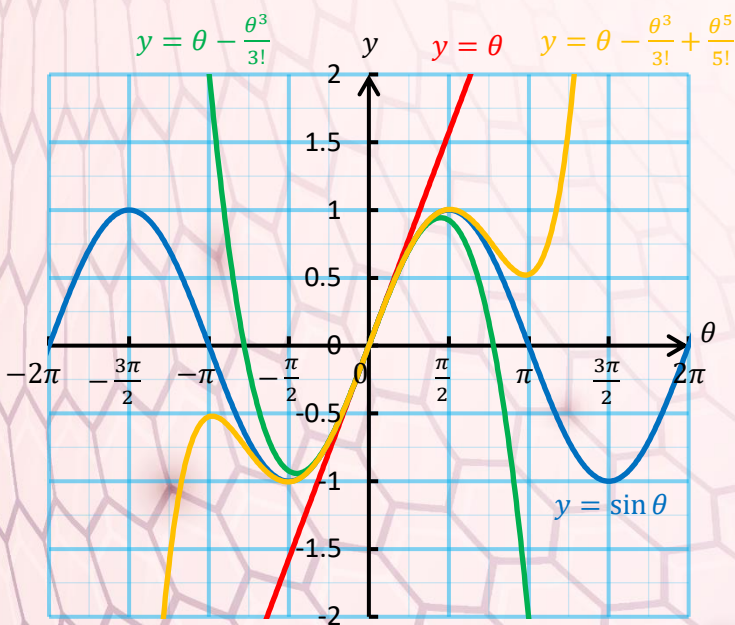


Brasamcanion

Onglau Bach



$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots$$

$$\tan(\theta) = \theta + \frac{2\theta^3}{3!} + \frac{16\theta^5}{5!} + \frac{272\theta^7}{7!} + \dots$$

Mae'r brasamcanion onglau bach yn defnyddio rhan o'r **cyfresi Taylor** ar gyfer sin, cos a tan.

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Os oes gennych ongl θ sydd ddigon bach, yna mae'n bosib defnyddio mynegiadau amgen ar gyfer $\sin \theta$, $\cos \theta$ a $\tan \theta$, rhai sydd ddim angen cyfrifiannell i'w cyfrifo.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Trigonometreg, arwynebedd sector, anhafaleddau.
Lefel A Uned 3: Mesur onglau mewn radianau, fformiwlaau adiad trigonometreg.

I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3:

- Differu $\sin \theta$ a $\cos \theta$ o egwyddorion sylfaenol.

Cymwysiadau:

- Mesur y pellter i'r sêr.
- Y rheol "un mewn 60" wrth hedfan.

Theori



Theori

Os oes gennym ongl fach, ac os yw'r ongl yn cael ei fesur mewn **radianau**, yna gellir defnyddio'r brasamcanion canlynol.

$$\sin \theta \approx \theta$$

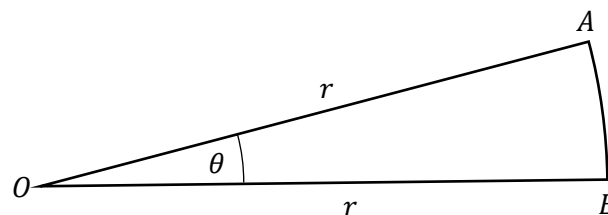
$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\tan \theta \approx \theta$$

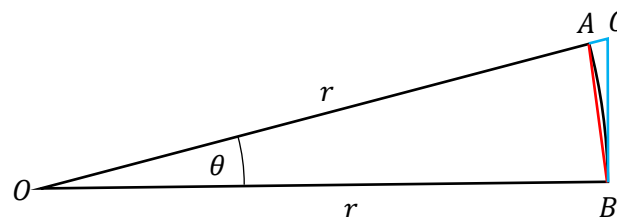
Mae'r brasamcanion yn gywir i dri ffigur ystyrion os yw $-0.115 < \theta < 0.115$ (tua $-6.6^\circ < \theta < 6.6^\circ$), ac yn gywir i ddau ffigur ystyrion os yw $-0.241 < \theta < 0.241$ (tua $-13.8^\circ < \theta < 13.8^\circ$). Y brasamcan \cos yw'r un mwyaf manwl gywir, a'r un tan yr un lleiaf manwl gywir.

