol.

x	1	2	3
$P(X = x)$	α	$0.8 - \alpha$	0.2

O wybod bod cymedr y dosraniad yn hafal i 1.7, dewch o hyd i werth α. [3]

6. (1990) Yn annibynnol ar bob tudalen mewn llyfr mae gan nifer y gwallau sy'n ymddangos yn y print ddosraniad Poisson, cymedr 0.2. Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwyddau (i) na fydd gwall ar y dudalen gyntaf, (ii) na fydd gwall ar bedair o'r pum tudalen gyntaf, (iii) y bydd y gwall cyntaf yn ymddangos ar y drydedd dudalen. [5]

7. (1990) Defnyddir dau beiriant A a B er mwyn cynhyrchu eitemau unfath. Yn annibynnol, am bob eitem a gynhyrchir ar beiriant A y tebygolrwydd ei bod yn ddiffygiol yw 0.01, ac am bob eitem a gynhyrchir ar beiriant B y tebygolrwydd cyfatebol yw 0.03.

(a) Dewisir tair eitem ar hap o blith y rhai a gynhyrchir ar beiriant A a dewisir tair eitem ar hap o blith y rhai a gynhyrchir ar beiriant B. (i) Cyfrifwch y tebygolrwydd fod un yn union o'r tair eitem a gynhyrchir ar beiriant A yn ddiffygiol. (ii) Cyfrifwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd fod un yn union o'r chwe eitem a ddewisir yn ddiffygiol. [4]

(b) O gyfanswm yr eitemau a gynhyrchir mewn diwrnod, mae 60% yn cael eu creu ar beiriant A ac mae 40% yn cael eu creu ar beiriant B. (i) Os dewisir un eitem ar hap o blith cynnyrch diwrnod, dangoswch fod y tebygolrwydd nad yw'n ddiffygiol yn 0.982. (iii) Mae blwch yn cynnwys 80 eitem a ddewiswyd ar hap o blith cynnyrch diwrnod. Darganfyddwch werth bras ar gyfer y tebygolrwydd nad oes ond dwy neu lai o eitemau diffygiol yn y blwch. [6]

8. (1991) Yn annibynnol ar gyfer pob hedyn o fath arbennig o flodyn sy'n cael ei hau, y tebygolrwydd y bydd yr hedyn yn egino yw 0.8. (i) Mae ugain o hadau o'r fath yn cael eu hau. Defnyddiwch dablau er mwyn darganfod y tebygolrwydd fod y nifer a fydd yn egino rhwng 14 a 18, yn gynwysedig. [3]

9. (1991) Yn annibynnol ar gyfer pob tudalen, mae gan nifer y gwallau teipio ar bob tudalen yn nrafft cyntaf nofel ddosraniad Poisson, cymedr 0.4.

(a) Cyfrifwch, yn gywir i bum lle degol, y tebygolrwyddau (i) na fydd gwall ar dudalen a ddewisir ar hap, (ii) y bydd dau neu ragor o wallau ar dudalen a ddewisir ar hap, (iii) mai'r drydedd o dair tudalen a ddewisir ar hap fydd yr un gyntaf i gynnwys gwall. [5]

(b) Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer y tebygolrwydd na fydd gwall mewn n tudalen a ddewisir ar hap. Trwy hyn darganfyddwch y nifer n mwyaf lle mae tebygolrwydd o 0.1 o leiaf nad oes gwall ar un o'r n tudalen. [3]

Yn annibynnol ar gyfer pob tudalen, mae gan nifer, Y, y gwallau teipio ar bob tudalen yn nrafft cyntaf gwerslyfr Mathemateg ddosraniad Poisson hefyd.

