

**CBAC**  
**WJEC**

# **MATHEMATEG**

**Mecaneg**

**Uned M3**

**W E Williams a S Y Barham**

**SAFON UG/UWCH**

Cyhoeddwyd gan Uned Iaith Genedlaethol Cymru,  
Cydbwyllgor Addysg Cymru,  
245 Rhodfa'r Gorllewin,  
Caerdydd  
CF5 2YX

Mae Uned Iaith Genedlaethol Cymru  
yn rhan o WJEC CBAC Cyf.,  
cwmni a gyfyngir gan warant  
ac a reolir gan awdurdodau unedol Cymru.

***Mathemateg Safon UG/Uwch CBAC***  
***Mecaneg***  
***Uned M3***

Cyhoeddwyd dan nawdd Cynllun Cyhoeddiadau  
Cydbwyllgor Addysg Cymru

Cyhoeddwyd gyntaf 2002

Argraffwyd gan gwmni Hackman Cyf.,  
Cwm Clydach, Tonypandy, Rhondda CF40 2XX

ISBN: 1 86085 530 X

## **RHAGYMADRODD**

Mae'r llyfr hwn yn ymdrin â'r fanyleb ar gyfer Uned M3 manyleb newydd CBAC, ac, ynghyd â llyfrau M1 a M2 Mecaneg sy'n cyd-fynd ag ef, mae'n darparu'r holl ddeunydd sy'n angenrheidiol ar gyfer manyleb bresennol CBAC ar gyfer Mecaneg. Mae Pennod 3 hefyd yn cynnwys y deunydd ar gyfer Uned MS y fanyleb.

Mae'r dull a ddefnyddir ar gyfer hafaliadau differol trefn dau ym Mhennod 1 yn eithaf newydd, oherwydd pan fo gan yr hafaliad ategol wreiddiau cymhlyg, rhoddir cyfiawnhad, heb gynnwys rhifau cymhlyg, dros ddewis dull penodol o ddatrys y broblem.

Yn anffodus, mae'n bosibl na fyddwn wedi darganfod yr holl gamgymeriadau wrth ddarllen y profleuni. Os gwelwch unrhyw wallau, byddem yn gwerthfawrogi pe baech yn rhoi gwybod i'r cyhoeddwr fel y gellir ymgorffori cywiriadau mewn argraffiadau yn y dyfodol.





## CYNNWYS

|                                           | Tudalen |
|-------------------------------------------|---------|
| <b>Pennod 1</b>                           |         |
| Hafaliad Differol Trefn Dau               | 1       |
| <b>Pennod 2</b>                           |         |
| Mudiant Unionlin                          | 20      |
| <b>Pennod 3</b>                           |         |
| Mudiant Harmonig Syml                     | 42      |
| <b>Pennod 4</b>                           |         |
| Mudiant mewn Cylch                        | 84      |
| <b>Pennod 5</b>                           |         |
| Cydbwysedd Cyffredinol Gwrthrych Anhyblyg | 124     |
| <b>Atebion i'r Ymarferion</b>             | 131     |
| <b>Mynegai</b>                            | 140     |



## Pennod 1

### Hafaliad Differol Trefn Dau

Ar ôl gweithio drwy'r bennod hon, dylech allu

- datrys hafaliadau llinol trefn dau â chyfernodau cyson,
- modelu problemau “go iawn” syml fel hafaliadau differol trefn dau a datrys yr hafaliadau a geir.

#### 1.1 Hafaliadau differol llinol trefn dau â chyfernodau cyson

Dyma rai enghreifftiau o hafaliadau differol llinol trefn dau â chyfernodau cyson

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 30x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 8y &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y &= 3x + 2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 30x &= 11 + 5t.\end{aligned}$$

Y prawf am linoleddd yw bod yr hafaliad yn cynnwys y newidyn dibynnol a'i ddeilliadau yn unig, yn hytrach na lluosymiau neu ffwythiannau o'r rhain.

Os cesglir y termau sy'n cynnwys y newidyn dibynnol a'i ddeilliadau ar yr ochr chwith, a'r eitemau eraill ar yr ochr dde, yna, os yw'r ochr dde yn sero, gelwir yr hafaliad yn homogenaidd.

Os yw'r ochr dde yn ansero, yna gelwir yr hafaliad yn anhomogenaidd.

Mae'r ddwy enghraifft gyntaf uchod yn hafaliadau homogenaidd tra bo'r ddwy arall yn anhomogenaidd.

Mae hafaliadau llinol homogenaidd cyffredinol, gyda chyfernodau cyson, ar y ffurf ganlynol

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0,$$

lle mae  $a$ ,  $b$  ac  $c$  yn gysonion.

Mae hafaliadau anhomogenaidd cyffredinol, gyda chyfernodau cyson, ar y ffurf

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t),$$

lle mae  $a$ ,  $b$  ac  $c$  yn gysonion a gall  $f$  ddibynnu ar  $t$  ond nid ar  $x$ .

Ceir y ffurfiau cyfatebol gyda newidyn dibynnol  $y$  a newidyn annibynnol  $x$  drwy amnewid  $y$  yn lle  $x$  ac  $x$  yn lle  $t$ .

Mae'r dull arferol o ddatrys hafaliad anhomogenaidd yn cynnwys dau gam lle datrysir yr hafaliad homogenaidd drwy amnewid sero ar yr ochr dde i ddechrau. Disgrifir y dull a ddefnyddir ar gyfer hyn yn adran 1.2. Yna darganfyddir datrysiad yr hafaliad anhomogenaidd drwy gyfuno datrysiad yr hafaliad homogenaidd gyda ffwythiant arall. Disgrifir y broses hon yn adran 1.3. Mae'r canlyniad sylfaenol canlynol yn hanfodol er mwyn deall y dull o ddatrys hafaliadau a ddisgrifir yn adran 1.2.

### Canlyniad sylfaenol ar gyfer hafaliadau homogenaidd llinol

Y ffaith bwysicaf am hafaliad homogenaidd llinol trefn dau yw fod ganddo ddau ddatrysiad annibynnol (h.y. nid yw un mewn cyfrannedd union â'r llall) a bod modd darganfod y datrysiad cyffredinol trwy luosi'r ddau ddatrysiad annibynnol â chysynyn mympwyol gwahanol a'u hadio at ei gilydd.

Golyga hyn, os gallwch feddwl am ddau ddatrysiad annibynnol, byddwch yn gwybod nad oes rhagor ac y gellir darganfod y datrysiadau cyffredinol o'r rhain. Dyma enghraifft syml:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$$

Gallwch ei gwirio drwy sicrhau bod  $e^t$  ac  $e^{-t}$  ill dau yn ddatrysiadau i'r hafaliad ac felly mai'r datrysiad cyffredinol yw  $Ae^t + Be^{-t}$ , lle mae  $A$  a  $B$  yn gysonion mympwyol. Gyda hafaliad homogenaidd trefn un, sy'n amlwg yn achos arbennig o hafaliad trefn dau, dim ond un datrysiad annibynnol sy'n bodoli.

## 1.2 Datrys hafaliadau homogenaidd llinol

Mae'n debyg ei bod yn haws deall y dull cyffredinol drwy edrych ar rai enghreifftiau i gychwyn.

### Enghraifft 1.1

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{dx}{dt} - 4x = 0$$

Mae'r hafaliad yn awgrymu bod  $\frac{dx}{dt}$  mewn cyfrannedd ag  $x$ . Gwyddoch hefyd fod deilliad  $e^{mt}$ , lle mae  $m$  yn gysonyn, mewn cyfrannedd ag  $e^{mt}$ . Mae hyn yn awgrymu y gall  $x = ae^{mt}$ , lle mae  $a$  ac  $m$  yn gysonion, fod yn ddatrysiad, a chymryd y dewisir  $m$  yn ddoeth.

Drwy amnewid  $x = ae^{mt}$  yn yr hafaliad ceir

$$mae^{mt} - 4ae^{mt} = 0.$$

Yr unig ffordd y gellir bodloni'r hafaliad hwn heb i  $A$  fod yn sero yw pe bai  $m$  yn hafal i 4. Felly, mae  $e^{4t}$  yn ddatrysiad. Gwyddoch o'r canlyniad sylfaenol a ddyfynnir uchod na ellir cael datrysiad annibynnol arall ac felly y datrysiad cyffredinol yw  $x = ae^{4t}$ .

### **Enghraifft 1.2**

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$$

Y peth cyntaf i'w wneud yw gweld a yw'r dechneg a ddefnyddiwyd yn Enghraifft 1.1 yn dal i weithio. Gan gymryd bod  $x = ae^{mt}$  yn rhoi

$$m^2 ae^{mt} - 4ae^{mt} = 0$$

yna, ar gyfer datrysiad annistadl mae  $m^2 = 4$  ac felly mae  $m = \pm 2$ , fel bod y ddau ddatrysiad annibynnol yn  $e^{2t}$  ac  $e^{-2t}$ . Y datrysiad cyffredinol felly yw

$$x = Ae^{2t} + Be^{-2t},$$

lle mae  $A$  a  $B$  yn gysonion mympwyol.

### **Enghraifft 1.3**

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0,$$

a'r datrysiad fel bod  $y = 1$  a  $\frac{dy}{dx} = 1$  ar gyfer  $x = 0$ .

Yn yr achos hwn,  $x$  yw'r newidyn annibynnol ac felly y datrysiad prawf addas fydd  $y = ae^{mx}$ . Dylech bob tro gofio sicrhau eich bod yn defnyddio'r newidynnau cywir.

Drwy amnewid yn yr hafaliad ceir

$$m^2 ae^{mx} + 3mae^{mx} + 2ae^{mx} = 0$$
$$(m^2 + 3m + 2) ae^{mx}$$

ac felly, ar gyfer datrysiad annistadl (h.y. gydag  $a \neq 0$ ), mae

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

Mae'r cwadratig yn ffactorio i  $(m+1)(m+2)$  ac felly  $m = -1$  ac  $m = -2$  yw'r datrysiadau. Mae'r dull prawf unwaith eto wedi cynhyrchu'r ddau ddatrysiad annibynnol priodol, yn yr achos hwn  $e^{-x}$  ac  $e^{-2x}$ . Y datrysiad cyffredinol felly yw

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}.$$

Y cam nesaf yw darganfod y cysonion mympwyol er mwyn sicrhau y bodlonir yr amodau ar  $x = 0$ . Mae'r amod ar  $y$  yn rhoi

$$A + B = 1,$$

yn ogystal â  $\frac{dy}{dx} = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x},$

ac felly mae'r amod ar  $\frac{dy}{dx}$  yn  $x = 0$  yn rhoi

$$-A - 2B = 1$$

Drwy ddatrys yr hafaliadau hyn cawn  $B = -2$  ac  $A = 3$ .

Y datrysiad angenrheidiol felly yw

$$y = 3e^{-x} - 2e^{-2x}.$$

#### **Enghraifft 1.4**

Darganfyddwch ddatrysiad

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Drwy ddefnyddio'r amnewidiad  $x = ae^{mt}$ , gwelwn fod yn rhaid i  $m$  fodloni

$$m^2 + 2m + 1 = 0.$$

Mae dau wreiddyn y cwadratig hwn yn hafal i  $-1$  ac felly ni ellir darganfod dau ddatrysiad annibynnol. Fodd bynnag, dangosir yn adran 1.5 os caiff gwreiddyn ei ailadrodd, ac os yw  $e^{mt}$  yn ddatrysiad, yna mae  $te^{mt}$  hefyd yn ddatrysiad. Mae'n werth gwirio hyn yn y broblem hon. Os yw  $x = te^{-t}$ , yna mae

$$\frac{dx}{dt} = e^{-t} - te^{-t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -2e^{-t} + te^{-t},$$

a thrwy amnewid yn ochr chwith yr hafaliad hwn cawn

$$-2e^{-t} + te^{-t} + 2(e^{-t} - te^{-t}) + te^{-t}.$$

Mae hyn yn hafal i sero, sydd felly'n gwirio bod  $te^{-t}$  hefyd yn ddatrysiad. Felly, y datrysiad cyffredinol yw

$$x = (At + B)e^{-t}$$

#### **Enghraifft 1.5**

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

Drwy ddefnyddio'r amnewidiad prawf  $x = ae^{mt}$ , cawn

$$m^2 ae^{mt} + ae^{mt} = 0$$

ac felly mae  $m^2 + 1 = 0$ . Nid yw gwreiddiau'r hafaliad hwn yn real ond os ydych yn gyfarwydd â rhifau cymhlyg, yna byddwch yn gwybod mai  $\pm i$  yw'r gwreiddiau, gydag  $i = \sqrt{-1}$ .

Nid yw'n angenrheidiol, fodd bynnag, ddefnyddio rhifau cymhlyg i fynd dim pellach ond rhaid newid ychydig ar y tactegau. (Braslunnir dull sy'n defnyddio rhifau cymhlyg yn adran 1.6.)

Yn yr hafaliad a roddir, mae ail ddeilliad  $x$  yn lluosrif positif o  $-x$ . Gwyddoch fod sin a chosin yn ymddwyn fel hyn ac felly gallai  $a \cos pt$  neu  $b \sin pt$  fod yn amnewidiadau prawf, lle mae  $p$  yn gysonyn.

Drwy wneud yr amnewidiadau, cawn

$$-p^2 a \cos pt + a \cos pt = 0 \quad a - p^2 b \sin pt + b \sin pt = 0,$$

bodlonir yr hafaliadau hyn os yw  $p = \pm 1$ . Felly, drwy gymryd  $p = 1$ , cawn y ddau ddatrysiad annibynnol  $\cos t$  a  $\sin t$ . Byddai cymryd  $p = -1$  yn rhoi datrysiadau annibynnol  $\cos(-t)$  a  $\sin(-t)$ , h.y.  $\cos t$  a  $-\sin t$ , sy'n lluosrifau o'r un datrysiadau annibynnol ag o'r blaen. Roedd hyn i'w ddisgwyl gan mai dim ond dau ddatrysiad annibynnol sy'n bosibl. Felly, gan ein bod wedi darganfod dau ddatrysiad annibynnol, y datrysiad cyffredinol yw

$$x = A \cos t + B \sin t.$$

Mae'r dull prawf sy'n cynnwys sinau a chosinau yn gweithio i bob hafaliad sydd ar y ffurf

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = 0,$$

lle mae  $n$  yn real. Yn yr achos hwn, mae  $\cos nt$  a  $\sin nt$  yn ddatrysiadau annibynnol (gellwch wirio hyn drwy amnewid yn yr hafaliad) a'r datrysiad cyffredinol yw

$$x = A \cos nt + B \sin nt$$

Weithiau, defnyddir un o'r ffurfiau eraill  $x = a \cos(nt + \epsilon)$  (mae  $a$  a  $\epsilon$  yn gysonion fel bod  $A = a \cos \epsilon$ ,  $B = -a \sin \epsilon$ ), (mae  $b$  a  $\delta$  yn gysonion fel bod  $A = b \sin \delta$ ,  $B = b \cos \delta$ ), yn enwedig mewn problemau sy'n cynnwys mudiant harmonig syml (gweler Pennod 3).

### **Enghraifft 1.6**

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

Os amnewidir  $x = ae^{mt}$  yn yr enghraifft uchod, yna, ar gyfer  $a \neq 0$ , rhaid i  $m$  fodloni

$$m^2 + 2m + 5 = 0$$

Nid yw'r cwadratig hwn yn ffactorio a thrwy ddefnyddio'r fformiwla ar gyfer datrys

$$\text{cwadratig cawn} \quad m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm \sqrt{-4}$$

Nid yw'r gwreiddiau'n real ac os defnyddir y nodiant  $i = \sqrt{-1}$ , y gwreiddiau posibl yw  $-1+2i$  a  $-1-2i$ . Mae'n bosibl, fodd bynnag, fel yn yr enghraifft flaenorol, osgoi rhifau cymhlyg.

Dangosir yn adran 1.6 mai'r datrysiadau annibynnol yw  $e^{-t} \cos 2t$  ac  $e^{-t} \sin 2t$  a gallwn nawr edrych ar sut y ceir y rhain.

Mae defnyddio'r gwreiddiau mewn dull syml yn awgrymu mai  $e^{-t+t\sqrt{-4}}$  ac  $e^{-t-t\sqrt{-4}}$  fyddai'r datrysiadau annibynnol, ond nid yw hyn yn hynod o ddefnyddiol oni bai eich bod yn gwybod beth mae mynegiadau fel  $e^{t\sqrt{-4}}$  yn ei olygu. Y cliw ynghylch beth i'w wneud yw'r ffactor  $e^{-t}$  sy'n awgrymu y bydd  $x$  mewn cyfrannedd â hyn. Felly, defnyddir yr amnewidiad  $x = ze^{-t}$  yn yr hafaliad gwreiddiol.

Drwy ddefnyddio rheol y lluoswm, cawn

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} e^{-t} + ze^{-t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} e^{-t} - 2 \frac{dz}{dt} e^{-t} + ze^{-t},$$

a thrwy amnewid yn yr hafaliad differol cawn

$$\frac{d^2z}{dt^2} e^{-t} - 2 \frac{dz}{dt} e^{-t} + ze^{-t} + 2 \left( \frac{dz}{dt} e^{-t} - ze^{-t} \right) + 5ze^{-t} = 0$$

Mae'r hafaliad hwn yn symleiddio i

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 4z = 0$$

ac felly mae'n dilyn o'r canlyniad a ddyfynnwyd ar ddiwedd yr enghraifft ddiwethaf bod  $\cos 2t$  a  $\sin 2t$  yn ddatrysiadau annibynnol ar gyfer  $z$ . Felly, mae  $e^{-t} \cos 2t$  ac  $e^{-t} \sin 2t$  yn ddatrysiadau annibynnol ar gyfer  $x$  gyda'r datrysiad cyffredinol yn hafal i

$$x = Ae^{-t} \cos 2t + Be^{-t} \sin 2t$$

Roedd y cyfrifiadau braidd yn hir ond mae'r dull yn gweithio pan nad oes gan yr hafaliad wreiddiau real. Dangosir yn adran 1.5 bod y datrysiad cyffredinol pan fo'r gwreiddiau'n  $p \pm \sqrt{-q}$ , gyda  $q > 0$ , yn  $e^{pt} (A \cos \sqrt{q}t + B \sin \sqrt{q}t)$ . Nid oes rhaid i chi wneud y gwaith cyfrifo manwl ond gallwch fel arfer ddyfynnu'r canlyniad cyffredinol hwn. Dylech fodd bynnag, ddeall sut y cafwyd y canlyniad.

### **Enghraifft 1.7**

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 5y = 0,$$

a'r datrysiad fel bod  $y = 0$  a  $\frac{dy}{dx} = 1$  ar gyfer  $x = 0$ .

Drwy ddefnyddio'r amnewidiad  $y = e^{mx}$ , cawn, fel yn yr enghraifft arall

$$m^2 + 4m + 5 = 0$$

Dyma yw datrysiadau'r cwadratig hwn:

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = -2 \pm \sqrt{-1}.$$



Felly, drwy ddefnyddio'r canlyniad cyffredinol uchod a chan gofio bod y newidyn annibynnol nawr yn  $x$ , y datrysiad cyffredinol yw

$$y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x).$$

Mae'r amod  $y = 0$  ar gyfer  $x = 0$  yn dangos bod  $A = 0$  ac yna mae

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2x}(B \cos x - 2B \sin x).$$

Felly mae  $B = 1$  a'r datrysiad cyffredinol yw

$$y = e^{-2x} \sin x.$$

### Crynodeb o'r dull sylfaenol

Wrth grynhoi'r dull, cymerir mai  $x$  yw'r newidyn annibynnol a  $t$  yw'r newidyn dibynnol ac felly'r hafaliad cyffredinol a ystyrir yw

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0,$$

lle mae  $a$ ,  $b$  ac  $c$  yn gysonion. Fodd bynnag, mae'n rhaid i chi fod yn barod am newidynnau eraill.

- (i) Y cam cyntaf yw gwneud yr amnewidiadau prawf  $x = Ae^{mt}$ , mae hyn yn golygu bod yn rhaid i  $m$  fodloni

$$am^2 + bm + c = 0$$

ar gyfer datrysiad ansero.

Gelwir hwn yn hafaliad ategol ac fe'i ffurfir drwy amnewid  $m^2$  yn lle'r ail ddeilliad,  $m$  yn lle'r deilliad cyntaf ac 1 yn lle'r newidyn dibynnol.

- (ii) (a) Os oes dau wreiddyn real,  $m_1$  a  $m_2$ , i'r hafaliad ategol, yna'r datrysiad cyffredinol yw  $x = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}$ . (Gwelir yr achos hwn yn Enghreifftiau 1.1., 1.2. ac 1.3.)
- (b) Os un gwreiddyn yn unig wedi'i ailadrodd a geir, sef  $m$ , yna'r datrysiad cyffredinol yw  $x = e^{mt}(A + Bt)$ . (Ceir yr achos hwn yn Enghraifft 1.4.)
- (c) Os nad yw'r gwreiddiau'n real ond eu bod ar y ffurf  $p \pm \sqrt{-q}$ , lle mae  $q > 0$ , y datrysiad cyffredinol yw  $x = e^{pt}(A \cos \sqrt{q}t + B \sin \sqrt{q}t)$ . (Gwelir yr achos hwn, gyda  $p = 0$ , yn Enghraifft 1.5 ac, ar gyfer  $p \neq 0$ , yn Enghreifftiau 1.6 ac 1.7.)
- (d) Yn yr achos arbennig pan fo  $p = 0$  yn cyfateb i'r hafaliad differol

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + qx = 0,$$

ei ddatrysiad cyffredinol felly yw  $x = A \cos \sqrt{q}t + B \sin \sqrt{q}t$ .

### **Ymarferion 1.1**

Darganfyddwch ddatrysiadau cyffredinol yr hafaliadau differol canlynol.

1  $\frac{d^2x}{dt^2} - 9x = 0.$

2  $\frac{d^2x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0.$

3  $\frac{d^2x}{dt^2} - 8 \frac{dx}{dt} + 17x = 0.$

4  $\frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 8y = 0.$

5  $\frac{d^2y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} + 80y = 0.$

6  $6 \frac{d^2x}{dt^2} - 11 \frac{dx}{dt} + 4x = 0.$

7  $\frac{d^2x}{dt^2} + 25x = 0.$

Darganfyddwch ddatrysiadau yr hafaliadau differol canlynol o dan yr amodau a nodir.

8  $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0, y = 3, \frac{dy}{dx} = 0$  pan fydd  $x = \pi.$

9  $\frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 20x = 0, x = 2, \frac{dx}{dt} = 4$  pan fydd  $t = 0.$

10  $\frac{d^2x}{dt^2} + 7 \frac{dx}{dt} + 10x = 0, x = 5, \frac{dx}{dt} = 11$  pan fydd  $t = 0.$

11  $\frac{d^2y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} + 41y = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1$  pan fydd  $x = \pi.$

12  $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 0, x = 5, \frac{dx}{dt} = 5$  pan fydd  $t = 0.$

13  $\frac{d^2y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} + 20y = 0, y = 2, \frac{dy}{dx} = 4$  pan fydd  $x = 0.$

### **1.3 Datrysiad hafaliadau anhomogenaidd**

Mae'r dull o ddatrys yr hafaliadau hyn yn dibynnu ar y canlyniad sylfaenol canlynol :

**Datrysiad cyffredinol hafaliad differol llinol anhomogenaidd (h.y. un lle mae'r ochr dde yn ansero) yw swm datrysiad yr hafaliad homogenaidd cyfatebol (h.y. lle mae'r ochr dde yn sero) ac unrhyw ddatrysiad o'r hafaliad anhomogenaidd.**

Gelwir datrysiad yr hafaliad homogenaidd yn Ffwythiant Cyflenwol a gelwir unrhyw ddatrysiad o'r hafaliad anhomogenaidd yn Integryn Neilltuol. Felly

**Datrysiad cyffredinol = Ffwythiant Cyflenwol + Integryn Neilltuol.**

Nid oes gwahaniaeth sut y ceir yr Integryn Neilltuol cyn belled â'ch bod yn gwirio ei fod yn ddatrysiad. Yn eich cwrs, os  $t$  yw'r newidyn annibynnol, bydd yr ochrau de y byddwch yn dod ar eu traws i gyd ar ffurf  $At + B$ , lle mae  $A$  a  $B$  yn gysonion. H.y. bydd yr hafaliadau ar ffurf

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = At + B.$$

Mae'r dull o ganfod yr Integryn Neilltuol yn syml iawn. Byddwch yn cymryd, os yw  $A \neq 0$ , bod  $x = Ct + D$ , ac os yw  $A = 0$ , bod  $x = D$ . Yna amnewidir y ffurf briodol yn yr hafaliad a dewisir y cysonion  $C$  a  $D$  ac felly mae'r hafaliad yn cael ei fodloni.

Mewn rhai achosion arbennig (sef pan fo un o wreiddiau'r hafaliad ategol yn sero) fe gewch na fydd yr amnewidiad hwn yn gweithio.

Os felly, rhowch gynnig ar  $x = Ct^2 + Dt$ .

### **Crynodeb**

- (a) Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad homogenaidd cyfatebol - sef y Ffwythiant Cyflenwol.
- (b) Trwy wneud yr amnewidiad prawf  $x = Ct + D$  (neu, yn eithriadol, os nad yw hynny yn gweithio,  $x = Ct^2 + Dt$ ) darganfyddwch yr Integryn Neilltuol.
- (c) Ysgrifennwch y datrysiad cyffredinol fel ffwythiant cyflenwol + integryn neilltuol.

### **Enghraifft 1.8**

Darganfyddwch integryn neilltuol ar gyfer yr hafaliad differol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 4x = 56 + 20t.$$

Mae gwneud yr amnewidiad prawf  $x = Ct + D$  yn ochr chwith yr hafaliad yn rhoi

$$8C + 4(Ct + D) = 56 + 20t.$$

Mae angen i gyfernodau  $t$  fod yn hafal ar ddwy ochr yr hafaliad, ac felly hefyd y termau cyson, ac felly mae  $C = 5$ , ac  $8C + 4D = 56$  ac felly  $D = 4$ .

Mae  $5t + 4$  felly yn integryn neilltuol.

### **Enghraifft 1.9**

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} = 24 + 18t.$$

Y cam cyntaf yw datrys yr hafaliad gyda'r ochr dde yn sero. Yr hafaliad ategol yw

$$2m^2 + 3m = 0.$$

Y datrysiadau yw  $m = 0$  ac  $m = -\frac{3}{2}$  ac felly y ffwythiant cyflenwol yw  $A + Be^{-\frac{3}{2}t}$ .

Mae gwneud yr amnewidiad prawf  $x = Ct + D$  i ochr chwith yr hafaliad differol yn rhoi

$$3C = 24 + 18t.$$

Gan fod  $C$  yn gysonyn ni ellir bodloni'r hafaliad hwn ac felly gwneir yr amnewidiad prawf  $x = Ct^2 + Dt$  i ochr dde'r hafaliad differol, gan roi

$$4C + 3(2Ct + D) = 24 + 18t.$$

Mae angen i gyfernodau  $t$  a'r termau cyson fod yn hafal ar ddwy ochr yr hafaliad fel bod  $6C = 18$  a  $4C + 3D = 24$  ac felly  $C = 3$  a  $D = 4$ .

Y datrysiad cyffredinol felly yw

$$x = A + Be^{-\frac{3}{2}t} + 3t^2 + 4t.$$

Yr enghraifft hon yw'r achos eithriadol a grybwyllwyd ynghynt.

### **Enghraifft 1.10**

Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 16 + 4x,$$

a'r datrysiad hwnnw lle mae  $y = 12$  a  $\frac{dy}{dx} = -5$  pan fydd  $x = 0$ .

Y cam cyntaf yw darganfod datrysiad cyffredinol yr hafaliad gyda'r ochr dde yn sero.

Gwnaed hyn eisoes yn Enghraifft 3.11 a'r datrysiad cyffredinol yw  $Ae^{-x} + Be^{-2x}$ .

Mae gwneud yr amnewidiad prawf  $y = Cx + D$  yn ochr chwith yr hafaliad yn rhoi

$$3C + 2(Cx + D) = 16 + 4x.$$

Mae angen i gyfernodau  $x$  fod yn hafal ar ddwy ochr yr hafaliad ac felly mae  $C = 2$ , a  $3C + 2D = 16$  ac felly  $D = 5$ .

Datrysiad cyffredinol yr hafaliad felly yw

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + 2x + 5.$$

Y cam terfynol yw darganfod y cysonion fel bod yr amodau ar gyfer  $x = 0$  yn cael eu bodloni. Mae angen i

$$A + B + 5 = 12 \quad \text{ac i} \quad -A - 2B + 2 = -5.$$

Datrysiad yr hafaliadau hyn yw  $A = 7$ ,  $B = 0$ .

Y datrysiad cyflawn yw

$$y = 7e^{-x} + 2x + 5.$$

## Ymarferion 1.2

Darganfyddwch ddatrysiadau cyffredinol yr hafaliadau differol canlynol.

$$1 \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 12.$$

$$2 \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 6 \frac{dx}{dt} + 5x = 3 + 10t.$$

$$3 \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 26x = 52.$$

$$4 \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 10x = 30t - 34.$$

$$5 \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 11 \frac{dy}{dx} + 24y = 57 + 72x.$$

$$6 \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} = 3 + 8x.$$

Darganfyddwch ddatrysiadau'r hafaliadau differol canlynol o dan yr amodau a nodir.

$$7 \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} - 20x = -60, x = 8, \frac{dx}{dt} = 4 \text{ pan fydd } t = 0.$$

$$8 \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 20x = 80, x = 7, \frac{dx}{dt} = -6 \text{ pan fydd } t = 0.$$

$$9 \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 10 + 3x, y = 4, \frac{dy}{dx} = 4 \text{ pan fydd } x = 0.$$

$$10 \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 20y = 80, y = 7, \frac{dy}{dx} = -6 \text{ pan fydd } x = 0.$$

## 1.4 Problemau sy'n ymwneud â hafaliadau trefn dau

Mewn rhai achosion, mewn Economeg yn bennaf, mae'r model ei hun yn cynnwys mwy nag un hafaliad. Er enghraifft, os yw  $x$  yn dynodi pris nwyddau a  $D$  ac  $S$  yn dynodi'r galw (faint sydd eu hangen ar bris  $x$ ) a'r cyflenwad (faint a gyflenwir ar bris  $x$ ), yna mewn un model economaidd, honnir bod cyfradd newid y pris mewn cyfrannedd union â faint y mae'r galw yn fwy na'r cyflenwad (mae'r pris yn cynyddu pan fo'r galw yn fwy na'r cyflenwad). Mae hyn yn rhoi

$$\frac{dx}{dt} = k(D - S),$$

lle mae  $k > 0$ . Er mwyn cwblhau'r model, rhaid cael ychydig o wybodaeth am  $D$  ac  $S$ . Y dybiaeth arferol yw bod y ddau ar ffurf  $a + bx$  ac mae hyn yn rhoi hafaliad differol trefn un ar gyfer  $x$ . Mewn modelau ychydig yn fwy cymhleth, cymerir bod  $D$  ac  $S$  yn dibynnu ar ddeilliadau amser  $x$  ac mae hyn yn arwain at hafaliadau differol trefn dau.

Yn aml, gellir mynegi model mewn ffordd sy'n arwain at ddau hafaliad trefn un sy'n cynnwys mwy nag un newidyn, a rhaid cael gwared ag un newidyn, sy'n golygu y ceir hafaliad trefn dau.

### **Enghraifft 1.11**

Dyma fodel syml o fuddsoddiad yn ôl Samuelson. Dyma'r tybiaethau:

- (i) mae cyfradd newid y cyfalaf ar unrhyw adeg yn hafal i'r buddsoddiad ar yr adeg honno,
- (ii) mae cyfradd newid y buddsoddiad ar unrhyw adeg  $s$  gwaith cymaint â'r gwahaniaeth rhwng y cyfalaf ar yr adeg honno a gwerth cydbwysedd  $A$ . Mae'r buddsoddiad yn cynyddu pan fo'r lefel cyfalaf yn llai nag  $A$  ac yn lleihau pan fo'r lefel yn uwch nag  $A$ .

Darganfyddwch yr hafaliad differol y mae'r buddsoddiad yn ei fodloni a gwnewch sylwadau ar ymddygiad y cyfalaf.

Ceir dau "anhysbysyn" h.y. newidynnau dibynnol, sef y buddsoddiad a'r cyfalaf.

Nodir y rhain gydag  $I$  a  $C$ , yn y drefn honno. Mae tybiaeth (i) yn rhoi

$$\frac{dC}{dt} = I$$

tra bo honiad (ii) yn rhoi

$$\frac{dI}{dt} = -s(C - A).$$

Mae'r ail hafaliad yn bodloni'r amod bod  $I$  yn lleihau (cynyddu) ar gyfer  $C > A$  ( $C < A$ ).

Mae differu'r ail hafaliad mewn perthynas â  $t$  yn rhoi

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -s \frac{dC}{dt}$$

a thrwy amnewid o'r hafaliad cyntaf cawn

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -sI.$$

Yr hafaliad ategol ar gyfer yr hafaliad differol hwn yw  $m^2 = -s$  gyda gwreiddiau  $\sqrt{-s}$  ac felly, o'r crynodeb yn adran 3.5, ei ddatrysiaid cyffredinol yw  $B \cos \sqrt{s}t + C \sin \sqrt{s}t$ .

Y cyfalaf felly yw

$$A - \frac{1}{s} \frac{dI}{dt} = A - \frac{1}{\sqrt{s}} \left( -B \sin \sqrt{s}t + C \cos \sqrt{s}t \right).$$

Mae gan y termau sin a chosin gyfnod  $\frac{2\pi}{\sqrt{s}}$  ac felly mae'r cyfalaf yn osgiliadu gyda'r cyfnod hwn.

### Enghraifft 1.12

Defnyddir  $x$  i ddynodi'r nifer o ingotau dur sydd gan gwmni mewn stoc ar unrhyw adeg ac mae gan y cwmni nifer optimwm o  $X$  ingot yr hoffai ei gadw mewn stoc.

Ei bolisi prisio yw bod cyfradd cynyddu'r pris yn hafal i'r gwahaniaeth rhwng  $x$  ac  $X$  gyda'r pris yn cynyddu ar gyfer  $x < X$  ac yn lleihau ar gyfer  $x > X$ . Mae cyfradd cynyddu'r stoc yn hafal i'r gwahaniaeth rhwng y gyfradd  $Q$ , sef cyfradd cynhyrchu'r ingotau, a'r gyfradd  $S$ , sef ar ba gyfradd y cânt eu gwerthu. Yn ei ragolygon, mae'r cwmni'n cymryd bod  $Q$  ac  $S$ , mewn unedau priodol, yn cael eu mynegi yn nhermau'r pris  $p$  gan  $S = 120 - 35p - 10 \frac{dp}{dt}$  a  $Q = 48 - 11p$ .

Darganfyddwch yr hafaliadau differol a fodlonir gan  $p$  a dangoswch fod y model a fydd yn rhagfynegi  $p$  yn tueddu tuag at werth sefydlog a darganfyddwch y gwerth hwn.

Mae'r polisi prisio yn rhoi

$$\frac{dp}{dt} = (X - x)$$

Hefyd, mae'r amod sy'n pennu cyfradd cynyddu'r stoc yn rhoi

$$\frac{dx}{dt} = Q - S = -72 + 24p + 10 \frac{dp}{dt}.$$

Drwy ddifferu'r hafaliad differol cyntaf cawn

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = - \frac{dx}{dt}$$

ac felly, drwy amnewid am  $\frac{dx}{dt}$  cawn

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + 10 \frac{dp}{dt} + 24p = 72$$

Yr hafaliad ategol yw

$$m^2 + 10m + 24 = 0,$$

-6 a -4 yw ei wreiddiau ac felly y datrysiad cyffredinol yw  $ae^{-4t} + be^{-6t}$ .

Gan fod yr ochr dde'n gyson, bydd yr integryn neilltuol yn gysonyn ac felly, drwy amnewid  $p = C$  yn yr hafaliad, lle mae  $C$  yn gysonyn, cawn  $C = 3$  ac felly mae

$$p = 3 + ae^{-4t} + be^{-6t}.$$

Mae'r esbonyddion yn tueddu tuag at sero ar gyfer  $t$  ac felly mae'r pris yn tueddu tuag at 3.

### Modelu problemau mewn Mecaneg drwy ddefnyddio hafaliadau differol

Ystyrir sut i lunio modelau manwl o broblemau amrywiol mewn Mecaneg ym Mhenodau 2 a 3, ond mae'n werth cael golwg fras ar yr egwyddorion sylfaenol a ystyrir. Yn wahanol i'r problemau eraill a ystyriwyd, mae'r deddfau sylfaenol sy'n ymwneud â phroblemau mecanyddol yn adnabyddus. Yn syml, ar gyfer gronyn mewn

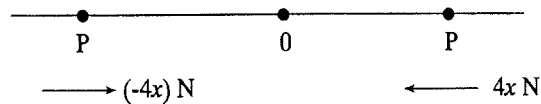
mudiant unionlin, y pwyntiau pwysig yw darganfod cyfanswm y grym sy'n gweithredu a'i roi yn hafal i mäs  $\times$  cyflymiad.

Mewn problemau modelu, mae'n eithriadol o bwysig dewis cyfeiriad cyfeirnod, fel arfer cyfeiriad positif  $x$ , a chyfrifo'r grym yn y cyfeiriad hwnnw. Mae'r cyflymiad yn  $\frac{d^2x}{dt^2}$  ac felly bydd lluosu hwn gyda'r mäs a'i roi yn hafal i'r grym yng nghyfeiriad positif  $x$  yn creu'r hafaliad differol sydd arnom ei angen. Fodd bynnag, mae'n rhaid bod yn eithriadol o ofalus gydag arwyddion, dangosir hyn yn yr enghraifft ganlynol.

### Enghraifft 1.13

Mae gronyn â mäs 0.2kg yn rhydd i symud ar hyd echelin  $x$  dan weithred grym sy'n mynd i gyfeiriad y tarddiad a sydd â maint  $4d$  N, lle mae  $d$  m yn cynrychioli pellter y gronyn oddi wrth y tarddiad. Hefyd, gweithredir grym gwrthiannol ar y gronyn (h.y. yn y cyfeiriad i'r gwrthwyneb i'w fudiant), o faint  $2v$  N, pan fo'n symud gyda buanedd  $v$  ms<sup>-1</sup>. Darganfyddwch hafaliad ei fudiant.

Os yw'r gronyn ar echelin positif  $x$ , yna mae ei bellter oddi wrth y tarddiad yn  $x$  m, mae'r grym atynnol i'r chwith fel a ddangosir yn y diagram ac mae ganddo faint  $4x$  N, mae'r grym yng nghyfeiriad positif  $x$  felly'n  $-4x$  N. Os yw'r gronyn ar echelin negatif  $x$ , yna mae ei bellter oddi wrth y tarddiad yn  $(-x)$  m, (mae  $-x$  yn positif), mae'r grym atynnol i'r dde fel a ddangosir yn y diagram ac mae ganddo faint  $4(-x)$  N, felly mae'r grym yng nghyfeiriad positif  $x$  yn  $-4x$  N unwaith eto.



Os yw'r gronyn yn symud i'r dde, yna mae  $\frac{dx}{dt}$  yn positif ac mae'n hafal i fuanedd y gronyn, mae'r grym gwrthiannol felly i'r chwith ac yn hafal i  $12\frac{dx}{dt}$  N, felly mae'r grym yng nghyfeiriad positif  $x$  yn hafal i  $-12\frac{dx}{dt}$  N.

Os yw'r gronyn yn symud i'r chwith, yna mae  $\frac{dx}{dt}$  yn negatif ac mae buanedd y gronyn yn  $-\frac{dx}{dt}$ , (sy'n positif) ac mae'r grym gwrthiannol i'r dde ac yn hafal i  $12\left(-\frac{dx}{dt}\right)$  N. Felly, mae'r grym yng nghyfeiriad positif  $x$  yn hafal i  $-12\left(\frac{dx}{dt}\right)$  N.



Felly, hafaliad y mudiant yw

$$0.2 \frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 12 \frac{dx}{dt}.$$

Gellir datrys y math hwn o hafaliad fel a wnaed yn adran 1.2 a chyfeirir at y mudiant a geir fel mudiant harmonig gwanychol. Edrychir ar hyn yn fanwl ym Mhennod 3.

Wrth lunio model newydd, mae'n bwysig edrych yn ofalus iawn ar yr arwyddion, fel a ddangosir uchod. Pe bai'r grym mewn cyfrannedd â  $d^2$ , er enghraifft, yna byddai'r hafaliadau differol a ganfuwyd wedi bod yn wahanol ar gyfer  $x > 0$  ac  $x < 0$ .

## 1.5 Cyfiawnhau'r dulliau ar gyfer gwreiddiau hafal ac an-real

Dyma'r math cyffredinol o hafaliad a ystyrir

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0,$$

lle mae  $a$ ,  $b$  ac  $c$  yn gysonion.

Yr hafaliad ategol yw

$$am^2 + bm + c = 0$$

gyda datrysiadau

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Gwreiddiau Hafal

Ar gyfer gwreiddiau hafal, mae  $b^2 = 4ac$  ac unig wreiddyn amlwg yr hafaliad ategol yw  $-\frac{b}{2a}$  a dynodir hyn gan  $p$ . Nawr, rhaid dangos bod  $x = te^{pt}$  hefyd yn ddatrysiad.

Mae rheol y lluoswm yn dangos bod

$$\frac{dx}{dt} = e^{pt}(1 + pt), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = e^{pt}(2p + p^2t).$$

Drwy amnewid y rhain yn ochr chwith yr hafaliad differol, cawn

$$a(2p + p^2t) + b(1 + pt) + ct = b + 2ap + (c + p^2a + pb)t,$$

gan fod  $p = -\frac{b}{2a}$ , mae ochr dde'r hafaliad yn symleiddio i  $\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)t$ .

Mae hwn yn diflannu ac felly mae  $te^{pt} \left( = te^{-\frac{bt}{2a}} \right)$  hefyd yn ddatrysiad i'r hafaliad differol.

### Gwreiddiau an-real (h.y. cymhlyg)

Yn yr achos hwn, rhaid cael  $b^2 - 4ac < 0$  a'r gwreiddiau yw  $p \pm \sqrt{-q}$ , lle mae

$p = -\frac{b}{2a}$  a  $q = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$  ac yn bositif. Y cam cyntaf wrth ddarganfod y ffurf a

roddir yn y crynodeb yn adran 1.2, fel yn Enghraifft 1.6, yw ysgrifennu  $x$  fel  $ze^{pt}$ . Os ydych am roi tro ar hyn ar gyfer unrhyw hafaliad penodol, yna mae cyfernod  $t$  yn yr hafaliad esbonyddol yn hafal i minws hanner cymhareb cyfernod y deilliad cyntaf i un yr ail ddeilliad.

Gan ddefnyddio rheol y lluoswm cawn

$$\frac{dx}{dt} = e^{pt} \left( \frac{dz}{dt} + pz \right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{pt} \left( \frac{d^2z}{dt^2} + 2p \frac{dz}{dt} + p^2 z \right).$$

Drwy amnewid y rhain yn yr hafaliad cawn

$$a \left( \frac{d^2z}{dt^2} + 2p \frac{dz}{dt} + p^2 z \right) + b \left( \frac{dz}{dt} + pz \right) + cz = 0.$$

Mae amnewid  $p = -\frac{b}{2a}$  yn dangos bod cyfernod  $\frac{dz}{dt}$  yn sero ac aiff yr hafaliad yn

$$a \frac{d^2z}{dt^2} + (c + p^2 a + pb)z = 0.$$

Mae hwn yn symleiddio, drwy amnewid am  $p$  a defnyddio'r diffiniad  $q = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ , i

$$\frac{d^2z}{dt^2} + qz = 0.$$

Drwy wneud yr amnewidiad prawf  $z = A \cos mt + B \sin mt$ , gwelwn fod

$$-m^2 + q = 0,$$

ac felly mae  $m = \sqrt{q}$ , sy'n rhoi'r datrysiad cyffredinol  $z = A \cos \sqrt{q}t + B \sin \sqrt{q}t$ .

Felly'r datrysiad cyffredinol ar gyfer  $x$  yw  $e^{pt} (A \cos \sqrt{q}t + B \sin \sqrt{q}t)$ , sydd felly'n cadarnhau'r honiad a wnaed yn y crynodeb yn Adran 1.2.

Ar gyfer pawb sy'n gyfarwydd â rhifau cymhlyg, mae'r canlynol yn ffordd arall o ddod i'r un casgliad.

Gellir ysgrifennu gwreiddiau'r hafaliad ategol fel  $p \pm i\sqrt{q}$ . Y datrysiad cyffredinol felly yw  $Ce^{pt}e^{i\sqrt{q}t} + De^{pt}e^{-i\sqrt{q}t}$ . Gellir ailysgrifennu hyn, gan ddefnyddio'r canlyniad

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

fel  $e^{pt} [C(\cos \sqrt{q}t + i \sin \sqrt{q}t) + D(\cos \sqrt{q}t - i \sin \sqrt{q}t)]$

Gellir ailysgrifennu hwn fel

$$e^{pt} (A \cos \sqrt{q}t + B \sin \sqrt{q}t),$$

lle mae  $A = C + D$  a  $B = i(C - D)$ .

## Ymarferion Amrywiol 1

- 1 Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 10y = 30x + 16$$

- 2 Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 7 \frac{dy}{dx} + 12y = 36$$

- 3 (a) Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 15 \frac{dx}{dt} + 36x = k \quad \text{lle mae } k \text{ yn gysonyn.}$$

Darganfyddwch hefyd y datrysiad sy'n golygu bod  $x = 0$  a  $\frac{dx}{dt} = 0$  pan fo  $t = 0$ .

- (b) I gychwyn, mae cymuned yn cynnwys  $N$  unigolyn ac mae pob un ohonynt yn agored i glefyd penodol. Yna, gellir gosod pob aelod o'r gymuned mewn un, a dim ond un, o'r categorïau canlynol.

- Unigolion sy'n agored i'r clefyd,
- unigolion sy'n dioddef o'r clefyd ar hyn o bryd,
- unigolion sydd wedi gwella o'r clefyd a ddim yn agored i glefyd pellach,
- unigolion sydd wedi marw o'r clefyd.

Ar amser  $t$  ar ôl i'r clefyd daro, mae  $x$  yn dynodi'r nifer sydd wedi marw ac  $y$  yn dynodi'r nifer sy'n dioddef o'r clefyd ar hyn o bryd. Mae cyfradd  $y$  marwolaethau a chyfradd  $y$  rhai sydd wedi gwella yn sicrhau, ar unrhyw adeg, bod nifer  $y$  rhai sydd wedi gwella ddwywaith cymaint â'r nifer sydd wedi marw erbyn hynny.

Ysgrifennwch, yn nhermau  $x$  ac  $y$  ac  $N$ , nifer  $y$  bobl sy'n agored i'r clefyd ar amser  $t$ .

O wybod, ar unrhyw adeg, bod  $y$  gyfradd  $y$  bydd pobl sy'n agored i'r clefyd yn dal  $y$  clefyd ei hun (mewn unedau priodol) deirgwaith cymaint â'r nifer o bobl sy'n agored i'r clefyd ar yr adeg honno, dangoswch fod

$$3 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 3(N - 3x - y)$$

O wybod bod cyfradd marwolaethau'r bobl sy'n dioddef o'r clefyd bedair gwaith cymaint â nifer  $y$  bobl sy'n dioddef o'r clefyd, mynegwch  $\frac{dx}{dt}$  yn

nhermau  $y$  a thrwy hynny dangoswch fod  $x$  yn bodloni'r hafaliad yn (a) ar gyfer gwerth penodol o  $k$ , y dylid ei ddarganfod.

Gan gymryd nad oes unrhyw un yn marw o achosion eraill, nodwch faint o bobl fydd yn marw o'r clefyd yn y pen draw.

- 4 (a) Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad differol canlynol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 0.$$

- (b) Wrth fodelu buddsoddiad mewn economeg, cymerir yn ganiataol, drwy ddewis unedau penodol, bod

(i) cyfradd cynyddu'r gorgyfalaf  $k$  yn hafal i'r buddsoddiad  $I$ ,

(ii) cyfradd lleihau'r buddsoddiad  $I$  yn hafal i swm  $8k$  a  $4I$ .

Mynegwch  $\frac{dk}{dt}$  yn nhermau  $I$ , a  $\frac{dI}{dt}$  yn nhermau  $k$  ac  $I$ , ac felly dangoswch fod

$k$  yn bodloni'r hafaliad differol yn rhan (a). Rhewch sylwadau ar ymddygiad  $k$  ar gyfer gwerthoedd mawr o  $t$ .

- 5 Darganfyddwch ddatrysiad

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt} + 17p = 34,$$

fel bod  $p = 2.5$  a  $\frac{dp}{dt} = 0$  pan fo  $t = 0$ .

