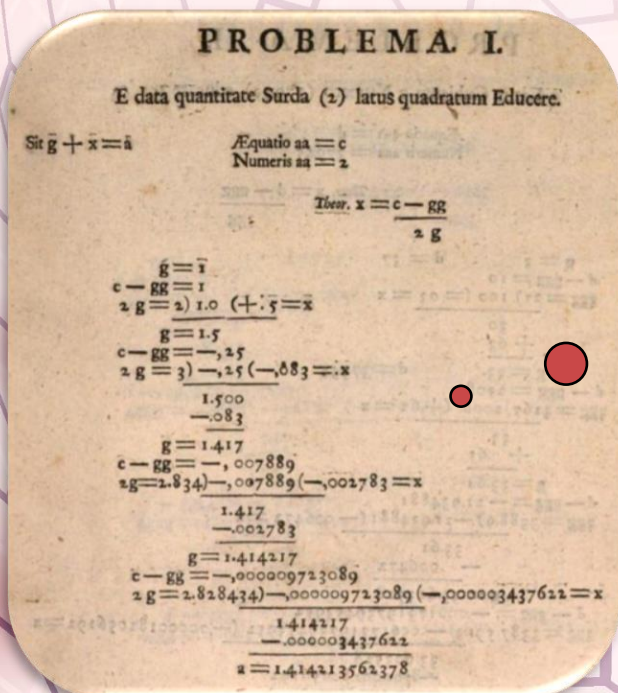




Dull

Newton-Raphson



Cyhoeddodd **Joseph Raphson** y llyfr "Analysis Aequationum Universalis" yn y flwyddyn 1690. Yma adeiladodd ar waith blaenorol **Isaac Newton** ar ddatrys hafaliadau.

Enw:

## Cefndir

### Beth yw'r gwaith?

O gael hafaliad  $y = f(x)$ , mae'r dull Newton-Raphson yn defnyddio **tangiadau** i geisio darganfod gwreiddiau'r hafaliad.

### Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

**Gwaith TGAU:** Amnewid, talgrynnu.  
**Lefel A Uned I:** Braslunio cromliniau, differu.

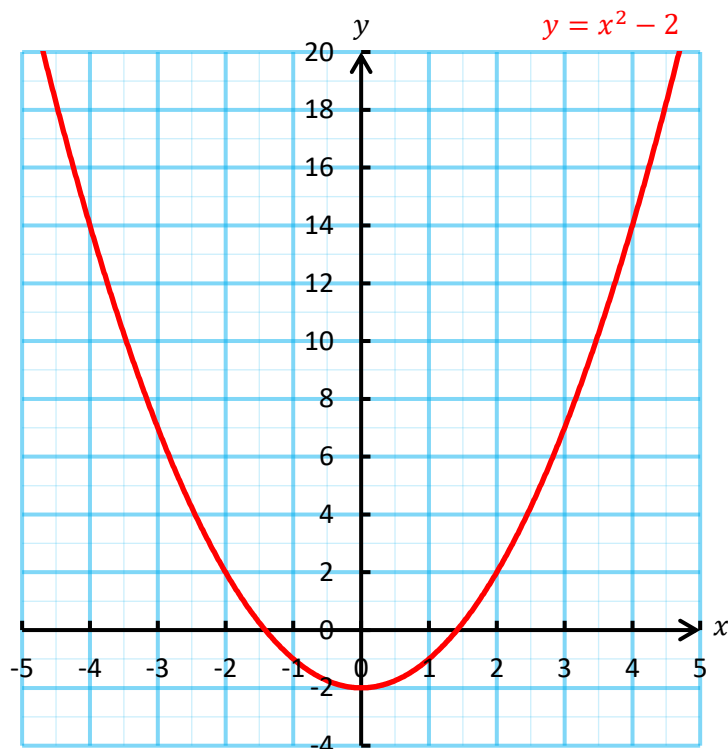
### I ble mae'n arwain?