Prawf sin

Gadewch i ongl fach θ (mewn radianau) ffurfio sector o gyloch OAB . Arwynebedd y sector yw $\frac{1}{2}r^2\theta$.



Gadewch i ni ychwanegu'r **cord AB** ag **ymestyn** y radiws OA i gyrraedd y pwynt C fel bod OB a BC yn berpendicwlar.



Mae OCB yn driongl ongl sgwâr efo sail r ag uchder $r \tan \theta$.

Arwynebedd triongl OCB yw $\frac{1}{2}r^2 \tan \theta$.

Arwynebedd y triongl isosgeles OAB yw $\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$.

Trigonometreg
TGAU

Mae arwynebedd **triongl** OAB < arwynebedd sector OAB < arwynebedd **triongl** OCB

$$\frac{1}{2}r^2 \sin \theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2 \tan \theta$$

Gallwn rannu efo $\frac{1}{2}r^2$ gan ei fod o hyd yn bositif.

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

Gan fod θ yn ongl fach bositif, mae $\sin \theta$ yn bositif. Felly gallwn rannu'r anhafaledd efo $\sin \theta$.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta} < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{\tan \theta}{\sin \theta}$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta}$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \sec \theta$$

Fel mae θ yn agosau at 0, mae $\sec \theta$ yn agosau at 1 (edrychwch ar y graffiau ar y dde).

Felly, wrth i θ agosau at 0, mae $\frac{\theta}{\sin \theta}$ yn gorwedd rhwng 1 a rhif sy'n agosau at 1.

Felly, wrth i θ agosau at 0, mae $\frac{\theta}{\sin \theta}$ yn agosau at 1.

Mae hyn yn golygu bod $\sin \theta \approx \theta$ ar gyfer gwerthoedd bach o θ .

Prawf tan

Mae'r prawf ar gyfer tan yn debyg iawn i'r prawf ar gyfer sin. Rydym yn dilyn union yr un camau nes cyrraedd yr anhafaledd

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

Yna, rydym yn rhannu efo $\tan \theta$ (yn lle $\sin \theta$):

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} < \frac{\theta}{\tan \theta} < \frac{\tan \theta}{\tan \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} < \frac{\theta}{\tan \theta} < 1$$