(c) O wybod bod $P(Y = 2) = 2P(Y = 3)$,
(i) darganfyddwch $E(Y)$, (ii) dangoswch fod $P(Y = 5) = 4P(Y = 6)$. [4]

(d) Dewisir un dudalen ar hap o ddrafft cyntaf y nofel a dewisir un dudalen ar hap o ddrafft cyntaf y gwerslyfr Mathemateg. Cyfrifwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd un yn union o'r ddwy dudalen a ddewisir heb wallau. [3]

10. (1992) Pan deflir dis tueddol y tebygolrwydd o gael 6 yw 0.25. Mewn pum tafliad annibynnol o'r dis cyfrifwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwyddau y ceir 6 (i) unwaith yn union, (ii) am y tro cyntaf ar y pumed tafliad, (iii) am yr ail dro ar y pumed tafliad. [7]

11. (1993) Mae gan hapnewidyn X y dosraniad a roddir yn y tabl canlynol.

x	0	1	2
$P(X = x)$	$0.4 - 0.5\alpha$	α	$0.6 - 0.5\alpha$

O wybod bod gwyriad safonol X yn 0.8, darganfyddwch werth α. [4]

12. (1993) Y tebygolrwydd y bydd claf sy'n dioddef o glefyd penodol yn gwella ar ôl derbyn triniaeth yw 0.97.

(a) Os rhoddir y driniaeth i 10 claf, darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd 8 yn union ohonynt yn gwella.

(b) Os rhoddir y driniaeth i 24 claf, cyfrifwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd o leiaf 22 ohonynt yn gwella.

(c) Os rhoddir y driniaeth i 64 claf defnyddiwch frasamcan Poisson i gyfrifo'r tebygolrwydd y bydd o leiaf 62 ohonynt yn gwella; rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [8]

Rhoddir y driniaeth i 5 claf yn Ysbyty A ac i 3 chlaf yn Ysbyty B.

(d) Cyfrifwch, yn gywir i dri lle degol, y tebygolrwydd y bydd y cyntaf, yr ail, y pedwerydd a'r pumed o'r 5 claf a gaiff driniaeth yn Ysbyty A yn gwella ond na fydd y trydydd claf yn gwella. [2]

(e) O wybod bod 6 o'r cleifion a gafodd driniaeth yn y ddau ysbyty wedi gwella, cyfrifwch y tebygolrwydd amodol fod 4 o'r cleifion a wellodd wedi cael y driniaeth yn Ysbyty A. [5]

13. (1994) Teflir dau ddis ciwbigol ar yr un pryd. Cyfrifwch y tebygolrwydd (i) y bydd y sgoriau ar y ddau ddis yn 3 o leiaf, (ii) y bydd y gwahaniaeth rhwng y sgoriau ar y ddau ddis yn 2. [4]

14. (1994) Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad binomaidd B(n, p). Defnyddiwch dablau, a lle bo angen, frasamcan dosraniadol priodol, i ddarganfod $P(X \geq 6)$ a $P(X = 6)$ yn y ddau achos: (i) $n = 20, p = 0.4$, (ii) $n = 200, p = 0.04$. [5]

15. (1994) Mae gan nifer y galwadau ffôn sy'n cyrraedd swyddfa benodol mewn cyfnod o t awr ddosraniad Poisson, cymedr 12t.

(i) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd 4 galwad mewn cyfnod o hanner awr.

(ii) Darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd 5 galwad rhwng 10.00 am a 10.30 am, o wybod y bydd 12 galwad rhwng 10.00 am a 11.30 am. [7]

16. (1995) Mae cynhyrchydd gwydrau gwin yn gwybod o'i gofnodion fod 1% o'r gwydrau sy'n cael caniatâd i gael eu gwerthu, yn ddiffygiol mewn gwirionedd.

(a) Mae rheolwr siop fawr yn penderfynu gwerthu'r gwydrau mewn blychau anrheg sy'n cynnwys 12 gwydryn. (i) Cyfrifwch, yn gywir i bedwar lle degol, y tebygolrwydd nad yw blwch yn cynnwys gwydrau diffygiol. (ii) Cyfrifwch y tebygolrwydd nad yw o leiaf 9, o blith cyflenwad o 10 blwch, yn cynnwys gwydrau diffygiol. [3]

(b) Mae siopwr yn prynu 1500 gwydryn. Trwy ddefnyddio dosraniad Poisson, darganfyddwch, yn fras, y tebygolrwydd nad yw mwy na 10 gwydryn yn ddiffygiol. [3]

17. (1995) Mae pobydd yn pobi 3 teisen ffrwythau bob dydd. Mae'n gwybod o brofiad fod y galw dyddiol am y teisenni yn hapnewidyn Poisson, cymedr 2.5.