Mewn model economaidd, caiff y galw  $D$  (y nifer sydd ei angen) ar gyfer eitem benodol ei ddynodi gan

$$D = 6\frac{d^2p}{dt^2} + 7\frac{dp}{dt} + 6p + 16,$$

Ile mae  $p$  yn cynrychioli pris yr eitem, mewn punnoedd, ar amser  $t$  mis. Yn yr un modd, dynodir y cyflenwad  $S$  (y nifer sydd ar gael) gan

$$S = 7\frac{d^2p}{dt^2} + 9\frac{dp}{dt} = 23p - 18.$$

O wybod bod  $S = D$  a phan fo  $t = 0$ , bod  $p = 2.5$  a  $\frac{dp}{dt} = 0$ , darganfyddwch

- (i) y pris ar ôl amser hir,  
(ii) y pris isaf y gellir talu am yr eitem a'r amser pan fyddai hynny'n bosibl.

- 6 Mae ffwythiant  $y$  yn bodloni'r hafaliad differol

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + (4-k)y = k(k+1)(6x+4)$$

Ile mae  $k$  yn gysonyn, a phan fo  $x = 0$ , mae  $y = 5$  a  $\frac{dy}{dx} = -1$ .

Darganfyddwch  $y$  yn y tri achos canlynol

- (a)  $k = 1$ ,  
(b)  $k = -1$ ,  
(c)  $k = 0$ .

7 Darganfyddwch ddatrysiad

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 16x$$

gyda  $x = a$  a  $\frac{dx}{dt} = -b$  pan fo  $t = 0$ , lle mae  $a$  a  $b$  yn gysonion positif.

Os yw  $a > \frac{b}{4}$ , gwiriwch na fydd  $x$  byth yn sero ac y bydd  $\frac{dx}{dt}$  yn sero ar gyfer gwerth positif o  $t$ .

Mewn “gêm ryfel” syml, cymerir bod dwy fyddin filwrol, ‘byddin A’ a ‘byddin B’, yn ymladd â’i gilydd. Defnyddir  $x$  ac  $y$ , yn y drefn honno, i ddynodi’r niferoedd ym myddin A a byddin B ar amser  $t$ . Cymerir hefyd bod y gyfradd y mae’r nifer ym myddin A yn lleihau arno yn hafal i ddwywaith y nifer ym myddin B ar yr adeg honno a bod y nifer ym myddin B yn lleihau ar gyfradd sy’n hafal i wyth gwaith y nifer ym myddin A ar yr adeg honno. Dangoswch fod  $x$  yn bodloni’r hafaliad differol uchod.

Enillir y gêm pan fo un o’r byddinoedd wedi ei difodi a’r llall heb ei difodi. O wybod bod  $x_0$  ac  $y_0$  yn dynodi’r niferoedd ym myddin A a byddin B, yn y drefn honno, ar amser  $t = 0$ , darganfyddwch amod a roddir ar  $x_0$  ac  $y_0$  a fydd yn sicrhau bod byddin A yn ennill y gêm.

## Pennod 2

### Mudiant Unionlin

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon, dylech

- allu datrys problemau yn ymwneud â mudiant unionlin lle mae'r cyflymiad yn ffwythiant dadleoliad neu gyflymder,
- allu datrys problemau syml yn ymwneud â mudiant unionlin a wrthsefir,
- fod yn ymwybodol o rai o'r tybiaethau a wneir wrth fodelu grymoedd gwrthsafol.

#### 2.1 Cyflymiad sy'n dibynnu ar ddadleoliad

Rydych wedi gweld eisoes, yn M1 Pennod 4, sut i ddatrys problemau mudiant mewn llinell syth lle roedd y cyflymiad yn dibynnu ar amser. Yn y bennod hon, ystyrir problemau lle mae'r cyflymiad yn dibynnu ar ddadleoliad neu ar gyflymder. Y gwahaniaeth sylfaenol rhwng y problemau hyn a'r rhai y daethoch ar eu traws yn M1 yw bod y problemau nawr yn cynnwys hafaliadau differol y mae arnom angen y dulliau a ddisgrifiwyd ym Mhennod 1 i'w datrys. Yn M1, diffiniwyd y cyflymiad  $a$  gan

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

lle mae  $v$  yn cynrychioli'r cyflymder i'r cyfeiriad  $x$  positif a chaiff ei ddiffinio gan

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Mae mynegiad arall ar gyfer  $a$  sy'n ddefnyddiol mewn problemau lle rhoddir y cyflymiad yn nhermau'r dadleoliad, sef

$$a = v \frac{dv}{dx}.$$

Profir hyn trwy ddefnyddio'r unfathiant

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt},$$

sy'n dilyn oddi wrth y rheol gadwyn.

Mae rhoi  $v$  yn lle  $\frac{dx}{dt}$  yn rhoi'r mynegiad sydd ei angen ar gyfer  $a$ .

Mae'n debyg mai'r ffordd hawsaf i ddeall y dull cyffredinol yw edrych ar enghraifft.

**Enghraifft 2.1**

Pan fydd dadleoliad gronyn oddi wrth bwynt  $O$  yn  $x$  m, ei gyflymiad yw  $e^{2x} \text{ ms}^{-2}$ . Ar amser  $t = 0$ , mae'r gronyn yn mynd trwy'r tarddiad ar fuanedd  $1 \text{ ms}^{-1}$  i gyfeiriad  $x$  cynyddol.

Darganfyddwch

- (a) ei fuanedd pan fydd ei ddadleoliad yn  $x$  m,
- (b) ei ddadleoliad ar amser  $t$  s.

Hafaliad mudiant y gronyn yw

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{2x}.$$

Ni ellir integru'r hafaliad hwn yn uniongyrchol mewn perthynas â  $t$  gan fod yr ochr dde yn cynnwys  $x$  nad yw'n hysbys yn nhermau  $t$ . Fodd bynnag, gellir ailysgrifennu hafaliad y mudiant, gan ddefnyddio'r mynegiad a ddeilliwyd uchod, fel

$$v \frac{dv}{dx} = e^{2x}.$$

Mae'r ochr chwith yn hafal i  $\frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx}$ ;

h.y. 
$$\frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx} = e^{2x}.$$

Gellir integru dwy ochr yr hafaliad hwn mewn perthynas ag  $x$  gan roi

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + c,$$

Ile mae  $c$  yn gysonyn. Mae amnewid  $v = 1$  pan fydd  $x = 0$  yn dangos bod  $c = 0$ . Felly, wrth gymryd yr ail isradd, mae

$$v = e^x.$$

Mae angen bod yn ofalus iawn i ddewis yr arwydd cywir ar gyfer yr ail isradd mewn problemau fel hyn. Yn yr achos hwn rhaid dewis yr arwydd positif gan fod y gronyn yn symud i'r cyfeiriad  $x$  positif pan oedd  $x = 0$  ac felly

$$\frac{dx}{dt} = e^x.$$

Dyma hafaliad differol i ddarganfod  $x$  a gellir ei ddatrys trwy wahanu newidynnau. Mae gwahanu'r newidynnau yn rhoi

$$e^{-x} \frac{dx}{dt} = 1,$$

ac mae integru hwn mewn perthynas â  $t$  yn rhoi

$$\int e^{-x} dx = \int dt.$$

Mae cyflawni'r integriadau yn rhoi

$$-e^{-x} = t + a,$$

lle mae  $a$  yn gysonyn. Mae amnewid  $x = 0$  a  $t = 0$  yn dangos bod  $a = -1$ , ac felly

$$x = -\ln(1 - t).$$

Dim ond pan fydd  $t < 1$  y mae'r datrysiad yn ddilys gan fod  $x$  yn mynd yn anfeidraidd pan fydd  $t = 1$ . Nid yw'r enghraifft yn un sy'n realistig yn ffisegol, ond mae'r fathemateg yn ddigon syml i'r camau fod yn eglur.

### Y dull sylfaenol

Pan roddir y cyflymiad yn nhermau'r dadleoliad, dyma'r camau i'w dilyn:-

(i) Ysgrifennwch y cyflymiad fel

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx}.$$

ac integrwch mewn perthynas ag  $x$  yr hafaliad a geir o ganlyniad.

(ii) Defnyddiwch unrhyw amodau a roddir i ddarganfod y cysonyn mympwyol a gynhyrchwyd gan yr integriad yn (i). Neu efallai y byddai integru rhwng terfannau addas yn gyflymach.

(iii) Nawr bydd gennych fynegiad ar gyfer  $v^2$ . Cymerwch yr ail isradd priodol fel bod eich gwerth ar gyfer  $v$  yn gyson â'r amodau a roddir.

(iv) Bydd canlyniad (iii) ar ffurf

$$v = \frac{dx}{dt} = F(x),$$

lle mae  $F$  yn hysbys yn nhermau  $x$ .

(v) Gellir datrys yr hafaliad a geir yn (iv) trwy wahanu'r newidynnau ac integru mewn perthynas â  $t$  gan roi

$$\int \frac{dx}{F(x)} = \int dt.$$

Mae cyflawni'r integriadau yn rhoi  $t$  yn nhermau  $x$ . Os yw'n bosibl, dylid gwrthdroi'r hafaliad a geir er mwyn rhoi  $x$  yn nhermau  $t$ .

Yn aml mae'r integriad yn (v) yn anodd iawn ac efallai y bydd angen defnyddio dull rhifiadol fel rheol Simpson er mwyn mynd ymhellach.



Felly yn aml iawn, pan roddir y cyflymiad yn nhermau'r dadleoliad, yr unig beth y gellir ei ddarganfod yn rhwydd yw perthynas rhwng y cyflymder a'r dadleoliad. Mae'r dull sylfaenol yn cyfateb i ddefnyddio'r egwyddor gwaith-egni, sef yr hyn a ddisgrifiwyd yn M2.

Os rhoddir y cyflymder, yn hytrach na'r cyflymiad, yn nhermau'r dadleoliad bydd y gwaith cyfrifo yn dechrau ar gam (v).

### **Enghraifft 2.2**

Mae'r cyflymiad oherwydd disgyrchiant ar bwynt y tu allan i'r Ddaear yn cyfeirio tuag at  $O$ , canol y Ddaear, ac yn hafal i  $\frac{ga^2}{x^2}$ , lle mae  $a$  yn dynodi radiws y Ddaear ac  $x$  yn dynodi'r pellter o  $O$ . Mae'r tanwydd mewn roced wedi'i ddisbyddu yn llwyr pan fydd ar bellter  $b$  o ganol y Ddaear a buanedd y roced bryd hynny yw  $u$ .

A chymryd bod y roced yn symud ar hyd y llinell syth ati hi o  $O$ , darganfyddwch ei buanedd pan fydd ar bellter  $\frac{5b}{4}$  o  $O$ .

Y cyflymiad i gyfeiriad  $x$  cynyddol yw  $-\frac{ga^2}{x^2}$  ac felly gellir ysgrifennu hafaliad y mudiant fel

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx} = -\frac{ga^2}{x^2}.$$

Os defnyddir  $V$  i ddynodi'r cyflymder sydd ei angen, yna mae integru'r ochr chwith mewn perthynas â  $v$  o  $u$  i  $V$  a'r ochr dde mewn perthynas ag  $x$  o  $b$  i  $\frac{5b}{4}$  yn rhoi

$$V^2 - u^2 = -\frac{2ga^2}{5b},$$

ac felly y buanedd sydd ei angen yw  $\sqrt{u^2 - \frac{2ga^2}{5b}}$ .

Bydd hwn yn ddilys pan fydd  $u^2 > \frac{2ga^2}{5b}$  yn unig.

Os yw  $u^2 < \frac{2ga^2}{5b}$ , yna bydd y roced wedi dod i ddisymudedd cyn cyrraedd y pwynt ar bellter o  $\frac{5b}{4}$  o  $O$  ac yna bydd yn dychwelyd i'r Ddaear.

### **Enghraifft 2.3**

Pan fydd dadleoliad gronyn o bwynt  $O$  yn  $x$  m, ei gyflymiad yw  $\frac{24}{x^4} \text{ ms}^{-2}$  i gyfeiriad  $x$

lleihaol. Ar amser  $t = 0$ , mae'r gronyn yn mynd trwy'r pwynt  $x = 2$ , gan symud ar fuanedd  $\sqrt{2} \text{ ms}^{-1}$  i gyfeiriad  $x$  cynyddol.

Darganfyddwch

- (a) ei fuanedd pan fydd ei ddadleoliad yn  $x$  m,
- (b) ei ddadleoliad ar amser  $t$  s.

Hafaliad mudiant y gronyn yw

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dx} = -\frac{24}{x^4}.$$

Mae integru'r hafaliad hwn mewn perthynas ag  $x$  yn rhoi

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{8}{x^3} + c,$$

Ile mae  $c$  yn gysonyn.

Mae amnewid  $v = \sqrt{2}$  pan fydd  $x = 2$  yn dangos bod  $c = 0$ .

Felly, wrth gymryd yr ail isradd, mae

$$v = \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Dewiswyd yr arwydd positif gan fod y gronyn yn symud i gyfeiriad  $x$  positif pan oedd  $x = 2$ .

Felly

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Mae gwahanu'r newidynnau yn rhoi

$$x^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{dt} = 4,$$

sef, wrth integru mewn perthynas â  $t$ ,

$$\int x^{\frac{3}{2}} dx = 4 \int dt.$$

Mae cyflawni'r integriadau yn rhoi

$$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = 4t + a,$$

Ile mae  $a$  yn gysonyn. Mae amnewid  $x = 2$  pan fydd  $t = 0$  yn dangos bod  $a = \frac{8\sqrt{2}}{5}$  ac

mae gwrthdroi'r hafaliad yn rhoi

$$x = \left(4\sqrt{2} + 10t\right)^{\frac{2}{5}}$$

#### **Enghraifft 2.4**

Cyflymiad i gyfeiriad  $x$  positif gronyn sy'n rhydd i symud ar hyd yr echelin  $x$  yw  $-\omega^2 x$ , lle mae  $\omega$  yn gysonyn. Ar amser  $t=0$  mae'r gronyn yn ddisymud ar y pwynt  $x = a$ . Darganfyddwch ei ddadleoliad wedyn. (Dyma enghraifft o fudiant harmonig syml; ymdrinnir yn fanwl â hyn ym Mhennod 3.)

Yn yr achos hwn hafaliad mudiant y gronyn yw

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{d\frac{1}{2}v^2}{dx} = -\omega^2 x.$$

Mae integru'r hafaliad hwn mewn perthynas ag  $x$  yn rhoi

$$v^2 = -\omega^2 x^2 + c,$$

lle mae  $c$  yn gysonyn. Mae amnewid  $v = 0$  pan fydd  $x = a$  yn dangos bod  $c = \omega^2 a^2$ .

Felly, wrth gymryd yr ail isradd, mae

$$v = -\omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Dewiswyd yr arwydd negatiff gan fod y gronyn yn ddisymud pan oedd  $x = a$  a bod ei gyflymiad i gyfeiriad  $x$  negatiff, ac felly bydd y gronyn yn dechrau symud i gyfeiriad  $x$  negatiff. Felly

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru yn rhoi

$$\int \frac{dx}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}} = -\omega \int dt.$$

Gellir enrhifo'r integryn mewn perthynas ag  $x$ , ac felly mae

$$\sin^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) = -\omega t + b,$$

lle mae  $b$  yn gysonyn. Mae amnewid  $x = a$  pan fydd  $t = 0$  yn dangos bod  $b = \frac{\pi}{2}$  ac

felly, yn y pen draw, mae  $x = a \cos \omega t$ .

### Ymarferion 2.1

- 1 Mae cyflymiad gronyn sy'n symud ar hyd yr echelin  $x$  yn  $4x \text{ ms}^{-2}$  i gyfeiriad  $x$  negatiff pan fydd ei ddadleoliad o'r tarddiad yn  $x$  m. Rhyddheir y gronyn o ddisymudedd ar y pwynt  $x = 3$ . Darganfyddwch ei fuanedd pan fydd  $x = 2$ .
- 2 Mae gronyn yn symud ar hyd yr echelin  $x$  a'i gyflymiad yw  $8x^3 \text{ ms}^{-2}$ , i'r cyfeiriad  $x$  cynyddol, pan fydd ei ddadleoliad o'r tarddiad yn  $x$  m. Mae'n symud i'r cyfeiriad  $x$  cynyddol gyda buanedd  $3 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd yn mynd trwy'r tarddiad. Darganfyddwch y pellter a deithir cyn y bydd ei fuanedd yn  $6 \text{ ms}^{-1}$ .
- 3 Pan fydd dadleoliad gronyn yn  $x$  m o'r tarddiad, ei gyflymiad i gyfeiriad  $x$  negyddol yw  $\frac{3}{2x^2} \text{ ms}^{-2}$ . Ei gyflymder pan fydd  $x = 0.25 \text{ m}$  yw  $3 \text{ ms}^{-1}$  i gyfeiriad  $x$  positif. Darganfyddwch y buanedd yn nhermau'r dadleoliad a darganfyddwch lle mae'r gronyn yn dod i aros am ennyd am y tro cyntaf.

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v^2}.$$

Mae'r dull gwahanu newidynnau yn rhoi

$$\int v^3 dv = \int dx.$$

Mae integru'r ochr chwith o  $v = 1$  i  $v = v$  a'r ochr dde o  $x = 4$  i  $x = x$  yn rhoi

$$v^4 - 1 = 4x - 16,$$

sef y canlyniad a gafwyd ynghynt.

Bob tro y rhoddir y cyflymiad fel ffwythiant buanedd bydd y camau yn y gwaith cyfrifo yn union yr un fath ag yn Enghraifft 2.5.

### Y dull cyffredinol

(i) Defnyddiwch y cyflymiad yn y ffurf  $\frac{dv}{dt}$  yn hafaliad y mudiant, gwahanwch y newidynnau ac integrwch, naill ai gan gyflwyno cysonyn integriad neu gan integru rhwng terfannau. Os cyflwynir cysonyn mympwyol, yna defnyddiwch yr amodau a roddir er mwyn ei ddarganfod. Os yw'r cyflymiad mewn cyfrannedd union â  $v$ , ceir ffordd arall, sef defnyddio'r amnewidiad  $v = e^{mt}$ .

(ii) Bydd hyn yn rhoi  $v$  yn nhermau  $t$ ; gellir integru hwn gan ddefnyddio  $v = \frac{dx}{dt}$  i ddarganfod  $x$  yn nhermau  $t$ . Unwaith eto integrwch rhwng terfannau neu cyflwynwch gysonyn mympwyol. Os cyflwynir cysonyn mympwyol, yna defnyddiwch yr amodau a roddir er mwyn ei ddarganfod.

(iii) Os oes angen perthynas rhwng  $v$  ac  $x$ , yna

**naill ai**

(a) gwrthdrowch y datrysiad a ganfuwyd yng nghanam (ii) er mwyn rhoi  $t$  yn nhermau  $x$  ac amnewidiwch y canlyniad yn y mynegiad ar gyfer  $v$  a ganfuwyd yng nghanam (i). Os na ellir cyflawni'r gwrthdroad hwn, efallai y gellir gwrthdroi'r mynegiad ar gyfer  $v$  er mwyn darganfod  $t$  yn nhermau  $v$  a thrwy hyn ddarganfod  $x$  yn nhermau  $v$ .

**neu**

(b) defnyddiwch y cyflymiad yn y ffurf  $v \frac{dv}{dx}$  yn hafaliad y mudiant, gwahanwch y newidynnau ac integrwch, naill ai gan gyflwyno cysonyn integriad neu gan integru rhwng terfannau. Os cyflwynir cysonyn mympwyol, yna defnyddiwch yr amodau a roddir er mwyn ei ddarganfod.

**Enghraifft 2.6**

Arafiad gronyn sy'n symud gyda buanedd  $v$   $\text{ms}^{-1}$  ar amser  $t$  s yw  $3v^3 \text{ ms}^{-2}$ . Pan fydd  $t = 0$ , mae  $v = 2$  ac mae'r gronyn yn mynd trwy'r pwynt sefydlog  $O$ . Darganfyddwch

- (a) ddadleoliad y gronyn ar unrhyw amser wedyn,
- (b) buanedd y gronyn pan fydd ei ddadleoliad o  $O$  yn  $x$  m.

Yn yr achos hwn mae'r cyflymiad yn negatif a hafaliad y mudiant yw

$$\frac{dv}{dt} = -3v^3.$$

Mae gwahanu'r newidynnau fel yng ngham (i) yn rhoi

$$\int \frac{dv}{v^3} = -3 \int dt.$$

Mae integru'r ochr chwith o  $v = 2$  i  $v = v$  a'r ochr dde o  $t = 0$  i  $t = t$  yn rhoi

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{4} \right) = 3t.$$

Mae datrys ar gyfer  $v$  yn nhermau  $t$  yn rhoi

$$v = \frac{2}{\sqrt{1 + 24t}}.$$

Mae rhoi  $\frac{dx}{dt}$  yn lle  $v$  fel yng ngham (ii) yn rhoi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\sqrt{1 + 24t}}.$$

Mae integru'r hafaliad hwn o  $t = 0$  i  $t = t$  yn rhoi, gan ddefnyddio  $x = 0$  pan fydd  $t = 0$ ,

$$x = \frac{\sqrt{1 + 24t}}{6} - \frac{1}{6}.$$

Gellir datrys yr hafaliad uchod er mwyn rhoi  $t$  yn nhermau  $x$  a gellir amnewid y canlyniad yn y mynegiad ar gyfer  $\frac{dx}{dt}$ . Ffordd arall yw ysgrifennu'r cyflymiad fel  $v \frac{dv}{dx}$

fel bod

$$v \frac{dv}{dx} = -3v^3.$$

Mae gwahanu'r newidynnau yn rhoi

$$\int \frac{dv}{v^2} = -3 \int dx.$$

Mae integru'r ochr chwith o  $v = 2$  i  $v = v$  a'r ochr dde o  $x = 0$  i  $x = x$  yn dangos bod

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{2} = 3x.$$

Mae datrys ar gyfer  $v$  yn nhermau  $x$  yn rhoi  $v = \frac{2}{1 + 6x}$ .

**Ymarferion 2.2**

Mae cwestiynau 1 i 5 yn cyfeirio at ronyn  $P$  yn symud ar hyd yr echelin  $x$  ar gyflymiad  $a \text{ ms}^{-2}$  i gyfeiriad  $x$  positif; mae  $x$  m yn dynodi ei ddadleoliad o'r tarddiad ar amser  $t$  s ac mae  $v \text{ ms}^{-1}$  yn dynodi ei gyflymder i gyfeiriad  $x$  positif ar yr amser hwnnw.

- 1  $a = -6v$ ,  $x = 3$  a  $v = 5$  pan fydd  $t = 0$ . Darganfyddwch  $x$  yn nhermau  $t$ .
- 2  $a = \frac{1}{v}$ ,  $x = 4$  a  $v = 3$  pan fydd  $t = 0$ . Darganfyddwch  $v$  yn nhermau  $x$ .
- 3  $a = -\frac{v^2}{4}$ ,  $x = 0$ ,  $v = 2$  pan fydd  $t = 0$ . Darganfyddwch  $v$  a  $t$  pan fydd  $x = 8$ .
- 4  $a = 4(2 - v)^2$ ,  $x = 0$  a  $v = 0$  pan fydd  $t = 0$ . Darganfyddwch  $v$  yn nhermau  $t$ .
- 5  $a = -2\sqrt{v}$ ,  $x = 0$  a  $v = 4$  pan fydd  $t = 0$ . Darganfyddwch yr amser a gymerir i ddod i ddisymudedd a'r pellter a deithir yn ystod yr amser hwnnw.
- 6 Mae arafiad gronyn sy'n symud mewn llinell syth mewn cyfrannedd â chiwb ei fuanedd. Mae buanedd y gronyn yn disgyn o  $10 \text{ ms}^{-1}$  i  $5 \text{ ms}^{-1}$  mewn 9 eiliad. Darganfyddwch y pellter a deithir yn ystod yr amser hwn.
- 7 Mae cyflymiad gronyn sy'n symud mewn llinell syth mewn cyfrannedd gwrthdro â'i fuanedd. Mae buanedd y gronyn yn cynyddu o  $5 \text{ ms}^{-1}$  i  $15 \text{ ms}^{-1}$  mewn 1 munud. Dangoswch fod y pellter a deithir yn ystod yr amser hwn yn 650 m.
- 8 Mae arafiad gronyn sy'n symud mewn llinell syth mewn cyfrannedd ag  $n$  fed pŵer ei fuanedd. Dangoswch, ar gyfer  $n < 2$ , nad yw'r gronyn ond yn symud pellter meidraidd.

**2.3 Modelu gwrthiant i wrthrychau sy'n symud**

Mae'r rhan fwyaf o broblemau ar wrthrychau sy'n symud yn ymwneud â mudiant mewn aer neu (ar gyfer cychod a llongau) hylif fel dŵr lle mae gwrthiant yr hylif yn cael effaith fawr ar y mudiant. Mae problem gwrthiant (neu lusgiad) hylif braidd yn gymhleth ac yn y bôn yr unig ffordd i'w thrin yw trwy arbrawf. Wrth fodelu mudiant mae angen tybio, ar sail canlyniadau arbrogion, ffurfiau arbennig ar gyfer gwrthiant aer neu ddŵr. Mae angen i'r tybiaethau hyn fod yn weddol gyson â chanlyniadau arbrogion a hefyd, er mwyn cael canlyniadau gweddol syml, mae angen iddynt arwain at broblemau mathemategol sy'n weddol syml (h.y. mae'n rhaid i'r integriadau fod yn hawdd). Mewn sefyllfaoedd go iawn nid yw hyn yn bwysig iawn oherwydd y gellir defnyddio dulliau rhifiadol pan fydd anawsterau yn codi. Mae tystiolaeth arbrogol ar gael ar gyfer gwrthrychau sy'n syrthio a cherbydau fel ceir ac awyrennau.

**Gwrthrychau sy'n syrthio**

Er bod y gwrthrychau'n cael eu modelu fel gronynnau, y gwrthiant aer a dybir yw'r gwrthiant a brofir gan sffêr sy'n syrthio. Mae tystiolaeth arbrofol wedi dangos, ar gyfer sffêr sy'n symud, bod ffurf y gwrthiant yn dibynnu ar y lluoswm  $du$  lle mae  $d$  m yn dynodi diamedr y sffêr ac  $u$  ms<sup>-1</sup> yn dynodi ei fuanedd. Mae'r canlyniadau arbrofol yn dangos y rhoddir y gwrthiant  $R$  mewn newtonau gan

$$R = 1.66 \times 10^{-4} du \text{ ar gyfer } du < 10^{-5}$$

$$R = 0.2 d^2 u^2 \text{ ar gyfer } 10^{-2} < du < 1.$$

Ni ellir casglu oddi wrth y dystiolaeth arbrofol bod deddf pŵer yn ddilys ar gyfer  $10^{-5} < du < 10^{-2}$  ac efallai y byddai cyfuniad o'r ddau fynegiad yn fwy priodol. Y prif gasgliad oddi wrth y canlyniadau uchod yw nad yw gwrthiant yr aer mewn cyfrannedd union â buanedd ond ar gyfer gronynnau bychain iawn a /neu buaneddau isel iawn.

Mae'n ymddangos bod tybio bod gwrthiant mewn cyfrannedd â sgwâr y buanedd yn dybiaeth fwy dilys. Fodd bynnag, mae'r fathemateg sydd ynghlwm wrth dybio bod gwrthiant mewn cyfrannedd union â buanedd yn haws o lawer na'r hyn sydd ei angen wrth wneud tybiaethau eraill ac felly defnyddir y ddeddf linol hon yn aml fel brasamcan cyntaf.

**Cerbydau sy'n symud**

Mae arbrofion yn dangos y gellir tybio, at y rhan fwyaf o bwrpasau, fod modd ysgrifennu'r gwrthiant ar gerbyd sy'n symud fel  $\frac{1}{2} \rho C_d A V^2$ , lle mae  $\rho$  yn cynrychioli dwysedd y cyfrwng o amgylch,  $V$  yw buanedd y cerbyd,  $A$  yw'r arwynebedd trawstoriadol yn berpendicwlar i lif yr hylif ac  $C_d$  yw cyfernod y llusgiad, a ganfyddir yn arbrofol. Yn y 1920au roedd cyfernod llusgiad car tua 0.5; heddiw mae cyfernodau llusgiad ceir gan amlaf yn llai na 0.4 ac mae rhai yn llai na 0.3.

Gyda cheir, mae elfen ychwanegol o wrthiant, a elwir yn wrthiant yr olwynion, a achosir yn bennaf oherwydd ffrithiant yn y teiars. Gyda buaneddau cymharol isel, gellir tybio naill ai fod hyn yn gyson neu ei fod mewn cyfrannedd union â'r buanedd.

**Buanedd terfynol**

Os yw cyfanswm y grym sy'n gweithredu ar ronyn gyda màs  $m$  yn  $m f(v)$ , yna mae

$$\frac{dv}{dt} = f(v).$$

Mewn llawer o achosion o fudiant a wrthsefir mae gan y ffwythiant  $f$  y priodweddau canlynol:

- (i) mae un, ac un yn unig, gwerth positif  $V$  ar gyfer  $v$  yn golygu bod  $f(v) = 0$ ,

- (ii) pan fydd  $v > V$ , mae  $f < 0$ ,  
 (iii) pan fydd  $v < V$ , mae  $f > 0$ .

Os yw  $v = u (> V)$  ar ryw adeg, yna byddai  $v$  yn lleihau a byddai'n dal i leihau hyd nes bod  $v = V$ . Gan fod y deilliad bryd hynny yn sero, byddai  $v$  yn aros yn gyson o hyn allan. Yn yr un modd, os yw  $v = w (< V)$  ar ryw adeg, yna byddai  $v$  yn cynyddu a byddai'n dal i gynyddu nes bod  $v = V$ . Gan fod y deilliad bryd hynny yn sero, byddai  $v$  yn aros yn gyson o hynny allan. Felly yn y ddau achos byddai'r buanedd yn tueddu at y gwerth cyson  $V$ . Gelwir y gwerth hwn yn fuanedd terfynol, a dyma'r buanedd pan fydd cyfanswm y grym sy'n gweithredu yn sero.

## 2.4 Problemau sy'n ymwneud â mudiant a wrthsefir

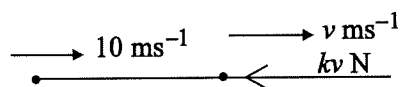
Efallai mai un o'r pethau pwysicaf i'w wneud wrth geisio datrys problemau yn ymwneud â mudiant a wrthsefir yw, fel a nodwyd yn adran 5.1 yn M1, dewis cyfeiriad cyfeirnod a darganfod cydran y grym i'r cyfeiriad hwnnw. Mae gwneud braslun a nodi arno yr holl rymoedd sy'n gweithredu hefyd yn help.

Weithiau mewn problemau dywedir wrthyhych bod y gwrthiant mewn cyfrannedd â rhyw bŵer o'r cyflymder ond heb roi cysonyn y gyfrannedd i chi. Mewn achosion o'r fath, rhoddir gwybodaeth arall i chi, fel y buanedd terfynol, a fydd yn rhoi cysonyn y gyfrannedd.

### Enghraifft 2.7

Mae'r grym gwrthsafol sy'n gweithredu ar ronyn â màs 0.2 kg sy'n symud ar hyd llinell syth, mewn cyfrannedd â buanedd y gronyn ac yn gyfryw fel bod y gronyn yn profi gwrthiant o 20 N pan fydd yn symud gyda buanedd  $10 \text{ ms}^{-1}$ .

Darganfyddwch yr amser a gymer i'r buanedd leihau o  $10 \text{ ms}^{-1}$  i  $5 \text{ ms}^{-1}$ .



Cymerir y cyfeiriad cyfeirnod i gyfeiriad y cyflymder dechreuol fel a ddangosir yn y diagram a dynodir cyflymder y gronyn ar amser  $t$  s ar ôl i'w fuanedd fod yn  $10 \text{ ms}^{-1}$  gan  $v \text{ ms}^{-1}$ .

Tybir bod y gwrthiant yn  $kv \text{ N}$ , lle mae  $k$  yn gysonyn. Mae hyn yn hafal i 20 N pan fydd  $v = 10$ , ac felly  $k = 2$ . Hafaliad y mudiant felly yw

$$0.2 \frac{dv}{dt} = -2v,$$

h.y. 
$$\frac{dv}{dt} = -10v.$$

Gellir datrys hwn trwy wahanu newidynnau neu, fel y soniwyd uchod, trwy wneud yr amnewidiad prawf  $v = ae^{mt}$ ; mae hyn yn rhoi

$$mae^{mt} = -10ae^{mt},$$



ac felly mae  $m = 10$  a  $v = ae^{-10t}$ .

Mae amnewid  $v = 10$  pan fydd  $t = 0$  yn rhoi  $a = 10$  a  $v = 10e^{-10t}$ .

Mae'r buanedd yn  $5 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd

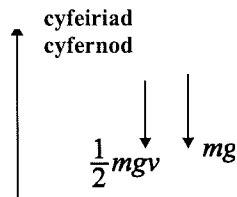
$$10e^{-10t} = 5,$$

h.y. 
$$-10t = \ln\left(\frac{1}{2}\right),$$

sy'n rhoi 
$$t = \frac{\ln 2}{10}.$$

### Enghraifft 2.8

Teflir carreg gyda màs  $m$  kg i fyny gyda buanedd  $2 \text{ ms}^{-1}$ . Y gwrthiant aer, pan fydd y garreg yn symud gyda buanedd  $v \text{ ms}^{-1}$ , yw  $\frac{1}{2} mvg$  newton. Darganfyddwch, yn nhermau  $g$ , yr amser a gymer i gyrraedd y pwynt uchaf.



Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu ar y garreg yn ystod y cyfnod y mae'n codi a chymerir y cyfeiriad cyfernod tuag i fyny. Hafaliad y mudiant yw

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{1}{2} mvg,$$

neu 
$$\frac{dv}{dt} = -g \left(1 + \frac{1}{2}v\right).$$

Mae gwahanu'r newidynnau fel yng ngham (i) yn rhoi

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}v\right)} \frac{dv}{dt} = -g,$$

ac felly 
$$\int \frac{dv}{1 + \frac{1}{2}v} = -g \int dt.$$

Ar y pwynt uchaf bydd y buanedd yn sero ac felly mae integru'r ochr chwith o  $v = 2$  i  $v = 0$  a'r ochr dde o  $t = 0$  i  $t = t$  yn rhoi

$$-2 \ln(2) = -gt,$$

ac felly 
$$t = \frac{2 \ln 2}{g}.$$

**Enghraifft 2.9**

Darganfyddwch, ar gyfer y broblem yn Enghraifft 2.8, (a) fynegiad ar gyfer yr uchder a deithir mewn amser  $t$  s ar ôl i'r garreg gael ei thaflu, (b) yr uchder mwyaf a gyrhaeddir, (c) mynegiad ar gyfer buanedd yn nhermau uchder.

Er mwyn darganfod y dadleoliad mae angen darganfod  $v$  yn nhermau  $t$ ; un ffordd o wneud hyn yw integru ochr chwith

$$\int \frac{dv}{1 + \frac{1}{2}v} = -g \int dt$$

o  $v = 2$  i  $v = v$  a'r ochr dde o  $t = 0$  i  $t = t$ .

Ffordd arall o ddarganfod  $v$  yw trwy ddatrys

$$\frac{dv}{dt} = -g \left( 1 + \frac{1}{2}v \right),$$

fel hafaliad gyda chyfernodau cyson. Mae rhoi cynnig ar  $v = c$ , lle mae  $c$  yn gysonyn yn rhoi  $c = -2$  fel bod  $-2$  yn integryn neilltuoel. Yr hafaliad homogenaidd yw

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{2}v.$$

Mae gwneud yr amnewidiad prawf  $v = ae^{mt}$  yn rhoi  $m = -\frac{g}{2}$  fel bod y datrysiad cyffredinol yn

$$v = -2 + ae^{\frac{-gt}{2}} \quad \text{lle mae } a \text{ yn gysonyn.}$$

Mae amnewid  $v = 2$  pan fydd  $t = 0$  yn rhoi  $a = 4$  ac felly

$$v = \frac{dx}{dt} = -2 + 4e^{\frac{-gt}{2}}.$$

Mae integru'r hafaliad hwn o  $t = 0$  i  $t = t$  yn rhoi

$$x = -2t - \frac{8}{g} \left( e^{\frac{-gt}{2}} - 1 \right).$$

Darganfyddir yr amser i gyrraedd yr uchder mwyaf o'r Enghraifft flaenorol, neu drwy roi  $v = 0$  yn y mynegiad ar gyfer  $v$ , a'r amser yw  $\frac{2 \ln 2}{g}$ .

Mae amnewid y gwerth hwn ar gyfer yr amser yn y mynegiad ar gyfer  $x$  yn rhoi'r uchder mwyaf, sef  $\frac{4}{g}(1 - \ln 2)$ .

Ni ellir gwrthdroi'r mynegiad ar gyfer  $x$  er mwyn mynegi  $t$  yn nhermau  $x$  ond fe ellir mynegi  $t$  yn nhermau  $v$ , sef  $t = -\frac{2}{g} \ln \left( \frac{v}{4} + \frac{1}{2} \right)$  ac mae amnewid yn y mynegiad ar gyfer  $x$  yn rhoi

$$x = \frac{4}{g} \ln \left( \frac{v}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{g} (v - 2).$$

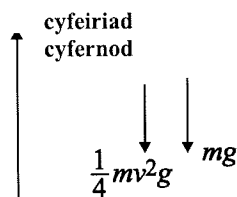
Yn y broblem hon mae ysgrifennu'r cyflymiad fel  $v \frac{dv}{dx}$  yn arwain at algebra nad ymdrinnir ag ef yn uniongyrchol yn eich cwrs ac ni ellir defnyddio'r dull i ddarganfod perthynas rhwng  $v$  ac  $x$ .

### **Enghraifft 2.10**

Teflir carreg, màs  $m$  kg, i fyny ar fuanedd  $2 \text{ ms}^{-1}$ . Y gwrthiant aer, pan fydd y garreg yn symud gyda buanedd  $v \text{ ms}^{-1}$ , yw  $\frac{1}{4}mv^2g$  newton.

Darganfyddwch, yn nhermau  $g$ , yr uchder mwyaf a gyrhaeddir.

Darganfyddwch hefyd y buanedd uchaf a gyrhaeddir ar y ffordd i lawr a'r buanedd pan fydd y garreg yn dychwelyd i'r pwynt dechreuol.



Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu ar y garreg yn ystod y cyfnod y mae'n codi a chymerir y cyfeiriad cyfeirnod tuag i fyny. Hafaliad y mudiant yw

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{1}{4}mv^2g,$$

neu

$$\frac{dv}{dt} = -g \left( 1 + \frac{1}{4}v^2 \right).$$

Yn y broblem hon, gan fod arnom angen yr uchder, mae'n ymddangos yn fwy priodol ysgrifennu'r cyflymiad fel  $v \frac{dv}{dx}$  ac felly

$$v \frac{dv}{dx} = -g \left( 1 + \frac{1}{4}v^2 \right)$$

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru mewn perthynas ag  $x$  yn rhoi

$$\int \frac{v dv}{1 + \frac{1}{4}v^2} = -g \int dx.$$

Ar y pwynt uchaf, bydd y buanedd yn sero ac felly mae integru'r ochr chwith o  $v = 2$  i  $v = 0$  a'r ochr dde o  $x = 0$  i  $x = x$  yn rhoi

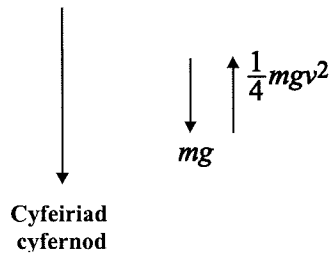
$$\int_2^0 \frac{v dv}{1 + \frac{1}{4}v^2} = -gx.$$

Mae cyflawni'r integriad yn rhoi

$$2 \ln \left( 1 + \frac{1}{4}v^2 \right) \Big|_{v=2}^{v=0} = -2 \ln(2) = -gx$$

ac felly 
$$x = \frac{2 \ln 2}{g}.$$

Nawr rhaid ymchwilio i'r mudiant tuag i lawr a chymerir y cyfeiriad cyfeirnod i lawr o'r pwynt uchaf. Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu ar y garreg.



Hafaliad y mudiant yw

$$mv \frac{dv}{dx} = mg - mg \frac{v^2}{4},$$

neu

$$v \frac{dv}{dx} = g \left( 1 - \frac{v^2}{4} \right).$$

Mae'r ochr dde yn diflannu pan fydd  $v = 2$  ac felly y buanedd uchaf y gellir ei gyrraedd ar y ffordd i lawr yw  $2 \text{ ms}^{-1}$ .

Mae gwahanu'r newidynnau ac integru'r ochr chwith o  $v = 0$  i  $v = w$ , lle mae  $w \text{ ms}^{-1}$  yn dynodi buanedd uchaf y garreg, a'r ochr dde o  $x = 0$  i  $x = \frac{2 \ln 2}{g}$  yn rhoi

$$\int_0^w \frac{v dv}{1 - \frac{1}{4}v^2} = 2 \ln 2.$$

Mae cyflawni'r integriad yn rhoi

$$-2 \ln \left( 1 - \frac{1}{4}v^2 \right) \Big|_{v=0}^{v=w} = -2 \ln \left( 1 - \frac{1}{4}w^2 \right) = 2 \ln 2,$$

gan roi 
$$\ln \left( 1 - \frac{1}{4}w^2 \right) = -\ln 2$$
 ac felly mae  $1 - \frac{1}{4}w^2 = \frac{1}{2}$  ac  $w = \sqrt{2}$ .

### Ymarferion 2.3

- 1 Mae gronyn, mäs 0.5 kg, sy'n symud ar fuanedd  $v \text{ ms}^{-1}$  yn cael ei wrthsefyll gan rym  $2v$  newton.  
Darganfyddwch yr amser y cymer i'w fuanedd leihau o  $20 \text{ ms}^{-1}$  i  $2 \text{ ms}^{-1}$ .
- 2 Teflir gronyn, mäs 0.2 kg, gyda buanedd dechreuol  $6 \text{ ms}^{-1}$  ar hyd bwrdd llorweddol garw sydd â chyfernod ffrithiant 0.5. Gwrthsefir y gronyn hefyd gan wrthiant aer sydd, pan fydd y gronyn yn symud gyda buanedd  $v \text{ ms}^{-1}$ , yn hafal i  $0.1 v$  newton.  
Darganfyddwch yr amser a gymer i'r gronyn ddod i ddisymudedd.
- 3 Gwrthsefir gronyn gan wrthiant sydd mewn cyfrannedd â sgwâr ei fuanedd. Mae ei fuanedd yn lleihau o  $8 \text{ ms}^{-1}$  i  $4 \text{ ms}^{-1}$  mewn 6 eiliad. Darganfyddwch y pellter y mae'n ei deithio yn yr amser hwnnw.
- 4 Mae awyren, mäs 20 tonn, yn esgyn gyda gwrthiad cyson 250 kN. Y llusgiad ar yr awyren pan fydd yn symud gyda buanedd  $v \text{ ms}^{-1}$  yw  $10v^2 \text{ N}$ . Mae'n esgyn ar fuanedd  $90 \text{ ms}^{-1}$ . Darganfyddwch hyd lleiaf posibl y rhedfa.
- 5 Gyrrir car, mäs  $m$ , gan rym cyson  $F$  a gwrthsefir ei fudiant gan wrthiant sydd, pan fydd buanedd y car yn  $v$ , yn  $mkv$ . Darganfyddwch y buanedd mwyaf y gall y car ei gyrraedd a'r amser a gymer, o ddisymudedd, cyn y cyrhaeddir tri chwarter y buanedd hwn.
- 6 Mae parasiwtydd yn neidio o falŵn. Tybir bod y gwrthiant aer mewn cyfrannedd â buanedd y parasiwtydd a'i fuanedd terfynol yw  $5 \text{ ms}^{-1}$ . Darganfyddwch ei fuanedd ar ôl 0.5 eiliad a'r pellter y mae wedi disgyn yn yr amser hwnnw.
- 7 Os tybir bod y gwrthiant yn y cwestiwn blaenorol mewn cyfrannedd â sgwâr ei fuanedd, gyda'r un cyflymder terfynol, darganfyddwch ei fuanedd ar ôl i'r parasiwtydd ddisgyn am 1 eiliad.
- 8 Mae gronyn gyda mäs 0.5 kg yn symud mewn llinell syth o dan weithrediad grym gwrthsafol gyda maint  $0.4(1 + v^2)$  newton pan fydd buanedd y gronyn yn  $v \text{ ms}^{-1}$ . Dangoswch mai'r amser a gymer y gronyn i ddod i ddisymudedd o fuanedd  $4 \text{ ms}^{-1}$  yw  $1.25 \tan^{-1} 4 \text{ s}$ .

### Ymarferion Amrywiol 2

- 1 Pan fydd buanedd cwch modur yn  $12 \text{ ms}^{-1}$ , mae'r peiriant yn cael ei ddiffodd. Tybir bod y llusgiad dŵr yn peri arafiad o  $0.1 v^2 \text{ ms}^{-2}$  pan fydd y cwch yn symud gyda buanedd  $v \text{ ms}^{-1}$ .
  - (a) Ysgrifennwch yr hafaliad differol sy'n rheoli'r mudiant a darganfyddwch fynegiad ar gyfer yr amser a gymer i fuanedd y cwch leihau i  $v \text{ ms}^{-1}$ .
  - (b) Eglurwch, trwy ystyried yr amser a gymer i ddod i aros, pam nad yw'r model a ddewiswyd ar gyfer yr arafiad yn realistig iawn ac awgrymwch

fformiwla arall ar gyfer arafiad sydd efallai yn fwy addas. (Nid oes angen gwneud gwaith cyfrifo gan ddefnyddio'r arafiad a awgrymir gennych.)

- 2 Mae gronyn  $P$ , màs  $0.3 \text{ kg}$ , yn symud ar hyd llinell syth lorweddol. Gweithredir ar y gronyn gan rym gwrthsafol llorweddol gyda maint  $1.2v^{n+1}$  newton ( $n > 0$ ), lle mae  $v \text{ ms}^{-1}$  yn cynrychioli buanedd  $P$  ar amser  $t \text{ s}$ . Ar amser  $t = 0$  mae'r gronyn ar bwynt  $O$  ac yn symud gyda buanedd  $u \text{ ms}^{-1}$ .

- (a) (i) Darganfyddwch yr hafaliad differol sy'n cysylltu  $\frac{dv}{dt}$  â  $v$ .  
 (ii) Datrysych yr hafaliad differol hwn i ddarganfod mynegiad ar gyfer  $v$  yn nhermau  $u, t$  ac  $n$ .  
 (b) Yn yr achos lle mae  $n = 3$   
 (i) darganfyddwch, yn nhermau  $u$  ac  $x$ , fynegiad ar gyfer  $v$  ar bwynt  $x$  metr o  $O$ ,  
 (ii) darganfyddwch, yn nhermau  $u$  ac  $x$ , y gyfradd y gwneir gwaith arni yn erbyn y gwrthiant pan fydd  $P$  ar bellter o  $x$  metr oddi wrth  $O$ .

- 3 Mae'n hysbys bod y gwrthiant (heblaw disgrychiant) i fudiant car, màs  $1000 \text{ kg}$ , sy'n symud gyda buanedd  $v \text{ ms}^{-1}$ , ar ffurf  $(kv + 0.05 kv^2) \text{ N}$ , lle mae  $k$  yn gysonyn. Pan fydd peiriant y car yn gweithio ar gyfradd  $11.25 \text{ kW}$  gall y car symud ar fuanedd cyson  $25 \text{ ms}^{-1}$  ar ffordd lorweddol.

- (a) Darganfyddwch werth  $k$ .  
 (b) Darganfyddwch y gyfradd y mae peiriant y car yn gweithio arni pan fydd y car yn symud ar fuanedd cyson  $15 \text{ ms}^{-1}$  i fyny rhiw ar oledd ar ongl  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{49}\right)$  i'r llorwedd.  
 (c) Pan fydd y car yn symud gyda buanedd  $25 \text{ ms}^{-1}$  ar ffordd lorweddol mae'r peiriant yn cael ei ddiffodd. Dangoswch fod buanedd y car,  $v \text{ ms}^{-1}$ , ar ôl teithio pellter o  $x \text{ m}$  ar ôl i'r peiriant gael ei ddiffodd, yn bodloni'r hafaliad differol

$$2500 \frac{dv}{dx} = -20 - v.$$

Datrysych yr hafaliad differol hwn er mwyn darganfod y pellter a deithir cyn i fuanedd y car leihau i  $5 \text{ ms}^{-1}$ .

- 4 Teflir gronyn gyda màs  $0.4 \text{ kg}$  yn fertigol i fyny gyda buanedd  $30 \text{ ms}^{-1}$ . Gwiriwch fod yr amser a gymer i gyrraedd ei uchder mwyaf yn fwy na  $3$  eiliad.

Mewn arbrawf, pan daflwyd y gronyn fel uchod, darganfuwyd bod yr amser a gymerwyd i gyrraedd ei uchder mwyaf yn  $2$  eiliad. Gan gymryd bod y

gwahaniaeth hwn rhwng y ddau amser wedi'i beri gan y gwrthiant aer, sydd mewn cyfrannedd union â buanedd y gronyn, dangoswch fod buanedd y gronyn ar amser  $t$  s ar ôl iddo gael ei daflu, sef  $v \text{ ms}^{-1}$ , yn bodloni hafaliad differol ar ffurf

$$\frac{dv}{dt} = -9.8 - kv,$$

lle mae  $k$  yn gysonyn. Datrysych yr hafaliad differol hwn er mwyn darganfod  $v$  yn nhermau  $k$  a  $t$ . Gwiriwch fod gwerth 0.4 ar gyfer  $k$  yn cyfateb yn dda i'r hyn a welwyd. Defnyddiwch y gwerth hwn ar gyfer  $k$  i ddarganfod y gwrthiant aer pan fydd y gronyn yn symud gyda buanedd  $12 \text{ ms}^{-1}$ .