#### Cymwysiadau:

- Datrys problemau mewn cyd-destun sy'n golygu nad oes modd cael datrysiad dadansoddol o hafaliad.
- Darganfod pwyntiau arhosol.
- Darganfod cilydd rhif heb orfod rhannu.

## Theori

Ystyriwch unrhyw ffwythiant  $y = f(x)$ , er enghraifft  $y = x^2 - 2$ .



Theori ac  
Enghraifft



Blog

**Gwreiddiau'r** hafaliad yw ble mae'r gromlin yn torri'r echelin- $x$ , sef ble mae  $f(x) = 0$ . Ar gyfer yr enghraifft uchod, gwelwn fod dau wreiddyn yn bodoli: un negatiff rhwng  $-2$  a  $-1$ ; ag un positif rhwng  $1$  a  $2$ . Mae'r dull Newton-Raphson yn defnyddio **tangiadau** i geisio darganfod gwreiddyn hafaliad:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Mae'r fformiwla yma yn y llyfryn fformiwlâu.

Nodwch fod  $f'(x_n)$  yn cynrychioli'r ffwythiant a geir trwy **ddifferu**  $f(x_n)$ .

**Enghraifft:**  $y = x^2 - 2$ .

Gwelwn o'r graff ar y dudalen flaenorol bod gwreiddyn yr hafaliad  $y = x^2 - 2$  yn agos at  $x = 2$ .

Felly, gallwn ddewis cychwyn yn  $x_0 = 2$  a defnyddio'r berthynas gylchol i geisio darganfod y gwreiddyn.

$$f(x_n) = x_n^2 - 2$$

$$f'(x_n) = 2x_n$$

$$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \times 2}$$

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \times 1.5}$$

$$x_2 = 1.41\dot{6}$$

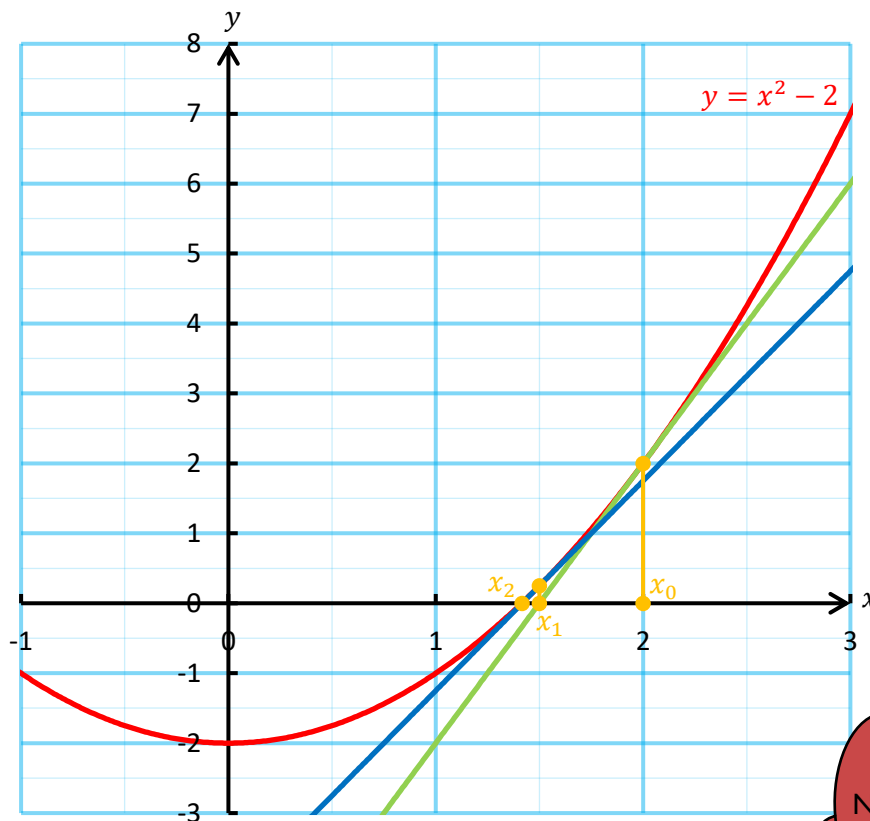
$$x_3 = 1.414215686$$

$$x_4 = 1.414213562$$

$$x_5 = 1.414213562$$

Defnyddiwch y botwm **ANS** i gyfrifo'r rhain yn effeithiol.