(a) Heb ddefnyddio tablau cyfrifwch, yn gywir i bedwar lle degol, y tebygolrwyddau o werthu 0, 1, 2 deisen, yn ôl eu trefn, ar ddiwrnod penodol.

(b) Diddwythwch y tebygolrwydd o werthu 3 teisen ar ddiwrnod penodol. [5]

(c) Cyfrifwch nifer cymedrig y teisenni a werthir bob dydd. [2]

Mae'n costio £1.50 i wneud pob teisen ac mae'n gwerthu am £5.

(d) Cyfrifwch yr elw dyddiol cymedrig o werthu'r teisenni hyn. [2]

Mae'r pobydd yn ystyried y posibilrwydd o gynyddu'r cynnyrch dyddiol i 4 teisen ffrwythau. (i) Os gwna hyn, cyfrifwch yr elw dyddiol cymedrig o werthu'r teisenni hyn. (ii) A fyddech yn cynghori'r pobydd i gynyddu'r cynnyrch i 4 teisen ffrwythau y dydd? [6]

18. (S1 Ionawr 1996) Mae perchennog gwesty yn penderfynu gwerthu copïau o'r papur lleol dyddiol, yr *Eco*, i'w westeion. A bwrw bod ganddo n gwestai ac mai p yw'r tebygolrwydd fod pob gwestai yn annibynnol yn dymuno prynu'r *Eco*, nodwch y dosraniad tebygolrwydd y dylid ei ddefnyddio i fodelu cyfanswm nifer y gwesteion sy'n dymuno prynu'r *Eco*. Un bore, mae ganddo 20 gwestai ac mae'n penderfynu prynu 4 copi o'r *Eco* i'w hailwerthu. Tybiwch fod $p = 0.16$.

(a) Cyfrifwch, i 4 lle degol, y tebygolrwyddau y bydd yn gwerthu 0, 1, 2, 3 copi o'r *Eco*. (b) **Diddwythwch** y tebygolrwydd y bydd yn gwerthu'r 4 copi i gyd. [7]

(c) Mae'n talu 20c am bob copi a'u gwerthu am 50c; rhaid taflu copïau nad yw'n eu gwerthu. Cyfrifwch, i'r geiniog agosaf, ei elw disgwyliedig o werthu'r *Eco*. [4]

19. (A3 1996) Mae garddwr yn plannu 20 hedyn mewn cafn hadau. Mae pob hedyn yn egino gyda thebygolrwydd 0.45, yn annibynnol o'r hadau eraill. Defnyddiwch y tablau a ddarperir er mwyn darganfod y tebygolrwydd y bydd nifer yr hadau sy'n egino (a) yn 15 o leiaf, (b) yn 15 yn union. [3]

20. (S1 Mehefin 1996) Mewn ysgol fawr yng Nghymru, mae 65% o'r disgyblion yn siarad Cymraeg. Dewisir hapsampl o 20 disgybl o'r ysgol.

(a) Nodwch enw dosraniad tebygolrwydd y gellir ei ddefnyddio i fodelu nifer y siaradwyr Cymraeg yn y sampl. [1]

(b) Defnyddiwch eich model i ddarganfod y tebygolrwydd fod o leiaf 12 disgybl yn y sampl yn siarad Cymraeg. [2]

(c) O wybod bod o leiaf 12 disgybl yn y sampl yn siarad Cymraeg, darganfyddwch y tebygolrwydd nad oes mwy na 15 disgybl yn siarad Cymraeg yn y sampl. [4]

21. (S1 Mehefin 1996) Teflir tair ceiniog ddiduedd ar yr un pryd ac yna ail-deflir, ar yr un pryd, y ceiniogau hynny sydd wedi syrthio fel pen. Dynodir cyfanswm nifer y pennau a geir yn y ddau dafliad gan X.