- 5 Mewn model arbennig ar effaith arafu car, mae arafiad y car, pan fydd yn symud gyda buanedd  $v \text{ ms}^{-1}$ , yn  $\frac{600}{v+175} \text{ ms}^{-2}$ .

Darganfyddwch yr amser a gymer i gar ddod i aros o fuanedd  $25 \text{ ms}^{-1}$  a'r pellter a deithir yn yr amser hwnnw.

- 6 Mae gronyn, màs  $0.2 \text{ kg}$ , yn symud mewn llinell syth lorweddol dan weithrediad grym gwrthsafol sydd mewn cyfrannedd â'i fuanedd. Mae'r grym yn  $2 \text{ N}$  pan fydd y car yn symud gyda buanedd  $10 \text{ ms}^{-1}$ . O wybod bod y buanedd yn  $v \text{ ms}^{-1}$  ar amser  $t$  eiliad, dangoswch fod

$$\frac{dv}{dt} = -v.$$

Darganfyddwch (i) yr amser a gymer i'r buanedd leihau o  $4 \text{ ms}^{-1}$  i  $2 \text{ ms}^{-1}$ ,  
(ii) y pellter a deithir yn ystod y cyfnod hwn.

- 7 Teflir roced, màs  $m$ , yn fertigol i fyny o bwynt ar arwyneb y ddaear ac mae'n symud ar hyd llinell syth sy'n mynd trwy ganol y ddaear,  $O$ . Pan fydd y roced yn cyrraedd pellter  $b$  o  $O$  mae ei danwydd wedi'i ddisbyddu ac mae ei fuanedd yn  $u$ . Yna mae'n mynd yn ei flaen o dan effaith disgyrchiant y ddaear yn unig.

(a) A chymryd bod gwerth grym disgyrchiant ar y roced yn gyson, gyda maint  $mg$ ,

- (i) darganfyddwch fuanedd y roced pan fydd ar bellter  $x$  ( $> b$ ) o  $O$ ,  
(ii) disgrifiwch fudiant y roced wedyn.

(b) A chymryd bod grym disgyrchiant sy'n gweithredu ar y roced pan fydd ar bellter  $x$  ( $> b$ ) o  $O$  yn  $\frac{mk}{x^2}$  tuag at  $O$ , lle mae  $k$  yn gysonyn,

- (i) darganfyddwch fuanedd y roced pan fydd ar bellter  $x$  ( $> b$ ) o  $O$ ,  
(ii) disgrifiwch y mudiant wedyn pan fydd  $u^2 < \frac{2k}{b}$ ,  
(iii) disgrifiwch y mudiant wedyn pan fydd  $u^2 > \frac{2k}{b}$ .

- 8 Buanedd uchaf car yw  $V$  ac mae'r gwrthiant i'w fudiant yn amrywio gyda sgwâr ei fuanedd. Os yw ei beiriant yn gweithio ar gyfradd uchaf gyson, mae'r car yn cyrraedd buanedd  $\frac{1}{2} V$  o ddisymudedd mewn pellter  $a$ . Os yw'r peiriant yn rhoi grym tynnol uchaf cyson, mae'r car yn cyrraedd buanedd  $\frac{1}{2} V$  o ddisymudedd mewn pellter  $b$ .

Dangoswch fod 
$$\frac{a}{b} = \frac{2 \ln \frac{8}{7}}{3 \ln \frac{4}{3}}.$$

- 9 Teflir gronyn yn fertigol i fyny mewn cyfrwng lle mae'r gwrthiant i'w fudiant ar unrhyw ennyd yn  $mk$  gwaith sgwâr ei fuanedd ar yr ennyd hwnnw. Diddwythwch fod y berthynas rhwng yr uchder mwyaf a gyrhaeddir gan y gronyn, sef  $H$ , a'i fuanedd  $u$ , ar ffurf

$$u^2 = \frac{g}{k} (e^{2kH} - 1).$$

Darganfyddwch y berthynas gyfatebol rhwng  $H$  a buanedd y gronyn, sef  $U$ , pan fydd yn dychwelyd i'r pwynt lle y cychwynnodd. Trwy hyn dangoswch fod

$$U = u e^{-kH}.$$

- 10 Mae tryc, màs 1000 kg, yn cychwyn o ddisymudedd ac yn rholio i lawr llethr ar oled  $\sin^{-1} \frac{5}{49}$ . Mae grym ffrithiannol  $(100v + 500)$  N yn gweithredu arno, lle mae  $v$  yn cynrychioli ei fuanedd mewn metrau yr eiliad. Dangoswch mai hafaliad mudiant y tryc yw

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{v}{10}.$$

Diddwythwch na all y buanedd fod yn fwy na  $5 \text{ ms}^{-1}$ . Trwy ddatrys yr hafaliad differol hwn, dangoswch fod y tryc yn teithio gyda buanedd  $5(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \text{ ms}^{-1}$ ,  $t$  eiliad ar ôl iddo gael ei ryddhau o ddisymudedd,

Beth yw'r pellter a deithir gan y tryc mewn amser  $t$  s?

Dangoswch y bydd wedi teithio  $5(10 \ln 10 - 9)$  m pan fydd ei fuanedd yn cyrraedd 0.9 gwaith ei fuanedd uchaf.

- 11 Gollyngir gwrthrych, màs 240 kg, gyda pharasiwt ac mae ei fuanedd dechreuol yn ddibwys.

Tra bo'r parasiwt yn agor, ar amser  $t$  eiliad, mae gwrthiant a achosir gan yr atmosffer yn gweithredu ar y gwrthrych, a'r gwrthiant yw  $40v$  N lle mae  $v \text{ ms}^{-1}$  yn cynrychioli ei fuanedd ar yr amser hwnnw.



Dangoswch, tra bo'r parasiwt yn agor, fod

$$\frac{dv}{dt} = 6g - v.$$

Os yw'r parasiwt wedi agor yn llawn ar ôl 6 s, profwch mai buanedd y gwrthrych bryd hynny fydd  $6g(1 - e^{-1}) \text{ ms}^{-1}$ .

Darganfyddwch fynegiad ar gyfer y pellter mae'r gwrthrych wedi ei ddisgyn mewn amser  $t$  eiliad ( $t \leq 6$ ).

Dangoswch fod y gwrthrych wedi disgyn trwy bellter  $36g e^{-1}$  tra bo'r parasiwt yn agor.

- 12 Mae gronyn, màs  $m$ , yn symud ar hyd yr echelin  $x$  dan weithrediad grym  $\frac{2mn^2a^2x}{(a^2 + x^2)^2}$  i gyfeiriad  $x$ , lle mae  $n$  ac  $a$  yn gysonion ac  $x$  yw dadleoliad y gronyn o  $O$ .

Dangoswch, neu gwiriwch, fod buanedd y gronyn, sef  $v$ , pan fydd ei ddadleoliad o'r tarddiad yn  $x$ , yn golygu bod

$$v^2 - \frac{2n^2a^2}{(a^2 + x^2)} \text{ yn gyson.}$$

- (a) Teflir y gronyn o  $x = 2a$  gyda buanedd  $u$  i gyfeiriad  $x$  negatif.

Darganfyddwch

- (i) y gwerth lleiaf ar gyfer  $u$  fel y gall y gronyn ddianc i anfeidredd,
- (ii) y gwerth ar gyfer  $x$  ar y pwynt lle mae'r gronyn yn dod i aros am ennyd am y tro cyntaf yn yr achos pan fydd  $u = \frac{n}{\sqrt{5}}$ .

- (b) Teflir y gronyn o anfeidredd fel bod ei egni cinetig ar  $x = 0$  yn  $3mn^2$  ac yna mae'n derbyn ergyd fel bod ei egni cinetig yn dod yn  $3pmn^2$ , lle mae  $p$  yn gysonyn. Darganfyddwch

- (i) fuanedd y tafliad,
- (ii) amrediad y gwerthoedd ar gyfer  $p$  fel bod y mudiant wedyn yn gyfyngedig i ranbarth meidraidd o echelin  $x$ .

## Pennod 3

### Mudiant Harmonig Syml

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon, dylech

- wybod beth a olygir wrth fudiant harmonig syml (M.H.S.) a gallu adnabod problemau sy'n ymwneud â mudiant harmonig syml,
- allu datrys problemau cinematig a dynamig sy'n cynnwys mudiant harmonig syml,
- allu mireinio'r problemau i gymryd gwanychu i ystyriaeth.

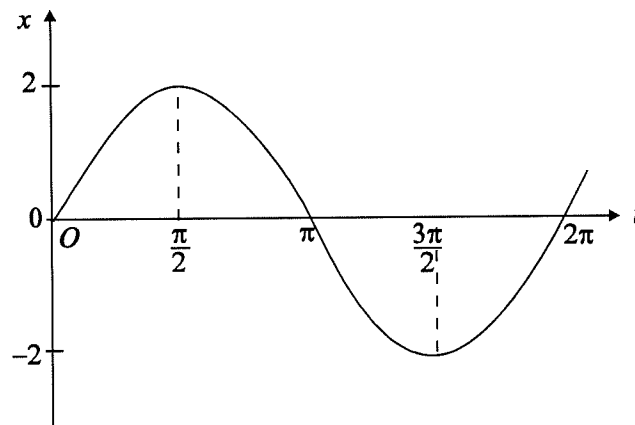
#### 3.1 Syniadau sylfaenol

Mae mudiant harmonig syml yn fudiant arbennig ar linell syth ac efallai mai'r ffordd orau i'w ddeall yw trwy edrych ar ddwy enghraifft.

Yn yr enghraifft gyntaf, ystyriwn ronyn  $P$  sy'n symud ar hyd yr echelin  $x$  yn y fath fodd fel y rhoddir ei ddadleoliad  $x$  metr o'r tarddiad, ar amser  $t$  eiliad, gan

$$x = 2 \sin t.$$

Mae'r diagram yn dangos ymddygiad  $x$  gyda  $t$ .



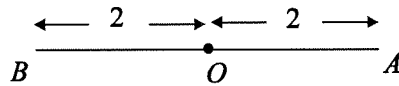
Felly rhoddir cyflymder y gronyn i gyfeiriad  $x$  cynyddol, sef  $v \text{ ms}^{-1}$ , gan

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 \cos t.$$

Pan fydd  $t = 0$  mae'r gronyn ar y tarddiad a'i gyflymder yn  $2 \text{ ms}^{-1}$  i gyfeiriad  $x$  positif. Felly bydd  $P$  yn dechrau symud i gyfeiriad  $x$  cynyddol. Bydd gwerth mwyaf  $x$  yn digwydd pan fydd  $\sin t$  yn cyrraedd ei werth mwyaf, sef 1, gyntaf ac mae hyn yn digwydd pan fydd  $t = \frac{\pi}{2}$ . Y gwerth mwyaf ar gyfer  $x$  felly yw 2. Gan fod  $t = \frac{\pi}{2}$ , bydd cyflymder  $P$  yn sero pan fydd  $x$  ar ei werth mwyaf, h.y. pan fydd  $P$  ar ei bellter mwyaf o'r tarddiad. Wrth i  $t$  barhau i gynyddu mae  $x$  yn dechrau lleihau a bydd  $P$  yn cyrraedd y tarddiad pan fydd  $\sin t = 0$ , h.y. pan fydd  $t = \pi$ . Ar yr ennyd hwn, mae  $v = -2$  ac felly mae  $P$  yn symud i gyfeiriad  $x$  negatif ar fuanedd  $2 \text{ ms}^{-1}$ . Pan fydd  $t > \pi$ , bydd  $\sin t$  yn negatif a bydd  $x$  yn parhau i leihau nes i  $\sin t$  gyrraedd ei werth lleiaf, sef  $-1$ , a bydd hyn yn digwydd pan fydd  $t = \frac{3\pi}{2}$ . Ar yr amser hwn, mae  $v = 0$  ac felly mae  $P$  yn ddisymud am ennyd.

Pan fydd  $t > \frac{3\pi}{2}$ , bydd  $v$  yn bositif ac felly bydd  $P$  yn symud i gyfeiriad  $x$  positif a bydd yn cyrraedd y tarddiad pan fydd  $\sin t = 0$ , h.y. pan fydd  $t = 2\pi$ . Ar yr amser hwn mae  $v = 2$  ac felly mae  $P$  yn symud ar fuanedd  $2 \text{ ms}^{-1}$  i gyfeiriad  $x$  positif. Dyma'r un sefyllfa yn union â phan oedd  $t = 0$  ac felly bydd y mudiant yn digwydd eto ac felly, er enghraifft, ymhen amser pellach o  $\frac{\pi}{2}$  eiliad bydd  $P$  unwaith eto ar ei bellter mwyaf o'r tarddiad. Dyma felly yw'r camau yn y mudiant:

- (i) bydd  $P$  yn teithio o'r tarddiad i bwynt  $A$  yn y diagram canlynol lle mae  $x = 2$ , lle bydd yn dod i aros am ennyd,
- (ii) bydd  $P$  yn teithio o  $A$  i'r tarddiad, lle mae  $v = -2$ ,
- (iii) bydd  $P$  yn teithio o'r tarddiad i bwynt  $B$  lle mae  $x = -2$ , lle bydd yn dod i aros am ennyd,
- (iv) bydd  $P$  yn teithio o  $B$  i'r tarddiad, lle mae  $v = 2$ .

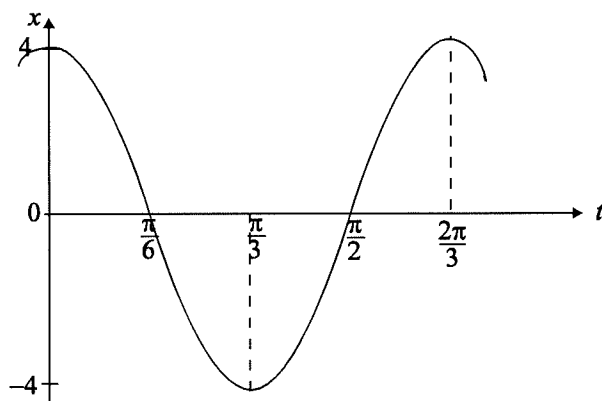


Yna bydd y cylchred yn digwydd eto ac felly mae'r mudiant yn osgiliadol. Cyfanswm yr amser a gymerwyd ar gyfer cylchred cyfan yw  $2\pi$  eiliad, sef cyfnod yr osgiliad. Yr amser a gymerwyd ar gyfer unrhyw un o'r camau hyn yw  $\frac{\pi}{2}$  eiliad, h.y. chwarter y cyfnod.

Yn yr ail enghraifft ystyriwn ronyn  $P$  sy'n symud ar echelin  $x$  yn y fath fodd fel y rhoddir ei ddadleoliad o'r tarddiad ar amser  $t$  eiliad, sef  $x$  metr, gan

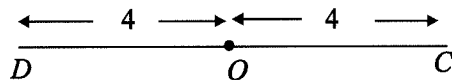
$$x = 4 \cos 3t.$$

Mae'r diagram canlynol yn dangos ymddygiad  $x$  gyda  $t$ .



Felly rhoddir cyflymder y gronyn i gyfeiriad  $x$  cynyddol, sef  $v \text{ ms}^{-1}$ , gan

$$v = \frac{dx}{dt} = -12 \sin 3t.$$



Pan fydd  $t = 0$  mae'r gronyn ar bwynt  $C$  lle mae  $x = 4$  ac mae'n ddisymud am ennyd. Wrth i  $t$  gynyddu mae  $\cos 3t$  yn lleihau ac felly bydd  $P$  yn dechrau symud i gyfeiriad  $x$  lleihaol a bydd yn cyrraedd y tarddiad pan fydd  $\cos 3t = 0$ . Bydd hyn yn digwydd pan fydd  $3t = \frac{\pi}{2}$ , h.y. pan fydd  $t = \frac{\pi}{6}$ . Ar yr amser hwn, mae  $v = -12$  a bydd  $P$  yn dechrau symud ar hyd yr echelin  $x$  negatif gan ddal i symud nes i  $\cos 3t$  gyrraedd ei werth lleiaf, sef  $-1$ . Bydd hyn yn digwydd pan fydd  $3t = \pi$ , h.y.  $t = \frac{\pi}{3}$  (h.y. bydd  $t$  wedi cynyddu  $\frac{\pi}{6}$  pellach). Ar yr amser hwn, mae  $v = 0$  ac felly bydd  $P$  yn ddisymud am ennyd ar bwynt  $D$  lle mae  $x = -4$ . Pan fydd  $t > \frac{\pi}{3}$ , bydd  $v$  yn bositif ac felly bydd  $P$  yn symud i gyfeiriad  $x$  positif a bydd yn cyrraedd y tarddiad pan fydd  $\cos 3t = 0$ , h.y.  $3t = \frac{3\pi}{2}$  a  $t = \frac{\pi}{2}$  (gyda  $t$  yn dangos cynnydd pellach o  $\frac{\pi}{6}$ ). Ar yr amser hwn, mae  $v = 12$  ac felly, ar y tarddiad, bydd  $P$  yn symud gyda buanedd  $12 \text{ ms}^{-1}$  i gyfeiriad  $x$  positif. Felly mae'n dechrau symud ar hyd yr echelin  $x$  positif nes i  $\cos 3t$  gyrraedd ei werth mwyaf, sef  $1$ ; bydd hyn yn digwydd pan fydd  $t = \frac{2\pi}{3}$  (h.y. bydd  $t$  wedi cynyddu  $\frac{\pi}{6}$  pellach). Ar yr amser hwn bydd y gronyn unwaith eto yn ddisymud am ennyd ar  $C$ . Dyma'r un sefyllfa yn union a phan oedd  $t = 0$  ac felly bydd y cylchred yn digwydd eto. Dyma felly yw'r camau yn y mudiant:

- (i) bydd  $P$  yn teithio o bwynt  $C$ , lle mae  $x = 4$ , a ddangosir yn y diagram, i'r tarddiad,
- (ii) bydd  $P$  yn teithio o'r tarddiad i bwynt  $D$  lle mae  $x = -4$ ,

(iii) bydd  $P$  yn teithio o  $D$  i'r tarddiad,

(iv) bydd  $P$  yn mynd yn ei flaen o'r tarddiad yn ôl i bwynt  $C$ , lle mae  $v = 0$ .

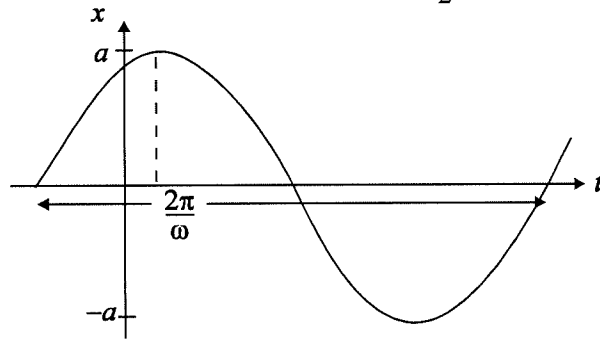
Yna bydd y cylchred yn digwydd eto ac felly mae'r mudiant yn osgiliadol. Cyfanswm yr amser a gymerwyd ar gyfer cylchred cyfan yw  $\frac{2\pi}{3}$  eiliad; dyma gyfnod yr osgiliad. Yr amser a gymerwyd ar gyfer unrhyw un o'r camau uchod yw  $\frac{\pi}{6}$  eiliad, h.y. chwarter y cyfnod.

Mae'r ddwy enghraifft uchod yn enghreifftiau o fudiant harmonig syml (y gellir ei dalfyrnu i M.H.S.) gyda chanol  $O$  (sef y pwynt hanner ffordd rhwng y safleoedd eithaf). Diffinnir y ffurf fwyaf cyffredinol o fudiant harmonig syml gyda chanol  $O$  gan

$$x = a \sin(\omega t + \epsilon),$$

lle mae  $a$ ,  $\omega$  ac  $\epsilon$  yn gysonion ac  $a$  yn bositif. Yn yr enghraifft gyntaf, mae  $a = 2$ ,  $\omega = 1$  ac  $\epsilon = 0$ , tra yn yr ail enghraifft mae  $a = 4$ ,  $\omega = 3$  ac  $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ .

Dangosir y ffurf gyffredinol ar gyfer  $x$  pan fydd  $\epsilon < \frac{\pi}{2}$  yn y diagram canlynol.



Rhoddir cyflymder  $v$  i gyfeiriad  $x$  positif gan

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \epsilon).$$

Mae'r mudiant yn gyfnodol, a'r cyfnod yw  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Os yw'r amser  $T$  ar gyfer un osgiliad yn  $\frac{2\pi}{\omega}$  yna mae nifer yr osgiliadau ym mhob uned o amser yn  $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ . Gelwir hyn yn amledd yr osgiliad. Yn unedau'r S.I. yr hertz (Hz) yw uned amledd, gydag un hertz yn un osgiliad (neu gylchred) yr eiliad. Gan fod  $\omega t$  yn ongl a fesurir mewn radiau, unedau  $\omega$  yn y system S.I. yw  $\text{rad}^{-1}$ . Gelwir  $\omega$  yn amledd cylchol. Nid yw'r term hwn yn arbennig o amlwg ac fe'i defnyddir oherwydd bod perthynas rhwng M.H.S. a mudiant cylchol. Trafodir hyn yn adran 4.5.

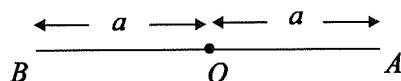
Bydd y gronyn ar y pwynt pellaf o  $O$  pan fydd  $\sin(\omega t + \epsilon) = \pm 1$  ac felly  $x = \pm a$ , fel mai'r pellter mwyaf o'r tarddiad yw  $a$ , sef yr hyn a elwir yn osgled y mudiant.

Pan fydd  $\sin(\omega t + \epsilon) = \pm 1$ , mae  $\cos(\omega t + \epsilon) = 0$ , ac felly mae'r gronyn yn ddisymud am ennyd ar y pwyntiau eithaf.

Bydd y gronyn yn mynd trwy'r tarddiad pan fydd  $\sin(\omega t + \epsilon) = 0$  ac ar yr amserau hyn bydd  $\cos(\omega t + \epsilon) = \pm 1$  ac felly ar y tarddiad mae gwerth mwyaf y buanedd, sef  $a\omega$ .

Gellir gweld oddi wrth gymesuredd y ffwythiant sin bod yr amser a gymerir i deithio rhwng uchafbwynt (h.y. pwynt eithaf) a'r tarddiad yn chwarter y cyfnod.

Felly mae mudiant harmonig syml gydag osgled  $a$  a chanol  $O$  yn fudiant rhwng pwynt  $A$ , lle mae  $x = a$ , a phwynt  $B$ , lle mae  $x = -a$ .



Bydd gronyn  $P$  sy'n symud i'r dde yn y diagram uchod ar bwynt rhwng  $A$  a  $B$  yn dod i aros am ennyd ar  $A$  ac yna yn dechrau symud i'r chwith ac yn dal i wneud hynny nes iddo gyrraedd  $B$ , lle bydd yn dod i aros am ennyd eto cyn symud i'r dde i'w safle cychwynnol.

Bydd gronyn  $P$  sy'n symud i'r chwith yn y diagram uchod ar bwynt rhwng  $A$  a  $B$  yn dod i aros am ennyd ar  $B$  ac yna yn dechrau symud i'r dde ac yn dal i wneud hynny nes iddo gyrraedd  $A$ , lle bydd yn dod i aros am ennyd eto cyn symud i'r chwith i'w safle cychwynnol.

Gall defnyddio diagram syml fel yr un uchod fod yn ddefnyddiol iawn wrth ddatrys problemau sy'n cynnwys M.H.S. er mwyn delweddu beth sy'n digwydd. Mewn problemau lle mae angen ystyried cyfeiriad mudiant y gronyn mae diagram o'r fath bron yn hanfodol.

Er mai'r ffurf  $x = a \sin(\omega t + \epsilon)$  yw'r un hawsaf er mwyn gweld ymddygiad cyffredinol mudiant harmonig syml, nid dyma'r ffurf orau i'w defnyddio er mwyn ceisio darganfod  $x$  o wybod amodau ar werth penodol ar gyfer  $t$ . Yn yr achos hwn, mae'n haws fel rheol defnyddio datrysiad cyffredinol yr hafaliad harmonig syml yn y ffurf

$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ . Gellir cael y ffurf hon hefyd trwy ehangu  $\sin(\omega t + \epsilon)$ .

Os yw gronyn ar y tarddiad pan fydd  $t = 0$ , yna mae  $A = 0$  ac felly  $x = B \sin \omega t$ .

Maint mwyaf  $x$  yw  $|B|$  a hwn, trwy ddifffiniad osgled, yw  $a$ . Felly mae  $B = \pm a$  ac  $x = \pm a \sin \omega t$ . Mae differu hwn yn rhoi  $\frac{dx}{dt} = \pm a\omega \cos \omega t$  ac felly mae'r arwydd plws

yn cyfateb i ronyn sy'n symud i'r dde ar y tarddiad ac mae'r arwydd minws yn cyfateb i ronyn sy'n symud i'r chwith ar y tarddiad.

Mae'r ffurf  $x = \pm a \sin \omega t$  felly yn cynrychioli mudiant lle mae'r gronyn ar y tarddiad ar amser  $t = 0$ , gyda'r arwydd plws a'r arwydd minws yn cyfateb i ronyn sy'n symud i gyfeiriad  $x$  cynyddol neu i gyfeiriad  $x$  lleihaol, yn ôl eu trefn, ar y tarddiad.

Os yw gronyn ar un o'r pwyntiau eithaf pan fydd  $t = 0$ , yna bydd yn ddisymud a chan fod  $\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$ , mae hyn yn golygu bod  $B = 0$ . Felly mae  $A = a$  os yw'r gronyn ar  $x = a$  ar y dechrau ac  $A = -a$  os yw'r gronyn ar  $x = -a$  ar y dechrau.

Felly mae'r ffurf  $x = \pm a \cos \omega t$  yn cynrychioli mudiant lle mae'r gronyn ar un o'r pwyntiau eithaf,  $x = \pm a$ , ar amser  $t = 0$ , gyda'r arwydd plws a'r arwydd minws yn cyfateb, yn ôl eu trefn, i'r safleoedd eithaf  $x = a$  ac  $x = -a$ .

Mae llawer o enghreifftiau mewn "bywyd go iawn" lle mae'r mudiant yn harmonig syml. Rhai enghreifftiau yw blaen nodwydd mewn peiriant gwnïo, mudiant corecyn sy'n cael ei wthio i lawr yn ofalus mewn dŵr, mudiant gronyn sy'n cael ei osod i osgiliadu ar flaen sbring, yr amrywiant yn lefel y llanw mewn harbwr, mudiant pwynt ar lafn herclif drydanol.

Mae mudiant y pwysau ar waelod pendil cloc a mudiant piston yn codi ac yn disgyn ym mheiriant car yn fudiannau harmonig syml bras.

### Diffiniadau posibl eraill

Y diffiniad uchod o M.H.S. yw'r un sy'n dangos fwyaf eglur natur y mudiant. Efallai y byddwch yn dod ar draws diffiniadau eraill ac mae angen i chi allu adnabod y rhain. Gellir cael y diffiniadau eraill hyn i gyd oddi wrth y ffurf uchod.

Os yw  $x = a \sin(\omega t + \epsilon)$ , yna mae  $v = a\omega \cos(\omega t + \epsilon)$  ac felly

$$v^2 = a^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \epsilon).$$

Gan fod  $\cos^2(\omega t + \epsilon) = 1 - \sin^2(\omega t + \epsilon)$  gellir ailysgrifennu'r mynegiad ar gyfer  $v^2$  fel

$$v^2 = a^2\omega^2 (1 - \sin^2(\omega t + \epsilon)),$$

ac mae amnewid am  $\sin(\omega t + \epsilon)$  yn nhermau  $x$  yn rhoi

$$v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2).$$

Mae'r mynegiad ar gyfer  $v$  yn nhermau  $x$  yn ffordd arall o ddiffinio M.H.S. ac er mwyn cadarnhau hyn rhaid dangos bod y datrysiad cyffredinol ar gyfer  $x$  ar ffurf  $a \sin(\omega t + \epsilon)$ . Y ffordd hawsaf o wneud hyn yw ysgrifennu  $x$  fel  $a \sin \theta$  ac felly, gan ddefnyddio'r rheol gadwyn,

$$v = \frac{dx}{dt} = a \cos \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Mae amnewid am  $x$  a  $v$  yn nhermau  $\theta$  yn rhoi

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega^2,$$

ac felly

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \omega.$$

Mae integru hyn yn rhoi

$$\theta = \pm \omega t + \text{cysonyn},$$

ac felly bydd  $x$  ar ffurf  $a \sin(\omega t + \epsilon)$ .

Dull arall o gael  $x$  yw cymryd ail isradd y mynegiad ar gyfer  $v^2$  a'i integru trwy wahanu'r newidynnau fel yn Enghraifft 2.4.

Os yw  $x = a \sin(\omega t + \epsilon)$ , yna mae

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \epsilon)$$

ac mae amnewid am  $\sin(\omega t + \epsilon)$  yn nhermau  $x$  yn rhoi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

Mae hyn yn rhoi diffiniad arall o M.H.S., h.y. bod mudiant unrhyw ronyn y mae ei dddadleoliad yn bodloni'r hafaliad differol uchod yn harmonig syml. I gadarnhau hyn rhaid dangos bod datrysiad cyffredinol yr hafaliad uchod ar ffurf  $x = a \sin(\omega t + \epsilon)$ . Dangoswyd hyn eisoes ar ddiwedd Enghraifft 1.5 lle defnyddir  $n$  yn lle  $\omega$ .

Pan fydd  $x > 0$  mae'r cyflymiad i gyfeiriad  $x$  negatif, h.y. tuag at y tarddiad, a phan fydd  $x < 0$  mae'r cyflymiad i gyfeiriad  $x$  positif, h.y. tuag at y tarddiad eto. Felly nodir yr hafaliad differol yn aml iawn mewn geiriau gwahanol fel hyn:

“mae'r cyflymiad i gyfeiriad  $y$  canol trwy'r amser ac mewn cyfrannedd union â'r pellter oddi wrtho”.

Gan fod grym yn hafal i'r màs wedi'i luosi â'r cyflymiad gellir aralleirio'r ffurf hon fel

“cynhyrchir mudiant harmonig syml gan rym sy'n gweithredu tuag at  $y$  canol ac mewn cyfrannedd union â'r pellter oddi yno”.

Hefyd gellir cael yr hafaliad differol trwy ddifferu  $v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$  mewn perthynas ag  $x$  a defnyddio'r unfathiant

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Dull cyfatebol yw defnyddio'r unfathiant uchod yn yr hafaliad differol ac integru mewn perthynas ag  $x$ , sy'n rhoi

$$v^2 = -\omega^2 x^2 + \text{cysonyn},$$

ac mae ysgrifennu'r cysonyn yn y ffurf  $\omega^2 a^2$  yn rhoi

$$v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2).$$

Gellir crynhoi'r canlyniadau hyn fel a ganlyn:



### Crynodeb o'r fformiwlâu sylfaenol

Os yw gronyn yn disgrifio M.H.S. ar hyd yr echelin  $x$  o amgylch y tarddiad  $O$  gyda chyfnod  $\frac{2\pi}{\omega}$  ac osgled  $a$ , yna mae'r

$$\text{Cyfnod} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Amledd} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$x = a \sin(\omega t + \varepsilon),$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

(y ffurf hon yw'r un fwyaf defnyddiol os rhoddir amodau ar gyfer  $t = 0$ )

$$v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

lle mae  $x$  a  $v$  yn dynodi dadleoliad a chyflymder y gronyn ar amser  $t$ .

Mae unrhyw un o'r pedwar hafaliad diwethaf yn diffinio mudiant harmonig syml a gellir cael unrhyw un o'r hafaliadau hyn oddi wrth unrhyw un o'r lleill. Dyma'r **fformiwlâu sylfaenol ar gyfer M.H.S.** a dylech eu dysgu ar eich cof. Dyma ganlyniadau sylfaenol eraill ar gyfer mudiant gyda chanol  $O$ :

Mae'r buanedd uchaf ar y canol ac mae'n hafal i  $a\omega$ .

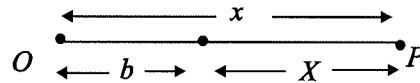
Mae'r pellter rhwng y pwyntiau eithaf  $= 2a$ .

Dadleoliad gronyn sydd ar  $O$  pan fydd  $t = 0$  yw  $\pm a \sin \omega t$ .

Dadleoliad gronyn sydd ar  $x = \pm a$  pan fydd  $t = 0$  yw  $\pm a \cos \omega t$ .

### Canol nad yw ar y tarddiad

Nid oes rhaid i ganol y mudiant fod ar y tarddiad; er enghraifft, gallai fod ar y pwynt  $x = b$ .



Os yw  $X$  yn dynodi dadleoliad y gronyn o  $x = b$ , yna, trwy ddiffiniad M.H.S., mae  $X = a \sin(\omega t + \varepsilon)$ . Fodd bynnag, fel y gwelwch oddi wrth y diagram, mae  $x = X + b$  ac felly

$$x = b + a \sin(\omega t + \varepsilon),$$

a'r canlyniadau eraill yw

$$v^2 = \omega^2 (a^2 - (x - b)^2),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 (x - b).$$

Mae'r buanedd uchaf ar y canol ac mae'n hafal i  $a\omega$ .

Mae'r pellter rhwng y pwyntiau eithaf  $= 2a$ .

Dadleoliad gronyn sydd ar y canol pan fydd  $t = 0$  yw  $b \pm a \sin \omega t$ .

Dadleoliad gronyn sydd ar  $x = \pm a + b$  pan fydd  $t = 0$  yw  $b \pm a \cos \omega t$ .

### 3.2 Problemau cinematig

Mae'r problemau symlaf yn rhai cinematig lle nodir bod y mudiant yn harmonig syml ac y rhoddir ychydig o wybodaeth i chi, gan ofyn i chi ddarganfod gwybodaeth bellach. Yn yr enghreifftiau rhifiadol canlynol, tybir bod  $x$  m a  $b$  m yn dynodi, yn ôl eu trefn, dadleoliad gronyn  $P$  ar amser  $t$  eiliad a dadleoliad canol yr osgiliad o darddiad sefydlog  $O$ . Dynodir osgled unrhyw fudiant harmonig syml gan  $a$  m a'r amledd cylchol gan  $\omega$  rad $^{-1}$ .

Dynodir cyflymder y gronyn ar amser  $t$  eiliad gan  $v$  ms $^{-1}$ . Felly mae  $x$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $v$ ,  $t$  ac  $\omega$  yn rhifau pur sy'n bodloni'r perthnasau sylfaenol uchod.

Yr anhysbysion sylfaenol yw  $a$  ac  $\omega$  a'r cam cyntaf yw defnyddio'r wybodaeth a roddir er mwyn eu darganfod.

#### Enghraifft 3.1

Mae gronyn yn disgrifio M.H.S. gyda chyfnod  $\pi$  eiliad a'r pellter rhwng pwyntiau eithaf y mudiant yw 4 m.

Darganfyddwch fuanedd mwyaf y gronyn a'i fuanedd pan fydd ar bellter 1 m o ganol yr osgiliad.

Gan fod y cyfnod yn  $\pi$  eiliad, mae'n dilyn bod  $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$  ac felly  $\omega = 2$ .

Mae'r pellter rhwng y pwyntiau eithaf ddwywaith cymaint â'r osgled ac felly mae  $a = 2$ .

Y buanedd mwyaf yw  $a\omega$ , sef 4 ms $^{-1}$ .

Darganfyddir y buanedd pan fydd pellter y gronyn o'r canol yn  $x$  m trwy ddefnyddio'r canlyniad  $v^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$ .

Mae amnewid y gwerthoedd yn y mynegiad hwn yn rhoi'r buanedd yn  $2\sqrt{3}$  ms $^{-1}$ .

#### Enghraifft 3.2

Mae gronyn sy'n symud mewn mudiant harmonig syml yn gwneud 4 osgiliad yr eiliad a'r pellter rhwng pwyntiau eithaf y mudiant yw 0.3 m.

Darganfyddwch gyflymiad mwyaf y gronyn.

Cyfnod pob osgiliad yw  $\frac{1}{4}$  eiliad ac felly mae  $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{4}$  ac felly  $\omega = 8\pi$ .

Mae'r pellter rhwng y pwyntiau eithaf ddwywaith cymaint â'r osgled ac felly mae  $a = 0.15$ .

Y cyflymiad yw  $-\omega^2 x$ . Ceir y cyflymiad mwyaf felly pan fydd  $x$  ar ei fwyaf, h.y. ar y pwyntiau eithaf. Felly y cyflymiad mwyaf yw  $\omega^2 a$  ac mae amnewid y gwerthoedd a ddarganfuwyd ar gyfer  $\omega$  ac  $a$  yn rhoi'r cyflymiad mwyaf fel  $9.6 \pi^2 \text{ ms}^{-2}$ .

### **Enghraifft 3.3**

Rhoddir dadleoliad gronyn ar amser  $t$  eiliad, sef  $x$  m, gan  $x = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$ . Darganfyddwch osgled a chyfnod yr osgiliad.

Y cam cyntaf yw ysgrifennu'r dadleoliad yn y ffurf  $a \sin(\omega t + \epsilon)$ . Gellir ehangu'r ffurf hon fel  $a \sin \omega t \cos \epsilon + a \cos \omega t \sin \epsilon$ .

Bydd y ddwy ffurf yn hafal os yw  $\omega = 2$ ,  $3 = a \sin \epsilon$ ,  $4 = a \cos \epsilon$ .

Mae sgwario ac adio'r ddau hafaliad diwethaf hyn yn rhoi  $a = 5$ , ac felly mae'r osgled yn 5 m a'r cyfnod yn  $\pi$  eiliad.

### **Enghraifft 3.4**

Buanedd mwyaf gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig syml mewn llinell syth yw  $10 \text{ ms}^{-1}$  a'i fuanedd pan fydd ar bellter 4 m o ganol yr osgiliad yw  $6 \text{ ms}^{-1}$ .

Darganfyddwch gyfnod ac osgled yr osgiliad.

Mae'n dilyn o'r ffaith fod y buanedd mwyaf yn  $10 \text{ ms}^{-1}$  fod

$$a\omega = 10,$$

ac mae amnewid  $v = 6$  ac  $x = 4$  yn  $v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$  hefyd yn rhoi

$$36 = \omega^2 a^2 - \omega^2 16.$$

Mae amnewid  $a\omega = 10$  yn yr hafaliad hwn yn rhoi  $\omega = 2$  ac felly mae'r cyfnod yn  $\pi$  eiliad.

Gan fod  $\omega = 2$  mae'n dilyn o  $a\omega = 10$  fod  $a = 5$  ac felly mae'r osgled yn 5 m.

### **Enghraifft 3.5**

Buanedd gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig syml mewn llinell syth yw  $6 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd ar bellter o 1 m o ganol yr osgiliad a  $2 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd ar bellter o 3 m o ganol yr osgiliad.

Darganfyddwch gyfnod ac osgled yr osgiliad.

Mae amnewid  $v = 6$  ac  $x = 1$  yn  $v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$  yn rhoi

$$36 = \omega^2(a^2 - 1),$$

ac mae amnewid  $v = 2$  ac  $x = 3$  yn  $v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$  yn rhoi

$$4 = \omega^2(a^2 - 9).$$

Hafaliadau cydamserol ar gyfer  $a$  ac  $\omega$  yw'r rhain ac mae rhannu'r cyntaf gyda'r ail er mwyn dileu  $\omega$  yn rhoi

$$9 = \frac{(a^2 - 1)}{(a^2 - 9)}.$$

Mae datrys ar gyfer  $a$  yn rhoi  $a = \sqrt{10}$ , gan roi'r osgled fel  $\sqrt{10}$  m. Mae amnewid  $a = \sqrt{10}$  yn  $36 = \omega^2(a^2 - 1)$  yn dangos bod  $\omega = 2$  ac felly mae'r cyfnod yn  $\pi$  eiliad.

### **Enghraifft 3.6**

Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml, gyda chanol  $O$ , cyfnod 4 eiliad ac osgled 5 m. O wybod bod y gronyn ar  $O$  ar amser  $t = 0$ , darganfyddwch ei ddadleoliad o  $O$  ar unrhyw amser  $t$  eiliad wedyn.

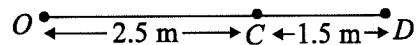
Darganfyddwch hefyd yr amser a gymer y gronyn i deithio

- (i) o  $O$  yn syth i'r pwynt  $C$  lle mae  $OC = 2.5$  m,
- (ii) o  $C$  yn syth i'r pwynt  $D$  lle mae  $CD = 1.5$  m.

Gan fod y cyfnod yn 4 eiliad, mae  $\frac{2\pi}{\omega} = 4$  ac felly  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . Darganfyddir y dadleoliad trwy amnewid  $a = 5$  ac  $\omega = \frac{\pi}{2}$  yn  $x = a \sin \omega t$ , sy'n rhoi

$$x = 5 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Mewn problemau sy'n cynnwys amser o bwynt i bwynt mae llunio braslun syml, fel yr un isod, yn aml o gymorth, gan nodi'r pwyntiau.



Darganfyddir gwerth  $t$ , yr amser i gyrraedd  $C$ , trwy amnewid  $x = 2.5$  yn y mynegiad uchod a datrys ar gyfer  $t$ , h.y.

$$2.5 = 5 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Mae nifer anfeidraidd o ddatrysiadau ond dim ond yr un lleiaf sydd ei angen arnom gan mai dim ond yr amser a gymerir i fynd yn syth i  $C$  sydd arnom ei angen ac felly mae  $\frac{\pi}{2} t = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$  ac felly  $t = \frac{1}{3}$ .

Y ffordd gyflymaf o ddarganfod yr amser a gymerir i fynd yn syth o  $C$  i  $D$  yw darganfod yr amser a gymer i deithio o  $O$  i  $D$  a thynnu ohono yr amser o  $O$  i  $C$ .

Darganfyddir yr amser o  $O$  i  $D$  trwy ddatrys  $4 = 5 \sin \frac{\pi}{2} t$  ar gyfer  $t$ .

Felly mae  $\frac{\pi}{2} t = \sin^{-1} 0.8 (= 0.927)$ .

Mae'n bwysig iawn cofio bod angen darganfod y sin gwrthdro mewn radianau ac mae hyn yn rhoi  $t$ , sef tua 0.59.

Mae tynnu'r amser a gymer i deithio o  $O$  i  $C$  yn rhoi'r amser o  $C$  i  $D$ , sef tua 0.26 eiliad.

### **Enghraifft 3.7**

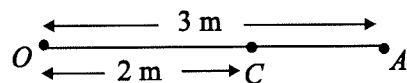
Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml, canol  $O$ , gyda chyfnod 6 eiliad ac osgled 3 m. O wybod bod y gronyn yn ddisymud ar bwynt  $A$  ar echelin  $x$  positif ar amser  $t = 0$ , darganfyddwch ei ddadleoliad o  $O$  ar unrhyw amser  $t$  eiliad wedyn.

Darganfyddwch hefyd yr amser a gymer y gronyn i deithio yn syth i'r pwynt  $C$  lle mae  $C$  rhwng  $O$  ac  $A$  ac  $OC = 2\text{m}$ .

Gan fod y cyfnod yn 6 eiliad, mae  $\frac{2\pi}{\omega} = 6$  ac felly  $\omega = \frac{\pi}{3}$ . Gan fod y gronyn yn ddisymud ar  $A$  pan fydd  $t = 0$ , yna mae  $A$  yn un o bwyntiau eithaf y mudiant. Felly darganfyddir y dadleoliad trwy amnewid  $a = 3$  ac  $\omega = \frac{\pi}{3}$  yn  $x = a \cos \omega t$  gan roi

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{3} t.$$

Dangosir y pwynt dechreuol a phwynt  $C$  yn y braslun canlynol.



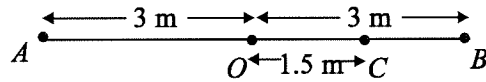
Darganfyddir gwerth yr amser  $t$  i gyrraedd  $C$  trwy amnewid  $x = 2$  yn y mynegiad uchod a datrys ar gyfer  $t$ , h.y.  $2 = 3 \cos \frac{\pi}{3} t$ .

Rhoddir y gwerth lleiaf ar gyfer  $t$  gan  $\frac{\pi}{3} t = \cos^{-1} \frac{2}{3}$ , ac felly mae  $t = 0.8$ .

### **Enghraifft 3.8**

Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml, gyda chanol  $O$  ac osgled 3 m, ac mae'n mynd trwy bwynt ar bellter 1.5 m o  $O$  ar ddau achlysur olynol gyda 2 eiliad rhyngddynt. Darganfyddwch ddau gyfnod posibl yr osgiliad.

### Mudiant Harmonig Syml



Mae'r braslun yn dangos pwynt  $C$  ar bellter 1.5 m o'r canol, sef  $O$ , a safleoedd eithaf y gronyn, sef  $A$  a  $B$ . Mae dwy ffordd y gall y gronyn deithio ddwywaith trwy bwynt  $C$  mewn cyfwng o ddau eiliad:

- (i) mae'n teithio i'r dde o  $C$  i  $B$  ac yna yn ôl i  $C$ ,
  - (ii) mae'n teithio i'r chwith o  $C$  i  $A$  ac yna yn ôl i  $C$ .
- (i) Gellir darganfod yr amser o  $O$  i  $C$  trwy dybio ar  $t = 0$  fod y gronyn ar  $O$  ac felly bod ei ddadleoliad wedyn o  $O$ , sef  $x$  m, yn  $3 \sin \omega t$ . Yna bydd y gronyn yn mynd trwy  $C$  pan fydd

$$1.5 = 3 \sin \omega t.$$

Datrysiaid lleiaf yr hafaliad hwn yw  $t = \frac{\pi}{6\omega}$ . Mae'r amser o  $O$  i  $B$  yn hafal i

chwarter y cyfnod ac felly yr amser o  $C$  i  $B$  ac yn ôl yw

$$2 \left( \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{6\omega} \right) = \frac{2\pi}{3\omega}.$$

Rhoddir bod yr amser hwn yn 2 eiliad ac felly mae'r cyfnod, sef  $\frac{2\pi}{\omega}$ , yn 6 eiliad.

- (ii) Mae'r amser o  $C$  i  $A$  ac yn ôl ddwywaith cymaint â swm yr amser o  $C$  i  $O$  ac o  $O$  i  $A$ . Mae'r amser o  $O$  i  $A$  yn chwarter y cyfnod ac felly cyfanswm yr amser yw

$$2 \left( \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{6\omega} \right) = \frac{4\pi}{3\omega}.$$

Rhoddir bod hwn yn 2 eiliad ac felly mae'r cyfnod, sef  $\frac{2\pi}{\omega}$ , yn 3 eiliad.

### **Enghraifft 3.9**

Tybir bod lefel y llanw mewn porthladd yn symud gyda mudiant harmonig syml gyda chyfnod 12.4 awr a'r gwahaniaeth yn y lefel rhwng y penllanw a'r distyll yw 6 m. Ar ddiwrnod penodol mae'r distyll yn digwydd ganol dydd. Darganfyddwch yr amser pan fydd lefel y dŵr yn cynyddu ar y gyfradd fwyaf a darganfyddwch y gyfradd hon mewn  $\text{ms}^{-1}$ .

Y cyfnod yw  $3600 \times 12.4$  eiliad ac felly mae  $\omega = \frac{2\pi}{3600 \times 12.4}$ .

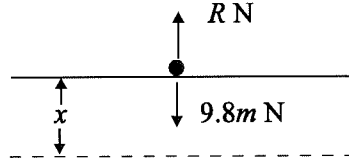
Osgled yr osgiliad yw 3 m, mae gwerth mwyaf cyfradd y newid yn digwydd ar ganol yr osgiliad a bydd hyn yn digwydd chwarter cyfnod ar ôl y distyll h.y. ar amser 3.1 awr wedi hanner dydd.

Y buanedd mwyaf yw  $a\omega = \frac{6\pi}{3600 \times 12.4} = 4.2 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$ .

### Enghraifft 3.10

Mae silff lorweddol yn osgiliadu yn fertigol gydag osgled 0.2 m.

Darganfyddwch gyfnod lleiaf yr osgiliadau fel na fydd gronyn a roddir ar y silff yn cael ei daflu oddi arno.



Mae'r diagram yn dangos y gronyn ar y silff a safle canolog y silff. Dynodir dadleoliad y gronyn uwchben y safle canolog gan  $x$  m. Os yw màs y gronyn yn  $m$  kg yna mae'r grym tuag i fyny ar y gronyn yn  $(R - 9.8m)$  N, lle mae adwaith y silff yn  $R$  N. Mae deddf Newton yn rhoi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = R - 9.8m.$$

Gan fod y mudiant yn harmonig syml, mae

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x,$$

ac fellymae

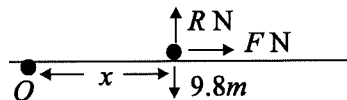
$$R = m(9.8 - \omega^2x).$$

Y gwerth mwyaf ar gyfer  $x$  yw 0.2 ac felly bydd yr adwaith yn bositif, h.y. ni fydd y gronyn yn gadael y silff cyn belled â bod  $9.8 \geq 0.2 \omega^2$  h.y.  $\omega \leq 7$ , ac felly y cyfnod lleiaf yw  $\frac{2\pi}{7}$  eiliad.