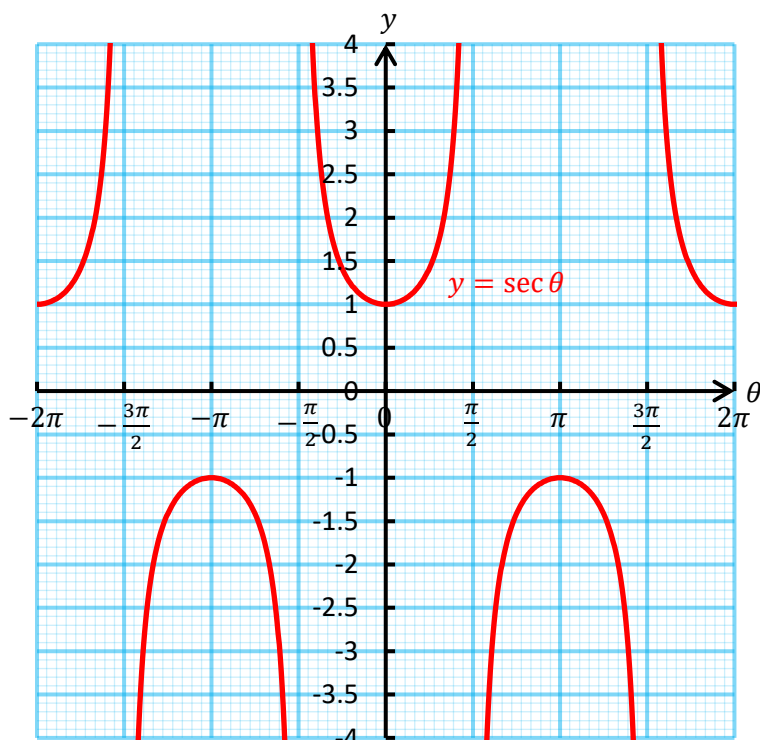
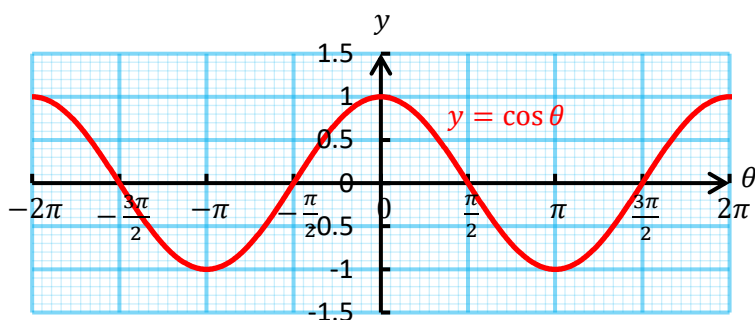
$$\cos \theta < \frac{\theta}{\tan \theta} < 1$$

Fel mae θ yn agosau at 0, mae $\cos \theta$ yn agosau at 1 (edrychwch ar y graff ar y dde).

Felly, wrth i θ agosau at 0, mae $\frac{\theta}{\tan \theta}$ yn gorwedd rhwng rhif sy'n agosau at 1 ag 1.

Felly, wrth i θ agosau at 0, mae $\frac{\theta}{\tan \theta}$ yn agosau at 1.

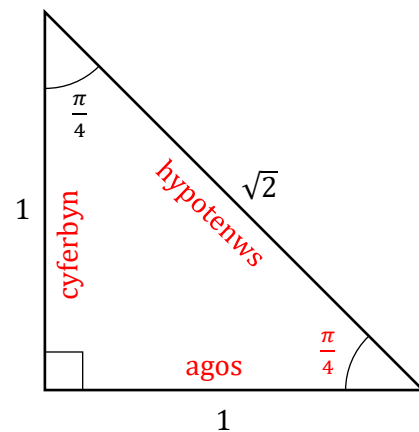
Mae hyn yn golygu bod $\tan \theta \approx \theta$ ar gyfer gwerthoedd bach o θ .



Union Werthoedd

Ystyriwch driongl ongl sgwâr ble mae hyd yr ochrau byrraf yn 1 uned.

Mae'n bosib defnyddio'r triongl yma i gyfrifo union werthoedd sin, cos a tan ar gyfer yr ongl $\frac{\pi}{4}$ (sef 45°).

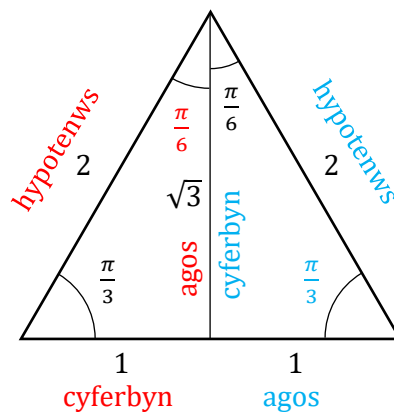


$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Nesaf ystyriwch driongl hafalochrog ble mae hyd yr ochrau yn 2 uned.

Trwy hollti'r triongl yma yn ei hanner, mae'n bosib cyfrifo union werthoedd sin, cos a tan ar gyfer yr onglau $\frac{\pi}{6}$ (sef 30°) a $\frac{\pi}{3}$ (sef 60°).