(a) Gan ddefnyddio diagram coeden, neu fel arall, dangoswch fod

$$P(X = 6) = \frac{1}{64} \text{ a bod } P(X = 3) = \frac{13}{64}. \qquad [3]$$

(b) Darganfyddwch ddosraniad tebygolrwydd X. [4]

(c) Cyfrifwch E(X). [2]

22. (S1 Mehefin 1996) Mae diffygion yn digwydd ar hap wrth gynhyrchu cebl arbennig ar gyfradd gymedrig o 3.75 ym mhob 100 m. Mae hydoedd o'r cebl hwn i'w troelli o amgylch drymiau, ac ar bob drwm mae 40 m ohono. Os yw X yn dynodi nifer y diffygion sydd ar ddrwm, ysgrifennwch fodel priodol ar gyfer dosraniad X. [1]

(a) Darganfyddwch, heb ddefnyddio tablau, y tebygolrwydd fod o leiaf 2 ddiffyg ar ddrwm. [2]

(b) Mae cwsmer yn prynu 5 drwm. Darganfyddwch y tebygolrwydd fod gan 3 yn union ohonynt o leiaf 2 ddiffyg. [2]

ATEBION RHIFYDDOL

Ymarfer 1.2

1. *Dull 2:* 6, 12, 14, 21, 22, 24, 28,30 *Dull 3:* 6, 9, 13, 14, 21, 22, 28, 30
2. *Y ddau ddull:* 4, 5, 14, 29, 32, 35, 37, 62, 71, 77
3. *Dull 2:* 5, 37, 45, 50, 109 *Dull 3:* 1, 39, 61, 71, 109
4. *Dull 2:* 4, 48, 51, 126, 130, 149 *Dull 3:* 44, 67, 73, 94, 113, 115
5. *Dull 2:* 51, 504, 906, 1028, 1263, 1308, 1935, 2090, 2937, 3172
   Dull 3: 51, 307, 504, 1263, 1308, 1577, 1935, 2804, 2937, 3172

Ymarfer 1.3

1. (a) 14 ym Mlwyddyn 12, 10 ym Mlwyddyn 13 ;
   (b) 1, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 17, 19, 21, 24, 29, 30, 32
2. Gan dybio dechrau yng ngholofn 1, llinell 1, yr 17 disgybl fyddai:
   2, 9, 29, 37, 44, 46, 47, 53, 55, 59, 78, 79, 80, 84, 86, 90, 95

Ymarfer 2.1

1. Cymedr = $42\frac{8}{11}$, Canolrif = 42, Amrediad = 15, Amrediad Rhyngchwartel = 6
2. Cymedr = 2·575, Canolrif = 2, Amrediad = 4, Amrediad Rhyngchwartel = 3
3. (b) (i) 166·5 cm (ii) 5·1 cm ; (c) 166·8 cm

Ymarfer 2.2

1. 5, 1·789 **2.** 167·857 cm, 5·167 cm **3.** 19·2 mm, 1.166 mm
4. 50, 15·067 **5.** 40·2 gair/mun, 2·441 gair/mun **6.** 0·85 s, 2·853 s
7. (a) B ; (b) A ; (c) B (cymedr hirach, gwyriad safonol llai)
8. 29, 5·9 **9.** (a) 34 , (b) 19·227 **10.** $a = 4$, $b = 6$

Ymarfer 2.3

1. 1·467, 1·024 **2.** 2·88, 1·291 **3.** 2·1, 0·995 **4.** 53·058, 15·018
5. 1·1, 1·068 **6.** 2·98, 1·691 **7.** 7·667, 0·645 **8.** 3·16, 2·092

Ymarfer 2.4

1. 31·96 bl., 10·208 bl. **2.** 78·25, 15·411 **3.** 27120 km, 10386 km
4. 209·517 g, 44·816 g **5.** 7·494, 3·718
6. *Tref:* 39·3 bl., 20·156 bl.; *Glan y môr:* 51·9 bl., 18·361 bl.

Ymarfer 2.6

1. 29.5 bl., 13.0 bl. **2.** 79·1, 7·4 **3.** 14800 km **4.** 206·3 g, 205·1 g
5. 7 kg, 5·7 kg **6.** *Tref:* 38 bl., 44·8 bl.; *Glan y môr:* 54 bl., 28·9 bl.