### Enghraifft 3.11

Mae silff lorweddol yn osgiliadu yn llorweddol gydag amledd 5 Hz.

Darganfyddwch yr osgled mwyaf fel nad yw gronyn a roddir ar y silff yn llithro. Cyfnod y ffrithiant rhwng y silff a'r gronyn yw 0.4.



Mae'r diagram yn dangos y gronyn ar y silff a dynodir safle canolog y gronyn gan  $O$  a dadleoliad y gronyn o'r safle canolog gan  $x$  m. Yr unig rym llorweddol sy'n gweithredu ar y gronyn yw'r grym ffrithiant  $F$  N ac os yw màs y gronyn yn  $m$  kg yna mae deddf Newton yn rhoi

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Adwaith  $R$  y silff yw  $9.8m$  N ac felly maint mwyaf  $F$  heb i'r gronyn lithro yw

$$0.4R = 3.92m \text{ N.}$$

Felly ni fydd y gronyn yn llithro cyn belled nad yw maint  $\frac{d^2x}{dt^2}$  yn fwy na  $3.92 \text{ ms}^{-2}$ .

Gan fod y mudiant yn harmonig syml, mae

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x,$$

lle mae  $\frac{\omega}{2\pi} = 5$ , ac felly  $\omega = 10\pi$ .

Y gwerth mwyaf ar gyfer  $\frac{d^2x}{dt^2}$  felly yw  $100\pi^2 a \text{ ms}^{-2}$ , lle mae  $a$  m yn dynodi osgled yr osgiliad.

Felly ni fydd y gronyn yn llithro cyn belled â bod  $a \leq \frac{3.92}{100\pi^2} = 3.97 \times 10^{-3}$ .

### **Enghraifft 3.12**

Darganfyddwch osgled, cyfnod a chanol y mudiant harmonig syml a ddiffinnir gan  $v^2 = 84 - 4x^2 + 16x$ .

Ffurf gyffredinol y buanedd ar gyfer mudiant harmonig syml yw

$$v^2 = \omega^2(a^2 - (x - b)^2),$$

ac felly y cam cyntaf yw cwblhau'r sgwâr ar gyfer y termau sy'n cynnwys  $x$  ac  $x^2$  h.y.

$$-4x^2 + 16x.$$

Gellir ailysgrifennu'r mynegiad hwn fel  $-4(x - 2)^2 + 16$ ,

ac felly mae  $v^2 = 100 - 4(x - 2)^2 = 4(25 - (x - 2)^2)$ .

Felly mae  $\omega = 2$ ,  $a = 25$  a  $b = 2$

ac felly cyfnod y mudiant yw  $\pi$  eiliad, gydag osgled  $5$  m a'r canol ar y pwynt  $x = 2$  m.

### **Enghraifft 3.13**

Cyflymder gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig syml yw  $4 \text{ ms}^{-1}$  ar y tarddiad,  $\sqrt{13} \text{ ms}^{-1}$  pan fydd  $x = 1$  m ac  $1 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd  $x = 3$  m. Darganfyddwch ganol y mudiant.

Gan fod y cwestiwn yn gofyn am ganol y mudiant mae'n annhebygol iawn y bydd ar y tarddiad, ac felly rhaid defnyddio'r ffurf  $v^2 = \omega^2(a^2 - (x - b)^2)$ .

Mae amnewid y data a roddir yn y mynegiad hwn yn rhoi

$$16 = \omega^2(a^2 - b^2), \quad 13 = \omega^2(a^2 - (1 - b)^2), \quad 1 = \omega^2(a^2 - (3 - b)^2).$$



Mae tynnu'r ail hafaliad o'r hafaliad cyntaf a'r trydydd hafaliad o'r hafaliad cyntaf yn rhoi

$$3 = \omega^2(1 - 2b), \quad 15 = \omega^2(9 - 6b).$$

Mae rhannu'r ail hafaliad â'r un cyntaf er mwyn dileu  $\omega$  yn rhoi  $b = -1$ ; h.y. mae'r canol ar y pwynt lle mae  $x = -1$  m.

### **Ymarferion 3.1**

Mae cwestiynau 1 i 7 yn cyfeirio at ronyn  $P$  sy'n disgrifio mudiant harmonig syml gyda chanol  $O$ ; dynodir pwyntiau eithaf y mudiant gan  $A$  a  $B$ .

- 1 Maint y cyflymiad yw  $8 \text{ ms}^{-2}$  pan fydd  $OP = 2$  m. Darganfyddwch y cyfnod.
- 2 Y cyfnod a'r buanedd mwyaf yw  $\frac{\pi}{5}$  eiliad a  $5 \text{ ms}^{-1}$ .  
Darganfyddwch osgled y mudiant a hyd  $OP$  pan fydd y buanedd yn  $4 \text{ ms}^{-1}$ .
- 3 Cyflymiad mwyaf  $P$  yw  $20 \text{ ms}^{-2}$  ac mae'n gwneud 10 osgiliad yr eiliad. Darganfyddwch ei fuanedd mwyaf.
- 4 Amledd yr osgiliadau yw  $3 \text{ Hz}$  a'r buanedd mwyaf yw  $10 \text{ ms}^{-1}$ . Darganfyddwch yr osgled.
- 5 Buanedd  $P$  yw  $6 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd  $OP = 4$  m ac  $8 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd  $OP = 3$  m. Darganfyddwch osgled a chyfnod yr osgiliadau.
- 6 Buanedd  $P$  yw  $16 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd  $OP = 3$  m a  $12 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd  $OP = 4$  m. Darganfyddwch osgled yr osgiliadau a buanedd mwyaf  $P$ .
- 7 Buanedd  $P$  yw  $12 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd  $BP = 2$  m a  $3 \text{ ms}^{-1}$  pan fydd  $BP = 1$  m. Darganfyddwch osgled y mudiant.
- 8 Rhoddir dadleoliad gronyn ar amser  $t$  eiliad, sef  $x$  m, gan
$$x = 4 \cos 3t - 2 \sin 3t.$$
Darganfyddwch osgled a chyfnod yr osgiliad.
- 9 Mae blaen nodwydd peiriant gwnïo yn teithio pellter o  $0.025$  m o frig ei strôc i'w waelod, a'i fuanedd mwyaf yw  $5 \text{ ms}^{-1}$ . A chymryd bod y mudiant yn harmonig syml, darganfyddwch ei amledd.
- 10 Mae llafn herclif benodol yn gwneud rhwng 1200 a 3000 strôc y munud (strôc yw un symudiad o'r brig i'r gwaelod). Hyd y strôc yw  $0.02$  m. Darganfyddwch amrediad y buaneddau mwyaf ar gyfer y llafn.
- 11 Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml, gyda chanol  $O$ , cyfnod 4 eiliad ac osgled 3 m. Darganfyddwch yr amser a gymer y gronyn i

deithio o  $O$  yn syth i'r pwynt  $C$  lle mae  $OC = 1$  m a'r amser a gymer i deithio pellter pellach o  $0.5$  m o  $C$ .

- 12 Mae gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig syml gydag osgled  $3$  m yn mynd trwy bwynt  $C$  ar gyfyngau o  $\frac{5\pi}{3}$  eiliad ac  $\frac{7\pi}{3}$  eiliad.  
Darganfyddwch bellter  $C$  o ganol y mudiant.
- 13 Buanedd gronyn yw  $0.4 \text{ ms}^{-1}$  ar bwynt  $A$  ar bellter o  $0.06$  m o ganol yr osgiliad a  $0.3 \text{ ms}^{-1}$  ar bwynt  $B$ , sydd ar yr un ochr o  $O$  ag y mae  $A$  gyda  $OB = 0.08$  m.  
Darganfyddwch yr amser a gymerir i deithio o  $A$  i  $B$ .
- 14 Mae dyfnder dŵr mewn harbwr yn symud yn harmonig syml o amgylch safle cymedrig. Ar ddiwrnod penodol, y dyfnder adeg penllanw am  $5$  a.m. yw  $10$  m a  $6$  awr  $15$  munud yn ddiweddarach y dyfnder adeg distyll yw  $5$  m.  
Darganfyddwch yr amser cyntaf ar ôl  $5$  a.m. pan fydd dyfnder y dŵr yn  $9$  m.
- 15 Ar ddiwrnod penodol mewn harbwr mae'r distyll yn digwydd am  $10$  a.m. a'r penllanw am  $4.15$  p.m. Dyfnder y dŵr yw  $2$  m adeg distyll a  $5$  m adeg penllanw. A chymryd bod y newid yn lefel y dŵr yn harmonig syml, darganfyddwch yr amserau rhwng  $10$  a.m. a  $10$  p.m. pan fydd dyfnder y dŵr yn fwy na  $3$  m.
- 16 Mae gwrthrych sy'n arnofio yn y môr yn osgiliadu i fyny ac i lawr gyda'r tonnau gyda mudiant harmonig syml. Mae'n symud pellter fertigol o  $0.4$  m a'i gyfnod yw  $6$  eiliad. Darganfyddwch ei fuanedd mwyaf a'i gyflymiad mwyaf.
- 17 Mae silff lorweddol yn disgrifio osgiliadau fertigol mewn mudiant harmonig syml gyda chyfnod  $5$  eiliad ac osgled  $0.5$  m. Darganfyddwch werth mwyaf a gwerth lleiaf adwaith y silff ar ronyn gyda màs  $0.4$  kg sy'n gorwedd arni.
- 18 Mae silff lorweddol yn disgrifio osgiliadau fertigol mewn mudiant harmonig syml ac yn gwneud  $2$  osgiliad yr eiliad. Osgled yr osgiliadau yw  $0.1$  m. Darganfyddwch uchder y silff uwchben ei safle canolog pan fydd gronyn bach ar y silff yn colli cysylltiad â hi.
- 19 Mae pilen lorweddol yn osgiliadu yn fertigol mewn mudiant harmonig syml gydag osgled  $0.2$  cm. Darganfyddwch amledd yr osgiliad os bydd tywod a ysgeintiwyd ar y bilen dim ond prin yn colli cysylltiad â hi.
- 20 Mae llwyfan llorweddol yn osgiliadu yn llorweddol mewn mudiant harmonig syml gyda chyfnod  $\frac{\pi}{5}$  eiliad ac osgled  $0.02$  m. O wybod bod cyfernod y ffrithiant rhwng y llwyfan a gronyn sy'n gorwedd arno yn  $0.25$ , darganfyddwch a all y gronyn aros ar y llwyfan heb lithro.

- 21 Mae llwyfan llorweddol yn osgiliadu yn llorweddol mewn mudiant harmonig syml gan wneud pum osgiliad cyfan pob eiliad. Cyfernod y ffrithiant rhwng y llwyfan a gronyn sy'n gorwedd arno yw 0.1. Darganfyddwch osgled mwyaf yr osgiliadau fel nad yw'r gronyn yn llithro ar y llwyfan.
- 22 Rhoddir buanedd gronyn y mae ei ddadleoliad yn  $x$  m, sef  $v$  ms<sup>-1</sup>, gan  $v^2 = 15 - 5x^2 + 10x$ . Darganfyddwch osgled, cyfnod a chanol yr osgiliad.

### 3.3 Problemau ddynamegol

Hyd yn hyn, fe roddwyd yr wybodaeth fod mudiant yn un harmonig syml. Ond mewn llawer o broblemau go iawn y cam cyntaf yw **sefydlu** bod y mudiant yn harmonig syml. Unwaith y bydd hyn wedi'i wneud bydd y problemau yn enghreifftiau tebyg i'r rhai yn yr adran flaenorol.

Y dull sylfaenol o sefydlu bod mudiant yn M.H.S., fel â phob problem ddynamegol, yw dewis cyfeiriad cyfeirnod, gweithio allan y grymoedd i'r cyfeiriad hwnnw ac yna nodi bod  $m \times \text{cyflymiad} = \text{grym}$ .

Os yw'r mudiant yn harmonig syml, cewch un o'r hafaliadau hyn,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 (x - b).$$

Mae'r ail hafaliad yn cyfateb i gael canol ar  $x = b$ .

Os gwelwch un o'r hafaliadau uchod mewn papur arholiad **rydych yn gwybod bod gennyh problem ar M.H.S.** Mae'r rhan fwyaf o broblemau ar ronynnau sy'n symud ar flaen sbringiau a llinynnau elastig yn cynnwys mudiant harmonig syml ac os dewch ar draws problem o'r fath byddwch yn gwybod, unwaith eto, ei bod yn debygol iawn bod gennyh problem yn ymwneud â mudiant harmonig syml.

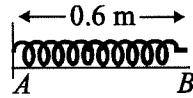
Rydych wedi dod ar draws problemau sy'n cynnwys sbringiau a llinynnau elastig eisoes lle defnyddiwyd cadwraeth egni. Yno cafwyd y ffaith y rhoddid y buanedd  $v$  gan fynegiad ar ffurf  $v^2 = px^2 + qx + r$ , sef yn y bôn y ffurf  $\omega^2(a^2 - (x - b)^2)$  fel a ddangoswyd yn Enghraifft 3.12. Dyma'r ffurf gyffredinol ar gyfer M.H.S. â chanol  $x = b$ , ac felly gallech gymharu'r cyfernodau er mwyn darganfod  $a$ ,  $b$  ac  $\omega$ . Os buanedd a dadleoliad yw'r unig bethau y mae arnoch angen eu darganfod, gallwch ddefnyddio'r dull egni fel dull arall cyfatebol, ond os oes arnoch angen darganfod amserau teithio o bwynt i bwynt, yna bydd yn rhaid i chi ddefnyddio mynegiadau ar ffurf

$$x = a \sin(\omega t + \epsilon) \text{ neu } x = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Mae gwahaniaeth pwysig rhwng llinynnau a sbringiau lle mae angen gofal mawr. Mae sbringiau yn rhoi grymoedd pan fyddant yn estynedig a phan fyddant yn gywasgedig, ond mae llinynnau yn rhoi grymoedd pan fyddant yn estynedig yn unig.

Fel y gwelwch yn yr enghreifftiau canlynol, effaith hyn yw nad yw gronyn ar flaen llinyn elastig yn disgrifio mudiant harmonig syml ond pan fydd y llinyn yn estynedig.

### Enghraifft 3.14

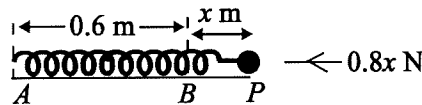


Mae'r diagram yn dangos sbring gyda hyd naturiol 0.6 m a modwlws 0.48 N ar fwrdd llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog wrth bwynt A ar y bwrdd ac ar y dechrau mae'r sbring yn gorwedd yn ddisymud, ei hyd yn 0.6 m, gyda'i ben rhydd ar bwynt B ar y bwrdd. Yna mae gronyn P, mäs 0.2 kg, yn cael ei glymu wrth y pen rhydd ac ar amser  $t = 0$  mae'r sbring yn cael ei estyn trwy bellter o 0.06 m ac yna ei ryddhau o ddisymudedd. Dangoswch, ar amser  $t$  eiliad wedyn, fod dadleoliad P o B, sef  $x$  m, i'r cyfeiriad o A i B, yn bodloni'r hafaliad differol

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4x.$$

Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer  $x$  ar amser  $t$  eiliad a darganfyddwch yr amser sy'n mynd heibio cyn

- (i) i estyniad y sbring fod yn 0.02 m am y tro cyntaf,
- (ii) i bellter P o O fod yn 0.58 m.



Rhoddir y cyfeiriad cyfeirnod i'r cyfeiriad o A i B ac felly pan fydd yr estyniad yn  $x$  m mae'r tyniant yn y sbring yn gweithredu o B i A a'i faint yw  $\frac{0.48x}{0.6}$  N =  $0.8x$  N ac

felly y grym i'r cyfeiriad  $x$  positif yw  $-0.8x$  N.

Os yw  $x$  yn negatif, yna mae'r sbring wedi'i gywasgu bellter o  $-x$  m ac mae'n rhoi grym i gyfeiriad  $x$  positif, sef  $-\frac{0.48x}{0.6}$  N =  $-0.8x$  N, ac felly y grym i gyfeiriad  $x$  positif yw  $-0.8x$  N.

Fel rheol, ni fyddai disgwyl i chi ddadansoddi'r grym mor ofalus â hyn ac, oni ddywedir wrthyh yn wahanol, gallwch dybio, pan fydd dadleoliad gronyn ar ben sbring i gyfeiriad a roddir yn  $x$ , yna bod y grym i'r un cyfeiriad yn  $-\frac{\lambda x}{l}$ . Yn y

mynegiad hwn mae  $\lambda$  yn dynodi'r modwlws ac  $l$  hyd naturiol y sbring.

Mae defnyddio deddf Newton yn rhoi

$$0.2 \frac{d^2x}{dt^2} = -0.8x,$$

h.y. 
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4x.$$

Mae'r hafaliad hwn yn dweud wrthyfch ar unwaith fod y mudiant yn harmonig syml gyda chanol  $B$  a chydag  $\omega = 2$ . Rhyddheir y gronyn o bwynt disymudedd, h.y. o bwynt eithaf, ac felly yr osgled yw pellter cychwynnol  $P$  o  $O$ , h.y.  $0.06$  m, a chan fod  $x = 0.06$  pan fydd  $t = 0$ , rhoddir y dadleoliad wedyn o  $O$  gan  $x = 0.06 \cos 2t$ .

(i) Felly mae  $x = 0.02$  pan fydd

$$0.02 = 0.06 \cos 2t,$$

a bydd hyn yn digwydd gyntaf pan fydd  $2t = \cos^{-1} \frac{1}{3}$  ac felly mae  $t = 0.62$ .

(ii) Yn yr achos hwn mae  $x = -0.02$  h.y. mae  $t$  yn bodloni

$$-0.02 = 0.06 \cos 2t,$$

ac felly mae  $t = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( -\frac{1}{3} \right) = 0.96$ .

### **Enghraifft 3.15**

Atebwch rannau (i) a (ii) yn yr enghraifft flaenorol pan deflir y gronyn  $P$  ar amser  $t = 0$  o  $B$  gyda buanedd  $0.08 \text{ ms}^{-1}$  i'r cyfeiriad o  $A$  i  $B$ .

Yr unig wahaniaeth yn yr achos hwn yw bod y gronyn ar y canol ar amser  $t = 0$  ac felly rhoddir y dadleoliad gan  $x = \pm a \sin 2t$ . Gan fod y cyflymder i gyfeiriad  $x$  cynyddol, rhaid dewis yr arwydd positif. Mae'r buanedd mwyaf yn digwydd ar y canol, h.y. ar  $B$ , a'r buanedd hwn yw  $a\omega = 2a$ , ac felly mae  $a = 0.04$ . Felly mae  $x = 0.04 \sin 2t$  a bydd estyniad y sbring yn  $0.02$  m pan fydd

$$0.02 = 0.04 \sin 2t,$$

a bydd hyn yn digwydd gyntaf pan fydd  $2t = \sin^{-1} \frac{1}{2}$ , ac felly mae  $t = \frac{\pi}{12}$ .

Yn yr un modd, pan fydd  $x = -0.02$

$$-0.02 = 0.04 \sin 2t,$$

a bydd hyn yn digwydd gyntaf pan fydd  $2t = \sin^{-1} \left( -\frac{1}{2} \right)$ , ac felly mae  $t = \frac{7\pi}{12}$ .

### **Enghraifft 3.16**

Atebwch rannau (i) a (ii) yn Enghraifft 3.14 pan roddir llinyn gyda'r un modwlws a hyd naturiol yn lle'r sbring.

Yn yr achos hwn y prif wahaniaeth yw nad yw hafaliad y mudiant yn dal ond pan fydd  $x$  yn positif.

Pan fydd  $x$  yn negatif bydd y llinyn yn llac a bydd  $P$  yn symud gyda chyflymiad sero, h.y. ar fuanedd cyson.

Nid yw'r amser a gymer i gyrraedd estyniad o  $0.02$  wedi newid.

Fodd bynnag ar ôl i  $P$  fynd trwy  $B$  bydd yn symud ar fuanedd cyson, sef y buanedd ar  $B$ .

H.y. mae  $a\omega = 0.12 \text{ ms}^{-1}$  ac felly mae  $x = -0.02$  ar amser  $\frac{0.02}{0.12}$  eiliad = 0.17 eiliad ar

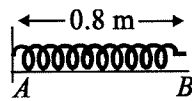
ôl mynd trwy  $B$ .

Yr amser a gymer i gyrraedd  $B$  yw chwarter y cyfnod, h.y.

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{4} \text{ s} = 0.79 \text{ eiliad.}$$

Felly mae  $t = 0.17 + 0.79 = 0.96$ .

### Enghraifft 3.17



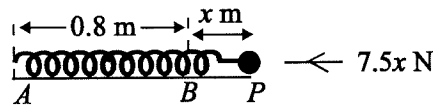
Mae'r diagram yn dangos sbring â hyd naturiol 0.8 m a modwlws 6 N ar fwrdd llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog wrth bwynt  $A$  ar y bwrdd ac mae gronyn  $P$ , mäs 0.3 kg, yn cael ei glymu wrth y pen rhydd. Rhyddheir y gronyn i symud ac ar amser  $t = 0$  mae estyniad y sbring yn 0.1 m ac mae'r gronyn yn symud ar fuanedd  $0.3 \text{ ms}^{-1}$  tuag at bwynt  $A$ .

Darganfyddwch estyniad y sbring ar amser  $t$  eiliad a hefyd osgled yr osgiliadau.

Gan fod angen yr estyniad fel ffwythiant amser, y dull mwyaf priodol o ddatrys y broblem yw darganfod hafaliad y mudiant.

Cymerir safle'r cydbwysedd ar bwynt  $B$  a phan fydd yr estyniad yn  $x$  m (gydag  $x > 0$ ) mae'r tyniant yn y sbring yn gweithredu i'r cyfeiriad o  $B$  i  $A$  a'i faint yw

$$\frac{6x}{0.8} \text{ N} = 7.5x \text{ N. Felly y grym i gyfeiriad } x \text{ positif yw } -7.5x \text{ N.}$$



Dyma hefyd y grym i gyfeiriad  $x$  positif pan fydd  $x$  yn negatif ac felly mae cymhwyso deddf Newton yn rhoi

$$0.3 \frac{d^2x}{dt^2} = -7.5x,$$

$$\text{h.y.} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -25x.$$

Mae'r hafaliad hwn yn dweud wrthyfych yn syth bod y mudiant yn harmonig syml o amgylch  $B$  gydag  $\omega = 5$ .

Yn yr achos hwn, gan na roddir amodau ar amser  $t = 0$  naill ai ar y canol neu ar bwynt eithaf, mae angen defnyddio'r datrysiad cyffredinol  $x = A \cos 5t + B \sin 5t$ .

Pan fydd  $t = 0$ , mae  $x = 0.1$  a  $\frac{dx}{dt} = -0.3$  (mae'r gronyn yn symud tuag at  $A$ ).

Felly mae  $A = 0.1$  a  $5B = -0.3$  ac felly mae  $B = -0.06$  fel bod

$$x = 0.1 \cos 5t - 0.06 \sin 5t.$$

I ddarganfod yr osgled mae angen ysgrifennu'r mynegiad hwn yn y ffurf

$$x = a \sin(5t + \epsilon) = a \sin 5t \cos \epsilon + a \cos 5t \sin \epsilon.$$

Felly mae  $-0.06 = a \cos \epsilon$  a  $0.1 = a \sin \epsilon$ .

Mae sgwario'r rhain a'u hadio yn rhoi

$$a = \sqrt{0.06^2 + 0.1^2} = 0.12,$$

ac felly yr osgled yw 0.12 m.

Mae'n werth edrych hefyd ar y dull arall sy'n defnyddio cadwraeth egni.

Pan fydd yr estyniad yn  $x$  m mae'r egni elastig yn y sbring yn

$$\frac{1}{2} \times \frac{6x^2}{0.8} \text{ J} = 3.75x^2 \text{ J},$$

ac felly, os yw  $v \text{ ms}^{-1}$  yn dynodi buanedd y gronyn, mae cadwraeth egni yn rhoi

$$\frac{1}{2} \times 0.3v^2 + 3.75x^2 = \text{cysonyn}.$$

Gellir darganfod y cysonyn trwy amnewid gwerthoedd dechreuol  $x$  a  $v$ , ac felly

$$0.15v^2 + 3.75x^2 = 0.15 \times 0.3^2 + 3.75 \times 0.1^2.$$

Gellir ad-drefnu'r hafaliad hwn i'r ffurf safonol ar gyfer M.H.S. fel

$$v^2 = -25x^2 + 0.3^2 + 25 \times 0.1^2,$$

neu

$$\begin{aligned} v^2 &= 25 \left( \frac{0.3^2 + 25 \times 0.1^2}{25} - x^2 \right) \\ &= 25 (0.06^2 + 0.1^2 - x^2). \end{aligned}$$

Felly mae'r mudiant yn harmonig syml gyda  $\omega = 5$ , a'r osgled yn  $\sqrt{0.06^2 + 0.1^2}$ .

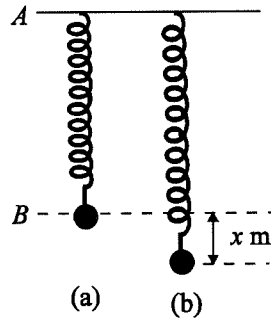
Unwaith eich bod wedi dangos bod y mudiant yn harmonig syml ac wedi darganfod  $\omega$  gallwch ddyfynnu'r datrysiad cyffredinol a datrys y broblem fel uchod.

Gellir darganfod yr hafaliad differol ar gyfer  $x$  trwy ddifferu'r mynegiad ar gyfer  $v^2$  mewn perthynas ag  $x$  a defnyddio  $v \frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

### Enghraifft 3.18

Mae gronyn  $P$ , mäs 0.1 kg, yn cael ei glymu wrth un pen i sbring elastig, gyda'r pen arall, sef  $A$ , yn sefydlog. Gall y gronyn symud mewn llinell fertigol trwy  $A$ . Hyd naturiol y sbring yw 1 m a'i fodwlws yw 4.9 N. Mae'r gronyn yn aros mewn cydbwysedd ar bwynt  $B$ . Darganfyddwch pa mor bell yw  $B$  o dan  $A$ . Yna caiff y sbring ei estyn ymhellach nes bod  $P$  ar bellter o 0.1 m o dan  $B$  ac yna fe'i rhyddheir o

ddisymudedd. Dangoswch fod y mudiant yn harmonig syml gyda chanol  $B$  a darganfyddwch faint o amser a gymer nes i  $P$  gyrraedd  $B$  gyntaf.



Mae diagram (a) yn dangos safle'r cydbwysedd gyda'r estyniad cydbwysedd yn cael ei ddynodi gan  $d$  m. Y grymoedd sy'n gweithredu ar y gronyn yw  $0.1 \times 9.8$  N tuag i lawr a'r tyniant  $4.9d$  N sy'n gweithredu tuag i fyny. Ar gyfer cydbwysedd, mae'r rhain yn hafal, h.y.  $0.98 = 4.9d$  ac felly mae  $d = 0.2$  ac felly mae pwynt  $B$  yn  $1.2$  m o dan  $A$ .

Mae angen dangos bod y mudiant yn harmonig syml gyda chanol  $B$ , ac felly mae'n edrych yn rhesymol defnyddio dadleoliad tuag i lawr  $P$  o  $B$ , sef  $x$  m, fel newidyn, fel a ddangosir yn niagram (b). Felly'r grym i'r cyfeiriad tuag i lawr oherwydd y tyniant yn y llinyn yw  $-4.9(0.2 + x)$  N, y grym i'r cyfeiriad hwn oherwydd disgyrchiant yw  $0.98$  N ac felly cyfanswm y grym i gyfeiriad  $x$  cynyddol yw

$$-4.9(0.2 + x) \text{ N} + 0.98 \text{ N} = -4.9x \text{ N}.$$

Mae defnyddio deddf Newton yn rhoi, ar amser  $t$  eiliad,

$$0.1 \frac{d^2x}{dt^2} = -4.9x,$$

neu 
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -49x.$$

Felly mae'r mudiant yn harmonig syml gyda  $\omega^2 = 49$  ac mae canol yr osgiliad ar  $B$ . Mae'r amser a gymer  $P$  i gyrraedd  $B$  gyntaf yn chwarter cyfnod, h.y.  $\frac{\pi}{14}$  eiliad.

Gydag unrhyw fudiant ar ben sbring mae'r mudiant bob amser yn harmonig syml o amgylch y safle cydbwysedd ac felly mae'n werth mesur y dadleoliad o'r pwynt hwn gan fod hynny'n osgoi defnyddio algebra.

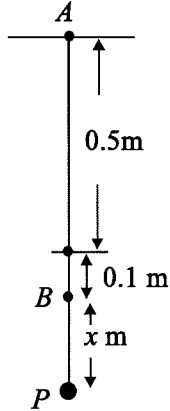
### Enghraifft 3.19

Mae llinyn elastig â hyd naturiol  $0.5$  m, gydag un pen yn sefydlog wrth bwynt  $A$ , yn cael ei estyn bellter o  $0.1$  m gan ronyn  $P$  sy'n hongian yn rhydd o'r pen arall. Yna caiff y gronyn ei dynnu i lawr bellter pellach o  $d$  m a'i ryddhau o ddisymudedd. Darganfyddwch yr amser a gymer y gronyn i gyrraedd ei uchder mwyaf pan fydd  
(a)  $d = 0.05$ , (b)  $d = 0.15$ .



Mae'r cwestiwn hwn yn eithaf tebyg i'r un blaenorol heblaw na roddir màs y gronyn na modwlws y llinyn. Dynodir y rhain gan  $m$  kg a  $\lambda$  N yn ôl eu trefn. Mewn cydbwysedd, y grymoedd sy'n gweithredu ar y gronyn yw  $9.8$  m N i lawr a'r tyniant  $\frac{0.1\lambda}{0.5}$  N =  $0.2\lambda$  N, sy'n gweithredu tuag i fyny. Ar gyfer cydbwysedd, mae'r rhain yn hafal, h.y.  $\lambda = 49$  m.

Fel a nodir uchod, mae'n werth mesur dadleoliad o'r safle cydbwysedd ac mae  $x$  m yn dynodi dadleoliad  $P$  tuag i lawr o'r pwynt cydbwysedd  $B$ , fel a ddangosir yn y diagram.



Felly y grym i'r cyfeiriad tuag i lawr oherwydd y tyniant yn y llinyn yw

$$\frac{-\lambda(0.1+x)}{0.5} \text{ N} = -2\lambda(0.1+x).$$

Y grym i'r cyfeiriad hwn oherwydd disgyrchiant yw  $9.8$  m N ac felly cyfanswm y grym i gyfeiriad  $x$  cynyddol yw  $-2\lambda(0.1+x) \text{ N} + 9.8m \text{ N} = -2\lambda x \text{ N}$ , gan fod  $\lambda = 49$  m.

Mae defnyddio deddf Newton yn rhoi, ar amser  $t$  eiliad,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2\lambda x$$

neu  $\frac{d^2x}{dt^2} = -98x.$

Mae'r mudiant yn ymddangos fel petai'n harmonig syml gydag  $\omega^2 = 98$ , ac mae canol yr osgiliad ar  $B$ . Mae problem fach oherwydd y cafwyd hafaliad y mudiant gan dybio nad yw'r llinyn byth yn llac a rhaid ystyried y posibilrwydd y gall fod yn llac.

Achos (a) Gyda mudiant harmonig syml gyda'r gronyn yn cael ei ryddhau o bwynt  $0.05$  m o dan y canol, byddai'r uchder mwyaf uwchben  $B$  ar y pwynt eithaf arall, h.y. ar uchder o  $0.05$  m uwchben  $B$ . Ar y pwynt hwn, nid yw'r llinyn yn llac eto ac felly

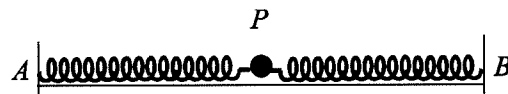
mae hafaliad y M.H.S. dal yn ddilys ac mae'r amser i bwynt yr uchder mwyaf yn hanner cyfnod, h.y.  $\frac{\pi}{\sqrt{98}}$ .

**Achos (b)** Gan dybio bod y mudiant yn harmonig syml, yr uchder mwyaf uwchben  $B$  yw 0.15 m. Fodd bynnag, byddai'r llinyn wedi dod yn llac ar uchder o 0.1 m uwchben  $B$  ac felly nid yw hafaliadau M.H.S. yn dal yn ddilys. Yn yr achos hwn, unwaith y bydd y gronyn wedi cyrraedd y pwynt lle nad yw'r llinyn bellach yn dynn (h.y. ar uchder 0.1 m uwchben  $B$ ) bydd y gronyn yn symud o dan ddisgyrchiant yn unig. Felly er mwyn darganfod yr amser y mae'n codi mae angen darganfod y cyflymder pan fydd  $x = -0.1$  m. Nes iddo gyrraedd y pwynt hwn mae'r mudiant yn harmonig syml gydag osgled 0.15 m ac felly, ar amser  $t$  eiliad, mae  $x = 0.15 \cos \sqrt{98} t$ , lle mae  $t = 0$  ar yr amser y rhyddhawyd y gronyn, a  $v^2 = 98 (0.15^2 - x^2)$ . Mae amnewid  $x = -0.1$  yn rhoi'r buanedd pan fydd y gronyn yn dechrau symud o dan ddisgyrchiant yn unig, sef  $1.11 \text{ ms}^{-1}$ , a'r amser a gymer i gyrraedd y pwynt uchaf hwnnw yw  $\frac{1.11}{9.8}$  eiliad = 0.11 eiliad. Darganfyddir yr amser a gymer i gyrraedd y pwynt  $x = -0.1$  trwy ddatrys

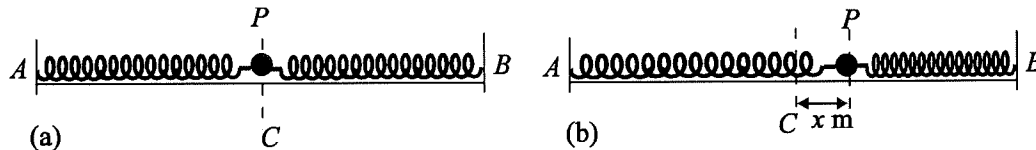
$$-0.1 = 0.15 \cos \sqrt{98} t.$$

Y datrysiad yw  $t = 0.23$ . Cyfanswm yr amser a gymer o ddisymudedd i gyrraedd y pwynt uchaf yw  $(0.11 + 0.23)$  eiliad = 0.34 eiliad.

### Enghraifft 3.20



Mae'r diagram yn dangos gronyn  $P$ , mäs 0.2 kg, yn gorwedd ar fwrdd llorweddol llyfn ac a glymwyd gan ddau sbring â'u hydroedd naturiol yn 0.6 m a 0.4 m a modwli 3 N a 6 N yn ôl eu trefn, wrth bwyntiau  $A$  a  $B$ , lle mae  $AB = 1.4$  m. Darganfyddwch bellter pwynt  $C$ , sef y pwynt lle mae'r gronyn mewn cydbwysedd, o bwynt  $A$ . Os symudir y gronyn o  $C$ , dangoswch y bydd yn disgrifio mudiant harmonig syml o amgylch  $C$  a darganfyddwch gyfnod y mudiant hwn.



Dangosir safle'r cydbwysedd yn niagram (a) uchod, a dynodir y pellter  $AC$  gan  $d$  m. Estyniad y sbring sydd ynghlwm wrth  $A$  yw  $(d - 0.6)$  m ac estyniad y sbring arall yw

$(1 - d)$  m.

Y tyniannau yn y sbringiau felly yw  $\frac{3(d - 0.6)}{0.6} N$  a  $\frac{6(1 - d)}{0.4} N$ .

Ar gyfer cydbwysedd, mae'r rhain yn hafal,

$$\text{h.y.} \quad \frac{3(d - 0.6)}{0.6} = \frac{6(1 - d)}{0.4}, \text{ gan roi } d = 0.9.$$

Pan wneir i'r gronyn symud, dynodir ei ddadleoliad o  $C$  i'r cyfeiriad o  $A$  i  $B$  gan  $x$  m fel a ddangosir yn niagram (b).

Estyniad y sbring sydd ynghlwm wrth  $A$  yw  $(d + x - 0.6)$  m ac felly y grym sy'n gweithredu ar  $P$  oherwydd y sbring hwn yw  $-\frac{3(d + x - 0.6)}{0.6} N$  i gyfeiriad  $x$  positif.

Estyniad y sbring sydd ynghlwm wrth  $B$  yw  $(1 - d - x)$  m ac felly y grym sy'n gweithredu ar  $P$  oherwydd y llinyn hwn yw  $\frac{6(1 - d - x)}{0.4} N$  i gyfeiriad  $x$  positif.

Cyfanswm y grym i gyfeiriad  $x$  positif felly yw

$$-\frac{3(d + x - 0.6)}{0.6} N + \frac{6(1 - d - x)}{0.4} N.$$

Wrth ddefnyddio'r gwerth ar gyfer  $d$ , mae hyn yn symleiddio i  $-20x N$ .

Mae deddf Newton yn rhoi

$$0.2 \frac{d^2x}{dt^2} = -20x,$$

$$\text{h.y.} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -100x.$$

Felly mae'r mudiant yn harmonig syml gyda chyfnod  $\frac{2\pi}{10}$  eiliad  $= \frac{\pi}{5}$  eiliad.

### **Ymarferion 3.2**

Yng nghwestiynau 1 i 3 mae sbring gyda modwlws  $\lambda N$ , hyd naturiol  $a$  m yn cael ei roi ar blân llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog ar bwynt  $A$ , clymir gronyn  $P$  gyda màs  $m$  kg wrth y pen arall ac mae'r gronyn yn rhydd i symud ar hyd llinell y sbring.

- 1**  $m = 0.1$ ,  $\lambda = 10$ ,  $a = 1$ , estynnir y sbring bellter o  $0.2$  m a rhyddheir  $P$  o ddisymudedd.

Darganfyddwch yr amser a gymerir hyd nes

(a) bod yr estyniad yn hafal i  $0.05$  m am y tro cyntaf,

(b) bod  $AP$  yn hafal i  $0.97$  m am y tro cyntaf.

- 2**  $m = 0.8$ ,  $\lambda = 2.56$ ,  $a = 0.8$ , ar amser  $t = 0$  teflir y gronyn o'i safle cydbwysedd gyda buanedd  $0.8 \text{ ms}^{-1}$  yn syth tuag at  $A$ .

Darganfyddwch fynegiadau ar gyfer dadleoliad a chyflymder y gronyn ar amser  $t$  eiliad wedyn.

- 3**  $m = 1.5$ ,  $\lambda = 27$ ,  $a = 2$ , teflir y gronyn o'i safle cydbwysedd i gyfeiriad yn uniongyrchol oddi wrth  $A$  gyda buanedd  $1.2 \text{ ms}^{-1}$ .

Darganfyddwch yr amser sy'n mynd heibio hyd nes y bydd  $AP = 1.9$  m.

- 4 Atebwch gwestiwn 1 pan roddir llinyn gyda'r un modwlws a hyd naturiol yn lle'r sbring.
- 5 Atebwch gwestiwn 3 pan roddir llinyn gyda'r un modwlws a hyd naturiol yn lle'r sbring.

Yng nghwestiynau 6 a 7 mae gronyn  $P$ , mäs  $m$  kg, yn cael ei hongian o un pen i sbring gyda modwlws  $\lambda$  N, hyd naturiol  $a$  m, ac mae pen arall y sbring yn sefydlog ar  $A$ . Mae'r gronyn yn rhydd i symud ar hyd y fertigol trwy  $A$ .

- 6  $m = 0.5$ ,  $\lambda = 16$ ,  $a = 0.5$ . Mae'r gronyn yn ddisymud yn y safle cydbwysedd i ddechrau ac yna caiff ei dynnu i lawr bellter pellach o  $0.04$  m a'i ryddhau o ddisymudedd.

Darganfyddwch yr amser a gymer y gronyn

(a) i ddychwelyd i'r safle cydbwysedd am y tro cyntaf,

(b) i gyrraedd uchder o  $0.01$  m uwchben y safle cydbwysedd am y tro cyntaf.

- 7  $m = 1.5$ ,  $\lambda = 30$ ,  $a = 0.8$ . Mae'r gronyn yn ddisymud ar ei safle cydbwysedd i ddechrau ac yna caiff ei daflu yn fertigol i lawr ar fuanedd  $1 \text{ ms}^{-1}$ .

Darganfyddwch ddyfnder mwyaf y gronyn o dan ei safle cydbwysedd a'r amser a gymer i ddisgyn pellter o  $0.05$  m o'r safle cydbwysedd.

- 8 Clymir gronyn  $P$ , mäs  $0.1$  kg, wrth un pen i llinyn elastig, ac mae'r pen arall, sef  $A$ , yn sefydlog. Gall y gronyn symud ar hyd llinell fertigol trwy  $A$ . Hyd naturiol y llinyn yw  $1$  m a'i fodwlws yw  $4.9$  N. Mae'r gronyn yn ddisymud i ddechrau ac yna caiff ei dynnu i lawr bellter o  $0.4$  m o dan ei safle cydbwysedd a'i ryddhau. Darganfyddwch yr amser rhwng yr adeg y daw'r llinyn yn llac a phan fydd y gronyn yn cyrraedd ei bwynt uchaf.

- 9 Mae gronyn  $P$  gyda mäs  $0.1$  kg yn cael ei hongian mewn cydbwysedd oddi wrth sbring ac estyniad y sbring yw  $0.1$  m. Gyda  $P$  mewn cydbwysedd, mae mäs ychwanegol o  $0.2$  kg yn cael ei glymu wrtho yn ofalus ac yna mae'r gronyn cyfunol yn cael ei ryddhau. Darganfyddwch gyfnod ac osgled y mudiant harmonig syml sy'n dilyn.

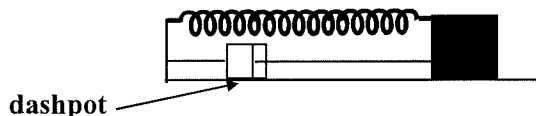
- 10 Mae un pen i sbring yn sefydlog a chlymir dau ronyn, masau  $0.4$  kg ac  $m$  kg gyda'i gilydd wrth y pen arall ac maent yn hongian mewn cydbwysedd. Pan gânt eu dadleoli ychydig o dan y safle cydbwysedd a'u rhyddhau, maent yn gwneud osgiliadau harmonig syml gyda chyfnod  $0.5$  eiliad. Os tynnir y gronyn gyda mäs  $0.4$  kg mae'r gronyn arall, pan gaiff ei ddisodli o'i safle cydbwysedd, yn gwneud osgiliadau harmonig syml gyda chyfnod  $0.25$  eiliad. Darganfyddwch  $m$ .

- 11 Mae dau bwynt  $A$  a  $B$  yn gorwedd ar linell lorweddol gyda phellter o 3 m rhyngddynt. Clymir gronyn  $P$ , màs 0.6 kg, yn y rhanbarth rhwng  $A$  a  $B$  gydag un o ddau llyn unfath gyda modwlws 20 N a hyd naturiol 1 m wrth  $A$  a chyda'r llall wrth  $B$ . Caiff y gronyn ei ddadleoli ar bellter o 0.1 m o'i safle cydbwysedd ar hyd llinell  $AB$  a'i ryddhau o ddisymudedd. Dangoswch fod ei fudiant wedyn yn harmonig syml a darganfyddwch ei gyfnod.
- 12 Clymir gronyn sy'n gorwedd ar fwrdd llorweddol llyfn gyda sbring o hyd naturiol 0.6 m wrth bwynt sefydlog ar y bwrdd. Caiff y sbring ei ddal ar bwynt  $A$  lle mae estyniad y llyn yn 0.1 m ac yna ei ryddhau o ddisymudedd. Mae'n dychwelyd i  $A$  am y tro cyntaf ar ôl  $\frac{\pi}{2}$  eiliad. Darganfyddwch fuanedd y gronyn pan fydd ar bellter o 0.02 m oddi wrth  $A$  a'r amser a gymer i gyrraedd y pwynt hwn.
- 13 Pan gaiff gronyn, màs 5 kg, ei hongian o sbring, mae'r estyniad yn 0.2 m. Darganfyddwch fuanedd mwyaf y gronyn pan gaiff ei dynnu i lawr bellter pellach o 0.2 m a'i ryddhau o ddisymudedd.

### 3.4 Mudiant harmonig gwanychol

Yn y problemau yn yr adran flaenorol, dangoswyd y byddai gronyn sy'n symud ar flaen sbring yn disgrifio mudiant harmonig syml, sy'n fudiant cyfnodol a all barhau am byth. Ni all mudiant o'r fath fodoli yn y byd go iawn wrth gwrs a phetaech yn gwylio mudiant gronyn ar flaen sbring fe welech fod yr osgiliadau yn lleihau'n raddol ac yn darford. Mae hyn oherwydd effaith gwrthiant aer neu wrthiant ffrithiannol a rhaid mireinio'r model syml er mwyn cymryd y gwrthiant hwn i ystyriaeth.

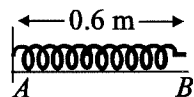
Mae llawer o fodelau posibl ar gyfer gwrthiant, fel a drafodwyd yn adran 2.3, ond yr unig un sy'n arwain at fathemateg weddol hawdd wrth fireinio problemau sy'n cynnwys sbringiau yw'r model sy'n tybio bod y gwrthiant mewn cyfrannedd union â'r buanedd. Yn ogystal â'r gwrthiant sy'n digwydd yn naturiol mae llawer o enghreifftiau lle cyflwynir gwanychu rhag i'r osgiliadau barhau. Er enghraifft, model syml o hongiad car fyddai gronyn ar flaen sbring ac felly yn y model hwn byddai'r car yn symud i fyny ac i lawr a byddai'n anghyffyrddus i'w yrru. Er mwyn osgoi hyn, cyflwynir system gwanychu sy'n cynnwys system o ddashpotiau ac fe adeiledir y rhain fel eu bod yn rhoi gwrthiant sydd mewn cyfrannedd â'r buanedd. Yn y bôn, silindr yw dashpot sy'n cynnwys hylif gyda phiston sy'n dynn, efallai gyda thwll bychan ynddo. Pan symudir y piston, mae'r hylif yn tryddiferu trwy'r ochrau a thrwy'r twll ac mae'r gwrthiant i'r mudiant mewn cyfrannedd bras â buanedd y piston. Wrth fodelu osgiliadau màs sy'n dirgrynu, tybir bod y màs yn gysylltiedig â'r dashpot fel a ddangosir yn y diagram.



Mewn gwirionedd, dashpotiau yw'r sioc laddwyr mewn car.

Felly mae'r model sy'n tybio bod gwrthiant mewn cyfrannedd â buanedd yn arbennig o ddefnyddiol oherwydd ei fod yn fodel rhesymol ar gyfer llawer o systemau lle mae angen cyflwyno gwanychu am resymau ymarferol.

### Enghraifft 3.21



Mae'r diagram yn dangos sbring gyda hyd naturiol 0.6 m a modwlws 0.48 N ar fwrdd llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog ar bwynt A ar y bwrdd ac ar y dechrau mae'r sbring yn gorwedd yn ddisymud, gyda hyd 0.6 m, a'i ben rhydd ar bwynt B ar y bwrdd. Yna clymir gronyn P, mäs 0.2 kg, wrth y pen rhydd ac ar amser  $t = 0$  caiff y sbring ei estyn bellter o 0.06 m a'i ryddhau o ddisymudedd. Mae gwrthiant i'r mudiant â maint  $0.4v$  N pan fydd y gronyn yn symud ar fuanedd  $v$  ms<sup>-1</sup>. Dangoswch, ar amser  $t$  eiliad yn ddiweddarach, fod dadleoliad P oddi wrth B, sef  $x$  m, i'r cyfeiriad o A i B, yn bodoli'r hafaliad differol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Darganfyddwch fynegiad ar gyfer  $x$  ar amser  $t$  eiliad a thrafodwch y mudiant wedyn. (Enghraifft 3.14 yw hon gyda therm gwrthiannol ychwanegol wedi'i gynnwys.)