$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

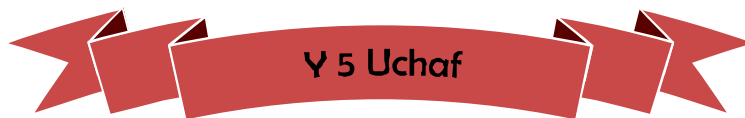
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Crynodeb

	sin	cos	tan
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$ (neu 30°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$ (neu 45°)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$ (neu 60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$ (neu 90°)	1	0	Heb ei ddiffinio

Gellir ffeindio gwerth sin, cos a tan ar gyfer lluosrifau gwahanol o $\frac{\pi}{6}$ (neu 30°) trwy ddefnyddio **cymesuredd graffiau** sin, cos a tan.



(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

1. Darganfyddwch werth positif bach ar gyfer x sy'n ddatrysiad bras i'r hafaliad.

$$\cos x - 4 \sin x = x^2. \quad [4]$$

(Uned 3 Haf 2018)

0	7
---	---

 Defnyddiwch frasamcanion ongl fach i ddarganfod gwreiddyn negatif bach yr hafaliad

$$\sin x + \cos x = 0.5. \qquad [3]$$

Area for student response with horizontal dotted lines.

(Uned 3 Haf 2024)

12. (a) O wybod bod θ yn fach, dangoswch fod $2\cos\theta + \sin\theta - 1 \approx 1 + \theta - \theta^2$. [2]

(Edexcel Pure Mathematics I [9MA0/01] Haf 2018)

1. Given that θ is small and is measured in radians, use the small angle approximations to find an approximate value of

$$\frac{1 - \cos 4\theta}{2\theta \sin 3\theta}$$

(3)

(Edexcel Pure Mathematics I [9MA0/01] Haf 2023)

4. **In this question you must show all stages of your working.**

Solutions relying entirely on calculator technology are not acceptable.

The curve C has equation $y = f(x)$ where $x \in \mathbb{R}$

Given that

- $f'(x) = 2x + \frac{1}{2} \cos x$
- the curve has a stationary point with x coordinate α
- α is small

(a) use the small angle approximation for $\cos x$ to estimate the value of α to 3 decimal places.

(3)



(Uned 3 Haf 2019)

0	9
---	---

a) O wybod bod α a β yn ddwy ongl fel bod $\tan\alpha = 2\cot\beta$, dangoswch fod

$$\tan(\alpha + \beta) = -(\tan\alpha + \tan\beta).$$

[2]

(Uned 3 Haf 2022)

1	7
---	---

 a) Profwch fod

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \equiv (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta). \quad [2]$$

b) i) Trwy hyn dangoswch ei bod yn bosibl mynegi $\frac{\cos 3\theta + \sin 5\theta}{\cos 4\theta + \sin 4\theta}$ fel $\cos \theta + \sin \theta$.

ii) Esboniwch pam mae $\frac{\cos 3\theta + \sin 5\theta}{\cos 4\theta + \sin 4\theta} \neq \cos \theta + \sin \theta$ pan mae $\theta = \frac{3\pi}{16}$. [3]

(Uned 3 Haf 2023)

0	6
---	---

- a) Gan ddefnyddio'r unfathiant trigonometrig $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, dangoswch mai **union** werth $\cos 75^\circ$ yw $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. [3]

(Edexcel Pure Mathematics I [9MA0/01] Haf 2022)

14. In this question you must show all stages of your working.**Solutions relying entirely on calculator technology are not acceptable.**

(a) Given that

$$2 \sin(x - 60^\circ) = \cos(x - 30^\circ)$$

show that

$$\tan x = 3\sqrt{3} \quad (4)$$

(b) Hence or otherwise solve, for $0 \leq \theta < 180^\circ$

$$2 \sin 2\theta = \cos(2\theta + 30^\circ)$$

giving your answers to one decimal place.

(4)

A series of horizontal dotted lines for writing.