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 2

1. Modd = 6, Canolrif = 6, Cymedr = 6·28, Amrediad Rhyngchwartel = 2
2. (a) Canolrif = 2, IQR = 2; (b) Cymedr = 2·05, GS = 1·23
3. (a) Cymedr = 24·43 g, GS = 7·67 g ; (b) Canolrif = 24·3 g , ARh = 10 g
4. (b) Canolrif = 2·64 kg, Cymedr = 2·61 kg

5. (a) Cymedr = 19bl. 1m;
(b) Canolrif = 21bl 0m, Amrediad rhyngcanradd 10-90 = 3bl. 3m

6. (b) Canolrif = 18·57bl., ARh = 8·6bl.; (c) 13·33bl. ; (d) 13·5bl.

Ymarfer 3.1

1. [0, 1, 2, 3, 4] **2.** [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6] **3.** [1, 2, 3, 4]

4. [(GG), (GC), (CG), (CC)]

5. (a) [(PPP), (PPC), (PCP), (CPP), (PCC), (CPC), (CCP), (CCC)], (b) [0, 1, 2, 3]

6. [1, 2, 3, 4, . . .]

Ymarfer 3.2

1. (a) S = [1, 2, 3, 4, 5, 6], A = [2, 4, 6], B = [1, 2], C = [3, 6], B ac C;
(b)(i) [1, 3, 5] (ii) [2] (iii) [1, 2,4, 5, 6] (iv) [1, 2, 3,4, 6] (v) [6].

2. [(x, y):x, y = 1,2,3,4,5,6]
(a) A = [(1,3), (2,2), (3,1), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (6,6)]
(b) B = [(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)]
(c) C = [(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)]
(d) D = [(1,5), (1,6), (2,6), (5,1), (6,1), (6,2)] (e) [(2,2), (2,6), (4,4), (6,2), (6,6)]
(f) [(1,1), (1,5), (1,6), (2,2), (2,6), (3,3), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,6)]
(g) [(1,1), (3,3), (5,5)], B a D.

3. (a) [8, 9], (b) [3, 5, 7], (c) [3, 5, 7, 9] (d) [3, 5, 7, 8, 9] (e) [3, 5, 7]
(f) [8, 9] (g) [4, 6] (h) [3, 5, 7].

Ymarfer 3.3

1. (a) 0.3 (b) 0.8 (c) 0.6 **2.** (a) 0.6 (b) 0.4 (c) 1

3. (a) 0.12 (b) 0.18 (c) 0.72 **4.** (a) 0.75 (b) 0.5 (c) 0.5 (d) 0.1 (e) 0.25

5. (a) 0.64 (b) 0.12 (c) 0.13 (d) 0.37 **6.** (a) 0.12 (b) 0.4 (c) 0.72 (d) 0.28

7. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{11}{12}$.

Ymarfer 3.4a

1. (a) $\frac{4}{13}$, (b) $\frac{3}{13}$, (c) $\frac{3}{13}$, (d) $\frac{5}{13}$, (e) $\frac{1}{13}$ **2.** $\frac{7}{20}$

3. (a) $\frac{2}{9}$, (b) $\frac{5}{9}$, (c) $\frac{1}{3}$ **4.** (a)(i) $\frac{5}{36}$, (ii) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{19}{36}$, (c) $\frac{2}{9}$.

Ymarfer 3.4b

1. (a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{25}{169}$ **2.** (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{7}{27}$

3. 5 (gan dybio bod genedigaethau yn hafal debygol ym mhob mis)

4. (a) $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{1}{9}$ **5.** (a) $\frac{29}{118}$ (b) $\frac{10}{59}$ (c) $\frac{33}{59}$ **6.** (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{5}{9}$

7. (i)(a) $\frac{6}{25}$ (b) $\frac{7}{225}$ (ii) (a) $\frac{9}{35}$ (b) $\frac{1}{35}$ **8.** (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{3}{16}$

Ymarfer 3.4c

1. (a) $\frac{1}{22}$ (b) $\frac{3}{44}$ (c) $\frac{37}{44}$ **2.** (a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{3}{7}$ (c) $\frac{19}{42}$