Rhoddir y cyfeiriad cyfeirnod i'r cyfeiriad o A i B ac felly pan fydd y dadleoliad o B yn  $x$  m mae'n dilyn, fel yn yr enghreifftiau blaenorol, mai'r grym i gyfeiriad  $x$  positif yw

$$-\frac{0.48x}{0.6} = -0.8x \text{ N.}$$

Pan fydd y gronyn yn symud i'r dde ei fuanedd yw  $\frac{dx}{dt}$  ms<sup>-1</sup> ac felly mae'r grym gwrthsafol sy'n gweithredu arno i'r chwith a'i faint yw  $0.4 \frac{dx}{dt}$  N, ac felly y grym a achosir gan y gwrthiant yw  $-0.4 \frac{dx}{dt}$  N i gyfeiriad  $x$  positif. Pan fydd y gronyn yn symud i'r chwith ei fuanedd yw  $-\frac{dx}{dt}$  ms<sup>-1</sup>, gan fod  $\frac{dx}{dt}$  bellach yn negatif, ac felly mae'r grym gwrthsafol sy'n gweithredu arno i'r dde a'i faint yw  $-0.4 \frac{dx}{dt}$  N, ac felly y grym a achosir gan y gwrthiant yw  $-0.4 \frac{dx}{dt}$  N i gyfeiriad  $x$  positif. Felly i ba

gyfeiriad bynnag y mae'r gronyn yn symud, mae'r grym i gyfeiriad  $x$  positif yn  $-0.4 \frac{dx}{dt}$  N. Fel arfer, ni ddisgwylid i chi ddadansoddi'r sefyllfa mor fanwl ac fel rheol gallwch dybio, os yw'r gwrthiant yn  $cv$  N, yna mae'r grym i gyfeiriad  $x$  positif yn  $-c \frac{dx}{dt}$  N. Nid yw'n wir bob amser, beth bynnag yw'r ddeddf wrthiant, bod y grym i'r cyfeiriad cyfeirnod yr un fath beth bynnag yw cyfeiriad y mudiant. (Gellir dangos bod y canlyniad yn wir pryd bynnag y mae'r gwrthiant yn od-ffwythiant o fuanedd.) Mae defnyddio deddf Newton yn rhoi

$$0.2 \frac{d^2x}{dt^2} = -0.8x - 0.4 \frac{dx}{dt},$$

h.y.  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 4x = 0.$

Hafaliad trefn dau yw hwn gyda chyfernodau cyson ac mae rhoi cynnig ar yr amnewidiad  $x = e^{mt}$ , fel a ddangosir ym Mhennod 1, yn rhoi'r hafaliad ategol

$$m^2 + 2m + 4 = 0.$$

Gwreiddiau'r hafaliad hwn yw  $-1 \pm \sqrt{-3}$ . Mae'n dilyn nawr o ran (c) y crynodeb yn adran 1.2 mai'r datrysiad cyffredinol yw

$$x = e^{-t} (A \cos \sqrt{3} t + B \sin \sqrt{3} t).$$

Mae differu hwn mewn perthynas â  $t$  yn rhoi

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} (A \cos \sqrt{3} t + B \sin \sqrt{3} t) + \sqrt{3} e^{-t} (-A \sin \sqrt{3} t + B \cos \sqrt{3} t).$$

I ddechrau, mae  $x = 0.06$  a  $\frac{dx}{dt} = 0$ , ac felly mae amnewid  $t = 0$  yn y mynegiadau uchod yn rhoi  $A = 0.06$  ac  $\sqrt{3} B = A$  ac felly

$$x = 0.06 e^{-t} \left( \cos \sqrt{3} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3} t \right).$$

Gwelir ffurf gyffredinol y mudiant fwyaf eglur trwy ailysgrifennu'r rhan mewn cromfachau yn y ffurf  $a \sin(\sqrt{3}t + \epsilon)$  lle mae

$$a \cos \epsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ac } a \sin \epsilon = 1.$$

Mae sgwario ac adio yn rhoi  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$  ac felly mae  $\epsilon = \frac{\pi}{3}$  ac

$$x = \frac{0.12}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin \left( \sqrt{3} t + \frac{\pi}{3} \right).$$

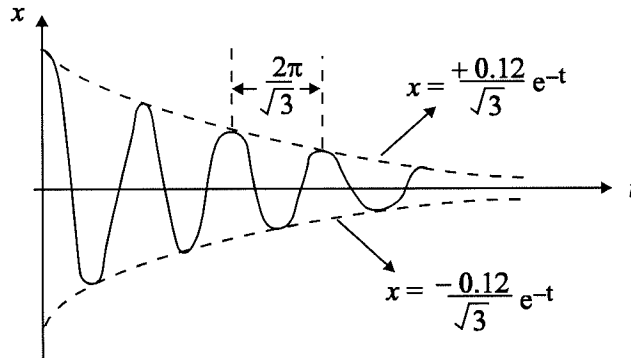
Bydd  $x$  yn sero pan fydd  $t = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\frac{\pi}{3} \right), \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{5\pi}{3} \right), \dots$  h.y. ar gyfyngau  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

Hefyd bydd  $\frac{dx}{dt}$  yn diflannu pan fydd  $\sin \left( \sqrt{3} t + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \cos \left( \sqrt{3} t + \frac{\pi}{3} \right)$

h.y.  $t = 0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \dots$

h.y. ar gyfyngau  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

Felly bydd y ffurf gyffredinol fel a ddangosir yn y diagram canlynol. Bydd osgiliad yn yr ystyr y bydd  $P$  yn dychwelyd i  $B$  dro ar ôl tro ond bydd y pellterau rhwng  $B$  a'r pwyntiau lle mae'r cyflymder yn sero yn dal i leihau a bydd  $x$  yn tueddu at sero yn esbonyddol ac felly bydd y mudiant yn graddol ddod i ben. Bydd y mudiant yn gorwedd rhwng y ddwy gromlin  $x = \pm \frac{0.12}{\sqrt{3}} e^{-t}$ , fel a ddangosir yn y diagram.



Gyda'r math hwn o fudiant, lle mae rhyw fath o osgiliad yn digwydd, dywedir bod y gwanychu yn wan neu yn is-gritigol.

### Enghraifft 3.22

Ystyriwn nawr y broblem flaenorol pan fo'r grym gwrthsafol yn  $0.8 \text{ v N}$ .

Y gwahaniaeth yn yr achos hwn yw bod y grym i gyfeiriad  $x$  positif bellach yn  $-0.8 \frac{dx}{dt}$  N, ac mae defnyddio deddf Newton yn rhoi

$$0.2 \frac{d^2x}{dt^2} = -0.8x - 0.8 \frac{dx}{dt},$$

h.y.  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$ .

Hafaliad trefn dau yw hwn gyda chyfernodau cyson ac mae rhoi cynnig ar yr amnewidiad  $x = e^{mt}$ , fel a ddangosir ym Mhennod 1, yn rhoi'r hafaliad ategol

$$m^2 + 4m + 4 = 0.$$

Dim ond un gwreiddyn sydd gan yr hafaliad hwn, sef  $m = -2$ , ac yn awr mae'n dilyn o ran (b) y crynodeb yn adran 1.5 mai'r datrysiad cyffredinol yw

$$x = e^{-2t}(At + B).$$

I ddechrau, mae  $x = 0.06$  a  $\frac{dx}{dt} = 0$  ac felly mae  $B = 0.06$  ac  $A = 2B = 0.12$ .

Y datrysiad cyffredinol felly yw

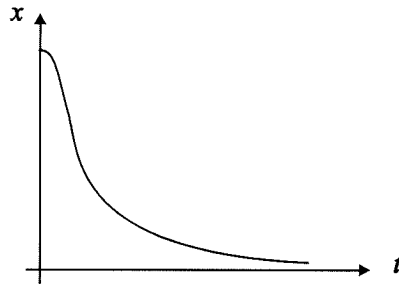


$$x = e^{-2t} (0.12t + 0.06).$$

Mae differu'r mynegiad hwn yn rhoi

$$\frac{dx}{dt} = -0.24t e^{-2t}.$$

Felly nid yw  $x$  yn diflannu pan fydd  $t$  yn bositif a bydd ffurf  $x$  fel a ddangosir yn y diagram.



Dywedir bod y gwanychu yn yr achos hwn yn gritigol.

### **Enghraifft 3.23**

Ystyriwn nawr y broblem flaenorol pan fo'r grym gwrthsafol yn  $v$  N.

Yn yr achos hwn y grym i gyfeiriad  $x$  positif nawr yw  $-\frac{dx}{dt}$  N ac mae defnyddio deddf

Newton yn rhoi 
$$0.2 \frac{d^2x}{dt^2} = -0.8x - \frac{dx}{dt},$$

h.y. 
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Hafaliad trefn dau yw hwn gyda chyfernodau cyson ac mae rhoi cynnig ar yr amnewidiad  $x = e^{mt}$ , fel a ddangosir ym Mhennod 1, yn rhoi'r hafaliad ategol

$$m^2 + 5m + 4 = 0.$$

Gwreiddiau'r hafaliad hwn yw  $m = -1$  ac  $m = -4$  ac yn nawr mae'n dilyn oddi wrth ran (a) y crynodeb yn adran 1.2 mai'r datrysiad cyffredinol yw

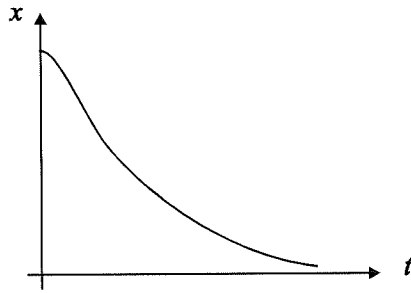
$$x = Ae^{-t} + Be^{-4t}.$$

I ddechrau, mae  $x = 0.06$  a  $\frac{dx}{dt} = 0$  ac felly mae  $A + B = 0.06$  ac  $A + 4B = 0$ , ac felly

mae  $B = -0.02$  ac  $A = 0.08$  a'r datrysiad cyffredinol felly yw

$$x = 0.08e^{-t} - 0.02e^{-4t}.$$

Er mwyn i  $x$  fod yn sero, mae  $e^{3t} = 0.25$  ac nid yw hyn yn digwydd pan fydd  $t$  yn bositif. Felly bydd y ffurf gyffredinol ar gyfer  $x$  fel a ddangosir isod ac unwaith eto mae'n lleihau'n esbonyddol gydag amser.



Yn yr achos hwn dywedir bod y gwanychu yn gryf neu'n or-gritigol.

### Ymarferion 3.3

Yng nghwestiynau 1 i 4, rhoddir sbring â modwlws  $\lambda$  N a hyd naturiol  $a$  m ar blân llorweddol llyfn. Mae un pen i'r sbring yn sefydlog ar bwynt  $A$ , clymir gronyn  $P$ , mäs  $m$  kg, wrth y pen arall ac mae'r gronyn yn rhydd i symud ar hyd llinell y sbring er bod y gronyn, pan fydd yn symud gyda buanedd  $v$  ms<sup>-1</sup>, yn profi gwrthiant i'w fudiant gyda maint  $k v$  N.

- 1  $m = 0.4$ ,  $\lambda = 31.2$ ,  $a = 0.5$ ,  $k = 10$ . Caiff y gronyn ei ddadleoli ar bellter o 0.04 m o'i safle cydbwysedd i gyfeiriad i ffwrdd oddi wrth  $A$  a'i ryddhau o ddisymudedd. Darganfyddwch ei ddadleoliad o'r safle cydbwysedd ar unrhyw amser wedyn.
- 2  $m = 0.5$ ,  $\lambda = 48$ ,  $a = 0.6$ ,  $k = 4$ . Teflir y gronyn o'r safle cydbwysedd i gyfeiriad i ffwrdd oddi wrth  $A$  gyda buanedd 0.6 ms<sup>-1</sup>. Darganfyddwch ei ddadleoliad o'r safle cydbwysedd ar unrhyw amser wedyn.
- 3  $m = 0.8$ ,  $\lambda = 12$ ,  $a = 0.75$ ,  $k = 7.2$ . Caiff y gronyn ei ddadleoli ar bellter o 0.2 m o'i safle cydbwysedd i gyfeiriad tuag at  $A$  a'i ryddhau o ddisymudedd. Darganfyddwch ei ddadleoliad o'r safle cydbwysedd ar unrhyw amser wedyn.
- 4  $m = 0.6$ ,  $\lambda = 12$ ,  $a = 0.8$ ,  $k = 6$ . Teflir y gronyn o'r safle cydbwysedd ar buanedd 0.2 ms<sup>-1</sup> i gyfeiriad tuag at  $A$ . Darganfyddwch ei ddadleoliad o'r safle cydbwysedd ar unrhyw amser wedyn.
- 5 Mae model syml o fudiant gronyn ar ben sbring yn dangos ei fod yn disgrifio mudiant harmonig syml gyda chyfnod  $\frac{2\pi}{5}$  eiliad.  
Darganfyddwch yr amser rhwng uchafbwyntiau olynol ei fudiant pan dybir bod y gwrthiant i'w fudiant, pan fydd yn symud gyda buanedd  $v$  ms<sup>-1</sup>, yn  $8v$  N am bob uned o fäs.
- 6 Mae gronyn, pan anwybyddir grymoedd gwrthsafol, yn perfformio osgiliadau harmonig syml gyda chyfnod  $\frac{2\pi}{\omega}$  eiliad. Dangoswch, os tybir bod y gwrthiant

i'r mudiant yn  $2k\nu$  N am bob uned o fâs pan fydd y gronyn yn symud ar fuanedd  $\nu$  ms<sup>-1</sup>, yna fod yr amser rhwng uchafbwyntiau olynol yn  $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}$  eiliad.

- 7 Rhagfynegir y byddai gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml gyda chyfnod 8 eiliad yn absenoldeb gwrthiant. Gwelir bod y gronyn mewn gwirionedd yn cyrraedd ei uchafbwyntiau olynol o'i safle cydbwysedd ar gyfyngau o 10 eiliad. Gan gymryd yr achosir hyn gan wrthiant i'r mudiant o  $2k\nu$  N am bob uned mäs pan fydd y gronyn yn symud ar fuanedd  $\nu$  ms<sup>-1</sup>, darganfyddwch  $k$ .
- 8 Yr amser rhwng uchafbwyntiau olynol dadleoliad gronyn sy'n disgrifio mudiant harmonig gwanychol yw 0.1 eiliad. Cymhareb y dadleoliadau ar uchafbwyntiau olynol yw 0.9. O wybod mai mäs y gronyn yw 0.4 kg, darganfyddwch y gwrthiant i'w fudiant pan fydd yn symud ar fuanedd 3 ms<sup>-1</sup>.

### Ymarferion Amrywiol 3

- 1 Mae gronyn  $P$  sy'n symud ar hyd yr echelin  $x$  yn disgrifio mudiant harmonig syml gyda'r tarddiad yn y canol ac felly mae ei ddadleoliad oddi wrth  $O$  ar amser  $t$  yn bodloni'r hafaliad  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$ .  
O wybod bod  $P$  yn ddisymud am ennyd pan fydd  $x = a$ , dangoswch o'r hafaliad uchod fod  $\nu$ , sef buanedd y gronyn ar amser  $t$ , yn bodloni  $\nu^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$ .  
O wybod bod y gronyn ar  $O$  pan fydd  $t = 0$ , profwch fod  $x = a \sin \omega t$ .  
O wybod bod cyfnod y mudiant yn  $\frac{2\pi}{3}$  eiliad a bod ei fuanedd uchaf yn 24 ms<sup>-1</sup>, darganfyddwch  
(i) osgled y mudiant,  
(ii) yr amser a gymer  $P$  i deithio o  $O$  yn syth i bwynt 4 m o  $O$ .  
O wybod bod mäs y gronyn yn 0.25 kg, darganfyddwch  
(iii) y gyfradd y mae'r grym sy'n gweithredu ar  $P$  yn gweithio arni pan fo  $t = \frac{\pi}{9}$  s,  
(iv) y gyfradd fwyaf y mae'r grym hwn yn gweithio arni.
- 2 Mae gronyn yn symud ar hyd yr echelin  $x$  ac yn disgrifio mudiant harmonig syml o amgylch y tarddiad  $O$  gyda chyfnod 6 eiliad. Pan fydd  $t = 0$  eiliad, mae

$x = 1$  m ac mae'r gronyn yn dynesu at  $O$  ar fuanedd  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$  ms<sup>-1</sup>. O wybod bod y dadleoliad ar ffurf  $x = a \sin(\omega t + \epsilon)$ , darganfyddwch  $\omega$ ,  $a$ ,  $\epsilon$  a buanedd mwyaf y gronyn.

- 3 Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad differol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

Mae gronyn, mäs 0.25 kg, yn symud ar hyd yr echelin  $x$  ac ar amser  $t$  eiliad ei ddadleoliad o  $O$  i gyfeiriad  $x$  positif yw  $x$  m. Y grym sy'n gweithredu ar y gronyn i gyfeiriad  $x$  positif yw  $\left(ax + b \frac{dx}{dt}\right)$  N, lle mae  $a$  a  $b$  yn gysonion.

Pan fydd  $x = 2$  a'r gronyn yn symud i ffwrdd o'r tarddiad ar fuanedd 3 ms<sup>-1</sup> y grym sy'n gweithredu arno yw 4 N i gyfeiriad  $x$  negatif. Pan fydd y gronyn yn symud tuag at  $O$  ar fuanedd 3 ms<sup>-1</sup> ar yr un pwynt, y grym sy'n gweithredu arno yw 1 N i gyfeiriad  $x$  negatif.

Dangoswch fod  $a = -\frac{5}{4}$  a darganfyddwch werth rhifiadol  $b$ .

Trwy hyn dangoswch fod  $x$  yn bodloni'r hafaliad differol uchod.

Ar amser  $t = 0$ , teflir y gronyn tuag at  $O$  o'r pwynt  $x = 2$  ar fuanedd 2 ms<sup>-1</sup>.

Darganfyddwch  $x$  yn nherm  $t$ .

Rhowch fraslun sy'n dangos sut mae  $x$  yn amrywio gyda  $t$ .

- 4 Mae un pen llinyn elastig ysgafn â modwlws 4.9 N a hyd naturiol 0.5 m ynghlwm wrth bwynt sefydlog  $A$  a chlymir gronyn, mäs 0.1 kg, wrth y pen arall. Caiff y gronyn ei ddal ar  $A$  a'i ryddhau o ddisymudedd. Ei fuanedd ar ôl iddo ddisgyn pellter o  $x$  m yw  $v$  ms<sup>-1</sup>.

(i) Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer buanedd y gronyn pan fydd  $x \leq 0.5$ .

(ii) Dangoswch, trwy ddefnyddio egni neu fel arall, pan fydd  $x \geq 0.5$ , fod  $v^2 = 117.6x - 98x^2 - 24.5$ .

(iii) Dangoswch fod cyflymiad y gronyn, pan fydd  $x \geq 0.5$ , yn  $98(0.6 - x)$ . Diddwythwch, pan fydd  $x \geq 0.5$ , fod y mudiant yn harmonig syml. Darganfyddwch safle canol y mudiant harmonig syml a'r amser a gymer o'r canol i'r pwynt isaf a gyrhaeddir.

(iv) Darganfyddwch y buanedd mwyaf a'r dyfnder mwyaf a gyrhaeddir o dan  $A$ .

- 5 Mae gronyn  $P$  yn symud yn llorweddol ar hyd echelin- $x$  ac yn disgrifio mudiant harmonig syml gyda chanol  $O$ . Ar ennyd penodol, mae  $x = 0.04$  m a meintiau cyflymder a chyflymiad  $P$  yw 0.2 ms<sup>-1</sup> ac 1 ms<sup>-2</sup> yn ôl eu trefn.

Darganfyddwch (i) gyfnod y mudiant,

(ii) osgled y mudiant.

Ar amser  $t = 0$  eiliad mae'r gronyn yn mynd trwy  $O$  i gyfeiriad  $x$  cynyddol.

Darganfyddwch (iii)  $x$  ar unrhyw amser wedyn,

(iv) y gwerth positif lleiaf ar gyfer  $t$  (yn gywir i ddau le degol) pan fydd  $x = 0.4$  m.

Cynhyrchir y mudiant harmonig syml gan sbring elastig ysgafn, gyda'r naill ben ynghlwm wrth  $P$  a'r pen arall wrth y pwynt  $x = -0.5$  m. O wybod bod màs  $P$  yn  $0.3$  kg, darganfyddwch fodwlws elastig y sbring.

- 6 Mae gronyn  $P$  sy'n symud ar hyd yr echelin  $x$  yn disgrifio mudiant harmonig syml gyda chyfnod  $\frac{2\pi}{\omega}$  ac osgled  $a$ , gyda'r tarddiad  $O$  yn y canol. O wybod

bod  $P$  ar  $x = a$  ar amser  $t = 0$ , ysgrifennwch fynegiad yn nhermau  $a$ ,  $\omega$  a  $t$  ar gyfer dadleoliad  $P$ , sef  $x$ , oddi wrth  $O$  ar unrhyw amser  $t$  wedyn.

Darganfyddwch, yn nhermau  $\omega$ , yr amser a gymer i  $P$  deithio

(i) o'r pwynt  $x = a$  yn syth i'r pwynt  $x = \frac{a}{2}$ ,

(ii) o'r pwynt  $x = \frac{a}{2}$  yn syth i'r pwynt  $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Buanedd  $P$  ar bwynt  $A$ , lle mae  $x = x_1$ , yw  $4b\omega$ . Buanedd  $P$  ar bwynt  $B$ , lle mae  $x = x_2$ , ( $x_2 > x_1$ ) yw  $3b\omega$ . O wybod bod  $AB = 7b$

(iii) dangoswch fod  $x_1 + x_2 = b$  a thrwy hyn darganfyddwch  $x_2$  yn nhermau  $b$ ,

(iv) darganfyddwch  $a$  yn nhermau  $b$ .

- 7 Mae silff lorweddol yn symud yn fertigol mewn mudiant harmonig syml ac yn gwneud 10 osgiliad cyfan mewn  $4\pi$  eiliad. Buanedd mwyaf y silff yw  $1 \text{ ms}^{-1}$ . Darganfyddwch osgled y mudiant.

O wybod bod gronyn bach, màs  $0.2$  kg, ar y silff, darganfyddwch werth mwyaf adwaith y silff ar y gronyn.

- 8 Darganfyddwch ddatrysiad yr hafaliad differol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 50x = 0$$

gydag  $x = 0.28$  a  $\frac{dx}{dt} = 0$  pan fydd  $t = 0$ .

Clymir gronyn  $P$ , màs  $0.2$  kg, wrth un pen i sbring elastig sydd â modwlws elastigedd  $10 \text{ N}$  a hyd naturiol  $1 \text{ m}$ . Clymir pen arall y sbring wrth bwynt sefydlog  $A$  ar blân llorweddol. Mae'r gronyn yn rhydd i symud ar linell lorweddol trwy  $A$  ond gwrthsefir ei fudiant gan rym sy'n gweithredu i

gyfeiriad dirgroes i'w fudiant a phan fydd buanedd  $P$  yn  $v \text{ ms}^{-1}$  y grym sy'n gweithredu yw  $0.4v \text{ N}$ .

Ar amser  $t = 0$  caiff y gronyn ei symud fel bod y sbring yn syth ac wedi'i estyn bellter o  $0.28 \text{ m}$ . Yna rhyddheir y gronyn o ddisymudedd. Dangoswch fod estyniad y sbring, sef  $x \text{ m}$ , yn bodloni'r hafaliad differol uchod.

Darganfyddwch hyd lleiaf y sbring yn y mudiant wedyn.

- 9 Clymir gronyn  $P$ , màs  $0.1 \text{ kg}$ , wrth un pen i sbring elastig ysgafn gyda hyd naturiol  $0.5 \text{ m}$ . Clymir pen arall y sbring wrth bwynt sefydlog  $O$ .

Mae'r gronyn yn hongian yn rhydd mewn cydbwysedd ar bwynt  $B$  lle mae  $OB = 0.598 \text{ m}$ .

(i) Darganfyddwch fodwlws elastig y sbring.

Ar amser  $t = 0$  caiff y gronyn ei dynnu i lawr i bwynt  $0.1 \text{ m}$  yn fertigol o dan  $B$  ac yna ei ryddhau o ddisymudedd. Dynodir dadleoliad  $P$  wedyn oddi wrth  $B$  ar amser  $t$  gan  $x \text{ m}$  ac anwybyddir gwrthiant aer.

(ii) Mynegwch, yn nhermau  $x$ , y grym a roddir gan y sbring.

(iii) Dangoswch fod  $\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0$ .

(iv) Darganfyddwch yr amser pan fydd  $P$  nesaf ar bellter o  $0.1 \text{ m}$  o dan  $B$ .

(v) Darganfyddwch fuanedd  $P$  pan fydd ar bellter o  $0.05 \text{ m}$  o dan  $B$ .

(vi) Heb wneud gwaith cyfrifo pellach, eglurwch pam y byddai'r ateb i (iv) yn wahanol pe rhoddid llinyn gyda'r un modwlws yn lle'r sbring.

- 10 Mae gronyn, màs  $0.2 \text{ kg}$ , yn symud mewn llinell syth gyda mudiant harmonig syml gydag osgled  $0.6 \text{ m}$  a chyfnod  $6$  eiliad.

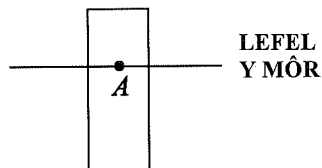
Ar amser  $t$  eiliad ar ôl iddo adael  $O$ , sef canol yr osgiliad, mae dadleoliad y gronyn oddi wrth  $O$  yn  $x \text{ m}$ .

(i) Darganfyddwch, yn nhermau  $t$ , fynegiad ar gyfer  $x$ .

(ii) Cyfrifwch y gwerth positif lleiaf ar gyfer  $t$  lle mae  $x = 0.3$ .

(iii) Darganfyddwch, yn nhermau  $t$ , fynegiad ar gyfer y gyfradd y mae'r grym cydeffaith sy'n gweithredu ar y gronyn yn gweithio.

11



Mae'r diagram yn dangos bwi silindrog, uchder  $2 \text{ m}$  a màs  $440 \text{ kg}$ , yn arnofio yn fertigol mewn môr llonydd, gyda'r pwynt a nodir gydag  $A$  ar y silindr ar

lefel y môr. Y grym hynofedd oherwydd y môr, pan fydd hyd y rhan o'r bwi sydd o dan lefel y môr yn  $d$  m, yw  $2750d$  N.

Darganfyddwch uchder  $A$  uwchben sylfaen y bwi pan fydd y bwi mewn cydbwysedd.

- (i) Yna caiff pen y bwi ei symud tuag i lawr trwy bellter o 0.2 m ar amser  $t = 0$  eiliad a'i ryddhau o ddisymudedd. Yn ystod y mudiant wedyn dynodir dadleoliad  $A$  i lawr o lefel y môr ar amser  $t$  eiliad gan  $x$  m.

A chymryd:

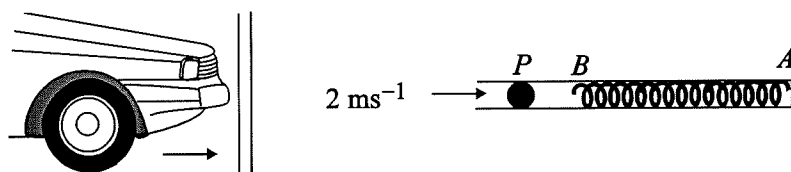
- (a) y gellir modelu mudiant y bwi gan fudiant gronyn â màs 440 kg ar graidd disgyrchiant y bwi, o dan weithrediad disgyrchiant a'r grym hynofedd;
- (b) nad yw mudiant y bwi yn effeithio ar lefel y môr, dangoswch fod

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -6.25x.$$

- (ii) Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer  $x$  yn nhermau  $t$ .
- (iii) Nodwch yr amser a gymer cyn i  $A$  ddychwelyd i lefel y môr am y tro cyntaf a buanedd mwyaf y bwi.
- (iv) Darganfyddwch yr amser a gymer i  $A$  fod ar ddyfnder 0.1 m o dan lefel y môr.

Mae llong sy'n mynd heibio yn tarfu ar lefel y môr ac felly ar amser  $t$  eiliad mae dadleoliad y bwi o dan lefel y môr llonydd yn  $0.4 \sin 2t$ . Unwaith eto dynodir dadleoliad  $A$  o dan lefel wreiddiol y môr llonydd gan  $x$  m. Darganfyddwch yr hafaliad differol a fodlonir gan  $x$  ond peidiwch â cheisio ei ddatrys.

12



Mae'r diagram ar y chwith uchod yn dangos car sy'n cael ei yrru tuag at wal er mwyn profi nodweddion bymper newydd o ran gweithredu fel sbring. Gellir modelu mudiant y car gan fudiant gronyn  $P$  a deflir, fel a ddangosir yn y diagram ar y dde, tuag at ben rhydd sbring  $AB$ , sef  $B$ . Mae'r sbring yn rhydd i lithro mewn tiwb llorweddol llyfn, gyda phen  $A$  yn sefydlog. Hyd naturiol y

sbring yw 0.3 m a'i fodwlws elastigedd yw 72 N. Màs y gronyn yw 0.6 kg ac fe'i teflir ar fuanedd  $2 \text{ ms}^{-1}$  tuag at  $B$ .

- (i) Dangoswch, ar amser  $t$  eiliad ar ôl i  $P$  daro  $B$ , a thra bo  $P$  mewn cysylltiad â  $B$ , fod cywasgiad y sbring, sef  $x$  m, yn bodloni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -400x.$$

- (ii) Darganfyddwch gywasgiad mwyaf y sbring a'r amser a gymer i gyrraedd y cywasgiad hwnnw.
- (iii) Darganfyddwch fynegiadau ar gyfer y dadleoliad a'r cyflymder yn nhermau  $t$ .
- (iv) Darganfyddwch yr amser a gymer i fuanedd  $P$  leihau i  $1 \text{ ms}^{-1}$  am y tro cyntaf.
- (v) Beth mae'r model yn ei ragfynegi o ran buanedd y car ar ôl amser  $\frac{\pi}{20}$  eiliad?

Ym mha ffordd y mae'r rhagfynegiad hwn yn afrealistig?

- 13 Yn y cwestiwn hwn, tybir y gellir modelu mudiant lefel y dŵr mewn aber harbwr fel osgiliad harmonig syml. Y cyfwng amser rhwng y penllanw a'r distyll yw 6.25 awr, ar y penllanw mae dyfnder y dŵr yn 10 m ac ar y distyll mae'n 7 m. Ysgrifennwch osgled a chyfnod (mewn oriau) yr osgiliad. Gan fesur amser  $t$  mewn oriau, gyda  $t = 0$  yn cyfateb i'r penllanw, darganfyddwch ddyfnder y dŵr yn aber yr harbwr ar amser  $t$ .

Ar ddiwrnod penodol mae'r penllanw olaf yn digwydd am 1910 awr. Darganfyddwch yr amser hwyrhaf, ar y diwrnod hwnnw, y mae cwch y mae arno angen dyfnder o 9.7 m o leiaf yn gallu dod i mewn i'r harbwr.

Darganfyddwch y gyfradd, mewn cm y munud, y byddai lefel y dŵr yn disgyn ar yr amser hwnnw.

- 14 Mae gronyn yn symud mewn llinell syth gyda mudiant harmonig syml, ac  $O$  yw canol yr osgiliadau. Pan fydd y gronyn 12 cm oddi wrth  $O$  ei fuanedd yw  $10 \text{ cms}^{-1}$  a phan fydd y gronyn 5 cm oddi wrth  $O$  ei fuanedd yw  $24 \text{ cms}^{-1}$ . Darganfyddwch ei osgled a chyfnod yr osgiliadau.

Os yw  $A$  ar y naill ochr o  $O$  a  $B$  ar yr ochr arall ac  $OA = 12 \text{ cm}$  ac  $OB = 5 \text{ cm}$ , darganfyddwch yr amser a gymer y gronyn i deithio yn syth o  $A$  i  $B$ .

- 15 Mae un pen i llyn elastig, gyda hyd naturiol  $a$ , yn sefydlog, sef  $A$ . Ar y pen arall, sef  $B$ , clymir gronyn gyda màs  $m$  ac mae'n hongian  $\frac{6a}{5}$  o dan  $A$ . Caiff y



- gronyn ei dynnu i lawr yn fertigol trwy bellter o  $\frac{a}{5}$ , ei ddal yn ddisymud ac yna ei ryddhau. Ysgrifennwch hafaliad mudiant Newton ar gyfer y gronyn pan fydd ar ddyfnder  $\frac{6a}{5} + x$  o dan  $A$  yn ystod y mudiant wedyn. Darganfyddwch  $x$  fel ffwythiant amser. Beth yw amser cyfnodol y mudiant?
- 16 Mae gwrthrych yn symud mewn llinell syth a rhoddir ei ddadleoliad  $x$  m ar amser  $t$  eiliad gan
- $$x = 3 \cos \pi t + \sin \pi t.$$
- Dangoswch fod y mudiant yn harmonig syml. Darganfyddwch gyfnod ac osgled y mudiant.
- 17 Hyd naturiol llinyn ysgafn  $AB$  sy'n ufuddhau i ddeddf Hooke yw 1 m ac mae pen  $A$  yn sefydlog. Pan gaiff gronyn gyda màs 2 kg ei glymu wrth y pen arall, sef  $B$ , a'i adael i hongian, estyniad y llinyn yw 0.14 m. Darganfyddwch fodwlws yr elastigedd, gan nodi'i unedau.
- Caiff y gronyn ei dynnu i lawr 0.2 m ymhellach ac yna ei ryddhau o ddisymudedd. Dangoswch fod mudiant y gronyn yn harmonig syml nes i'r llinyn ddod yn llac. Dangoswch hefyd fod y gronyn yn mynd trwy'r safle cydbwysedd ar ôl tua 0.19 eiliad a darganfyddwch fuanedd y gronyn ar yr amser hwnnw.
- 18 Mae gronyn  $P$ , màs  $m$ , yn gorwedd ar blân llorweddol llyfn. Clymir dau sbring llorweddol, sef  $AP$  a  $BP$ , wrth  $P$ , lle mae  $A$  a  $B$  yn bwyntiau sefydlog ac mae  $APB$  yn llinell syth. Hyd  $AB$  yw  $2a$ . Hyd naturiol y ddau sbring yw  $a$  a'u modwlws yw  $ka$ . Rhyddheir y system o ddisymudedd ar  $t = 0$  gydag  $AP = \frac{7a}{6}$  a  $BP = \frac{5a}{6}$ . O wybod bod hyd  $AP$  ar amser  $t$  yn  $a + y$ , deilliwch hafaliad mudiant  $P$ . Trwy hyn dangoswch fod y mudiant yn harmonig syml gyda chyfnod  $2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ .
- Trwy hyn darganfyddwch  $y$  yn nhermau  $t$ .
- 19 Mae un pen i sbring elastig  $AB$  yn sefydlog, sef  $A$ . Pan gaiff gronyn ei glymu wrth y sbring ar  $B$  a'i adael i hongian yn rhydd, estyniad y sbring yw 0.2 m. Caiff y màs ei dynnu i lawr yn fertigol trwy bellter bach eto a'i ryddhau o ddisymudedd. Dangoswch fod y mudiant wedyn yn harmonig syml gyda chyfnod  $\frac{2\pi}{7}$  eiliad.

- 20 Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml ar hyd yr echelin  $x$  gyda'r canol ar  $O$ . Pan fydd  $x = 3$  m mae maint buanedd (mewn  $\text{ms}^{-1}$ ) a chyflymiad (mewn  $\text{ms}^{-2}$ ) y gronyn yn hafal. O wybod hefyd fod buanedd uchaf y gronyn yn  $2 \text{ ms}^{-1}$ , dangoswch fod cyfnod ac osgled y mudiant yn  $2\sqrt{3}\pi$  s a  $2\sqrt{3}$  m yn ôl eu trefn.
- 21 Mae dau ronyn  $A$  a  $B$  yn symud mewn mudiant harmonig syml o amgylch  $O$  gyda chyfnod  $2\sqrt{3}\pi$  eiliad ac osgled  $2\sqrt{3}$  m. Rhyddheir gronyn  $A$  o ddisymudedd ar  $t = 0$  eiliad o'r pwynt eithaf  $P$  lle mae  $x = 2\sqrt{3}$  m. Rhyddheir gronyn  $B$  o bwynt  $P$  ar amser  $t = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$  eiliad. Dangoswch y bydd y gronynnau yn gwrthdaro  $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi$  eiliad ar ôl i  $B$  gael ei ryddhau. Darganfyddwch pa mor bell o  $O$  y bydd y gwrthdrawiad yn digwydd.
- 22 Clymir un pen i llinyn elastig ysgafn sydd â hyd naturiol  $a$  a modwlws  $2mg$  wrth bwynt sefydlog  $O$  a'r pen arall wrth ronyn, màs  $m$ . Gadewir i'r gronyn ddisgyn, sydd ar y dechrau yn ddisymud ar  $O$ . Darganfyddwch estyniad mwyaf y llinyn yn y mudiant a dangoswch y bydd y gronyn yn cyrraedd  $O$  eto ar ôl amser
- $$\sqrt{\frac{2a}{g}}(\pi + 2 - \tan^{-1} 2).$$
- 23 Mae gronyn sy'n cael ei hongian o bwynt sefydlog gerfydd llinyn elastig ysgafn â hyd naturiol  $l$ , yn gwneud osgiliadau fertigol gydag osgled  $a$  ( $< l$ ). Mae modwlws elastigedd y llinyn yn hafal i bwysau'r gronyn. Wrth i'r gronyn godi trwy'i safle cydbwysedd, mae'n codi o ddisymudedd ail ronyn, sydd hefyd â màs  $m$ , ac mae'r masau cyfunol yn dal i osgiliadu. Dangoswch fod osgled yr osgiliad hwnnw yn
- $$\sqrt{l^2 + \frac{a^2}{2}}.$$
- 24 Mae gwrthrych yn symud mewn llinell syth gyda mudiant harmonig syml. Pan fydd ei bellterau o'r pwynt canolog yn 3 m a 4 m, yn ôl eu trefn, ei fuaneddau cyfatebol yw  $5 \text{ ms}^{-1}$  a  $3.75 \text{ ms}^{-1}$ . Darganfyddwch osgled a chyfnod y mudiant. Dangoswch fod y gronyn yn cymryd  $\frac{2\pi}{15}$  eiliad i symud 2.5 m o'r

pwynt canolog. Ar ba amser ar ôl mynd trwy'r pwynt canolog y mae buanedd y gwrthrych yn hafal i hanner ei werth mwyaf?

- 25 Mae gwrthrych, mäs 2 kg, yn gorwedd ar lwyfan llorweddol.
- (i) Mae'r llwyfan yn disgrifio mudiant harmonig syml yn fertigol gydag osgled 0.3 m a chyfnod 2 eiliad. Darganfyddwch, yn nhermau  $g$ , y grym mwyaf a'r grym lleiaf ar y llwyfan oherwydd y gwrthrych.
- (ii) Mae'r llwyfan yn disgrifio mudiant harmonig syml yn llorweddol gyda chyfnod 10 eiliad. O wybod bod buanedd mwyaf y gwrthrych yn  $0.12 \pi \text{ ms}^{-1}$  a hefyd nad yw'n llithro ar y llwyfan, dangoswch fod cyfernod y ffrithiant yn fwy na  $\frac{0.024\pi^2}{g}$ .

- 26 Mae gronyn, mäs  $m$ , sy'n rhydd i symud ar yr echelin  $x$  yn cael ei atynnu tuag at y tarddiad  $O$  gan rym sydd mewn cyfrannedd union â phellter y gronyn oddi wrth  $O$  a chaiff ei wrthsefyll gan rym sydd mewn cyfrannedd union â'i fuanedd. Dangoswch, ar amser  $t$  eiliad, fod dadleoliad y gronyn oddi wrth  $O$ , sef  $x$  m, yn bodloni hafaliad differol ar ffurf

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2kn \frac{dx}{dt} + n^2x = 0,$$

lle mae  $k$  ac  $n$  yn gysonion positif.

Teflir y gronyn oddi wrth  $O$  a sylwir ei fod yn dychwelyd i  $O$  ar gyfyngau cyson. Darganfyddwch yr amod y mae angen i  $k$  ei fodloni.

Yr amser a gymer i deithio o'r naill bwynt o ddisymudedd enydaidd i'r llall yw  $\frac{\pi}{2}$  eiliad.

Dangoswch fod

$$n^2(1 + k^2) = 4.$$

Sylwir hefyd fod pellterau pwyntiau olynol lle mae'r gronyn yn dod i ddisymudedd, oddi wrth  $O$ , yn bodloni'r gymhareb 5 i 3. Darganfyddwch werthoedd rhifiadol  $k$  ac  $n$ .

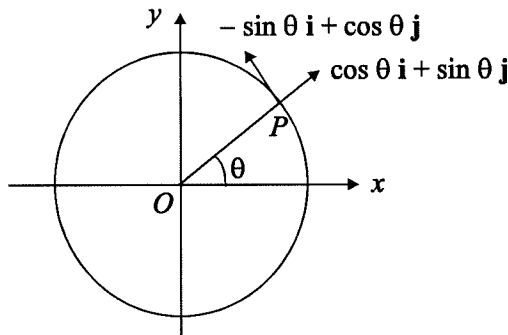
## Pennod 4

### Mudiant mewn Cylch

Ar ôl gweithio trwy'r bennod hon, dylech

- fod yn gyfarwydd â'r mynegiadau ar gyfer cydrannau cyflymder a chyflymiad ar gyfer mudiant mewn cylch,
- allu defnyddio'r mynegiadau uchod i ddatrys problemau sy'n cynnwys mudiant gronyn sy'n symud ar fuanedd cyson mewn cylch llorweddol; mae mudiant car ar drac ar oleddd yn un enghraifft o fudiant o'r fath,
- allu datrys problemau yn ymwneud â gronyn sy'n symud mewn cylch fertigol; mae problemau o'r fath yn darparu model syml o reidiau mewn ffair megis "gwneud dolen".

#### 4.1 Cinemateg Sylfaenol



Os yw gronyn  $P$  yn symud mewn cylch, radiws  $r$  a chanol  $O$  fel a ddangosir yn y diagram, yna diffinnir ei safle ar unrhyw amser yn llwyr gan ei gyfesurynnau  $x$  ac  $y$ .

Gellir mynegi'r rhain yn nhermau  $r$  a  $\theta$ , sef yr ongl rhwng radiws y cylch a'r echelin  $x$ , sy'n rhoi  $x = r \cos \theta$  ac  $y = r \sin \theta$ .

Gellir ysgrifennu fector safle'r gronyn fel

$$\mathbf{r} = r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}),$$

lle mae  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{j}$  yn fectorau unedol yn baralel i echelin  $x$  ac echelin  $y$  yn ôl eu trefn. Gall ongl  $\theta$  amrywio gyda'r amser  $t$  ac felly bydd  $\mathbf{r}$  hefyd yn amrywio gydag amser. Darganfyddir y cyflymder  $\mathbf{v}$  trwy ddifferu  $\mathbf{r}$  mewn perthynas â  $t$  (gan gofio bod  $r$  yn gyson), h.y.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt}(r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})) = r \left( \frac{d \cos \theta}{dt} \mathbf{i} + \frac{d \sin \theta}{dt} \mathbf{j} \right) \\ &= r \left( -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \mathbf{j} \right) = r \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Mae'r fector  $-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$  yn fector unedol (gan fod  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ), ac, fel a ddangosir yn y diagram, mae'n berpendicwlar i  $OP$  ac i'r cyfeiriad a ddangosir yn y diagram, hynny yw, mae i gyfeiriad  $\theta$  cynyddol.

Felly maint y cyflymder yw  $r \frac{d\theta}{dt} = r \dot{\theta}$ , sy'n rhoi'r buanedd  $v$  fel  $r |\dot{\theta}|$ ; gelwir  $\dot{\theta}$  yn gyflymder onglaid a  $|\dot{\theta}|$  yw buanedd onglaid y gronyn. Pan fesurir amser mewn eiliadau, unedau'r buanedd onglaid yw  $\text{rad s}^{-1}$ . Y confensiwn arferol yw bod cyfeiriad  $\theta$  cynyddol yn wrthglocwedd ac felly bod  $\dot{\theta}$  positif yn cyfeirio at gylchdro gwrthglocwedd a bod  $\dot{\theta}$  negatif yn cyfeirio at gylchdro clocwedd.

(Sylwer: Mae galw  $\dot{\theta}$ , sy'n sgalar, yn gyflymder onglaid yn symleiddiad er mwyn osgoi defnyddio fectorau yn ddiangen. Diffinnir cyflymder onglaid yn gywir fel  $\dot{\theta} \mathbf{k}$  lle mae  $\mathbf{k}$  yn fector unedol i gyfeiriad allan o'r dudalen. Cyfeiriad positif  $\mathbf{k}$  yw mudiant sgrifw sy'n cael ei rhoi yn fertigol ar y dudalen a'i throï yn wrthglocwedd. Mae gronyn sy'n disgrifio cylch yn y plân yn cylchdroi yn y bôn o amgylch echelin sy'n berpendicwlar i'r plân ac mewn gwirionedd mae'r fector unedol  $\mathbf{k}$  ar hyd echelin y cylchdro. Gyda mudiant mewn plân nid oes ond un echelin cylchdro a byddai cyflwyno  $\mathbf{k}$  yn tueddu i gymhlethu mynegiadau. Gyda phroblemau mwy cyffredinol fel mudiant pêl dennis yn yr awyr, pan fydd y mudiant yn cynnwys cylchdro o amgylch mwy nag un echelin, rhaid defnyddio ffurf fector.)

Ystyriwn yn gyntaf yr achos pan fydd gan  $P$  fuanedd cyson, hynny yw, mae gan  $\dot{\theta}$  y gwerth cyson  $\omega$ , h.y.

$$\dot{\theta} = \omega.$$

Os yw  $\theta = \alpha$  ar amser  $t = 0$  yna mae integru'r hafaliad uchod mewn perthynas â  $t$  yn rhoi  $\theta = \alpha + \omega t$ , ac felly bydd  $\theta$  wedi newid gan  $2\pi$ , h.y. bydd y gronyn wedi dychwelyd at ei safle gwreiddiol yn yr amser  $\frac{2\pi}{|\omega|}$ . Felly mae'r mudiant yn gyfnodol gyda chyfnod  $T$  lle mae

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{\text{buanedd onglaid}}.$$

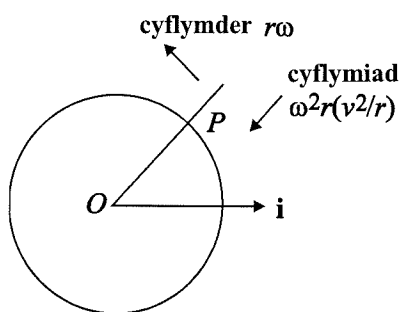
Pan fydd  $\dot{\theta}$  yn gyson, gellir differu'r mynegiad ar gyfer  $v$  eto mewn perthynas â  $t$  gan roi'r cyflymiad  $a$ , ac

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dt} \left( r \frac{d\theta}{dt} (\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \right) = -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \\ &= -r \omega^2 (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Y fector  $\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$  yw'r fector unedol ar hyd  $OP$  i gyfeiriad oddi wrth  $O$  ac felly cyfeirir y cyflymiad tua'r canol a'i faint yw  $\omega^2 r$ .

Gan fod y buanedd  $v$  yn hafal i  $r|\dot{\theta}| = r|\omega|$  gellir ysgrifennu maint y cyflymiad fel  $\frac{v^2}{r}$ .

**Crynodeb ar gyfer mudiant ar gyflymder onglaidd cyson (h.y. buanedd cyson)**



### Cyflymder

Mae unig gydran y cyflymder yn berpendicwlar i fector y radiws a'i werth i gyfeiriad  $\theta$  cynyddol yw  $r\omega$  (gweler y diagram).

### Cyflymiad

Mae'r unig gydran ar hyd fector y radiws, i gyfeiriad y canol, a'i faint yw  $\omega^2 r = \frac{v^2}{r}$  (gweler y diagram).

## **4.2 Mudiant ar fuanedd cyson mewn cylch llorweddol**

Byddwn nawr yn defnyddio'r canlyniadau uchod i drin problemau mudiant ar fuanedd cyson mewn cylch llorweddol. Yr hafaliad sylfaenol sy'n rheoli mudiant gronyn, mäs  $m$ , dan effaith grym  $F$  yw

$$ma = F,$$

Ile mae  $\mathbf{a}$  yn dynodi'r cyflymiad  $\left( \text{h.y. } \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right)$ .

Y dull cyffredinol o ddatrys yr hafaliad uchod yw ystyried ei gydrannau i gyfeiriadau penodol. Y cyfeiriadau amlycaf ar gyfer mudiant mewn cylch yw ar hyd y radiws ym mhlân y mudiant, yn berpendicwlar i'r radiws hwn ac yn berpendicwlar i'r plân. Gan fod y mudiant yn llorweddol nid oes cyflymiad yn berpendicwlar i'r plân ac felly bydd cyfanswm cydran fertigol y grymoedd sy'n gweithredu yn sero; hynny yw, mae cydrannau fertigol y grymoedd sy'n gweithredu mewn cydbwysedd.

Os yw cydran cyfanswm y grymoedd sy'n gweithredu i gyfeiriad y canol yn cael ei dynodi gan  $F_r$ , yna oddi wrth y canlyniadau yn yr adran flaenorol, mae

$$m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r} = F_r,$$

Ile mae  $v$  yn dynodi buanedd y gronyn ac  $\omega$  yn dynodi ei fuanedd onglaid.

Nid oes cyflymiad yn berpendicwlar i fector y radiws ym mhlân y mudiant ac felly nid oes grym i'r cyfeiriad hwnnw. Dyma yn y bôn yw'r **dybiaeth fodlu** sylfaenol a wneir wrth dybio bod y mudiant ar fuanedd cyson mewn cylch llorweddol; h.y. bod cyfanswm y grym i gyfeiriad y mudiant yn sero. Yn y bôn mae mudiant o'r fath yn tybio nad oes gwrthiant ar hyd y llwybr.