3. (a) $\frac{3}{14}$ (b) $\frac{1}{7}$ (c) $\frac{18}{35}$ **4.** (a) $\frac{1}{5525}$ (b) $\frac{6}{5525}$ (c) $\frac{16}{5525}$

5. $\frac{17}{33}$ **6.** (a) $\frac{7}{15}$ (b) $\frac{1}{15}$ **7.** (a) $\frac{676}{4921}$ (b) $\frac{2}{191919}$ (c) $\frac{690}{4921}$

8. (a) $\frac{1}{132}$ (b) $\frac{25}{66}$ (c) $\frac{1}{2}$

Ymarfer 3.5

1. $\frac{2}{3}$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** (a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{1}{4}$ **4.** (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{4}{7}$

5. $\frac{3}{20}$ **6.** (a) $\frac{3}{11}$ (b) $\frac{3}{7}$ **7.** (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{3}{10}$ **8.** (a) $\frac{10}{21}$ (b) $\frac{6}{7}$

9. $\frac{1}{2}$ **10.** (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{17}$ (c) $\frac{10}{13}$

Ymarfer 3.6

1. (a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{1}{17}$ **2.** (a) 0.0225 (b) A **3.** $\frac{8}{23}$

4. (a)(i) $\frac{19}{135}$ (ii) $\frac{13}{27}$ (b) C **5.** (a) $\frac{8}{23}$ (b) $\frac{9}{23}$ (c) $\frac{6}{23}$ **6.** $\frac{7}{50}$

7. $\frac{19}{118}$ **8.** $\frac{21}{50}$ **9.** (a) 0.32 (b) 0.5625

10. $\frac{25}{63}$ **12.** $\frac{1}{3}$

Ymarfer 3.7

1. (a) $\frac{119}{120}$ (b) $\frac{5}{12}$ **2.** (a) 0.7 (b) 0.66 **3.** (a) $\frac{11}{850}$ (b) $\frac{39}{850}$ (c) $\frac{169}{425}$

4. (a) $\frac{17}{48}$ (b)(i) $\frac{3}{23}$ (ii) $\frac{5}{23}$ **5.** (a) $\frac{11}{21}$ (b) $\frac{6}{11}$ **6.** (a) 0.027 (b) $\frac{291}{973}$

7. (a) $\frac{11}{20}$ (b) $\frac{5}{33}$

Ymarfer 3.8a

1. (a) 0.2 (b) 0.7 **2.** Annibynnol **3.** Annibynnol **5.** 0.3, 0.2

7. Annibynnol **9.** A, B ac A, C **10.** (b) 6

Ymarfer 3.8b

1. 0.58 **2.** (a) 0.25 (b) 0.75 **3.** 0.9519

4. (a)(i) 0.429875 (ii) 0.1987 (b) 13, 9, 6 **5.** (a) 0.504 (b) 0.398

6. 0.59375 **7.** (a) $\frac{5}{36}$ (b) $\frac{125}{1296}$ (c) $\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1}$; $\frac{5}{11}$

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 3

1. (i) nid yw A a B yn annibynnol (ii) $\frac{1}{4}$ **3.** (ii)(a) $\frac{11}{24}$ (b) $\frac{8}{11}$ **4.** (ii) 0.48, 0.6

5. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{7}{15}$ **6.** (a)(i) $\frac{49}{143}$ (ii) $\frac{7}{16}$ (b)(iii) $\frac{7}{20}$

7. (i) 0.7 (ii) 0.2 (iii) 0.6 **8.** (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{84}$ (iii) $\frac{30}{79}$ **9.** (ii) 0.478

10. (b)(i) 0.3 (ii) $\frac{2}{3}$ **11.** (i) 0.25 (ii) 0.48 (iii) 0.292 **12.** (i) $\frac{1}{14}$ (ii) $\frac{3}{7}$

13. (i) 0.017 (ii) $\frac{25}{97}$ **14.** (a) 0.4 (b) 0.9 **15.** (i) $\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$

16. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{4}{9}$ **17.** (a)(ii) $\frac{196}{295}$ (b) 0.6528 **18.** (i) $\frac{7}{15}$ **19.** $\frac{97}{105}$

20. (a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{5}$ **21.** (a) nid yw A a B yn annibynnol (b) $\frac{1}{3}$

22. (a) 0.0382 (b) 0.746

23. (b) 0.4 **24.** (a)(i) 0.12 (ii) 0.46 **25.** (a) 1/4845 (b) 48/323

Ymarfer 4.1

1. 0, 1, 2 **2.** 0, 1, 2, 3, 4 **3.** 0, 1, 2, . . ., 12 **4.** 1, 2, 3, 4, 5, 6

5. 0, 1, 2, 3, . . . **6.** 1, 2, 3, . . .

Ymarfer 4.2

1.

x	0	1	2
P(X = x)	25/36	10/36	1/36

2.

x	0	1	2	3
P(X = x)	84/220	108/220	27/220	1/220

3.

x	0	1	2
P(X = x)	0.9801	0.0198	0.0001

4.

	x	0	1	2	3
(a)	P(X = x)	969/2024	855/2024	190/2024	10/2024
(b)	P(X = x)	6859/13824	5415/13824	1425/13824	125/13824

5. $\frac{1}{5}$

6.

x	6	7	8	9	10	11	12	13
P(X = x)	20/165	45/165	18/165	31/165	36/165	6/165	6/165	3/165

7. $P(X = x) = 0.4(0.6)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \ldots$

8.

x	0	1	2
P(X = x)	19/160	74/160	67/160

9.

	x	1	2	3	4
(a)	P(X = x)	1/4	3/16	9/64	27/64
(b)	P(X = x)	1/4	1/4	1/4	1/4
(c)	P(X = x)	1/4	1/4	1/6	1/3

Ymarfer 4.3a

1. (a) $5\frac{1}{6}$ (b) 0.22 (c) 2 (d) 2.7 (e) 2.08 **2.** $\frac{1}{4}$ **3.** 0.75 ceiniog **5.** 2

6. $1\frac{1}{2}$ **7.** (a) $1\frac{4}{5}$ **8.** 1.6 **9.** 4

Ymarfer 4.3b

3. $\frac{1}{2}$ **4.** (a) $\frac{24}{11}$ (b) $\frac{61}{11}$ (c) $\frac{61}{11}$ **5.** (b) 13.5 **6.** (a) 47 (b) 2.4 **7.** $1\frac{1}{2}$

Ymarfer 4.4a

1. (a) 2.2, 0.748 (b) 2.4, 1.2 (c) 13.75, 4.84 (d) 3.54, 0.684

2. (a) $1, \frac{1}{2}$ (b) $1\frac{3}{7}, \frac{45}{98}$ **3.** 4.4, 0.44 **4.** 5.25, 3.22 **5.** 440.74

Ymarfer 4.4b

1. (a) 11, 2 (b) 20, 4 (c) 25, 6 (d) – 19, 4 (e) 4, 1

2. $a = -\frac{1}{4}, b = 2$ neu $a = \frac{1}{4}, b = -2$ **3.** £415.20, £177.60 **4.** 0.9, 0.7 ; 4.8, 1.4

5. 60, 20 **6.** 3.5, 1.25 (a) 6, 5 (b) 1, 5 **7.** 4, 36

Ymarfer 4.5a

1. (a)(i) 0.276 (ii) 0.456 (b)(i) 0.254 (ii) 0.448 **2.** (a) 0.044 (b) 0.055 (c) 0.989 (d) 0.945 **3.** 0.196, 0 neu 1 **4.** (a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{7}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$

5. (a) $\frac{1701}{8192}$ (b) $\frac{277}{65536}$ **6.** (a) $\frac{80}{243}$ (b) $\frac{112}{243}$ **7.** (a) $\frac{945}{16384}$ (b) $\frac{289}{4096}$