Mae'n bosibl dehongli'r hafaliad uchod fel hafaliad cydbwysedd mewn stateg, lle mae'r grym tua'r canol, sef  $F_r$ , yn cael ei gydbwyso gan y grym "tuag allan", sef  $m\omega^2 r$ , y cyfeirir ato fel y grym "allgyrchol". Ni fyddwn yn defnyddio'r dull hwn gan ei fod braidd yn artiffisial ceisio trin Dynameg fel Stateg, gan fod Stateg, mewn gwirionedd, yn achos arbennig o Ddynameg! Yn y bôn mae grym allgyrchol yn gysyniad ffug, ond gellir ei ddefnyddio, o fod yn ddigon gofalus, i ddatrys problemau sy'n cynnwys mudiant mewn cylch. Fodd bynnag mae'n anodd cyffredinoli cysyniad grym allgyrchol i'r achos o fudiant anunffurf. Fel rheol mae'n well defnyddio deddf Newton ar gyfer pob problem mudiant heb ddrysu'r sefyllfa trwy gyflwyno grymoedd "ffug".

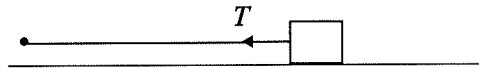
Er mwyn datrys unrhyw broblem sy'n cynnwys mudiant ar fuanedd cyson mewn cylch llorweddol yr unig bethau sydd angen eu gwneud yw

- ystyried cydbwysedd fertigol,
- cyfrifo maint y grym  $F_r$  sy'n gweithredu tua'r canol ac yna defnyddio'r hafaliad uchod.

Mae'r enghreifftiau canlynol yn dangos yr egwyddorion hyn.

#### Enghraifft 4.1

Clymir gronyn, màs 1.5 kg, wrth un pen i llyn ysgafn, hyd 0.2 m, a gwneir iddo ddisgrifio cylch, ar fuanedd cyson, ar fwrdd llorweddol llyfn. Bydd y llyn yn torri pan fydd y tyniant ynddo yn fwy na 2.7 N. Darganfyddwch fuanedd onglaid mwyaf y gronyn.



Mae'r sefyllfa fel yr hyn a ddangosir yn y diagram lle gwelir mai'r unig rym rheiddiol sy'n gweithredu ar y gronyn yw'r tyniant, a ddynodir gan  $T$  N. Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

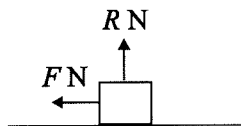
$$1.5 \times 0.2 \omega^2 = T,$$

lle dynodir y cyflymder onglaid gan  $\omega$  rad s<sup>-1</sup>.

Gwerth mwyaf y tyniant yw 2.7 N, sy'n golygu mai'r gwerth mwyaf ar gyfer  $\omega^2$  yw 9 ac felly y buanedd onglaid mwyaf yw 3 rad s<sup>-1</sup>.

#### Enghraifft 4.2

Rhoddir gronyn, màs 0.2 kg, ar bellter o 0.3 m o ganol bwrdd tro sy'n gallu cylchdroi o amgylch echelin fertigol trwy ei ganol. O wybod bod y cyfernod ffrithiant rhwng y gronyn a'r bwrdd tro yn 0.25, darganfyddwch y buanedd onglaid cyson mwyaf y gall y bwrdd tro gylchdroi heb i'r gronyn lithro.



Mae'r bwrdd tro yn rhoi adwaith normal  $R$  N a grym ffrithiannol  $F$  N ar y gronyn. Gan fod y gronyn yn symud ar fuanedd onglaid cyson mae cyfanswm y grym llorweddol sy'n berpendicwlar i'r radiws yn sero, oherwydd mai'r unig rymoedd a allai weithredu yw ffrithiant a gwrthiant aer. Felly, a chymryd y gellir anwybyddu gwrthiant aer, mae'r grym ffrithiannol sy'n berpendicwlar i'r radiws yn sero. Felly mae'r grym ffrithiannol yn gweithredu yn rheiddiol fel a ddangosir yn y diagram.

Mae cydrannu'n fertigol yn rhoi

$$R = 0.2 \times 9.8 = 1.96,$$

a hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$0.2 \omega^2 \times 0.3 = F,$$

lle dynodir y buanedd onglaid gan  $\omega$  rad s<sup>-1</sup>.



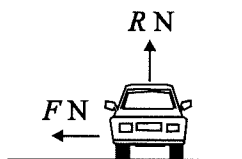
Mae gwerth mwyaf  $F = 0.25R = 0.49$  ac felly mae gwerth mwyaf  $\omega$  yn bodloni

$$0.06\omega^2 = 0.49,$$

sy'n rhoi'r gwerth mwyaf ar gyfer y buanedd onglaid fel  $2.9 \text{ rad s}^{-1}$ .

#### **Enghraifft 4.3**

Mae car yn symud heb sglefrio ar fuanedd cyson o  $25 \text{ ms}^{-1}$  mewn cylch llorweddol â'i radiws yn  $125 \text{ m}$ . A chymryd nad oes ffrithiant yn gweithredu i gyfeiriad y mudiant, darganfyddwch werth lleiaf y cyfernod ffrithiant.



Y grymoedd sy'n gweithredu ar y car yw, fel a ddangosir yn y diagram, y grym ffrithiannol  $F \text{ N}$  sy'n gweithredu tua chanol y cylch a'r adwaith fertigol  $R \text{ N}$ . Tybir bod màs y car yn  $m \text{ kg}$ .

Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$m \frac{25^2}{125} = F.$$

Mae cydrannu'n fertigol yn dangos bod

$$R = 9.8 m.$$

Gan fod  $F \leq \mu R$  mae'n dilyn bod

$$\frac{25^2}{125} \leq \mu 9.8,$$

$$\text{h.y.} \quad \mu \geq 0.51.$$

#### **Enghraifft 4.4**

Darganfyddwch y buanedd mwyaf y gallai car yrru o amgylch y cylch yn yr enghraifft flaenorol pe bai'r cyfernod ffrithiant yn  $0.3$ .

Gan ddefnyddio'r un diagram a'r un nodiant, hafaliad rheiddiol y mudiant nawr yw

$$m \frac{v^2}{125} = F,$$

lle dynodir y buanedd gan  $v \text{ ms}^{-1}$ .

Nid yw'r mynegiad ar gyfer  $R$  wedi newid ac mae'r amod  $F \leq 0.3 R$  yn dangos bod  $v \leq 19.17$  ac felly ni all y buanedd mwyaf fod yn fwy na  $19.17 \text{ ms}^{-1}$ .

### Enghraifft 4.5

Clymir un pen i llyn elastig ysgafn gyda hyd naturiol 0.3 m wrth bwynt sefydlog  $O$  ar fwrdd llorweddol llyfn a chlymir gronyn, màs 0.25 kg, wrth y pen arall. Gwneir i'r gronyn ddisgrifio cylch gyda radiws 0.4 m a chanol  $O$  ar y bwrdd, yn teithio ar fuanedd cyson  $5 \text{ ms}^{-1}$ .

Darganfyddwch fodwlws elastigedd y llinyn.

Yr un sefyllfa yw hon yn union â'r un a ddangosir yn y diagram yn Enghraifft 4.1, lle gwelir mai'r unig rym llorweddol sy'n gweithredu yw tyniant a ddynodir gan  $T \text{ N}$ .

Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$0.25 \times \frac{5^2}{0.4} = T,$$

sy'n rhoi  $T = 15.63$ .

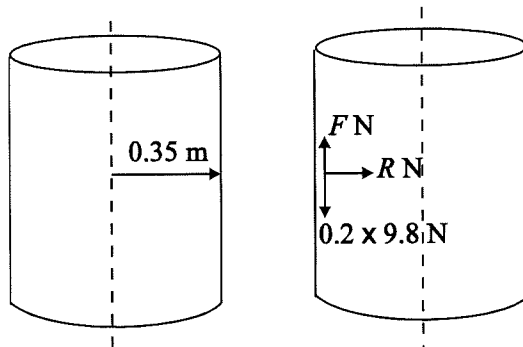
Os dynodir y modwlws gan  $\lambda \text{ N}$  yna, yn ôl deddf Hooke, mae  $T = \frac{\lambda \times 0.1}{0.3}$  ac felly  $\lambda = 46.9$ .

### Enghraifft 4.6

Mae'r diagram ar y chwith yn dangos silindr crwn gwag gyda radiws 0.35 m sy'n cylchdroi o amgylch ei echelin gan wneud un cylchdro pob eiliad. Mae gronyn â màs 0.2 kg ar du mewn y silindr yn aros yn sefydlog mewn perthynas â'r silindr trwy'r mudiant.

Darganfyddwch werth lleiaf y cyfernod ffrithiant rhwng y gronyn a'r silindr.

(Dyma fodel wedi'i symleiddio o reid arbennig mewn ffair ac o'r mudiant yn y "wal angau".)



Dangosir y grymoedd sy'n gweithredu ar y gronyn yn y diagram ar y dde gyda'r adwaith normal yn cael ei ddynodi gan  $R \text{ N}$  a'r grym ffrithiannol gan  $F \text{ N}$ . Gan fod y

buanedd onglaid yn gyson nid oes grym llorweddol yn gweithredu yn berpendicwlar i'r radiws ar y gronyn ac felly mae'r grym ffrithiant yn fertigol.

Mae un cylchdro yr eiliad yn awgrymu bod y gronyn yn cylchdroi trwy  $2\pi$  radian mewn un eiliad ac felly ei fuanedd onglaid yw  $2\pi \text{ rad s}^{-1}$ . Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$R = 0.2 \times 0.35(2\pi)^2 = 2.76.$$

Gan nad yw'r gronyn yn llithro i lawr, rhaid i gyfanswm y grym fertigol fod yn sero; h.y.

$$F = 0.2 \times 9.8 = 1.96.$$

Hefyd os nad oes llithro, mae  $F \leq \mu R$  ac felly  $\mu \geq 0.71$ .

#### **Ymarferion 4.1**

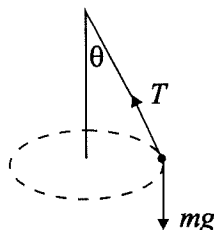
Mae cwestiynau 1 i 4 yn cyfeirio at ronyn, mäs  $m$  kg, sydd wedi'i glymu wrth llinyn ysgafn, a'i ben arall yn sefydlog ar bwynt  $O$ . Mae'r gronyn yn disgrifio cylch, ar fuanedd cyson  $v \text{ ms}^{-1}$ , ar blân llorweddol llyfn trwy  $O$ .

- 1  $m = 1.5$ , mae'r llinyn yn anestynadwy gyda hyd 2 m a  $v = 9$ .  
Darganfyddwch y tyniant yn y llinyn.
- 2  $m = 2$  ac mae'r llinyn yn anestynadwy gyda hyd 3 m ac yn gallu cynnal grym mwyaf o 400 N heb dorri. Darganfyddwch y nifer mwyaf o gylchdroeon yr eiliad sy'n bosibl heb dorri'r llinyn.
- 3  $m = 1.5$  ac mae'r llinyn yn elastig gyda hyd diestyn 0.6 m a modwlws 60N. Darganfyddwch yr estyniad os yw'r gronyn yn gwneud 1 cylchdro cyfan bob eiliad.
- 4 Mae'r llinyn yn elastig gyda hyd diestyn 0.3 m a, phan fydd y gronyn yn cael ei hongian arno, mae'n estyn pellter 0.02 m. Darganfyddwch gyfnod y cylchdro pan fydd y gronyn yn disgrifio cylch gyda radiws 0.34 m ar ben y llinyn.
- 5 Mae car sy'n teithio ar dir gwastad yn disgrifio cylch gyda radiws 80 m ar fuanedd o  $10 \text{ ms}^{-1}$ . Darganfyddwch werth lleiaf y cyfernod ffrithiant fel nad yw'r car yn llithro.
- 6 Mae car yn teithio ar  $10 \text{ ms}^{-1}$  ar dir llorweddol mewn cylch gyda radiws 30 m. Y cyfernod ffrithiant rhwng y teiars a'r tir yw 0.5. Dangoswch na fydd y car yn llithro.

- 7 Mae athletwr sy'n taflu morthwyl yn ei droi ar ben draw gwifren mewn cylch llorweddol gyda radiws 1.8 m. Os yw'r morthwyl yn gwneud un cylchdro yr eiliad ac yn pwysu 7 kg, darganfyddwch y tyniant yn y wifren.
- 8 Clymir gronyn, màs  $m$ , wrth un pen i llyn elastig gyda modwlws  $2mg$  a hyd naturiol  $a$ . Clymir pan arall y llyn wrth bwynt  $O$  ar fwrdd llorweddol llyfn. Mae'r gronyn yn symud ar y bwrdd mewn cylch gyda chanol  $O$  a radiws  $1.2a$ . Darganfyddwch fuanedd onglaid y gronyn.
- 9 Mae "wal angau" mewn ffair yn cynnwys silindr â'i radiws yn 8 m. O wybod bod y beic modur yn disgrifio cylchoedd llorweddol a bod y cyfernod ffrithiant rhwng teiars y beic modur a wal y silindr yn 0.9, darganfyddwch y buanedd sy'n golygu bod y beic modur yn aros ar y wal.
- 10 Mae gronyn, màs  $m$ , yn cael ei edafu ar roden lorweddol arw a all gylchdroi o amgylch echelin fertigol trwy bwynt  $O$  sydd yn y rhoden ei hun. Clymir y gronyn wrth  $O$  gan llyn elastig ysgafn gyda modwlws  $8mg$  a hyd naturiol  $a$ . O wybod bod y cyfernod ffrithiant yn 0.4, darganfyddwch y buanedd onglaid mwyaf lle mae'r rhoden yn gallu cylchdroi gyda'r gronyn yn sefydlog mewn perthynas â hi a chyda hyd y llyn yn  $1.2a$ .

### 4.3 Pendil conigol

Ceir math o broblemau sydd ychydig yn fwy cymhleth pan ystyrir mudiant gronyn mewn cylch llorweddol gyda radiws  $r$ , lle mae'r gronyn wedi'i glymu wrth ben llyn ysgafn gyda'r pen arall wedi'i glymu wrth bwynt sefydlog sy'n fertigol uwchben canol y cylch. Mae'r gronyn yn disgrifio cylch â buanedd onglaid cyson  $\omega$  ac felly mae'r llyn yn disgrifio arwyneb côn; oherwydd hynny ceir y term pendil conigol.



Dangosir y sefyllfa gyffredinol yn y diagram uchod lle mae'r llyn ar oled ar ongl  $\theta$  i'r fertigol. A chymryd bod màs y gronyn yn  $m$ , mae'r hafaliad ar gyfer cydbwysedd fertigol yn rhoi

$$T \cos \theta = mg,$$

ac mae cydran reiddiol deddf Newton yn rhoi

$$T \sin \theta = m\omega^2 r.$$

Mae'r hafaliadau hyn yn rheoli'r mudiant mewn unrhyw bendil conigol ond mae angen ychwanegu amodau eraill atynt, gan ddibynnu ar y math o broblem. Mewn

llawer o achosion, rhoddir hyd y llinyn, sef  $l$ , yn hytrach na radiws y cylch, ac felly mae angen defnyddio'r berthynas  $a = l \sin \theta$ . Hefyd, gall y llinyn fod yn elastig, ac felly ceir y tyniant oddi wrth yr hafaliad cydbwysedd fertigol a, thrwy hyn, hyd y llinyn.

Ceir amrywiad arall pan fydd gronyn wedi'i orfodi i symud ar arwyneb côn. Yn yr achos hwn, rhaid ystyried yr adwaith normal a, chyda chôn garw, yr adwaith tangiadol wrth osod yr hafaliadau sylfaenol.

Wrth benderfynu a yw mudiant penodol yn bosibl, yn aml rhaid defnyddio'r amod  $|\cos \theta| \leq 1$  neu  $|\sin \theta| \leq 1$ .

Ym mhob problem, y drefn sylfaenol y dylid ei dilyn yw nodi'r grymoedd yn eglur mewn diagram, darganfod hafaliad y cydbwysedd fertigol a hafaliad rheiddiol y mudiant. Os oes mwy nag un gronyn, dylid gwneud hyn ar gyfer pob gronyn. Dangosir y drefn hon yn yr enghreifftiau canlynol. Mae'n fwy diogel cydrannu yn fertigol ac yn rheiddiol na defnyddio cyfeiriadau eraill, er enghraifft ar hyd y llinyn ac yn berpendicwlar iddo, gan y gall cydrannu yn y cyfeiriadau eraill hyn gynyddu'r perygl o wneud camgymeriad gyda'r algebra.

#### **Enghraifft 4.7**

Clymir gronyn  $P$ , mäs 0.5 kg, wrth un pen i linyn anestynadwy ysgafn sydd â'i hyd yn 0.3 m, ac mae'r pen arall yn sefydlog ar bwynt  $O$ . Mae  $P$  yn disgrifio, ar fuanedd cyson, cylch llorweddol y mae ei ganol yn syth o dan  $O$ .

Yn ystod y mudiant mae'r llinyn ar oled ar ongl  $30^\circ$  i'r fertigol. Darganfyddwch yr amser a gymer i'r gronyn wneud un cylchdro cyfan.

Gellir defnyddio'r diagram blaenorol gyda  $\theta = 30^\circ$  a dynodir y tyniant, radiws y cylch a'r buanedd onglaid gan  $T$  N,  $r$  m ac  $\omega$  rad  $s^{-1}$  yn ôl eu trefn.

Mae cydrannu yn fertigol yn rhoi

$$T \cos 30^\circ = T \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.5 \times 9.8,$$

$$\text{sy'n rhoi} \quad T = \frac{9.8}{\sqrt{3}}.$$

Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$0.5 \omega^2 r = T \sin 30^\circ = \frac{1}{2} T.$$

Hefyd mae  $r = 0.3 \sin 30^\circ = 0.15$  ac felly  $T = 0.15 \omega^2$ .

Felly mae  $\omega^2 = \frac{9.8}{0.15 \times \sqrt{3}} = 37.72$ , sy'n rhoi  $\omega = 6.14$  a'r cyfnod  $\left( \text{sef } \frac{2\pi}{\omega} \right)$  felly

yw 1.02 eiliad.

### Enghraifft 4.8

Clymir gronyn, mäs 0.3 kg, wrth un pen i llinyn elastig ysgafn gyda modwlws 23.52 N a hyd naturiol 1 m. Clymir pan arall y llinyn wrth bwynt sefydlog  $O$  ac achosir i'r gronyn ddisgrifio, ar fuanedd cyson, gylch llorweddol y mae ei ganol yn syth o dan  $O$ . Hyd y llinyn yw 1.25 m yn ystod y mudiant hwn. Darganfyddwch fuanedd onglaid y mudiant a'r ongl rhwng y llinyn a'r fertigol tuag i lawr.

Gellir defnyddio'r diagram blaenorol eto ac unwaith eto dynodir y tyniant, radiws y cylch a'r buanedd onglaid gan  $T$  N,  $r$  m ac  $\omega$  rad s<sup>-1</sup> yn ôl eu trefn.

Mae cydrannu yn fertigol yn rhoi

$$T \cos \theta = 0.3 \times 9.8 = 2.94.$$

Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$0.3 \omega^2 r = T \sin \theta,$$

hefyd mae  $r = 1.25 \sin \theta$ , ac felly

$$T = 0.375 \omega^2.$$

Estyniad y llinyn yw 0.25 m ac felly mae deddf Hooke yn dangos bod

$$T = 0.25 \times 23.52 = 5.88$$

ac felly, oddi wrth hafaliad y cydbwysedd fertigol, mae  $\cos \theta = 0.5$  a  $\theta = 60^\circ$ .

Mae amnewid y gwerthoedd ar gyfer  $T$  a  $\theta$  yn hafaliad rheiddiol y mudiant yn rhoi  $\omega^2 = 15.68$  ac felly buanedd onglaid y gronyn yw 3.96 rad s<sup>-1</sup>.

### Enghraifft 4.9

Dangoswch, ar gyfer pendil conigol, gyda hyd y llinyn yn  $l$ , nad yw'r mudiant yn bosibl oni bai fod  $g \leq \omega^2 l$ .

Yr hafaliadau sylfaenol sy'n rheoli'r broblem yw, fel a gafwyd uchod,

$$T \cos \theta = mg,$$

a

$$T \sin \theta = m\omega^2 r.$$

Rhoddir y radiws  $r$  gan  $r = l \sin \theta$  ac felly hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$T = m\omega^2 l.$$

Mae dileu  $T$  yn dangos bod

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Felly, gan fod  $|\cos \theta| \leq 1$ , mae  $g \leq \omega^2 l$ , sy'n dangos felly bod angen buanedd onglaid lleiaf ar gyfer y pendil conigol.

#### Enghraifft 4.10

Darganfyddwch werth lleiaf modwlws yr elastigedd er mwyn i'r mudiant a ddisgrifiwyd yn Enghraifft 4.8 allu digwydd.

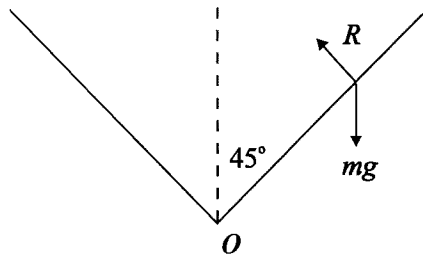
Os dynodir modwlws yr elastigedd gan  $\lambda$  N, yna mae deddf Hooke yn rhoi

$$T = \frac{\lambda}{4}$$

Ile mae  $\lambda$  yn dynodi'r modwlws elastig, ac felly mae amnewid yn  $T \cos \theta = 2.94$  yn rhoi  $\cos \theta = \frac{11.76}{\lambda}$ . Felly, gan fod  $|\cos \theta| \leq 1$ , mae  $\lambda \geq 11.76$ .

#### Enghraifft 4.11

Mae gronyn yn disgrifio cylch llorweddol gyda buanedd onglaidd cyson  $\omega$  ar arwyneb mewnol côn llyfn gyda hanner ongl  $45^\circ$ , wedi'i osod gyda'i fertig  $O$  tuag i lawr. Darganfyddwch yr uchder uwchben  $O$  lle mae'r mudiant yn digwydd.



Mae'r sefyllfa fel a ddangosir yn y diagram gydag  $R$  yn dynodi adwaith normal y côn. Mae cydbwysedd fertigol yn rhoi

$$R \sin 45^\circ = mg,$$

Ile mae  $m$  yn cynrychioli màs y gronyn.

Y grym rheiddiol tuag i mewn yw  $R \cos 45^\circ$  ac felly mae deddf Newton yn rhoi

$$R \cos 45^\circ = m\omega^2 r,$$

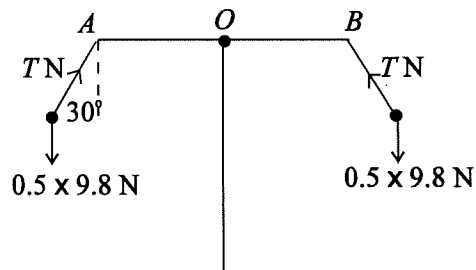
Ile mae  $r$  yn dynodi radiws y cylch a ddisgrifir gan y gronyn.

Mae dileu  $R$  yn rhoi  $\frac{g}{\omega^2 r} = \tan 45^\circ = 1$ .

Ar gyfer yr uchder  $h$  sydd ei angen, mae'n rhaid bod  $r = h \tan 45^\circ = h$  ac felly

$$h = \frac{g}{\omega^2}.$$

#### Enghraifft 4.12



Mae'r diagram yn dangos rhoden  $AB$ , hyd 3 m, sy'n rhydd i gylchdroi o amgylch echelin fertigol trwy ei chanol  $O$ . Clymir llinynnau ysgafn wrth  $A$  a  $B$ . Mae pob llinyn yn dal gronyn, mäs 0.5 kg, ar ei ben a hyd y llinynnau yw 1 m. Mae'r rhoden yn cylchdroi gyda buanedd onglaid cyson fel bod y ddau linyn ar oledd ar ongl  $30^\circ$  i'r fertigol tuag i lawr. Darganfyddwch y buanedd onglaid. (Mae'r sefyllfa hon yn fodel syml o'r cadeiriau hedfan a welir mewn reid ffair.)

Dangosir yn y diagram y grymoedd sy'n gweithredu ar un o'r gronynnau a dynodir y tyniant yn y llinyn, radiws y cylch a ddisgrifir gan y gronyn a'r buanedd onglaid gan  $TN$ ,  $r$  m ac  $\omega$  rad  $s^{-1}$ , yn ôl eu trefn.

Mae'r hafaliadau mudiant yr un fath ag yn Enghraifft 4.4 yn y bôn,

h.y. 
$$T \cos 30^\circ = T \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.5 \times 9.8,$$

a 
$$0.5\omega^2 r = T \cos 60^\circ = \frac{1}{2} T.$$

Yr unig wahaniaeth gwirioneddol yw bod  $r$  nawr yn  $1.5 + \sin 30^\circ = 2$ . Oddi wrth yr hafaliad cyntaf, ceir gwerth  $T$ , sef 5.66, ac mae amnewid y gwerth hwn ar gyfer  $T$  ac amnewid gwerth  $r$  yn yr ail hafaliad yn rhoi  $\omega^2 = 2.83$ , ac felly y buanedd onglaid yw  $1.68$  rad  $s^{-1}$ .

Ceir problemau sydd â mathemateg debyg iawn i fathemateg y pendil conigol wrth ymchwilio i oleddu ffyrdd er mwyn cynyddu'r buanedd mwyaf y gall ceir fynd o amgylch cornel. Trafodir y problemau hyn yn yr adran ganlynol.

## Ymarferion 4.2

Mae cwestiynau 1 i 5 yn cyfeirio at ronyn gyda mäs  $m$  kg sydd wedi'i glymu wrth ben llinyn ysgafn, gyda'r pen arall wedi'i glymu wrth bwynt  $O$ . Mae'r gronyn yn disgrifio, gyda buanedd cyson  $v$  ms $^{-1}$ , gylch llorweddol mewn plân llorweddol o dan  $O$ , gyda chanol y cylch yn syth o dan  $O$ .

- 1 Mae'r llinyn yn anestynadwy a'i hyd yw 1.2 m, ac mae ar oledd ar ongl  $\tan^{-1} \left( \frac{3}{4} \right)$  i'r fertigol tuag i lawr. Darganfyddwch  $v$ .
- 2  $m = 3$ , mae'r llinyn yn anestynadwy a'i hyd yw 1.6 m. Darganfyddwch y tyniant yn y llinyn pan fydd y gronyn yn disgrifio 3 chylchdro yr eiliad.
- 3 O wybod bod cyfnod un cylchdro yn 2 eiliad, darganfyddwch bellter y cylch a ddisgrifir gan y gronyn o dan  $O$ .
- 4  $m = 4$ , mae'r llinyn yn elastig a'i hyd naturiol yw 0.6 m. Darganfyddwch y modwlws, o wybod pan fydd y gronyn yn disgrifio 4 cylchdro yr eiliad fod hyd y llinyn yn 0.8 m.
- 5  $m = 0.5$ , mae'r llinyn yn elastig, gyda'i hyd naturiol yn 0.75 m, a'i fodwlws yn 100 N, ac mae ar oledd ar ongl  $30^\circ$  i'r fertigol tuag i lawr.



Darganfyddwch y cyfnod.

- 6 Mae côn gwag llyfn yn sefydlog gyda'i echelin fertigol a'i fertig tuag i lawr. Mae gronyn sy'n symud ar arwyneb mewnol y côn yn disgrifio cylch llorweddol gyda buanedd  $v$  ar uchder  $h$  uwchben y fertig.

Darganfyddwch  $v$  yn nhermau  $g$  ac  $h$ .

- 7 Gosodir powlen hemisffer lefn gyda radiws mewnol  $a$  a'i hymyl i fyny ac yn llorweddol. Mae gronyn yn disgrifio cylch llorweddol gyda radiws  $\frac{4a}{5}$  ar

arwyneb mewnol y fowlen. Darganfyddwch gyfnod cylchdro'r gronyn.

- 8 Clymir un pen i llyn anestynadwy ysgafn, hyd  $5a$ , wrth bwynt sefydlog  $A$  sydd bellter  $3a$  uwchben bwrdd llorweddol llyfn. Clymir gronyn, màs  $m$ , wrth ben arall y llyn ac mae'n cylchdroi ar fuanedd cyson mewn cylch, y mae ei ganol ar y bwrdd yn syth o dan  $A$ . Gan ddynodi'r adwaith rhwng y gronyn a'r bwrdd ag  $R$ , darganfyddwch y tyniant yn y llyn pan fydd (i)  $R = 0$ , (ii)  $R = \frac{3mg}{4}$ . Beth yw cymhareb yr amserau cylchdro yn y ddau achos?

- 9 Clymir gronyn, màs  $m$ , wrth un pen i llyn anestynadwy ysgafn gyda hyd  $a$ . Mae pen arall y llyn yn sefydlog ar bwynt  $A$  sydd ar uchder  $\frac{3a}{5}$  uwchben

bwrdd llorweddol llyfn. Caiff y gronyn ei ddal ar y bwrdd gyda'r llyn yn dynn a'i daflu ar hyd y bwrdd fel ei fod yn symud ar fuanedd  $v$  mewn cylch. Mae canol y cylch yn syth o dan  $A$ .

Dangoswch fod adwaith y bwrdd ar y gronyn yn  $m \left( g - \frac{15v^2}{16a} \right)$ .

- 10 Mae côn crwn ag ongl hanner fertigol  $\alpha$  yn sefydlog gyda'i echelin yn fertigol a'i fertig,  $A$ , isaf. Mae gronyn  $P$  gyda màs  $m$  yn symud ar arwyneb mewnol llyfn y côn. Clymir y gronyn wrth  $A$  gan llyn anestynadwy ysgafn gyda hyd  $a$ . Mae'r gronyn yn symud mewn cylch llorweddol ar fuanedd cyson  $v$  a chyda'r llyn yn dynn. Darganfyddwch yr adwaith a roddir ar y gronyn gan y côn.

Darganfyddwch hefyd y tyniant yn y llyn a darganfyddwch yr amod sy'n rhaid i  $\frac{v^2}{ga}$  ei fodloni er mwyn i'r mudiant fod yn bosibl.

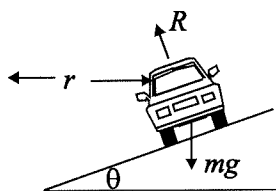
- 11 Clymir gronyn gan ddau llyn anestynadwy ysgafn sydd â'r un hyd wrth ddau bwynt  $A$  a  $B$ , gyda phellter  $a$  rhyngddynt ac  $A$  yn syth uwchben  $B$ . Mae'r gronyn yn disgrifio cylch llorweddol, gyda'i ganol ar  $AB$ , ar fuanedd onglaid cyson  $\omega$ .

Dangoswch fod  $\omega^2 > \frac{2g}{a}$  a darganfyddwch gymhareb y tyniannau yn y

llynynau pan fydd  $\omega^2 = 9\frac{g}{a}$ .

#### 4.4 Goleddu ffyrdd a thraciau

Bydd gan gar neu drên sy'n symud o amgylch cornel gron ar ffordd neu drac llorweddol gyflymiad tuag at ganol y gornel ac felly mae'n rhaid bod grym yn gweithredu ar y car tuag at ganol y gornel. Prif achos grym o'r fath yw ffrithiant. Felly, ar ffyrdd cymharol lyfn mae'r grym hwn yn fach a chan fod y grym mewn cyfrannedd â sgwâr y buanedd mae'r buanedd y mae'r car yn gallu teithio o amgylch cornel heb lithro hefyd yn gymharol fach. Rhoddir cyfrifiad nodweddiadol yn Enghraifft 4.4. Fodd bynnag, os yw'r ffordd wedi'i goleddu, mae gan adwaith y ffordd gydran i'r cyfeiriad tua'r canol ac mae'r buanedd mwyaf posibl yn cynyddu. Felly, mae goleddu cornel yn cynyddu'r buanedd mwyaf y gellir teithio o'i hamgylch. Defnyddir yr egwyddor hon hefyd wrth hedfan lle mae awyren yn goleddu ei hadenydd wrth droi.



Mae'r diagram yn dangos cerbyd, màs  $m$ , ar gornel sydd wedi'i goleddu ar ongl  $\theta$  i'r llorwedd, a thbyir bod y cerbyd ar bwynt ar y ffordd sy'n golygu ei fod yn symud mewn cylch llorweddol â'i radiws yn  $r$ . Gellir dangos gan ddefnyddio modelau syml o rollo, gyda cherbyd yn teithio ar ffordd ar fuanedd cyson, nad oes ffrithiant ar y teiars i gyfeiriad y mudiant. Tybiwn hefyd nad oes ffrithiant yn gweithredu ar hyd llinell goled mwyaf y llethr, ac felly y grymoedd sy'n gweithredu ar y cerbyd yw'r adwaith normal  $R$  a'r grym disgrychiant  $mg$  yn fertigol tuag i lawr.

Cydran reiddiol  $R$  yw  $R \sin \theta$  ac felly hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$R \sin \theta = m \frac{v^2}{r}.$$

Mae cydrannu yn fertigol yn rhoi

$$R \cos \theta = mg.$$

Mae dileu  $R$  yn rhoi  $v^2 = gr \tan \theta$ .

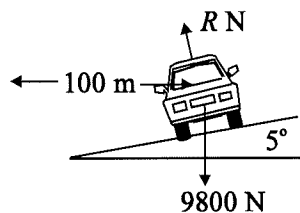
Gelwir y gwerth a roddir gan yr hafaliad hwn ar gyfer  $v$  yn fuanedd "hunanlywio" oherwydd yn ddamcaniaethol petai'r llyw wedi'i osod yn gywir, byddai cerbyd sy'n teithio ar y buanedd hwn yn troi o amgylch y gornel heb fod angen troi'r llyw. Yr ymarfer presennol yw goleddu corneli (mae peirianwyr traffig yn ei alw yn dra-dyrchafiad) yn y fath fodd fel bod y cerbyd "hunanlywio" yn teithio ar fuanedd cyfartalog y cerbydau sy'n defnyddio'r ffordd.

Mae'r syniad o ddefnyddio goleddu er mwyn osgoi grym ochrol (h.y. grym i'r ochr) hefyd yn bwysig wrth gynllunio rheilffyrdd. Gan fod olwynion trenau yn fflans mae grym ochrol yn cael ei drosglwyddo i rym ar y rheilen ac yn amlwg mae'n fuddiol lleihau'r grym hwn. Wrth gynllunio rheilffyrdd creir goledau trwy osod y rheilen allanol ychydig bach yn uwch na'r rheilen fewnol.

Pan fydd cerbyd yn teithio'n gynt na'r buanedd "hunanlywio", mae angen grym ychwanegol sy'n gweithredu tuag i mewn. Darperir hwn gan ffrithiant, y cyfyngir ar ei faint gan werth y cyfernod ffrithiant. Yn ymarferol, mae angen darganfod y cyfernod hwn oddi wrth ddata empirig, a defnyddir y data hyn i adeiladu goledau ar gorneli yn y fath fodd fel y gellir teithio o amgylch cornel yn ddiogel os cedwir dan ryw fuanedd penodol. Dangosir cyfrifiadau nodweddiadol yn Enghreifftiau 4.17, 4.18 a 4.19. Ni ddisgwylir i chi wybod y canlyniad  $v^2 = gr \tan \theta$  ac fel rheol disgwylir i chi ei ddeillio mewn arholiad. Mae'n debyg na fyddai ei ddyfynnu heb ei ddeillio yn ennill llawer o farciau. Byddwn yn ei ddeillio yn rhai o'r enghreifftiau canlynol, ond weithiau, er mwyn osgoi ailadrodd, byddwn yn ei ddyfynnu.

#### **Enghraifft 4.13**

Darganfyddwch y buanedd pan na fyddai car, màs 1000 kg, sy'n symud mewn cylch llorweddol â radiws 100 m ar ffordd ar oledd ar ongl  $5^\circ$ , yn profi unrhyw rym ochrol.



Gan nad oes grym ochrol, yr unig rymoedd sy'n gweithredu ar y car yw'r adwaith normal  $R$  N a'r grym disgyrchiant fertigol  $9800$  N, fel a ddangosir yn y diagram.

Mae cydrannu yn fertigol yn rhoi

$$R \cos 5^\circ = 9800.$$

Os dynodir y buanedd gan  $v \text{ ms}^{-1}$ , yna hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$1000 \frac{v^2}{100} = R \sin 5^\circ.$$

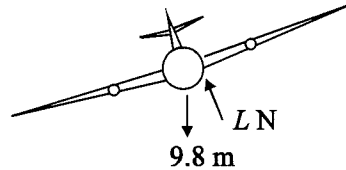
Mae dileu  $R$  yn rhoi  $v^2 = 980 \tan 5^\circ$ ,

ac felly y buanedd yw  $9.26 \text{ ms}^{-1}$ .

Mae'n amlwg bod hwn yn achos arbennig o'r fformiwla gyffredinol ond, fel a nodwyd uchod, mae'n syniad da dod i arfer ei ddeillio o egwyddorion cyntaf. Dylid sylwi hefyd y ceid yr un canlyniad waeth beth fo màs y car.

#### Enghraifft 4.14

Darganfyddwch ongl goled awyren sy'n troi gyda buanedd  $50 \text{ ms}^{-1}$  ar gylch gyda radiws  $120 \text{ m}$  yn y fath fodd fel, heblaw am ddisgyrchiant, nad oes grym yn gweithredu ar yr awyren heblaw'r codiant sy'n gweithredu yn berpendicwlar i'r adenydd. Yn y sefyllfa hon, nid oes tuedd i sgelfrio. Ongl y goled yw'r ongl rhwng y llorwedd a phlân yr adenydd.



Os tybir bod màs yr awyren yn  $m \text{ kg}$ , yna yr unig rymoedd sy'n gweithredu arni yw'r rhai a ddangosir yn y diagram, h.y. y codiant  $L \text{ N}$  a'r pwysau  $9.8 \text{ m N}$ .

Mae cydrannu yn fertigol yn rhoi

$$L \cos \theta = 9.8 m,$$

lle mae  $\theta$  yn cynrychioli ongl y goled.

Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$m \frac{50^2}{120} = L \sin \theta.$$

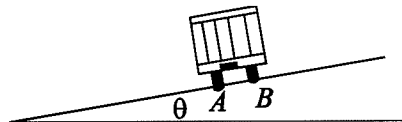
Mae dileu  $L$  yn rhoi

$$\tan \theta = \frac{50^2}{120 \times 9.8}$$

ac felly mae  $\theta$  tua  $64.8^\circ$ .

#### Enghraifft 4.15

Darganfyddwch faint y mae angen codi'r rheilen allanol fel na fydd tryc rheilffordd sy'n symud gyda buanedd cyson  $15 \text{ ms}^{-1}$  ar gylch llorweddol gyda radiws  $300 \text{ m}$  yn rhoi grym ochrol ar y rheilen. Y pellter rhwng y rheiliau yw  $1.48 \text{ m}$ .



Yn y bôn mae'r sefyllfa yn cyfateb i'r un yn y diagram gyda'r tryc ar blân ar oledd ar ongl  $\theta$  i'r llorwedd a'r olwynion mewn cysylltiad â'r plân ar  $A$  a  $B$  lle mae  $AB = 1.48$ .

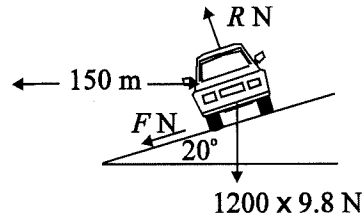
Darganfyddir ongl  $\theta$  o'r canlyniad cyffredinol uchod ac fe'i rhoddir gan

$$\tan \theta = \frac{15^2}{300 \times 9.8}.$$

Uchder  $B$  uwchben  $A$  yw  $AB \sin \theta = 0.11 \text{ m}$ .

#### Enghraifft 4.16

Mae car, màs 1200 kg, yn teithio ar fuanedd cyson o  $25 \text{ ms}^{-1}$  mewn cylch llorweddol gyda radiws 150 m ar drac ar oledd ar ongl  $20^\circ$  i'r llorwedd. Darganfyddwch y grym ochrol ar y car.



Yn yr achos hwn bydd yr adwaith  $R \text{ N}$  a'r grym ochrol (ffrithiannol yn y bôn)  $F \text{ N}$  yn gweithredu ar y car a dangosir y grymoedd hyn a'r pwysau yn y diagram.

Mae cydrannu yn fertigol yn rhoi

$$R \cos 20^\circ - F \sin 20^\circ = 1200 \times 9.8 = 11760.$$

Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$R \sin 20^\circ + F \cos 20^\circ = \frac{1200 \times 25^2}{150} = 5000.$$

Gellir darganfod  $F$  trwy luosi'r ail hafaliad â  $\cos 20^\circ$  a thynnu ohono yr hafaliad cyntaf wedi'i luosi â  $\sin 20^\circ$ , sy'n rhoi (gan ddefnyddio  $\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ = 1$ )

$$F = 5000 \cos 20^\circ - 11760 \sin 20^\circ = 675.$$

Felly y grym ochrol yw 675 N yn gweithredu i lawr y goled.

Gan ddefnyddio'r canlyniad  $v^2 = gr \tan \theta$ , y buanedd hunanlywio ar gyfer y goled hwn yw tua  $23 \text{ ms}^{-1}$  a chan fod y buanedd gwirioneddol yn fwy na hyn mae'r grym yn gweithredu i lawr y goled. Gyda buaneddau llai na  $23 \text{ ms}^{-1}$ , byddai'r grym yn gweithredu i fyny'r goled.

Mewn problemau fel hyn lle mae grym normal a grym ochrol yn gweithredu, mae dull arall, sy'n osgoi'r algebra wrth ddileu  $F$ , sef darganfod hafaliadau'r mudiant i lawr ac yn berpendicwlar i'r goled. Dangosir y dull hwn yn Enghraifft 4.18 ond, oni bai eich bod yn hyderus iawn ynglŷn â chydannu, mae'n debyg mai gwell fyddai cydrannu yn fertigol a defnyddio hafaliad rheiddiol y mudiant.

#### Enghraifft 4.17

Darganfyddwch y buanedd mwyaf lle byddai'r mudiant yn yr enghraifft flaenorol yn bosibl heb i'r car lithro i fyny'r goled, os yw'r cyfernod ffrithiant rhwng y car a'r goled yn 0.5.

Ni fydd yr hafaliad cyntaf wedi newid ac, os cymerir y buanedd fel  $v \text{ ms}^{-1}$ , bydd angen rhoi  $v$  yn lle 25. Yr hafaliadau felly yw

$$R \cos 20^\circ - F \sin 20^\circ = 1200 \times 9.8 = 11760,$$

ac

$$R \sin 20^\circ + F \cos 20^\circ = \frac{1200 \times v^2}{150} = 8v^2.$$

Gellir darganfod  $F$  fel o'r blaen, ac mae

$$F = 8v^2 \cos 20^\circ - 11760 \sin 20^\circ.$$

Nawr rhaid darganfod  $R$ . Gwneir hyn trwy luosi'r hafaliad cyntaf â  $\cos 20^\circ$  a'r ail hafaliad â  $\sin 20^\circ$  ac adio'r hafaliadau.

Mae hyn yn rhoi, wrth ddefnyddio  $\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ = 1$ ,

$$R = 8v^2 \sin 20^\circ + 11760 \cos 20^\circ.$$

Gellir darganfod y gwerth mwyaf ar gyfer  $v$  trwy ddefnyddio'r amod  $F \leq 0.5 R$

h.y.  $8v^2 \cos 20^\circ - 11760 \sin 20^\circ \leq 0.5 (8v^2 \sin 20^\circ + 11760 \cos 20^\circ),$

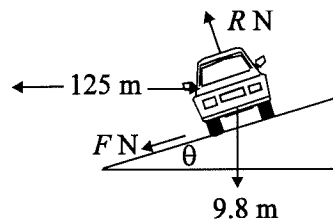
neu  $v^2 (8 \cos 20^\circ - 4 \sin 20^\circ) \leq 11760 \sin 20^\circ + 5880 \cos 20^\circ.$

Mae hyn yn rhoi'r buanedd mwyaf fel  $39.4 \text{ ms}^{-1}$ .

#### Enghraifft 4.18

Mae angen goleddu ffordd fel y gall car sy'n symud gyda buanedd  $25 \text{ ms}^{-1}$  mewn cornel gron gyda radiws 125 m deithio heb sgelfrio. Y cyfernod ffrithiant yw 0.3.

Darganfyddwch ongl leiaf bosibl y goled.



Tybir bod màs y car yn  $m \text{ kg}$  a'r grymoedd sy'n gweithredu, fel a ddangosir yn y diagram, yw'r adwaith normal  $R \text{ N}$ , y grym ffrithiannol  $F \text{ N}$  sy'n gweithredu i lawr y goledd a'r pwysau  $9.8 \text{ m N}$  sy'n gweithredu yn fertigol i lawr.

Cyflymiad y car yw  $\frac{25^2}{125} \text{ ms}^{-2} = 5 \text{ ms}^{-2}$  yn gweithredu yn llorweddol a chydran y

cyflymiad hwn yn berpendicwlar i'r goledd ac i'r un cyfeiriad ag  $R$  yw  $5 \sin \theta \text{ ms}^{-2}$ .

Yn yr un modd, cydran y cyflymiad i lawr y goledd ac i'r un cyfeiriad ag  $F$  yw

$5 \cos \theta \text{ ms}^{-2}$ . Cydran hafaliad y mudiant yn normal i'r goledd yw

$$R - 9.8 \text{ m} \cos \theta = 5 \text{ m} \sin \theta,$$

a chydran hafaliad y mudiant i lawr y goledd yw

$$F + 9.8 \text{ m} \sin \theta = 5 \text{ m} \cos \theta.$$

Mae cydrannu i lawr y goledd ac yn berpendicwlar iddo wedi osgoi'r dileu algebraidd a ddefnyddiwyd yn y ddwy enghraifft flaenorol.

Mae'r amod  $F \leq 0.3 R$  yn rhoi

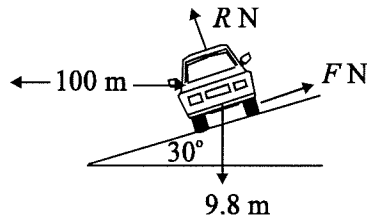
$$5 m \cos \theta - 9.8 m \sin \theta \leq 0.3 (9.8 m \cos \theta + 5 m \sin \theta),$$

h.y.  $11.3 \tan \theta \geq 2.06.$

Felly ongl leiaf y goled yw tua  $10.3^\circ$ .

#### Enghraifft 4.19

Dangoswch, os yw'r cyfernod ffrithiant yn 0.2, na fyddai'n bosibl i gar aros yn ddisymud ar ffordd ar oled y ongl  $30^\circ$  a darganfyddwch y buanedd lleiaf, gyda'r goled hwn, y gallai car symud mewn cylch llorweddol gyda radiws 100 m.



Y grymoedd sy'n gweithredu ar y car yw'r adwaith normal  $R N$ , y grym ffrithiannol  $F N$  sy'n gweithredu i lawr (neu i fyny) y goled a grym disgyrchiant, sef  $9.8 m N$  os cymerir màs y car fel  $m$  kg. Gan y tybir gyntaf fod y car yn ddisymud, tybir bod y grym ffrithiannol yn gweithredu i fyny'r goled gan na fyddai cydbwysedd yn bosibl fel arall.

Mae cydrannu i fyny'r goled ac yn berpendicwlar iddo yn rhoi

$$F = 9.8 m \sin 30^\circ$$

ac  $R = 9.8 m \cos 30^\circ.$

Felly  $\frac{F}{R} = \tan 30^\circ = 0.58.$

Mae hwn yn fwy na'r cyfernod ffrithiant ac felly byddai'r car yn llithro i lawr.

Os tybir bod y car yn symud ar fuanedd  $v \text{ ms}^{-1}$ , yna mae cymryd cydrannau hafaliad y mudiant i fyny'r goled ac yn berpendicwlar iddo yn rhoi, fel a ddangosir yn yr enghraifft flaenorol,

$$R - 9.8 m \cos 30^\circ = m \frac{v^2}{100} \sin 30^\circ,$$

a  $-F + 9.8 m \sin 30^\circ = m \frac{v^2}{100} \cos 30^\circ.$

Mae defnyddio'r amod  $F \leq 0.2R$  yn rhoi

$$9.8 \sin 30^\circ - \frac{v^2}{100} \cos 30^\circ \leq 0.2 \left( 9.8 \cos 30^\circ + \frac{v^2}{100} \sin 30^\circ \right)$$

a  $\frac{v^2}{100} (\cos 30^\circ + 0.2 \sin 30^\circ) \geq 9.8 (\sin 30^\circ - 0.2 \cos 30^\circ).$

Y buanedd lleiaf felly yw  $18.2 \text{ ms}^{-1}$ .

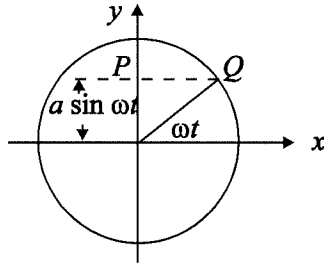
**Ymarferion 4.3**

- 1 Mae car, mäs 1000 kg, yn symud o amgylch trac crwn sy'n goleddu ar ongl  $\tan^{-1} 0.2$  i'r llorwedd. Mae'r car yn teithio mewn cylch â radiws 600 m ar fuanedd  $30 \text{ ms}^{-1}$ . Darganfyddwch y grym ochrol sy'n gweithredu arno.
- 2 Mae ffordd yn goleddu ar ongl  $10^\circ$  i'r llorwedd ar gornel gyda radiws 90 m. Ar ba fuanedd y dylai car deithio o amgylch y gornel fel na fyddai grym ochrol ffrithiannol rhwng y teiars a'r ddaear?
- 3 Ar ba ongl y dylid goleddu awyren sy'n hedfan ar  $200 \text{ ms}^{-1}$  er mwyn iddi symud, heb sgleftrio, mewn cylch llorweddol gyda radiws 2 km?
- 4 Mae trac crwn â radiws 300 m yn goleddu ar ongl  $45^\circ$ . O wybod bod y cyfernod ffrithiant rhwng yr olwynion a'r ddaear yn 0.4 darganfyddwch y buanedd mwyaf y gall car deithio o amgylch y trac heb lithro i'r ochr.
- 5 Mae cornel ar reilffordd ar ffurf arc cylch â radiws  $r$  ac mae'r trac yn goleddu ar ongl  $\alpha$  fel nad oes grym ochrol ar y rheiliau pan fydd y trêrn yn symud ar fuanedd  $v$ . Darganfyddwch y grym ochrol pan fydd trêrn, mäs  $m$ , yn mynd o amgylch y gornel ar fuanedd  $1.5v$ .
- 6 Y buanedd mwyaf y gall car deithio arno, heb sgleftrio, o amgylch cornel gron â radiws 120 m sydd ar oledd ar ongl  $10^\circ$  yw  $25 \text{ ms}^{-1}$ . Darganfyddwch y cyfernod ffrithiant.
- 7 Darganfyddwch y goledd sydd ei angen ar gyfer cornel â radiws 100 m er mwyn i gar deithio o'i hamgylch heb sgleftrio ar fuanedd uchaf o  $20 \text{ ms}^{-1}$ . Y cyfernod ffrithiant yw 0.25.
- 8 Mae car yn disgrifio cylch llorweddol â radiws 100 m ar  $18 \text{ ms}^{-1}$  ar drac sy'n goleddu ar ongl  $\alpha$  i'r llorwedd. Darganfyddwch  $\tan \alpha$  sy'n sicrhau nad oes grym ochrol yn gweithredu ar y car. Darganfyddwch, gyda'r gwerth hwn ar gyfer  $\alpha$ , y cyfernod ffrithiant lleiaf sy'n sicrhau y gall y car fynd o amgylch y trac heb lithro ar fuanedd o  $28 \text{ ms}^{-1}$ .
- 9 Gall car deithio ar ffordd lefel o amgylch cornel, radiws 50 m, ar fuanedd uchaf o  $15 \text{ ms}^{-1}$  heb lithro. A chymryd nad yw'r cyfernod ffrithiant yn newid, darganfyddwch oledd y ffordd er mwyn i'r car allu teithio o amgylch y gornel heb lithro ar fuanedd o  $20 \text{ ms}^{-1}$ .
- 10 Mae trac crwn â radiws 250 m yn goleddu ar ongl  $20^\circ$ . O wybod bod y cyfernod ffrithiant rhwng yr olwynion a'r llawr yn 0.3 darganfyddwch amrediad y buaneddau y gall car deithio o amgylch y trac heb lithro i'r ochr.



#### 4.5 Mudiant mewn cylch a mudiant harmonig syml

Ystyriwn nawr yn fyr iawn y berthynas y soniwyd amdani yn adran 3.1 rhwng mudiant mewn cylch a mudiant harmonig syml.



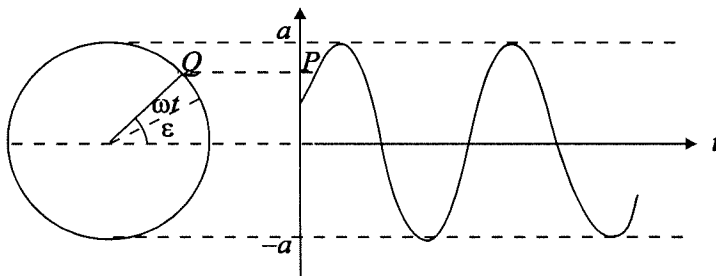
Mae'r diagram yn dangos pwynt  $Q$  sy'n disgrifio cylch â chanol  $O$  a radiws  $a$  i gyfeiriad gwrthglocwedd ar fuanedd onglaid  $\omega$ . Os dynodir yr ongl rhwng  $OQ$  a'r echelin  $x$  gan  $\theta$ , yna mae

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

Mae integru hwn mewn perthynas â  $t$  yn rhoi  $\theta = \omega t + c$ , lle mae  $c$  yn gysonyn. Os yw  $Q$  ar y pwynt  $\theta = 0$  pan fo  $t = 0$ , mae'r cysonyn yn sero ac felly  $\theta = \omega t$ . Mae'r perpendicwlar o  $Q$  i'r echelin  $y$  yn ei groestorri ar bwynt  $P$ , sef tafluniad  $Q$  ar yr echelin  $y$ . Felly cyfesuryn  $y$   $P$  yw  $a \sin \theta = a \sin \omega t$ . Felly mae pwynt  $P$  yn disgrifio mudiant harmonig syml, â chanol  $O$ , osgled  $a$  a chyfnod  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Mewn un uned o amser mae cynnydd o  $\omega$  ym maint ongl  $\theta$  yn ac felly dyma nifer y radianau a ddisgrifir ym mhob uned o amser, a dyna sut y ceir y term amledd cylchol naturiol.

Pe bai  $Q$  ar y pwynt sy'n cyfateb i  $\theta = \epsilon$  ar amser  $t = 0$ , yna byddai'r cysonyn  $c$  yn  $\epsilon$  ac yna  $\theta = \omega t + \epsilon$  ac yna byddai cyfesuryn  $y$   $P$  yn  $a \sin(\omega t + \epsilon)$ .



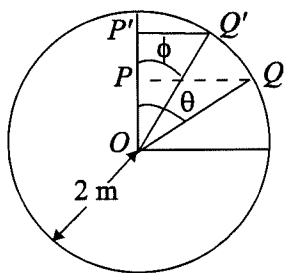
Dyma ffurf gyffredinol dadleoliad mewn mudiant harmonig syml ac felly mae mudiant tafluniad gronyn sy'n disgrifio cylch ar ddiamedr y cylch yn harmonig syml. Mae'r diagram yn dangos ymddygiad  $P$  wrth i  $Q$  ddisgrifio'r cylch. Yn yr un modd, gellir trosi unrhyw broblem sy'n cynnwys mudiant harmonig syml yn broblem sy'n

cynnwys mudiant mewn cylch ar fuanedd onglaid cyson. Yn y bôn, trosir y broblem o fod yn un sy'n cynnwys algebra a defnyddio datrysiadau hafaliadau differol i fod yn un geometregol ac efallai y byddai hyn yn fwy anodd i chi. Hefyd mae'r rhan fwyaf o gwestiynau arholiad wedi'u geirio yn y fath fodd fel na roddir marciau llawn oni bai eich bod yn defnyddio'r dulliau a ddisgrifiwyd yn y bennod flaenorol.

Dangosir y dull arall, sy'n fwy geometregol ei natur, yn yr enghraifft ganlynol.

#### Enghraifft 4.20

Mae gronyn yn disgrifio mudiant harmonig syml ag osgled 2 m a chyfnod 18 eiliad. Darganfyddwch yr amser a gymerir i deithio yn uniongyrchol o bwynt sydd 1 m o'r canol i un sydd  $\sqrt{3}$  m o'r canol.



Dynodir y ddau bwynt gan  $P$  a  $P'$ . Tafluniadau yw  $P$  a  $P'$  o'r pwyntiau  $Q$  a  $Q'$ , sydd ar y cylch â radiws 2 m, ar linell y mudiant. Mae  $\theta$  a  $\phi$  yn dynodi'r onglau rhwng llinell y mudiant ac  $OQ$  ac  $OQ'$ , yn ôl eu trefn.

$$OP = 2 \cos \theta = 1 \text{ ac } OP' = 2 \cos \phi = \sqrt{3}$$

ac felly 
$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ a } \phi = \frac{\pi}{6}.$$

Felly yr ongl rhwng  $OQ$  ac  $OQ'$  yw  $\frac{\pi}{6}$ .

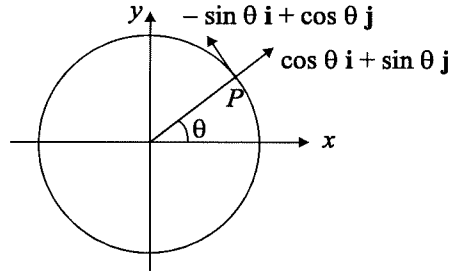
Mae hwn yn  $\frac{1}{12}$  yr ongl gyfan mewn cylch (h.y.  $2\pi$ ), ac felly yr amser a gymerir i deithio o  $P$  i  $P'$  yw deuddegfed rhan o'r cyfnod h.y. 1.5 eiliad.

#### 4.6 Cinemateg ar gyfer mudiant gyda buanedd newidiol

Dangoswyd yn adran 4.1 y rhoddir cyflymder gronyn, sef  $\mathbf{v}$ , sy'n symud mewn cylch gyda radiws  $r$ , gan

$$\mathbf{v} = r \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}),$$

lle mae  $\theta$ ,  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{j}$  yn cael eu diffinio yn 4.1 ac fe'u dangosir yn y diagram nesaf.



Darganfyddir y cyflymiad  $\mathbf{a}$ , fel yn 4.1, trwy ddifferu  $\mathbf{v}$  mewn perthynas â  $t$ . Yn yr achos hwn, fodd bynnag, nid yw  $\frac{d\theta}{dt}$  yn gyson ac mae angen cynnwys ei ddeilliad.

Felly

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \left( r \frac{d}{dt} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \right) \\ &= -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) + r \frac{d^2\theta}{dt^2} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}).\end{aligned}$$

Maint y term cyntaf uchod yw  $r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  ac mae ei gyfeiriad yn rheiddiol tua'r canol.

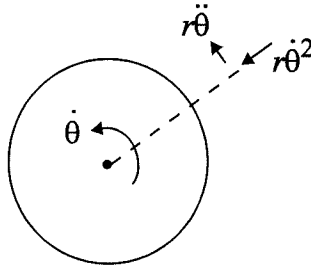
Maint yr ail derm yw  $r \frac{d^2\theta}{dt^2}$  ac mae ei gyfeiriad ar hyd y tangiad i gyfeiriad  $\theta$  cynyddol.

Hefyd mae 
$$r \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

Felly mewn mudiant mewn cylch, pan nad yw'r buanedd yn gyson, mae dwy gydran cyflymiad, sef

(i)  $r\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r}$  yn rheiddiol tua'r canol

a (ii)  $r\ddot{\theta} = \dot{v}$  ar hyd y tangiad i gyfeiriad  $\theta$  cynyddol.



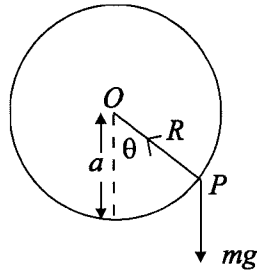
Defnyddir y mynegiadau hyn yn yr adran ganlynol i ymchwilio i broblemau sy'n cynnwys mudiant mewn cylch fertigol.

#### 4.7 Mudiant mewn cylch fertigol

Hyd yn hyn, yr unig broblemau yr ymchwiliwyd iddynt yw rhai lle mae'r unig rym ym mhlân y mudiant yn rheiddiol fel bod y buanedd onglaid yn aros yn gyson. Ystyriwn nawr ddosbarth o broblemau - y rhai sy'n cynnwys mudiant mewn cylch fertigol - lle nad yw'r buanedd onglaid yn gyson.

Problemau nodweddiadol y gellir eu modelu fel gronyn sy'n symud mewn cylch fertigol yw mudiant gronyn sy'n cael ei chwyrlio ar flaen llinyn (neu fwced o ddŵr sy'n cael ei chwyrlio mewn cylch fertigol) a mudiant car ar reid "ffigur-wyth" mewn ffair. Mae'r problemau yn debyg iawn yn fathemategol ond mae dehongliad y canlyniadau'n amrywio.

Darlunnir y dulliau a ddefnyddir trwy ddefnyddio, fel problem brototeip, problem mudiant gronyn sydd wedi ei edafu ar ddolen gron fertigol lefn o wifren.



Mae'r diagram yn dangos gwifren gron fertigol â chanol  $O$  a radiws  $a$ . Arni mae glain  $P$ , mäs  $m$ , â thwll trwy ei ganol fel ei fod yn gallu llithro ar y wifren. Dynodir yr ongl rhwng  $OP$  a'r fertigol i lawr gan  $\theta$ . Tybir bod y wifren yn llyfn ac felly mae'r unig rym y mae'n ei roi ar  $P$  yn rheiddiol ac â maint  $R$ ; yn y diagram dangosir hwn yn gweithredu yn rheiddiol tua'r canol. Yr unig rym arall sy'n gweithredu ar  $P$  yw grym disgrychiant sy'n gweithredu yn fertigol tuag i lawr; mae ganddo gydran  $mg \cos \theta$  sy'n gweithredu tuag allan a chydran  $mg \sin \theta$  sy'n gweithredu yn dangiadol i gyfeiriad  $\theta$  lleihaol. Cydrannau cyflymiad  $P$  yn rheiddiol tua'r canol ac yn dangiadol yw  $a\dot{\theta}^2$  ac  $a\ddot{\theta}$ .

Mae cydrannau rheiddiol a thangiadol deddf Newton yn rhoi

$$R - mg \cos \theta = m a \dot{\theta}^2,$$

$$m a \ddot{\theta} = -mg \sin \theta.$$

Yr ail hafaliad yw'r hafaliad differol sy'n cysylltu  $\theta$  â  $t$ , a'r cam cyntaf yw ceisio integru'r hafaliad hwn. Un dull yw lluosio dwy ochr yr hafaliad gyda  $\dot{\theta}$ , sy'n rhoi

$$m a \ddot{\theta} \dot{\theta} = -mg \sin \theta \dot{\theta}.$$

Hefyd

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} \quad a \sin \theta \dot{\theta} = - \frac{d \cos \theta}{dt}$$

ac felly hafaliad y mudiant yw

$$ma \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = mg \frac{d \cos \theta}{dt}.$$

Gellir integru'r hafaliad hwn, gan roi

$$\frac{1}{2} ma \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + \text{cysonyn}.$$

Ffordd arall o wneud yr integriad uchod yw defnyddio

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} \quad (\text{gan gymhwyso'r rheol gadwyn}), \\ &= \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} \end{aligned}$$

Os tybir bod buanedd  $P$  yn  $u$  (sef  $\dot{\theta} = \frac{u}{a}$ ) ar ei bwynt isaf, sef  $A$  (pan fydd  $\theta = 0$ ),

gellir darganfod y cysonyn trwy amnewid yn y mynegiad ar gyfer  $\dot{\theta}^2$ , sy'n rhoi

$$a^2 \dot{\theta}^2 = u^2 + 2ag(\cos \theta - 1).$$

Gellid cael yr hafaliad hwn hefyd trwy ddefnyddio cadwraeth egni. Dyma'r dull mwyaf uniongyrchol mewn gwirionedd, ac fe'i hystyrir isod.

Gellir amnewid gwerth  $\dot{\theta}$  yn yr hafaliad ar gyfer  $R$ , sy'n rhoi

$$R = \frac{mu^2}{a} + mg(3 \cos \theta - 2).$$

Mae'r problem sylfaenol wedi'i datrys bellach ac yn awr rhaid ei dehongli. Mae'r dehongliad yn amrywio yn ôl y math o problem ond cyn mynd ymhellach mae'n werth edrych ar sut y defnyddir cadwraeth egni.

### Cadwraeth egni

Gelli profi bod

$$\begin{array}{llllll} \text{Egni} & + & \text{Egni potensial} & + & \text{Egni elastig} & = & \text{Gwaith a wneir} \\ \text{cinetig} & & \text{oherwydd disgrychiant} & & (\text{os oes llinyn elastig}) & & \text{gan rymoedd eraill.} \end{array}$$

Rhoddir prawf ar gyfer mudiant mewn un dimensiwn yn  $M2$  ond mae'n bosibl profi'r canlyniad uchod trwy ddefnyddio'r egwyddor gwaith egni. Ni ddisgwylir i chi ddeillio prawf gan nad yw peth o'r gwaith mathemategol angenrheidiol wedi'i gynnwys yn eich cwrs.

Yn achos y glain ar y wifren, yr unig rym arall sy'n gweithredu yw'r adwaith. Mae'r wifren yn llyfn ac felly mae'r adwaith bob amser yn berpendicwlar i gyfeiriad y mudiant ac felly mae'r gwaith a wneir ganddo yn sero. Felly mae cyfanswm yr egni yn cael ei gadw.

Mae'r gwaith a wneir gan y tyniant mewn llinyn anestynadwy hefyd yn sero ac unwaith eto mae egni yn cael ei gadw.

Dychwelwn nawr at broblem y glain ar y wifren. Yr egni potensial, o gymryd fod yr egni potensial yn sero ar lefel canol y cylch, yw  $-mga \cos \theta$ . Yr egni cinetig yw  $\frac{1}{2}mv^2$ , lle mae  $v$  yn dynodi'r buanedd, ac felly mae cadwraeth egni yn rhoi

$$\frac{1}{2}mv^2 - mga \cos \theta = \text{cysonyn}.$$

Gan gofio bod  $v = |a\dot{\theta}|$ , dyma'r hafaliad a geir trwy integru hafaliad rheiddiol y mudiant. Mae defnyddio cadwraeth egni yn osgoi gorfod integru hafaliad y mudiant yn uniongyrchol.

### Dehongli canlyniadau

Y canlyniadau sylfaenol yw

$$a^2\dot{\theta}^2 = u^2 + 2ag(\cos \theta - 1),$$

ac

$$R = \frac{mu^2}{a} + mg(3 \cos \theta - 2).$$

Os amnewidir  $\theta = \pi$  yn yr hafaliad ar gyfer  $\dot{\theta}^2$  mae hyn yn rhoi ei werth ar y pwynt uchaf fel  $u^2 - 4ag$ . Os yw  $u^2 < 4ag$ , bydd y mynegiad hwn yn negatif, sy'n golygu na fydd y gronyn yn cyrraedd y pwynt uchaf ond y bydd yn osgiliadu o'r naill ochr i'r fertigol i'r llall trwy'r canol.

Mae pum problem sydd ychydig yn wahanol ac sy'n cynnwys mudiant mewn cylch fertigol: gronyn sy'n cael ei chwyrlïo ar flaen llinyn, gronyn sy'n symud ar du mewn neu du allan cylch llyfn, glain wedi'i dyllu a'i roi trwy wifren neu ronyn wedi'i glymu ar flaen rhoden denau (mae'r ddwy enghraifft olaf yn y bôn yn enghreifftiau o'r un broblem). Y prif wahaniaeth rhwng y problemau yw'r ffordd y mae'r mudiant yn torri i lawr (h.y. a yw'r llinyn yn dod yn llac neu yn torri ac a yw'r gronyn yn dod oddi ar y llwybr crwn). Mae problemau'r glain ar wifren a'r rhoden ychydig yn wahanol yn y ffaith na all y mudiant dorri i lawr oni bai bod y wifren neu'r rhoden yn torri.

### Gronyn ar y tu mewn i silindr

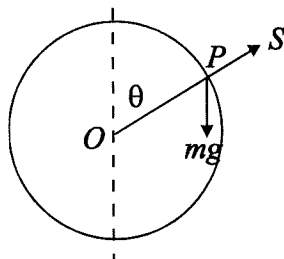
Yn achos gronyn y tu mewn i silindr bydd y mudiant fel a ddangoswyd yn y diagram uchod gyda'r adwaith  $R$  tua'r canol, ac felly bydd y mynegiad ar gyfer  $R$  yn bositif bob amser. Pan fydd  $\theta = \pi$ , mae  $R$  yn hafal i  $u^2 - 5ag$ . Os yw  $u^2 < 5ag$ , bydd y gronyn yn disgyn oddi ar y silindr a bydd y gronyn yn symud fel taflegryn am ychydig. Darganfyddir y gwerth gwirioneddol ar gyfer  $\theta$  lle mae'r system yn torri i lawr trwy roi  $R = 0$ .

### Gronyn ar llinyn anestynadwy

Mae mathemateg y broblem hon yr un fath â mathemateg y gronyn mewn silindr. Rhaid rhoi tyniant y llinyn, sef  $T$ , yn lle'r adwaith  $R$ . Bydd y llinyn yn dod yn llac pan fydd  $u^2 < 5ag$ , fel yn yr enghraifft uchod.

### Gronyn ar y tu allan i silindr

Bydd y grymoedd sy'n gweithredu ar ronyn ar y pwynt isaf ar du allan silindr i gyd tuag i lawr ac, fel y byddech yn ei ddisgwyl, mae'r gronyn yn disgyn i lawr. Felly, yn yr achos hwn, nid yw'n ddoeth taflu gronyn o'r pwynt isaf ar fuanedd  $u$  a rhaid defnyddio amodau dechreuol gwahanol. Gellid cael hafaliadau'r mudiant trwy roi  $-R$  yn lle  $R$  uchod ond, er mwyn cael rhagor o ymarfer, mae'n well dechrau eto.



Mae'r diagram yn dangos trychiad fertigol o silindr crwn â chanol  $O$  a radiws  $a$  y mae gronyn  $P$ , sydd â màs  $m$ , yn gallu symud arno. Dynodir yr ongl rhwng  $OP$  a'r fertigol tuag i fyny gan  $\theta$ . (Pan fydd  $OP$  yn llorweddol mae'r grym llorweddol sy'n gweithredu arno i gyfeiriad tuag allan ac mae ei gyflymiad llorweddol i gyfeiriad tuag i mewn. Mae'r sefyllfa hon yn amhosibl ac felly bydd y gronyn wedi cwmpo oddi ar y silindr cyn cyrraedd y safle hwn. Mae'n well defnyddio'r ongl â'r fertigol tuag i fyny gan y bydd  $\theta$  yn ongl lem bob amser.) Gan fod y silindr yn llyfn bydd adwaith y silindr yn rheiddiol tuag allan ac fe'i dynodir gan  $S$ .

Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$mg \cos \theta - S = m\ddot{\theta}^2.$$

Yr egni potensial (o gymryd fod yr egni potensial yn sero ar lefel  $O$ ) yw  $mga \cos \theta$ .

Mae cadwraeth egni yn rhoi

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga \cos \theta = \text{cysonyn}.$$

Os tybir bod buanedd y gronyn ar y top yn  $U$  ( $U^2 < ga$ ),

yna y cysonyn yw  $\frac{1}{2}mU^2 + mga$  ac felly mae

$$v^2 = U^2 + 2ga(1 - \cos \theta).$$

Gan ddefnyddio  $v = |a\dot{\theta}|$ , yr hafaliad hwn yw

$$a^2\dot{\theta}^2 = U^2 + 2ga(1 - \cos \theta).$$

Mae amnewid yn yr hafaliad rheiddiol yn rhoi

$$S = 3mg \cos \theta - 2mg - \frac{mU^2}{a}.$$

Mae amnewid  $\theta = 0$  yn yr hafaliad hwn ar gyfer  $S$  yn rhoi  $S = mg - \frac{mU^2}{a}$ , ac mae'r

cyfyngiad ar  $U$  yn golygu bod hyn yn bositif ac felly mae adwaith positif ar y pwynt uchaf ac ni fydd y gronyn yn hedfan oddi ar y silindr.

Petai  $U^2 > ga$ , yna byddai  $S$  yn negatif pan fydd  $\theta = 0$  a byddai'r gronyn yn hedfan oddi ar y silindr.

Pan fydd  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , bydd  $S$  yn negatif ac felly bydd y gronyn yn cwmpo oddi ar y silindr cyn cyrraedd lefel ei ganol, fel a ragfynegyd uchod. Darganfyddir y gwerth gwirioneddol ar gyfer  $\theta$  lle mae hyn yn digwydd trwy osod  $S = 0$  a datrys ar gyfer  $\theta$ ; mae hyn yn rhoi

$$\cos \theta = \frac{U^2}{3ga} + \frac{2}{3}.$$

### Datrys problemau

Y cam cyntaf, fel arfer, yw dangos mewn diagram y grymoedd sy'n gweithredu ac, yn arbennig, sicrhau (pan fydd yn berthnasol) eu bod i'r cyfeiriad sy'n gwneud synnwyr yn ffisegol (er enghraifft, mae'r tyniant mewn llinyn yn rheiddiol tua'r canol bob amser). Unwaith eich bod wedi cael y grymoedd, y cam nesaf yw ysgrifennu hafaliad rheiddiol y mudiant a'r hafaliad cadwraeth egni. Mae'n bwysig iawn defnyddio eich amodau dechreuol yn ofalus er mwyn darganfod y cysonyn yn yr hafaliad egni. Mewn llawer o achosion mae'n symlach defnyddio buanedd yn hytrach na buanedd onglaid, yn enwedig os rhoddir i chi wybodaeth am fuaneddau neu os gofynnir i chi ddarganfod buaneddau. Mewn achosion o'r fath, defnyddiwch y cyflymiad rheiddiol yn y ffurf  $\frac{v^2}{r}$ . Yna gellir defnyddio'r mynegiad a gafwyd ar gyfer  $\dot{\theta}^2$  neu  $v^2$  er mwyn mynegi'r grym rheiddiol yn nhermau  $\theta$ .

Ffordd arall yn lle defnyddio cadwraeth egni yw cael hafaliad tangiadol y mudiant a'i integru fel y gwnaed uchod. Anfantais y dull hwn yw eich bod yn debycach o wneud camgymeriadau.

Mewn problemau mwy anodd lle rydych yn ansicr a yw egni yn cael ei gadw (os cynhwysir ffrithiant er enghraifft) bydd yn rhaid i chi ddefnyddio hafaliad tangiadol y



mudiant a cheisio ei integru gan ddefnyddio  $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$ . Efallai y bydd arnoch

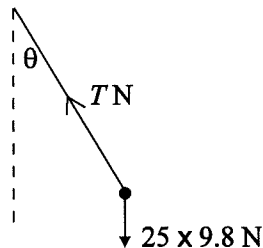
hefyd angen defnyddio'r hafaliad tangiadol pan fydd mwy nag un gronyn dan sylw.

Os felly mae angen i chi geisio dehongli'r canlyniadau ar gyfer y broblem dan sylw. Cynhyrchir amrywiaeth yn y math o broblemau a all ddigwydd bron yn ddieithriad trwy amrywio'r ffordd y cyfyngir ar y gronyn. Er enghraifft, os clymir y gronyn wrth ben llinyn anestynadwy ysgafn (neu os yw'n symud ar du mewn silindr llyfn) yna nid yw mudiant yn bosibl oni bai fod gwerthoedd y tyniant (neu'r adwaith) yn bositif, ac yn aml gofynnir i chi ddarganfod yr amodau er mwyn i'r mudiant fod yn bosibl, neu'r gwerth ar gyfer  $\theta$  lle mae'r mudiant yn peidio â bod yn bosibl (hynny yw, mae'r gronyn yn gadael y cylch). Mae problemau tebyg yn digwydd gyda mudiant ar arwyneb allanol silindr neu sffêr. Mae'r adwaith yn yr achos hwn i gyfeiriad tuag allan ac efallai y bydd angen defnyddio'r amod ar gyfer adwaith positif er mwyn darganfod a yw'r mudiant yn bosibl ai peidio.

Efallai y gofynnir i chi mewn achosion penodol hefyd ddarganfod a ddisgrifir cylchdroeon cyfan ai peidio. Mae'r gwerth lleiaf ar gyfer  $\dot{\theta}^2$  yn digwydd ar bwynt uchaf y cylch ac er mwyn cael cylchdroeon cyfan rhaid iddo fod yn bositif. Wrth gwrs mae angen sicrhau yn gyntaf nad yw'r mudiant wedi peidio â bod yn bosibl eisoes cyn cyrraedd y safle hwn.

#### **Enghraifft 4.21**

Mae plentyn, màs 25 kg, ar siglen ac yn siglo yn rhydd trwy ongl  $30^\circ$  ar bob ochr i'r fertigol. Hyd rhaffau'r siglen yw 2 m. A chymryd y gellir modelu mudiant y plentyn gan fudiant gronyn gyda màs 25 kg wedi'i glymu wrth raff anestynadwy, hyd 2 m, darganfyddwch fuanedd y plentyn pan fydd y rhaff yn fertigol a hefyd y tyniant yn y rhaff ar yr ennyd hwnnw.



Mae'r diagram yn dangos y mudiant pan fydd y rhaff ar ongl  $\theta$  i'r fertigol; dynodir y tyniant yn y rhaff gan  $TN$  ac mae'n gweithredu tuag i mewn.

Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$T - 25 \times 9.8 \cos \theta = 25 \frac{v^2}{r}.$$

Yr hafaliad cadwraeth egni yw

$$\frac{1}{2} \times 25v^2 - 25 \times 9.8 \times 2 \cos \theta = \text{cysonyn.}$$

Mae'r siglen yn aros ar  $30^\circ$  ar bob ochr i'r fertigol ac felly mae  $v = 0$  pan fydd  $\theta = 30^\circ$

ac felly y cysonyn yw  $-25 \times 9.8 \times 2 \cos 30^\circ$

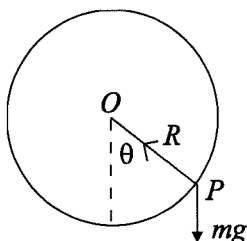
ac felly mae  $\frac{1}{2} \times 25v^2 = 25 \times 9.8 \times 2 (\cos \theta - \cos 30^\circ).$

Gellir darganfod gwerth y buanedd ar y pwynt isaf trwy amnewid  $\theta = 0$  yn yr hafaliad egni, sy'n rhoi'r buanedd fel  $2.29 \text{ ms}^{-1}$ .

Mae amnewid y gwerth hwn ar gyfer y buanedd yn hafaliad rheiddiol y mudiant pan fydd  $\theta = 0$  yn rhoi'r tyniant fel 311 N.

#### Enghraifft 4.22

Mae gronyn gyda màs  $m$ , sy'n rhydd i symud ar arwyneb mewnol silindr gwag llyfn gyda radiws mewnol  $2a$ , yn cael ei daflu o'r pwynt isaf yn y silindr gyda buanedd llorweddol  $\sqrt{2ga}$ . Darganfyddwch yr uchder mwyaf y mae'r gronyn yn codi uwchben y pwynt lle mae'n cael ei daflu.



Mae'r grymoedd sy'n gweithredu fel a ddangosir yn y diagram. Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$R - mg \cos \theta = 2ma\dot{\theta}^2,$$

a'r hafaliad cadwraeth egni yw

$$\frac{1}{2}m(2a)^2\dot{\theta}^2 - 2mga \cos \theta = \text{cysonyn.}$$

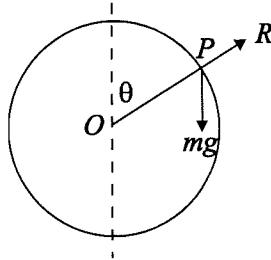
Y buanedd pan fydd  $\theta = 0$  yw  $\sqrt{2ga} = 2a\dot{\theta}$  ac mae amnewid y gwerthoedd hyn yn yr hafaliad egni yn dangos bod y cysonyn yn  $-mga$ , ac felly mae

$$2a^2\dot{\theta}^2 = ga(2 \cos \theta - 1).$$

Mae  $\dot{\theta}$  yn diflannu pan fydd  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  ac felly yr uchder mwyaf (sef  $2a - 2a \cos \theta$ ) a gyrhaeddir uwchben y pwynt isaf yw  $a$ . Yn yr achos hwn mae'n amlwg bod  $R$  yn bositif pan fydd  $\theta$  yn llym ac felly nid yw'r gronyn yn gadael y silindr cyn cyrraedd y safle uchod.

#### Enghraifft 4.23

Mae gronyn  $P$ , màs  $m$ , yn rhydd i symud ar arwyneb allanol silindr crwn llyfn â radiws  $a$ , ac mae'n cael ei ryddhau o ddisymudedd ar ddyfnder  $\frac{a}{10}$  o dan y pwynt uchaf. Darganfyddwch uchder y pwynt lle mae  $P$  yn gadael y silindr, uwchben canol y silindr.



Dangosir y sefyllfa yn y diagram gydag  $R$  yn dynodi adwaith y silindr, sy'n gweithredu tuag allan. Hafaliad rheiddiol y mudiant yw

$$mg \cos \theta - R = m a \dot{\theta}^2,$$

a'r hafaliad cadwraeth egni yw

$$\frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + m g a \cos \theta = \text{cysonyn}.$$

Ar y dechrau, mae  $\dot{\theta} = 0$  pan fydd  $\cos \theta = \frac{9}{10}$  ac felly mae'r cysonyn yn hafal i  $\frac{9mga}{10}$ . Felly, mae

$$5m a^2 \dot{\theta}^2 + 10m g a \cos \theta = 9m g a.$$

Mae amnewid am  $\dot{\theta}$  yn hafaliad rheiddiol y mudiant yn rhoi

$$5R = 15 m g \cos \theta - 9m g.$$

Mae'r adwaith yn diflannu pan fo  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ , hynny yw, pan fydd  $P$  ar bellter  $\frac{2a}{5}$  uwchben y canol.

#### Modelu sefyllfa go iawn

Pe rhoddid tun teisen crwn ar ei ochr a gosod gronyn ar y top ac, yn ofalus, achosi iddo ddechrau symud, yna gellid modelu'r broblem hon gan broblem lle mae gronyn yn cychwyn o ddisymudedd o dop silindr crwn. Mae'r sefyllfa yn union fel yn yr enghraifft flaenorol ac nid yw hafaliad rheiddiol y mudiant wedi newid. Gan fod y gronyn yn cael ei ryddhau o ddisymudedd ar y pwynt uchaf (rhaid i chi dybio y caiff gyflymder bychan neu ni fydd yn symud!) y cysonyn yn yr hafaliad egni nawr yw  $mga$ , ac felly mae

$$\frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + m g a \cos \theta = m g a.$$

Mae amnewid yn yr hafaliad rheiddiol yn rhoi

$$R = 3mg \cos \theta - 2mga - \frac{U^2}{a}.$$

Ar yr ennyd y byddai gronyn yn dechrau symud o ddisymudedd, mae  $U = 0$  ac felly byddai'r gronyn yn gadael y silindr pan oedd y radiws wedi troi trwy ongl  $\theta$ , lle mae  $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ; h.y.  $\theta = 48.2^\circ$ .

Yn ymarferol ni fyddai modelu gronyn yn llithro yn fanwl gywir gan y byddai'n rhaid ystyried ffrithiant. Fodd bynnag gellir modelu marblen yn rholio yn gymharol gywir gyda gronyn yn llithro ar arwyneb llyfn gan na wneir gwaith gan y ffrithiant ar y pwynt cyswllt. Yn achos marblen yn rholio ar fuanedd  $v$ , gellir dangos bod yr egni cinetig yn  $\frac{7}{10}mv^2$ , a chan ddefnyddio'r gwerth hwn, yr hafaliad cadwraeth egni yw

$$7v^2 = 10ga(1 - \cos \theta).$$

Mae amnewid yn hafaliad rheiddiol y mudiant, h.y.

$$mg \cos \theta - R = m \frac{v^2}{a},$$

yn rhoi

$$R = mg \left( \frac{17}{7} \cos \theta - \frac{10}{7} \right).$$

Mae'r adwaith yn diflannu pan fo  $\cos \theta = \frac{10}{17}$ , sy'n rhoi  $\theta = 53^\circ$ .

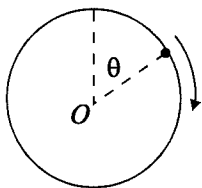
#### **Ymarferion 4.4**

Mae cwestiynau 1 i 4 yn cyfeirio at ronyn, sy'n disgrifio cylch fertigol, ynghlwm wrth un pen i linyr anestynadwy ysgafn gyda hyd  $a$ .

- 1 O wybod bod y buanedd ar y pwynt uchaf yn  $8\sqrt{ga}$ , darganfyddwch y buanedd ar y pwynt isaf.
- 2 Darganfyddwch ar ba fuanedd y mae'r gronyn yn cael ei daflu o'r pwynt isaf er mwyn iddo ddisgrifio hanner cylchoedd.
- 3 O wybod mai  $m$ às y gronyn yw 0.2 kg, bod  $a = 0.4$  m a'r tyniant pan fo'r llinyn yn goleddu ar  $60^\circ$  i'r fertigol tuag i lawr yn 15 N, darganfyddwch y buanedd ar y pwynt isaf.
- 4 O wybod bod  $a = 0.5$  m a bod y tyniant mwyaf a'r tyniant lleiaf yn ôl y gymhareb 3 i 1, darganfyddwch fuanedd mwyaf y gronyn.
- 5 Mae awyren yn hedfan ar fuanedd cyson o  $180 \text{ ms}^{-1}$  mewn cylch fertigol â radiws 1200 m.  
Darganfyddwch y grym a roddir gan y sedd ar y peilot, sydd â  $m$ às 75 kg, ar y pwynt isaf a'r pwynt uchaf.

- 6 Mae dyn yn chwyrlio llond bwced o ddŵr mewn plân fertigol mewn cylch gyda radiws 0.4 m.  
Beth yw'r cyflymder lleiaf sydd gan y bwced ar dop y cylch os na chollir dŵr?

7.



Mae'r diagram yn dangos silindr, radiws 0.35 m, yn cylchdroi o amgylch ei echelin, sy'n llorweddol, ar fuanedd onglaid cyson  $\omega$ . Mae gronyn, màs  $m$ , yn cylchdroi ar arwyneb mewnol y silindr heb lithro mewn perthynas â'r silindr. Y cyfernod ffrithiant rhwng y gronyn a'r silindr yw  $\mu$ .

Darganfyddwch yr amod sydd i'w fodloni gan  $\omega$  os nad yw'r gronyn wedi lithro ar y safle a ddangosir.

- 8 Caiff glain, màs  $m$ , ei edafu ar ddolen gron lefn o wifren, radiws  $a$ , sy'n sefydlog mewn plân fertigol. Rhyddheir y glain o ddisymudedd ar ben diamedr llorweddol.

Darganfyddwch adwaith y wifren pan fo'r glain wedi troi trwy ongl  $\theta$ .

- 9 Rhyddheir gronyn o ddisymudedd ar arwyneb sffêr llyfn gyda radiws  $a$  ar uchder  $\frac{a}{2}$  uwchben canol y sffêr. Darganfyddwch yr uchder uwchben y canol lle mae'r gronyn yn gadael y sffêr.

- 10 Mae gronyn gyda màs  $m$  yn rhydd i lithro ar gylch o wifren gyda radiws  $a$  mewn plân fertigol. Oherwydd y math o wifren ydyw, unwaith y perir i'r gronyn symud, mae'n profi grym gyda maint cyson  $3mg$  yn gwrthsefyll ei fudiant. Teflir y gronyn o bwynt isaf y wifren ac mae'n dod i aros am ennyd gyferbyn â chanol y wifren.

Darganfyddwch fuanedd y taflad.

#### Ymarferion Amrywiol 4

- 1 Mae pwynt sefydlog  $O$  ar uchder  $h$  uwchben bwrdd llorweddol llyfn ac mae un pen i llyn anestynadwy ysgafn yn sefydlog ar  $O$  a chlymir gronyn  $P$ , màs  $m$ , wrth y pen arall. Gwneir i'r gronyn ddisgrifio cylch ar y bwrdd, â buanedd onglaid cyson  $\omega$ , gyda'r llinyn yn dynn. Mae canol y cylch yn syth o dan  $O$ . Darganfyddwch, yn nhermau  $m$ ,  $g$ ,  $\omega$  ac  $h$ , faint yw adwaith y bwrdd. Darganfyddwch y gwerth mwyaf ar gyfer  $\omega^2$  lle mae mudiant o'r fath yn bosibl.

Rhoddir y bwrdd o'r neilltu ac, yn lle'r llinyn anestynadwy, defnyddir llinyn elastig ysgafn â modwlws  $mg$  â hyd naturiol  $a$ . Yna cyfyngir gronyn  $P$  i ddisgrifio cylchoedd llorweddol, gyda'r canol yn syth o dan  $O$  â buanedd onglaid cyson  $\Omega$ . Gan ddynodi'r tyniant yn y llinyn â  $T$ , darganfyddwch fynegiad ar gyfer hyd y llinyn:

(i) yn nhermau  $T, m, g$  ac  $a$ , (ii) yn nhermau  $T, m$  ac  $\Omega$ .

Trwy hyn darganfyddwch  $T$  yn nhermau  $m, g, a$  ac  $\Omega$ .

- 2 Clymir gronyn, mäs  $m$ , wrth un pen i llinyn anestynadwy ysgafn, hyd  $a$ , a chlymir y pen arall wrth bwynt sefydlog  $O$ . I ddechrau, mae'r gronyn yn cael ei ddal yn ddisymud ar bwynt  $B$  gyda'r llinyn yn dynn ac  $OB$  yn goleddu ar ongl  $\frac{\pi}{3}$  i'r fertigol tuag i lawr trwy  $O$ .

(a) Teflir y gronyn yn llorweddol ar fuanedd  $u$  o  $B$  fel ei fod yn disgrifio, gyda buanedd cyson, gylch llorweddol â'i ganol ar y llinell fertigol trwy  $O$ . Darganfyddwch  $u$  a'r amser a gymerir i ddisgrifio un cylch cyfan.

(b) Teflir y gronyn o  $B$ , yn berpendicwlar i  $OB$  yn y plân fertigol sy'n cynnwys  $OB$  ar fuanedd  $w$  fel ei fod yn dechrau disgrifio cylch fertigol, gyda chanol  $O$ .

Darganfyddwch y tyniant yn y llinyn pan fydd yn goleddu ar ongl  $\theta$  i'r fertigol tuag i lawr.

Darganfyddwch hefyd y gwerth lleiaf ar gyfer  $w$  fel bod y gronyn yn disgrifio cylchoedd cyfan.

- 3 Mae gronyn, mäs  $m$ , yn cael ei hongian o bwynt sefydlog  $A$  wrth llinyn elastig â hyd naturiol  $b$  a modwlws  $\lambda$ . Mae'r gronyn yn disgrifio cylch llorweddol â buanedd onglaid  $\omega$  gyda hyd y llinyn yn gyson, sef  $l$  ( $> b$ ), a chanol y cylch yn syth o dan  $A$ . O wybod bod yr ongl rhwng y llinyn a'r fertigol tuag i lawr yn  $\theta$ , dangoswch fod

$$\cos \theta = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Y tyniant torri yn y llinyn yw  $10 mg$  a darganfyddir bod y llinyn yn torri pan fydd  $b\omega^2 = 9g$ . Darganfyddwch  $\cos \theta$  pan fydd y llinyn yn torri a mynegwch  $\lambda$  yn nhermau  $m$  a  $g$ .

- 4 Mae gronyn, mäs  $m$ , wedi ei glymu wrth llinyn anestynadwy ysgafn, hyd  $l$ , a'i gysylltu â fertig côn gydag ongl hanner fertigol  $\alpha$ . Mae'r côn yn sefydlog gyda'i echelin yn fertigol a'r fertig tuag i fyny ac mae'r gronyn yn symud mewn cylch llorweddol ar arwyneb allanol llyfn y côn gyda buanedd onglaid  $\omega$ . Darganfyddwch fynegiadau ar gyfer yr adwaith  $R$  rhwng y côn a'r gronyn, a'r tyniant  $T$  yn y llinyn. Darganfyddwch y gwerth mwyaf posibl ar gyfer  $\omega$  yn nhermau  $g, l$  ac  $\alpha$  os yw'r gronyn am aros ar y côn.

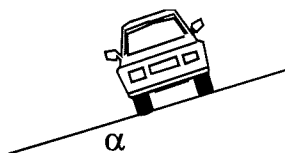
Tybiwch nawr fod y llinyn yn elastig â hyd naturiol  $a$  a modwlws  $3mg$ , fod  $\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{3}{4} \right)$  a bod  $\omega^2 = \frac{g}{2a}$ . Darganfyddwch estyniad y llinyn.

- 5 Y buanedd mwyaf y gall car deithio arno o amgylch cornel gron lorweddol â radiws 120 m heb lithro yw  $30 \text{ ms}^{-1}$ .

Darganfyddwch y cyfernod ffrithiant rhwng olwynion y car a'r ffordd. Cyfrifwch yr ongl leiaf y dylid goleddu'r ffordd er mwyn i gar allu mynd o amgylch y gornel heb lithro ar  $50 \text{ ms}^{-1}$ , a chymryd bod y cyfernod ffrithiant yn dal heb newid.

- 6 Mae car yn teithio, heb lithro, ar  $63 \text{ km awr}^{-1}$  o amgylch cornel gron â radiws 80 m ar arwyneb llorweddol. Dangoswch fod y cyfernod ffrithiant rhwng yr olwynion a'r ffordd yn  $\frac{25}{64}$  o leiaf.

7



Mae'r diagram yn dangos car, màs  $m$ , yn teithio ar fuanedd cyson mewn cylch llorweddol, radiws  $a$ , ar ffordd sy'n goleddu ar ongl  $\alpha$  i'r llorwedd. Y cyfernod ffrithiant rhwng y car a'r ffordd yw 0.6 ac mae  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ .

Gellir modelu'r car fel gronyn, màs  $m$ , sy'n symud mewn cylch llorweddol â radiws  $a$ .

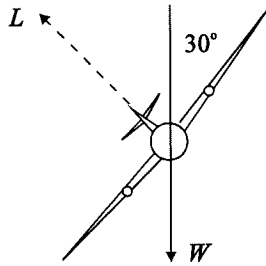
O wybod bod y car ar fin llithro i fyny'r goled,

- (a) dangoswch, trwy gydrannu yn fertigol, fod adwaith normal y ffordd ar y car yn  $\frac{13mg}{9}$ ,

- (b) darganfyddwch, yn nhermau  $g$  ac  $a$ , fuanedd y car.

- 8 Un math o reid ffair yw silindr agored sy'n gallu cylchdroi o amgylch echelin fertigol. Mae'r teithwyr yn sefyll ar sylfaen y silindr ond yn pwyso yn erbyn arwyneb y silindr. Pan fydd y buanedd onglaid yn cyrraedd gwerth arbennig mae'r llawr yn disgyn ond mae'r teithwyr yn aros ynghlwm wrth arwyneb y silindr. Mewn reid o'r fath, mae radiws y silindr yn 2.5 m ac mae'n cylchdroi ar fuanedd o 30 cylchdro y munud.

Darganfyddwch y cyfernod ffrithiant lleiaf posibl rhwng y teithiwr ac arwyneb y silindr fel bod y reid yn gweithio'n effeithiol.



Er mwyn i awyren deithio mewn cylch, mae angen iddi oleddu (h.y. gwyro fel bod yr adenydd ar ongl i'r fertigol). Mae'r diagram yn dangos awyren, wedi'i goleddu ar ongl  $30^\circ$  i'r fertigol, yn teithio mewn cylch llorweddol, ar uchder cyson. Yr unig rymoedd yn y plân sy'n berpendicwlar i gyfeiriad mudiant yr awyren yw'r codiant  $L$ , yn berpendicwlar i'r adenydd, a'r pwysau  $W$ , fel a ddangosir. Mâs yr awyren yw  $1200 \text{ kg}$  ac mae ei buanedd cyson yn  $60 \text{ ms}^{-1}$ .

- (a) Gan fodelu'r awyren fel gronyn, darganfyddwch
  - (i) y codiant,
  - (ii) radiws y cylch y mae'r awyren yn symud o'i fewn.
- (b) Mae'r geiriau a danlinellir uchod yn awgrymu tybiaeth fodelu am y grymoedd sy'n gweithredu ar yr awyren i gyfeiriad ei mudiant. Nodwch beth, yn eich tyb chi, yw'r dybiaeth fodelu hon.

- 10 Rhoddir gronyn  $P$  gyda màs  $m$  ar y pwynt uchaf ar du allan sffêr gwag llyfn sefydlog gyda radiws  $a$  a chanol  $O$ . Yn ofalus, achosir i'r gronyn  $P$  ddechrau symud o ddisymudedd. A chymryd bod  $P$  yn dal mewn cysylltiad â'r sffêr, dangoswch mai adwaith y sffêr ar  $P$  yw  $mg(3 \cos \theta - 2)$ ,

lle mae  $\theta$  yn cynrychioli'r ongl rhwng y fertigol tuag i fyny a'r radiws  $OP$ .

Ysgrifennwch werth  $\cos \theta$  ar y pwynt lle mae  $P$  yn gadael y sffêr.

Teflir gronyn  $Q$ , ar du mewn y sffêr, yn llorweddol o'r pwynt isaf ar y sffêr gyda buanedd  $u$ . Darganfyddwch  $u$ , yn nhermau  $a$  a  $g$ , fel bod  $P$  a  $Q$  yn gadael arwyneb y sffêr ar yr un uchder uwchben  $O$ .