8. (a) 0.200 (b) 0.383 **9.** $\frac{5}{16}$ **10.** (a)(i) 2 (ii) 1 a 2

Ymarfer 4.5b

1. (a) 0.061 (b) 0.383 (c) 0.581 (d) 0.763

2. (a) 0.008 (b) 0.156 (c) 0.763 (d) 0.231

3. 0.881 **4.** (a) 0.630 (b) 0.474

5. (a) 0.117 (b) 0.244 **6.** (a) 0.119 (b) 0.830

7. (i)(a) 0.088 (b) 0.967 (ii)(a) 0.124 (b) 0.874 **8.** 0.089

Ymarfer 4.5c

1. $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}$ **2.** (a) $\frac{1}{4}$ (b) $2\frac{1}{2}$ (c) $\frac{295245}{1048576}$ **3.** 4 **4.** 6.4

5. 5, 5.07 **6.** 20, 16 ; 200, 20

Ymarfer 4.6a

1. (a) 0.224 (b) 0.423 (c) 0.185 **2.** (a) 0.156 (b) 0.469

3. (a) 0.135 (b) 0.947 **4.** (a)(i) 0.175 (ii) 0.265 (b) 0.038

5. (a) 0.214 (b) 0.456 **6.** (a) 0.879 (b) 0.221 **7.** 0.010

8. (a) $e^{-4}, 4e^{-4}, 8e^{-4}, \frac{32}{3}e^{-4}, \frac{32}{3}e^{-4}, 1-\frac{103}{3}e^{-4}$; 13.59 (b) £3.94 (c) Na fyddai

Ymarfer 4.6b

1. (a) 0.132 (b) 0.706 (c) 0.124 (d) 0.719 **2.** (a) 0.893 (b) 0.091

3. (a) 0.153 (b) 0.954 (c) 0.809 **4.** 6 **5.** (a) 0.184 (b) 6

6. (a)(i) 0.002 (ii) 0.997 (b) £7.11 **7.** (a) 0.353 (b) 0.689

Ymarfer 4.6c

1. (a)(i) 12.4, 43.2 (ii) 5.4, 19.2 (b) 42.28

2. (a) 0.132 (b) 0.544 (c) 0.748 **3.** (a) £30.75 (b) 0.4422 i 4 lle degol

Ymarfer 4.7

1. (a) 0.151 (b) 0.161 (c) 0.715 **2.** (a) 0.184 (b) 0.080 **3.** 0.935

4. (a) 0.607 (b) 0.303 (c) 0.090 **5.** (a) 0.647 (b) 0.185

6. (a) 0.449 (b) 0.991 **7.** (a) 0.180 (b) 0.677 (c) 0.323

Cwestiynau Amrywiol ar Bennod 4

1. (i)(a) 0.1465 (b) 0.7851 (ii) 3.59

2. (i)(a) 0.27648 (b) 0.0864 (ii) 0.8327 (iii)(a) 0.4962 (b) 0.1561

3. (a) 0.2787 (b) 0.0199 **4.** (i) 0.087 (ii) 0.157 (iii) £38.40 **5.** 0.5

6. (i) 0.819 (ii) 0.407 (iii) 0.122

7. (a)(i) 0.029403 (ii) 0.109 (b)(ii) 0.478 (iii) 0.825 **8.** (i) 0.8441

9. (a)(i) 0.67032 (ii) 0.06155 (iii) 0.14813 (b) 5 (c)(i) 1.5 (d) 0.594

10. (i) 0.396 (ii) 0.079 (iii) 0.105 **11.** 0.32

12. (a) 0.032 (b) 0.966 (c) 0.698 (d) 0.027 (e) 15/28

13. (i) $\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$ **14.** (i) 0.1244 (ii) 0.1222

15. (i) 0.1339 i 4 lle degol (ii) 0.1908 i 4 lle degol

16. (a)(i) 0.8864 (ii) 0.6832 (b) 0.1185

17. (a) 0.0821, 0.2052, 0.2565 (b) 0.4562 (c) 2.087
(d) £5.93 (i) £5.65 (ii) Na fyddech

18. (a) 0.0306, 0.1165, 0.2109, 0.2410 (b) 0.4010 (c) 63 ceiniog

19. (a) 0.0064 (b) 0.0049 **20.** (b) 0.7624 (c) 0.845 **21.** (c) 2.25

22. (a) 0.4422 (b) 0.2690

MYNEGAI