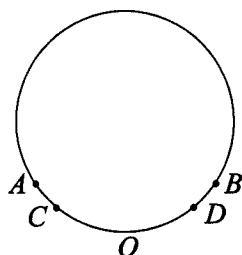
- 11 Mae dolen lefn o wifren ar ffurf cylch gyda chanol  $O$  a radiws  $0.3 \text{ m}$  yn sefydlog mewn plân fertigol. Caiff glain gyda màs  $0.5 \text{ kg}$  ei edafu ar y wifren a'i daflu gyda buanedd  $u \text{ ms}^{-1}$  o'r pwynt isaf ar y wifren fel ei fod yn dod i aros am ennyd ar uchder  $0.1 \text{ m}$  uwchben lefel  $O$ . Darganfyddwch
- (i) werth  $u$ ,
  - (ii) adwaith y wifren ar y gronyn pan fo'r gronyn ar yr un lefel ag  $O$ .
- 12 Clymir un pen i linyn anestynadwy ysgafn, hyd  $2a$ , wrth bwynt sefydlog  $O$ . Clymir gronyn, màs  $m$ , wrth y pen arall ac mae'n symud mewn cylchoedd



cyfan, gyda chanol  $O$ , mewn plân fertigol. Ei fuanedd ar y pwynt isaf ar y wifren yw  $6\sqrt{ga}$ . Darganfyddwch

- (a) sgwâr ei fuanedd lleiaf, (b) y tyniant mwyaf yn y llinyn.

13

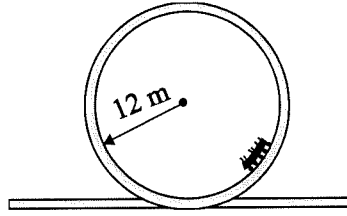


Mae'r diagram yn dangos trawstoriad fertigol o silindr crwn sefydlog gyda radiws  $a$ ; mae pwynt  $A$  ar yr un lefel lorweddol â phwynt  $B$ ; mae pwynt  $C$  ar yr un lefel lorweddol â phwynt  $D$  ac  $O$  yw pwynt lleiaf yr arc  $ACDB$ .

- (a) Mae'n rhaid i Iestyn osod model mathemategol sy'n disgrifio mudiant gronyn sy'n symud ar du mewn y silindr. Mae'n gosod model lle mae gronyn  $P$  a ryddheir o ddisymudedd ar bwynt  $A$  yn cyrraedd pwynt  $B$  ac yna yn dychwelyd i  $A$  ac yna mae'r cylchred yn digwydd eto.
- Nodwch ddwy dybiaeth ffisegol a wnaed wrth greu'r model hwn.
  - Lle mae'r grym sy'n gweithredu ar  $P$  yn berpendicwlar i'w gyflymder?
  - A yw cyflymder  $P$  ar  $C$  yn hafal i'w gyflymder ar  $D$ ?
  - O wybod bod  $A$  ar uchder  $\frac{a}{4}$  uwchben  $O$ , beth fyddai rhagfynegiad y model hwn ar gyfer buanedd  $P$  ar  $O$ ?
- (b) Yna mae Iestyn yn defnyddio'r model i ragfynegi beth fydd yn digwydd pan deflir gronyn yn llorweddol oddi wrth bwynt isaf y wifren gyda buanedd  $u$ .
- Darganfyddwch yr amod y byddai angen i  $u$  ei fodloni er mwyn i'r gronyn fynd yr holl ffordd o amgylch y silindr.

- 14 Mae gronyn yn hongian wrth llinyn anelastig ysgafn â hyd  $a$  oddi wrth bwynt sefydlog  $A$ . Darganfyddwch ar ba fuanedd y mae angen taflu'r gronyn yn llorweddol oddi wrth ei bwynt isaf er mwyn iddo fynd trwy  $A$ .
- 15 Mae glain yn llithro ar gylch llyfn fertigol sefydlog gyda radiws  $a$  a'i fuanedd ar y pwynt isaf yw  $V$ . Profwch fod y glain yn gwneud cylchdroeon cyfan os yw  $V^2 > 4ag$  a bod y grym a roddir gan y cylch ar y glain bob amser yn rheiddiol tua'r canol ar gyfer  $V^2 > 5ag$ . Os yw'r buanedd mwyaf yn  $\sqrt{7}$  gwaith y buanedd lleiaf, dangoswch fod  $V = \sqrt{\frac{14ag}{3}}$ . Darganfyddwch safle'r glain pan fydd y grym rhyngddo a'r cylch yn diflannu.

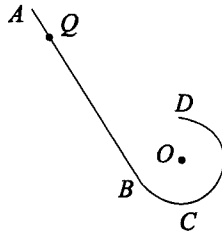
16



Mae'r diagram yn dangos trac reid "ffigur-wyth" mewn ffair. Radiws y rhan gron yw 12 m. Cynllunnir y reid fel bod teithiwr sydd ar bwynt uchaf y reid yn teimlo grym gan ei sedd i gyfeiriad canol y trac sydd o leiaf hanner ei bwysau.

- Darganfyddwch y buanedd lleiaf ar dop y trac.
- Darganfyddwch y buanedd lleiaf ar bwynt isaf y trac.
- Nodwch yn eglur ddwy dybiaeth fodelu a wneir gennych.

17



Mae'r diagram yn dangos trychiad fertigol o ran o drac reid mewn ffair. Mae rhan  $AB$  yn syth ac yn goleddu ar ongl  $45^\circ$  i'r llorwedd. Mae rhan  $BCD$  yn arc cylch gyda radiws  $a$  a chanol  $O$ . Pwynt  $C$  yw pwynt isaf y cylch,  $D$  yw'r pwynt uchaf ac mae  $CD$  yn fertigol. Mae ongl  $B\hat{O}C$  yn  $45^\circ$  ac felly mae  $AB$  yn dangiad i arc y cylch ar  $B$ . Mae cerbyd gyda theithwyr (sydd i'w fodelu fel gronyn  $P$ , màs  $m$ ) yn cael ei ryddhau o ddisymudedd ar bwynt  $Q$  ar  $AB$  ar uchder  $3a$  uwchben  $C$ . O wybod bod y trac yn llyfn

- darganfyddwch adwaith y trac ar  $P$  pan fydd yn cyrraedd  $C$ ,
- dangoswch, pan fydd  $P$  rhwng  $C$  a  $D$  gydag ongl  $C\hat{O}P$  yn  $\theta$ , fod adwaith y trac ar  $P$  yn  $mg(4 + 3 \cos \theta)$ .

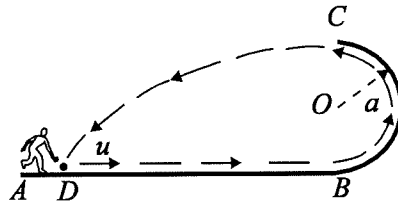
- 18 Mae gwifren lefn â glain bychan  $B$ , màs  $m$ , wedi'i edafu arni, yn cael ei ffurfio'n gylch, radiws  $a$ , a'i sefydlu mewn plân fertigol. Teflir y glain o bwynt isaf y cylch â buanedd  $\sqrt{8ga}$ . Dangoswch, pan fydd cyfeiriad mudiant  $B$  wedi troi trwy ongl lem  $\theta$ , mai sgwâr ei fuanedd yw  $6ag + 2ag \cos \theta$ . Darganfyddwch, yn nhermau  $m$ ,  $g$  a  $\theta$ , adwaith y wifren ar y glain.

- 19 Gellir ystyried cornel trac rasio ar oledd fel cylch â radiws  $r$ . Mae graddiant y trac yn golygu nad oes gan gar sy'n teithio ar fuanedd  $u$  unrhyw duedd i lithro i'r ochr. Darganfyddwch y berthynas rhwng  $\alpha$ ,  $r$  ac  $u$ .

Dangoswch fod yn rhaid i'r cyfernod ffrithiant sydd ei angen i osgoi llithro i'r ochr ar fuanedd  $v > u$  fod yn o leiaf  $\frac{(v^2 - u^2) \sin \alpha \cos \alpha}{v^2 \sin^2 \alpha + u^2 \cos^2 \alpha}$ .

- 20 Clymir gronyn  $P$  wrth un pen i llinyn anestynadwy ysgafn â hyd  $a$  a chlymir y pen arall wrth bwynt sefydlog  $O$ . I ddechrau, mae'r gronyn mewn cydbwysedd, yn hongian oddi wrth  $O$ , ar bwynt  $B$ , ac yna mae'n cael ei daflu'n llorweddol ar fuanedd  $u$  oddi wrth  $B$ . Mae'r gronyn yn symud mewn cylch i ddechrau ond ar bwynt arbennig yn ei lwybr mae'r llinyn yn dod yn llac ac yna mae'r gronyn yn symud ar lwybr parabolig sy'n mynd trwy  $B$ . Darganfyddwch yr ongl rhwng y llinyn a'r fertigol tuag i fyny pan fydd y llinyn yn dod yn llac a hefyd darganfyddwch  $u$ .
- 21 Mae gronyn yn hongian wrth llinyn anelastig ysgafn, hyd  $a$ , oddi wrth bwynt sefydlog  $O$ . Teflir y gronyn yn llorweddol, yn y plân fertigol sy'n cynnwys y llinyn, â buanedd  $u$  ac mae'r llinyn yn dod yn llac pan fydd yn gwneud ongl  $\alpha$  â'r fertigol tuag i fyny. Darganfyddwch  $u^2$  yn nhermau  $a$ ,  $g$  ac  $\alpha$ . O wybod bod y gronyn wedyn yn mynd trwy  $O$ , darganfyddwch werth  $\cos \alpha$ .

22



Mae'r diagram yn dangos trychiad fertigol  $ABC$  o arwyneb llyfn. Mae  $AB$  yn llorweddol ac mae  $BC$  yn arc hanner crwn â radiws  $a$ , ac mae'r canol  $O$  ar bellter  $a$  yn fertigol uwchben  $B$ . Defnyddir yr arwyneb mewn gêm lle mae pêl fach  $P$ , mäs  $m$ , yn cael ei thaflu ar fuanedd  $u$  tuag at  $B$  o bwynt  $D$  ar  $AB$ . Mae'r bêl wedyn yn symud ar hyd arc  $BC$ , gan adael  $BC$  ar  $C$ . Yna mae'n symud o dan ddisgyrchiant nes iddi daro  $AB$  am y tro cyntaf ar  $D$ .

- (a) Darganfyddwch, yn nhermau  $m$ ,  $u$ ,  $g$ ,  $a$  a  $\theta$ , adwaith  $BC$  ar  $P$  pan fydd  $OP$  yn goleddu ar ongl  $\theta$  i'r fertigol tuag i lawr.
- (b) Darganfyddwch werth  $u$  fel bod  $BD = 3a$ .
- (c) Darganfyddwch werth lleiaf posibl  $BD$ .

Nodwch ddwy dybiaeth fodelu a wnaed gennych.

- 23 Mae cornel gron, radiws  $r$ , yn goleddu ar ongl  $\alpha$  a'r buanedd mwyaf y gall car deithio o amgylch y gornel heb sgelfrio yw  $v$ . Os  $\mu (= \tan \lambda)$  yw'r cyfernod ffrithiant rhwng yr olwynion a'r ffordd, dangoswch y rhoddir y buanedd mwyaf hwn gan  $v^2 = rg \tan(\alpha + \lambda)$ .

## **Pennod 5**

### **Cydbwysedd Cyffredinol Gwrthrych Anhyblyg**

Ar ôl gweithio drwy'r bennod hon, dylech allu

- llunio diagramau yn dangos grymoedd yn gweithredu ar wrthrychau anhyblyg gan gynnwys ffrithiant a grymoedd cyffwrdd normal,
- datrys problemau syml sy'n cynnwys gwrthrych anhyblyg mewn cydbwysedd dan sawl grym cymhlan.

#### **5.1 Amodau ar gyfer cydbwysedd**

Os yw gwrthrych anhyblyg mewn cydbwysedd dan effaith system o rymoedd cymhlan, yna mae'r grymoedd yn bodloni'r amodau canlynol:

- (a) mae swm y grymoedd yn sero,
- (b) mae gan y grymoedd foment sero o amgylch unrhyw bwynt yn y system.

Yn yr un modd, mae cyfanswm y moment clocwedd yn hafal i gyfanswm y moment gwrthglocwedd.

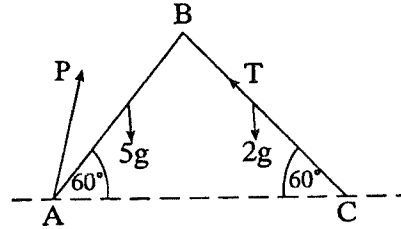
Ar gyfer amod (a), mae'n aml yn fwy cyfleus i gydrannu'r holl rymoedd mewn dau gyfeiriad cydberpendicwlar. Fel arfer, bydd y rhain yn llorweddol ac yn fertigol, neu'n baralel ac yn berpendicwlar i blân ar oledd. Mae hyn yn rhoi dau hafaliad annibynnol i ni. Ceir trydydd hafaliad annibynnol drwy gymryd momentau o amgylch pwynt cyfleus er mwyn cael gwared â chymaint â phosibl o'r gwerthoedd anhysbys nad oes arnom eu hangen. Gallwch gael dau neu dri hafaliad drwy gymryd momentau o amgylch dau neu dri phwynt ond dylech gofio mai dim ond tri hafaliad annibynnol y gallwch eu cael.

Mewn problemau sy'n ymwneud â ffrithiant, pan fo'r cydbwysedd ar fin cael ei dorri oherwydd llithro, mae'r ffrithiant wedi'i gyfyngu yn y pwynt cyffwrdd lle mae'r llithro'n debyg o ddigwydd. Os nad yw'r gwrthrych ar fin symud, nid yw'r ffrithiant ar ei faint mwyaf posibl.

Wrth ddatrys problemau, mae'n bwysig dehongli'r wybodaeth a roddir a llunio diagram clir. Marciwch ar y diagram yr holl rymoedd sy'n gweithredu ar y gwrthrych a nodwch yn glir beth yw cyfeiriad y grymoedd hyn. Weithiau nid yw'n hanfodol gwybod cyfeiriad grym penodol oherwydd bydd ateb negatif yn y datrysiad yn dangos bod cyfeiriad y grym i'r gwrthwyneb i'r hyn a ddangosir yn y diagram.

### Enghraifft 5.1

Mae gan lofft mewn to tŷ ddrws  $AB$  sydd â hyd 1m a màs 5 kg ei agor ar ongl  $60^\circ$  i'r llorwedd drwy ddefnyddio pwyslath  $BC$ . Mae hyd  $BC$  yn 1 m a'i fâs yn 2 kg. Darganfyddwch wthiad y pwyslath.



Y cam cyntaf yw llunio diagram yn dangos yr holl rymoedd.

$T$  yw gwrthiad y pwyslath.

$P$  yw'r grym cyffwrdd ar y colfach; mae ei gyfeiriad yn anhysbys. Os cymerwn fomentau yn  $A$ , ni fydd  $P$  yn ymddangos yn yr hafaliad a dim ond un anhysbysyn  $T$  fydd gennym.

Mae triongl  $ABC$  yn hafalochrog.

Drwy gymryd momentau o amgylch  $A$ , mae

$$5g \times \frac{1}{2} \cos 60^\circ + 2g \times \left(1 - \frac{1}{2} \cos 60^\circ\right) = T \times 1 \sin 60^\circ$$

sy'n rhoi 
$$T = \frac{11g}{2\sqrt{3}} = 31.12 \text{ N}$$

### Ymarferion 5.1

- Caiff rhoden unffurf  $AB$  sydd â màs 10 kg a hyd 2 m ei cholfachu'n rhydd i wal fertigol yn  $A$ . Rhoddir grym  $P$  yn  $B$  ar ongl  $\theta$  i  $AB$  i gadw'r rhoden mewn cydbwysedd. Pan fo'r rhoden mewn cydbwysedd, mae  $AB$  yn gwneud ongl  $\alpha$  uwchben y llorwedd. Grymoedd  $X$  ac  $Y$  yw cydrannau llorweddol a fertigol yr adwaith ar y colfach. Cyfrifwch faint  $P$ ,  $X$  ac  $Y$  pan fo
  - $\theta = 90^\circ, \alpha = 0^\circ$
  - $\theta = 45^\circ, \alpha = 0^\circ$
  - $\theta = 30^\circ, \alpha = 60^\circ$ .
- Caiff rhoden unffurf  $AB$  sydd â màs 5 kg a hyd 4 m ei cholfachu'n rhydd i wal fertigol yn  $A$ . Mae grym  $P$  a weithredir yn  $B$  ar ongl  $\theta$  i  $AB$  yn cadw'r rhoden mewn cydbwysedd. Pan fo'r rhoden mewn cydbwysedd, mae  $AB$  yn gwneud ongl  $\alpha$  uwchben y llorwedd.  $R$  yw'r adwaith ar y colfach sy'n gwneud ongl  $\beta$  â'r wal. Darganfyddwch faint grymoedd  $P$  a  $R$  a maint ongl  $\beta$  pan fo
  - $\theta = 60^\circ, \alpha = 0^\circ$
  - $\theta = 60^\circ, \alpha = 30^\circ$
  - $\theta = 30^\circ, \alpha = -45^\circ$

- 3 Mae pen isaf rhoden unffurf  $AB$ , sef  $A$ , sydd â màs 8 kg, yn cyffwrdd llawr llorweddol garw.  $\mu$  yw'r cyfernod ffrithiant rhwng y rhoden a'r llawr. Caiff llinyn ei roi ynghlwm wrth ben  $B$  ac mae'n cadw'r rhoden mewn cydbwysedd ar ongl  $\alpha$  gyda'r llorweddol pan fo'r llinyn yn gwneud ongl  $\beta$  â'r rhoden. Cyfrifwch y tyniant yn y llinyn, yr adwaith normal a'r grym ffrithiannol yn  $A$  pan fo
- (a)  $\alpha = 30^\circ, \beta = 90^\circ$
  - (b)  $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$
  - (c)  $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$ .
- 4 Caiff rhoden lorweddol unffurf  $AB$ , hyd 3 m a màs 20 kg, ei cholfachu'n rhydd i wal fertigol yn  $A$ . Mae pen  $B$  ynghlwm gerfydd rhaff anestynadwy ysgafn sydd ar oledd ar ongl  $30^\circ$  i'r llorweddol i bwynt ar y wal uwchben  $A$ . Caiff màs 30 kg ei hongian o  $B$ . Cyfrifwch y tyniant yn y rhaff. Mae'r rhaff yn torri pan fo'r tyniant yn fwy na 200g N. Cyfrifwch y pellter mwyaf o  $A$  lle gellir rhoi màs ychwanegol o 135 kg ynghlwm wrth roden  $AB$ .
- 5 Caiff rhoden unffurf  $AB$  sydd â hyd 4 m a màs 5 kg ei cholfachu'n rhydd i wal fertigol yn  $A$  ac mae ganddi fâs o 8 kg yn hongian o ben  $B$ . Caiff y rhoden ei chadw mewn safle llorweddol gan raff anestynadwy ysgafn  $CD$  ynghlwm wrth ganolbwynt  $C$  y rhoden a phwynt  $D$  ar y wal 1.5 m uwchben  $A$ . Darganfyddwch y tyniant yn y rhaff a maint a chyfeiriad y grym ar y colfach.
- 6 Codir trawst metel unffurf trwm  $AB$ , sydd â hyd 4 m a màs 200 kg, ar dryc drwy ddefnyddio cadwyn sydd ynghlwm wrth ben  $B$  y trawst. Mae pen  $A$  yn gorffwys ar lawr llorweddol garw. Mae'r gadwyn yn mynd dros bwli  $C$  sydd wedi'i osod uwchben y tryc. Mae'r trawst a'r gadwyn yn yr un plân fertigol. Mae'r system mewn cydbwysedd pan fo'r trawst yn gwneud ongl o  $25^\circ$  gyda'r llawr a phan fo ongl  $ABC$  yn  $135^\circ$ . Darganfyddwch
- (a) y tyniant yn y gadwyn,
  - (b) maint a chyfeiriad yr adwaith rhwng y trawst a'r llawr.
- 7 Mae craidd disgyrchiant rhoden syth unffurf  $AB$  yn  $C$ . Màs y rhoden yw 10 kg. Mae grym o 20g N yn gweithredu'n fertigol tuag i fyny ar y rhoden ym mhen  $B$ , gyda grym o 10g N yn gweithredu'n fertigol tuag i lawr ym mhen  $A$ , a chyda grymoedd llorweddol yn  $B$  a  $C$  fel bod rhoden  $AB$  mewn cydbwysedd ar oledd ar ongl  $30^\circ$  i'r llorweddol gyda phen  $B$  yn uwch na phen  $A$ . Dangoswch fod maint y grymoedd llorweddol yn  $B$  a  $C$  yn hafal a darganfyddwch y maint hwn.

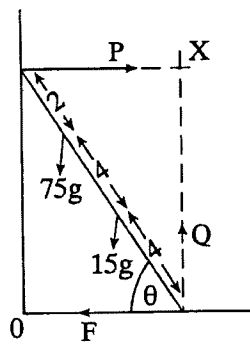
## 5.2 Problemau'n ymwneud ag ysgolion

Mae'r problemau hyn yn ymwneud ag ysgol mewn cydbwysedd, gyda'i throed ar y llawr a'i brig yn gorffwys yn erbyn wal. Gall y wal neu'r llawr fod yn arw neu'n llyfn ac nid oes yn rhaid i'r llawr fod yn llorweddol na'r wal yn fertigol.

Pan fo ysgol yn gorffwys yn erbyn wyneb llyfn, dim ond adwaith normal a geir ar y pwynt cyffwrdd sy'n berpendicwlar i'r wyneb. Pan fo'r wyneb yn arw, ceir hefyd rym ffrithiannol yn erbyn y mudiant.

### Enghraifft 5.2

Mae ysgol, hyd 10m, yn gorffwys ar lawr llorweddol garw yn erbyn wal fertigol lefn ac mae ar oled ar ongl  $\theta$  i'r llorwedd lle mae  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ . 15 kg yw màs yr ysgol ac mae ei chraidd màs 4m o'r pen isaf. Mae dyn â màs 75 kg yn sefyll ar yr ysgol 8 m o'r pen isaf. Darganfyddwch y grym ffrithiannol ar y llawr. Lluniwch ddiagram eglur yn dangos yr holl rymoedd.



$P$  a  $Q$  yw'r grymoedd cyffwrdd normal o'r wal a'r llawr.  $F$  yw'r grym ffrithiannol ar ben isaf yr ysgol, mae'n gweithredu i'r chwith gan y bydd yr ysgol yn debyg o lithro i'r dde. Er mwyn cael gwared â  $P$  a  $Q$ , rhaid cymryd momentau o amgylch  $X$ .

$$F \times 10 \sin \theta = 75g \times 8 \cos \theta + 15g \times 4 \cos \theta$$

Drwy amnewid  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ , cawn

$$F = 485.1 \text{ N}$$

485.1 N yw'r grym ffrithiannol.

Gellid darganfod gweddill y grym ar yr ysgol, pe bai angen, yn syml drwy gydrannu'n llorweddol ac yn fertigol.

Drwy gydrannu'n llorweddol, cawn

$$P - F = 0$$

$$P = 485.1 \text{ N.}$$

Drwy gydrannu'n fertigol, cawn

$$Q - 75g - 15g = 0$$

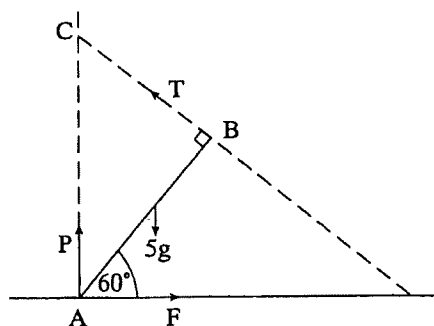
$$Q = 882 \text{ N}$$

Hefyd, er mwyn i gydbwysedd fod yn bosibl, ni all y cyfernod ffrithiant rhwng yr ysgol a'r llawr fod yn llai na  $\frac{F}{Q}$ , sy'n hafal i 0.55.

Weithiau, mae'n haws cymryd momentau o amgylch mwy nag un pwynt. Cofiwch, fodd bynnag, mai dim ond tri hafaliad annibynnol a geir.

### Enghraifft 5.3

Mae pen  $A$  rhodden unffurf  $AB$  sydd â hyd 2 m a màs 5 kg yn gorffwys ar lawr garw. Caiff ei gynnal ar  $60^\circ$  i'r llorwedd gan llyn sydd ynghlwm wrth ei ben uchaf  $B$ . Ar y pwynt cydbwysedd, mae'r llynyn ar ongl sgwâr i  $AB$ . Cyfrifwch y tyniant yn y llynyn, y ffrithiant a'r grymoedd normal yn  $A$ .



Gadewch i'r tyniant yn y llynyn fod yn  $T$  N, y ffrithiant yn  $F$  N a'r adwaith normal yn  $A$  yn  $P$  N.

Er mwyn cael gwared â  $P$  ac  $F$ , rhaid cymryd momentau o amgylch  $A$ .

$$T \times 2 \sin 60^\circ = 5g \times 1 \cos 60^\circ$$

$$T = \frac{5\sqrt{3}}{6} g \text{ N.}$$

Gellir darganfod  $P$  ac  $F$  drwy gydrannu'n llorweddol ac yn fertigol. Fel arall, gellir cael gwared â  $T$  a  $P$  drwy gymryd momentau o amgylch  $C$ .

$$F \times 2 \sec 30^\circ = 5g \times 1 \cos 60^\circ$$

$$F = \frac{5\sqrt{3}}{8} g \text{ N.}$$

Mae cymryd momentau o amgylch  $D$  yn dileu  $T$  a  $F$ .

$$P \times 2 \sec 60^\circ = 5g (\sec 60^\circ - 1 \cos 60^\circ)$$

$$P = \frac{35}{8} g \text{ N.}$$



### Ymarferion 5.2

- 1 Mae ysgol unffurf sydd â màs 20 kg a hyd 2l m yn gorffwys mewn cydbwysedd cyfyngol gyda'i phen uchaf yn erbyn wal fertigol lefn a'i phen isaf ar lawr llorweddol garw.  $\mu$  yw'r cyfernod ffrithiant rhwng yr ysgol a'r llawr. Mae'r ysgol ar oledd ar ongl  $75^\circ$  i'r llorwedd.  
Cyfrifwch yr adwaith normal ar y wal, yr adwaith normal a'r grym ffrithiannol ar y llawr, a gwerth  $\mu$ .
- 2 Mae ysgol unffurf, màs  $m$  kg a hyd 2l m, yn gorffwys mewn cydbwysedd cyfyngol â'i phen uchaf yn erbyn wal fertigol arw a'i phen isaf yn erbyn llawr llorweddol garw. Y cyfernod ffrithiant rhwng yr ysgol a'r wal yw  $\frac{1}{5}$  a'r cyfernod ffrithiant rhwng yr ysgol a'r llawr yw  $\frac{1}{3}$ . Mae'r ysgol yn ffurfio ongl  $\theta$  â'r llawr.  
Cyfrifwch yr adweithiau normal ar y wal a'r llawr yn nhermau  $m$ ,  $g$  a  $\theta$ .
- 3 Mae ysgol unffurf, hyd 8 m a màs 30 kg, yn gorffwys gyda'i thop yn erbyn wal fertigol lefn a'i gwaelod ar dir garw 2 m oddi wrth y wal. Darganfyddwch y grym normal a'r grym ffrithiannol ar waelod yr ysgol.
- 4 Mae gwaelod ysgol unffurf 30 kg ar lawr llorweddol garw â'i brig yn gorffwys yn erbyn wal fertigol lefn. Mae'r ysgol mewn cydbwysedd cyfyngol ac yn gwneud ongl o  $60^\circ$  gyda'r llorwedd. Darganfyddwch y cyfernod ffrithiant.  
Os yw dyn â màs 60 kg yn sefyll dri chwarter ffordd i fyny'r ysgol, darganfyddwch y grym llorweddol lleiaf sy'n rhaid ei weithredu ar waelod yr ysgol er mwyn ei chadw mewn cydbwysedd.
- 5 Mae un pen o ysgol unffurf sydd â phwysau  $W$  yn gorffwys ar wal arw, a'r pen arall yn gorffwys ar lawr llorweddol garw. Pan fo'r ysgol mewn cydbwysedd cyfyngol, mae ar oledd ar ongl  $\theta$  i'r fertigol.  $\mu$  yw'r cyfernod ffrithiant rhwng yr ysgol a'r wal a  $\mu'$  yw'r cyfernod ffrithiant rhwng yr ysgol a'r llawr.  
Dangoswch fod
$$\tan \theta = \frac{2\mu'}{1+\mu'}.$$
- 6 Mae ysgol unffurf sydd â màs 50 kg yn gorffwys gyda'i phen uchaf yn cyffwrdd wal fertigol lefn a'i phen isaf yn cyffwrdd llawr llorweddol llyfn. Mae'r ysgol yn cael ei rhwystro rhag llithro gan fod grym llorweddol yn gweithredu arni drwy

linyn anestynadwy sydd ynghlwm wrth ei phen isaf. Os yw tyniant torri'r llinyn yn 12.5g N, cyfrifwch oled mwyaf posibl yr ysgol i'r llorwedd.

- 7 Mae ysgol unffurf â màs 8 kg yn gorffwys mewn cydbwysedd gyda'i gwaelod ar lawr llorweddol llyfn a'i thop yn erbyn wal fertigol lefn. Mae gwaelod yr ysgol 1 m oddi wrth y wal a thop yr ysgol 2 m oddi wrth y llawr. Cedwir yr ysgol mewn cydbwysedd drwy linyn anestynadwy ysgafn sydd ynghlwm wrth waelod yr ysgol a phwynt ar y wal, yn fertigol o dan dop yr ysgol ac 1m uwchben y llawr. Darganfyddwch y tyniant yn y llinyn.
- 8 Mae ysgol unffurf yn gorffwys mewn cydbwysedd cyfyngol gyda'i thop yn erbyn wal fertigol lefn a'i gwaelod ar lawr llorweddol garw.  $\mu$  yw'r cyfernod ffrithiant rhwng yr ysgol a'r llawr. Mae'r ysgol yn gwneud ongl o  $\theta$  gyda'r llawr. Dangoswch fod  $\tan \theta = \frac{1}{2\mu}$ .

## ATEBION

Ymarferion 1.1

1.  $x = ae^{3t} + be^{-3t}$
2.  $x = ae^t + be^{2t}$
3.  $x = e^{4t}(a \cos t + b \sin t)$
4.  $y = ae^{4x} + be^{2x}$
5.  $y = e^{-4x}(a \cos 8x + b \sin 8x)$
6.  $x = ae^{\frac{4t}{3}} + be^{\frac{t}{2}}$
7.  $x = a \cos 5t + b \sin 5t$
8.  $y = 3 \cos 4x$
9.  $x = 2e^{2t} \cos 4t$
10.  $x = 12e^{-2t} - 7e^{-5t}$
11.  $y = \frac{1}{5}e^{4(\pi-x)} \sin 5x$
12.  $x = 3e^{3t} + 2e^{-2t}$
13.  $y = e^{-4x}(2 \cos 2x + 6 \sin 2x)$

Ymarferion 1.2

1.  $x = 2 + ae^{3t} + be^{2t}$
2.  $x = 2t + 3 + ae^{5t} + be^t$
3.  $x = 2 + e^{-5t}(a \cos t + b \sin t)$
4.  $x = 3t - 4 + e^{-t}(a \cos 3t + b \sin 3t)$
5.  $y = 3x + 1 + ae^{-8x} + be^{-3x}$
6.  $y = \frac{1}{4}x + x^2 + a + be^{-4x}$
7.  $x = 3 + \frac{9}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-10t}$
8.  $x = 4 + 3e^{-2t} \cos 4t$
9.  $y = 3x + 4 + xe^{-x}$
10.  $y = 4 + 3e^{-2x} \cos 4x$

Ymarferion Amrywiol 1

1.  $y = 3x + 1 + e^{-x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$
2.  $y = 3 + Ae^{-3x} + Be^{-4x}$
3. (a)  $x = \frac{k}{36} + Ae^{-3t} + Be^{-12t}$ ,  $x = \frac{k}{36} - \frac{k}{27}e^{-3t} + \frac{k}{108}e^{-12t}$
- (b)  $N - 3x - y$ ,  $\frac{dx}{dt} = 4y$ ,  $k = 12N$ ,  $\frac{N}{3}$

4. (a)  $x = e^{-2t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$   
 (b)  $\frac{dk}{dt} = I, \quad \frac{dI}{dt} = -8k - 4I, \quad k \rightarrow 0 \text{ fel mae } t \rightarrow \infty$
5.  $p = 2 + e^{-t}(0.5 \cos 4t + 0.125 \sin 4t)$   
 (i)  $2, \quad$  (ii)  $2 - 0.5e^{-\frac{\pi}{4}}, \quad t = \frac{\pi}{4}$
6. (a)  $y = 4x + 8 - e^{3x} - 2e^x$   
 (b)  $y = e^{2x}(5 \cos x - 11 \sin x)$   
 (c)  $y = e^{2x}(5 - 11x)$
7.  $x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{b}{4}\right)e^{4t} + \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{4}\right)e^{-4t}, \quad 2x_0 > y_0$

### Ymarferion 2.1

1.  $\sqrt{20} \text{ ms}^{-1}$
2.  $1.61 \text{ m}$
3.  $\sqrt{\frac{3}{x}} - 3, \quad x = 1$
4.  $\frac{4}{x}, \quad 2\sqrt{1+2t}$
5.  $5 + x, \quad -5 + 5e^t$
6.  $e^x, \quad \ln\left(\frac{2}{1-2t}\right)$
7.  $2x^{\frac{3}{4}}, \quad \frac{t^4}{16}$
8.  $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ s}$
9.  $50 \text{ km}$

### Ymarferion 2.2

1.  $-\frac{5}{6}e^{-6t} + \frac{23}{6}$
2.  $(3x+15)^{\frac{1}{3}}$
3.  $2e^{-2}, \quad 2e^2 - 2$
4.  $\frac{16t}{8t+1}$
5.  $t = 2 \text{ s}, \quad \frac{8}{3} \text{ m}$
6.  $60 \text{ m}$

Ymarferion 2.3

1.  $\frac{1}{4} \ln 10 \text{ s}$
2.  $0.96 \text{ s}$
3.  $48 \ln 2 \text{ m}$
4.  $1000 \ln \frac{250}{169} \text{ m}$
5.  $\frac{F}{mk}, \frac{\ln 4}{k}$
6.  $3.12 \text{ ms}^{-1}, 0.91 \text{ m}$
7.  $1.25 \tan^{-1} 4 \text{ s}$

Ymarferion Amrywiol 2

1. (a)  $\frac{dv}{dt} = -0.1V^2, \frac{10(12-V)}{12V}$   
 (b) mae'n cymryd amser diddiwedd i ddod i ddisymudedd, unrhyw wrthiant nad yw'n diflannu pan fo  $v = 0$
2. (a) (i)  $\frac{dv}{dt} = -4v^{n+1},$  (ii)  $\frac{u}{(1+4ntu^n)^{\frac{1}{n}}}$   
 (b) (i)  $\frac{u}{(1+8xu^2)^{\frac{1}{2}}},$  (ii)  $\frac{1.2u^5}{(1+8xu^2)^{\frac{5}{2}}}$
3. (a) 8, (b) 6150 W, (c) 1.47 km
4.  $\frac{9.8}{k}(e^{-kt} - 1) + 30e^{-kt}.$  Ar gyfer  $t = 2 \text{ s}, v = -0.01, 1.92 \text{ N}$
5. 7.8125 s, 99.8 m
6. (i)  $\ln 2 \text{ s},$  (ii)  $2 \text{ m}$
7. (a) (i)  $\sqrt{u^2 - 2g(x-b)},$   
 (ii) mae'n stopio pan fo  $x = \frac{u^2 + 2gb}{2g}$  ac yn dychwelyd i'r ddaear  
 (b) (i)  $\sqrt{u^2 + \frac{2k}{x} - \frac{2k}{b}},$   
 (ii) mae'n dychwelyd i'r ddaear, (iii) mae'n dianc i anfeidredd
9.  $U^2 = \frac{g}{k}(1 - e^{-2kH})$
10.  $5t + 50\left(e^{\frac{-t}{10}} - 1\right)$
11.  $6gt - 36g\left(1 - e^{\frac{-t}{6}}\right)$

12. (a) (i)  $n\sqrt{\frac{2}{5}}$ , (ii)  $-3a$   
 (b) (i)  $2n$  (ii)  $p < \frac{1}{3}$

### Ymarferion 3.1

1.  $\pi$  s
2. 0.5 m, 0.3 m
3.  $\frac{1}{\pi}$  ms<sup>-1</sup>
4.  $\frac{5}{3\pi}$  m
5. 5 m,  $\pi$  s
6. 5 m, 20 ms<sup>-1</sup>
7. 0.4 m
8.  $2\sqrt{5}$  m,  $\frac{2\pi}{3}$  s
9. 63.7 Hz
10. 0.63 ms<sup>-1</sup> i 1.57 ms<sup>-1</sup>
11. 0.22 s, 0.12 s
12.  $3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  m
13. 0.057
14. 6.48 am
15. 12.32 am a 8.18 pm
16.  $\frac{0.2\pi}{3}$  ms<sup>-1</sup>,  $\frac{0.2\pi^2}{9}$  ms<sup>-2</sup>
17. 4.2 N, 3.6 N
18. 0.06 m
19.  $\frac{35}{\pi}$  Hz
20. Nid yw'n llithro
21.  $9.9 \times 10^{-4}$  m
22. 2 m,  $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$  s,  $x = 1$  m

### Ymarferion 3.2

1. (a) 0.13 s, (b) 0.17 s
2.  $x = -0.4\sin 2t$  m,  $v = -0.8\cos 2t$  ms<sup>-1</sup>
3. 1.13 s
4. (a) 0.13 s, (b) 0.17 s

5. 1.13 s
6. (a)  $\frac{\pi}{16}$  s, (b) 0.23 s
7. 0.2 m, 0.05 s
8. 0.25 s
9. 1.10 s, 0.2 m
10. 0.13
11. 0.77 s
12.  $0.24 \text{ ms}^{-1}$ , 0.16 s
13.  $1.4 \text{ ms}^{-1}$

### Ymarferion 3.3

1.  $0.52e^{-12t} - 0.48e^{-13t}$
2.  $0.05e^{-4t} \sin 12t$
3.  $-e^{-4t} + 0.8e^{-5t}$
4.  $-0.2te^{-5t}$
5.  $\frac{2\pi}{3}$  s
6.  $\frac{3\pi}{20}$
7. 2.53 N

### Ymarferion Amrywiol 3

1. (i) 8m, (ii)  $\frac{\pi}{18}$  s, (iii)  $108\sqrt{3}$  W, (iv) 216 W
2.  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}^{-1}$ , 2 m,  $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ ,  $\frac{5\pi}{3} \text{ ms}^{-1}$
3.  $e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ ,  $2e^{-t} \cos 2t$
4. (i)  $\sqrt{2gx}$ ,  $x = 0.6$ ,  $t = \frac{\pi}{19.8}$ , (iv)  $3.28 \text{ ms}^{-1}$ , 0.932
5. (i)  $\frac{2\pi}{3}$  s, (ii) 0.057 m, (iii)  $0.057 \sin 5t$ , (iv) 0.16 s, 3.75 N
6.  $a \cos \omega t$ , (i)  $\frac{\pi}{3\omega}$  (ii)  $\frac{5\pi}{12\omega}$ , (iii)  $4b$ , (iv)  $5b$
7. 0.2 m, 2.96 N
8.  $e^{-t}(0.28 \cos 7t + 0.04 \sin 7t)$ , 0.82 m
9. (i) 5 N, (ii)  $10(x + 0.098)$  N, (iv)  $\frac{\pi}{5}$  s, (v)  $0.433 \text{ ms}^{-1}$   
(vi) byddai'r llinyn yn mynd yn llac yn ystod y mudiad
10. (i)  $0.6 \sin \frac{\pi}{3}t$ , (ii) 0.5 (iii)  $0.083 \sin \frac{\pi}{3}t \cos \frac{\pi}{3}t$  W

11. (i) 1.568 m, (ii)  $0.2 \cos 2.5t$  (iii)  $\frac{\pi}{5}$  s, (iv)  $\frac{2\pi}{15}$  s,  
 $\frac{d^2x}{dt^2} = -6.25(x - 0.4 \sin 2t)$
12. (ii)  $0.1$  m,  $\frac{\pi}{40}$  s, (iii)  $0.1 \sin 20t$  m,  $2 \cos 20t \text{ ms}^{-1}$ , (iv)  $\frac{\pi}{60}$  s,  
 (v) Mae'r car yn symud i ffwrdd ar yr un cyflymder ag wrth iddo wrthdaro.  
 Nid yw hyn yn ystyried yr egni a gollir oherwydd y gwrthdrawiad.
13. 1.5 m, 12.5 awr,  $8.5 + 1.5 \cos \frac{4\pi}{25}t$  m, 20.27 awr, 0.754 cm y munud
14. 13 cm,  $\pi$  s,  $\frac{\pi}{4}$  s
15.  $\frac{a}{5} \cos \sqrt{\frac{5g}{a}}t$ ,  $2\pi \sqrt{\frac{a}{5g}}$
16. 2 s,  $\sqrt{10}$  m
17. 140 N,  $1.67 \text{ ms}^{-1}$
18.  $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2k}{m}y = 0$ ,  $\frac{a}{6} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}}t$
21.  $\sqrt{6}$  m
22.  $\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$
24. 5 m,  $\frac{8\pi}{5}$  s,  $\frac{4\pi}{15}$  s
25.  $2g + 0.6\pi^2$  N,  $2g - 0.6\pi^2$  N
26.  $k^2 < 1$ ,  $k = 0.16$ ,  $n = 2.03$

#### Ymarferion 4.1

1. 60.75 N
2. 1.3
3. 0.87 m
4. 0.83 s
5. 0.13
7. 497.4 N
8.  $0.58\sqrt{\frac{g}{a}}$
9.  $9.33 \text{ ms}^{-1}$
10.  $\sqrt{\frac{5g}{3a}}$



Ymarferion 4.2

1.  $2.3 \text{ ms}^{-1}$
2.  $1705 \text{ N}$
3.  $0.99 \text{ m}$
4.  $6064 \text{ N}$
5.  $1.65 \text{ s}$
6.  $\sqrt{gh}$
7.  $2\pi\sqrt{\frac{3a}{5g}}$
8.  $\frac{5mg}{3}, \frac{5mg}{12}, \frac{1}{2}$
10.  $mg \sin \alpha + \frac{mv^2}{a} \cot \alpha, m\left(\frac{v^2}{a} - g \cos \alpha\right), v^2 > ga \cos \alpha$
11.  $\frac{11}{7}$

Ymarferion 4.3

1.  $451 \text{ N}$
2.  $12.5 \text{ ms}^{-1}$
3.  $63.9^\circ$
4.  $82.8 \text{ ms}^{-1}$
5.  $1.25 mg \sin \alpha$
6.  $0.33$
7.  $8.2^\circ$
8.  $0.33, 0.37$
9.  $14.6^\circ$
10.  $11.9 \text{ ms}^{-1} \leq v \leq 42.7 \text{ ms}^{-1}$

Ymarferion 4.4

1.  $\sqrt{68ag}$
2.  $\sqrt{2ag}$
3.  $5.65 \text{ ms}^{-1}$
4.  $6.26 \text{ ms}^{-1}$
5.  $2760 \text{ N}, 1290 \text{ N}$
6.  $1.98 \text{ ms}^{-1}$
7.  $\mu\omega^2 \geq 28(\sin \theta + \mu \cos \theta)$
8.  $3mg \sin \theta$
9.  $\frac{a}{3}$
10.  $\sqrt{ag(2 + 3\pi)}$

Ymarferion Amrywiol 4

1.  $m(g - h\omega^2)$ ,  $\sqrt{\frac{g}{h}}$ , (i)  $a + \frac{aT}{mg}$ , (ii)  $\frac{T}{m\Omega^2} \frac{mga\Omega^2}{g - a\Omega^2}$
2. (a)  $\sqrt{\frac{3ag}{2}}$ ,  $\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$ , (b)  $\frac{m\omega^2}{a} - mg + 3mg \cos \theta$ ,  $2\sqrt{ag}$
3. 0.1,  $90mg$
4.  $mg \sin \alpha - m\ell\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $mg \cos \alpha + m\ell\omega^2 \sin^2 \alpha$ ,  
 $\sqrt{\frac{g \sec \alpha}{\ell}}$ ,  $\frac{49a}{141}$
5. 0.77,  $53.7^\circ$
7.  $\sqrt{\frac{61ga}{45}}$
8.  $\frac{2g}{5\pi^2}$
9. 23.52 kN, 212 m
10.  $\frac{2}{3}$ ,  $2\sqrt{ag}$
11. (i) 2.8 (ii) 3.27 N
12. (a)  $28ag$ , (b)  $19mg$
13. (a) (i) silindr llyfn, dim gwrthiant aer (ii) 0, (iii) Nac ydy, (iv)  $\sqrt{\frac{ag}{2}}$   
 (b)  $u^2 \geq 5ag$
14.  $\sqrt{ag(2 + \sqrt{3})}$
15. radiws i'r glain ar  $\cos^{-1} \frac{8}{9}$  i'r fertigol tuag i fyny
16. (a)  $13.28 \text{ ms}^{-1}$  (b)  $25.43 \text{ ms}^{-1}$
17. (a)  $7mg$
18.  $3mg (2 + \cos \theta)$
20.  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\sqrt{\frac{7ag}{2}}$
21.  $ag(2 + 3 \cos \alpha)$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}}$
22. (a)  $\frac{mu^2}{a} - 2mg + 3mg \cos \theta$ , (b)  $\frac{5}{2}\sqrt{ag}$  (c)  $4a$

Ymarferion 5.1

1. (a)  $5g \text{ N}$ ,  $0$ ,  $5g \text{ N}$ , (b)  $5g\sqrt{2} \text{ N}$ ,  $5g \text{ N}$ ,  $5g \text{ N}$   
 (c)  $5g \text{ N}$ ,  $\frac{5g\sqrt{3}}{2} \text{ N}$ ,  $\frac{25g}{2} \text{ N}$
2. (a)  $\frac{5g}{\sqrt{3}} \text{ N}$ ,  $\frac{5g}{\sqrt{3}} \text{ N}$ ,  $30^\circ$ , (b)  $\frac{5g}{2} \text{ N}$ ,  $\frac{5g\sqrt{3}}{2} \text{ N}$ ,  $30^\circ$   
 (c)  $10g\sqrt{2} \text{ N}$ ,  $92.14 \text{ N}$ ,  $113^\circ$
3. (a)  $2g\sqrt{3} \text{ N}$ ,  $11g$ ,  $g\sqrt{3} \text{ N}$  (b)  $\frac{8g}{3} \text{ N}$ ,  $71.6 \text{ N}$ ,  $28.4 \text{ N}$   
 (c)  $4g \text{ N}$ ,  $10g \text{ N}$ ,  $2g\sqrt{3} \text{ N}$
4.  $80g \text{ N}$ ,  $1\frac{1}{3} \text{ m}$
5.  $35g \text{ N}$ ,  $431.6 \text{ N}$ ,  $51^\circ$  i'r fertigol
6. (a)  $890 \text{ N}$ ,  $61^\circ$  i'r llorwedd, (b)  $1256 \text{ N}$
7.  $20g\sqrt{3} \text{ N}$

Ymarferion 5.2

1.  $26.26 \text{ N}$ ,  $196 \text{ N}$ ,  $26.26 \text{ N}$ ,  $0.134$ .
2.  $\frac{5mg \cos \theta}{10 \sin \theta + 2 \cos \theta}$ ,  $\frac{3mg \cos \theta}{6 \cos \theta - 2 \sin \theta}$
3.  $30g \text{ N}$ ,  $5g\sqrt{3} \text{ N}$
4.  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ,  $g\sqrt{15} \text{ N}$
6.  $\tan^{-1} 2$
7.  $2g\sqrt{2} \text{ N}$

**MYNEGAI**

|                              |        |
|------------------------------|--------|
| Cadwraeth egni               | 109    |
| Cydbwysedd,                  |        |
| amodau ar gyfer              | 124    |
| Cyflymder onglaid            | 85     |
| <br>Ffwythiant cyflenwol     | <br>9  |
| <br>Hafaliad differol        |        |
| anhomogenaidd                | 8      |
| homogenaidd                  | 2      |
| trefn dau                    | 1      |
| <br>Integryn neilltuol       | <br>9  |
| <br>Mudiant harmonig syml    | <br>42 |
| crynodeb o'r fformwlâu       |        |
| sylfaenol                    | 49     |
| diffiniadau eraill           | 47     |
| mudiant gwanychol            | 69     |
| Mudiant mewn cylchoedd       |        |
| fertigol                     | 108    |
| llorweddol                   | 84     |
| <br>Pendil conigol           | <br>92 |
| Problemau'n cynnwys ysgolion | 127    |
| <br>Trac ar oledd            | <br>98 |