Gan ddefnyddio cyfrifiannell arferol, y gwerth mwyaf manwl gywir y mae'n bosib ei ddarganfod ar gyfer y gwreiddyn yw  $x = 1.414213562$ . (Byddai modd defnyddio'r dull newid arwydd i brofi mai hwn yw gwerth y gwreiddyn i naw lle degol.) I ddarlunio beth sy'n digwydd uchod, gallwn ddefnyddio'r graff isod.



Mae'r dull Newton-Raphson yn ffeindio ble mae'r tangiad nesaf yn croestorri'r echelin- $x$ .

- Rydym yn cychwyn yn y pwynt  $(x_0, 0)$  ar yr echelin- $x$ , sef y pwynt  $(2, 0)$ .
- Rydym yn llunio **tangiad** i'r gromlin ar y pwynt  $(2, 2^2 - 2 = 2)$ .
- Mae'r **tangiad** yn croestorri'r echelin- $x$  yn y pwynt  $(x_1, 0)$ , sef  $(1.5, 0)$ .
- Rydym yn llunio **tangiad** i'r gromlin ar y pwynt  $(1.5, 1.5^2 - 2 = 0.25)$ .
- Mae'r **tangiad** yn croestorri'r echelin- $x$  yn y pwynt  $(x_2, 0)$ , sef  $(1.41\dot{6}, 0)$ .
- Ac yn y blaen...

Mae'r dull Newton-Raphson fel arfer yn **cydgyfeirio'n** sydyn, ond gall fod yn annibynadwy os yw graddiant unrhyw dangiad yn **fach**.

**Sialens!** ⚠ Profwch mai  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  yw'r iteriad ar gyfer y dull Newton-Raphson gan gychwyn efo hafaliad tangiad cyffredinol yn y ffurf  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .





(Uned 3 Haf 2023)

0 4

Mae ffwythiant  $f$  gyda'r parth  $(-\infty, \infty)$  wedi'i ddiffinio gan  $f(x) = 6x^3 + 35x^2 - 7x - 6$ .

a) Darganfyddwch nifer y gwreiddiau sydd gan yr hafaliad  $f(x) = 0$  yn y cyfwng (*interval*)  $[-1, 1]$ . [2]

b) Defnyddiwch y dull Newton-Raphson i ddarganfod gwreiddyn sydd gan yr hafaliad  $f(x) = 0$ .  
Gan ddechrau gydag  $x_0 = 1$ ,

i) ysgrifennwch werth  $x_1$ ,

ii) darganfyddwch werth y gwreiddyn yn gywir i un lle degol. [4]

c) Mae rhywun yn awgrymu byddai'n bosibl defnyddio dilyniant iterus (*iterative*) arall

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{7x_n + 6 - 6x_n^3}{35}},$$

gan ddechrau gydag  $x_0 = -3$ , i ddarganfod gwreiddyn sydd gan yr hafaliad  $f(x) = 0$ .

Esboniwch pam mae'r dull hwn yn methu (*fails*). [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.





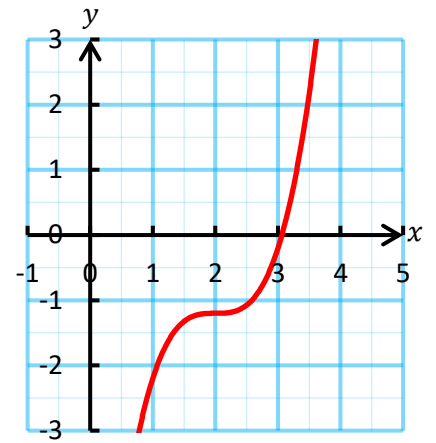


# Problemau

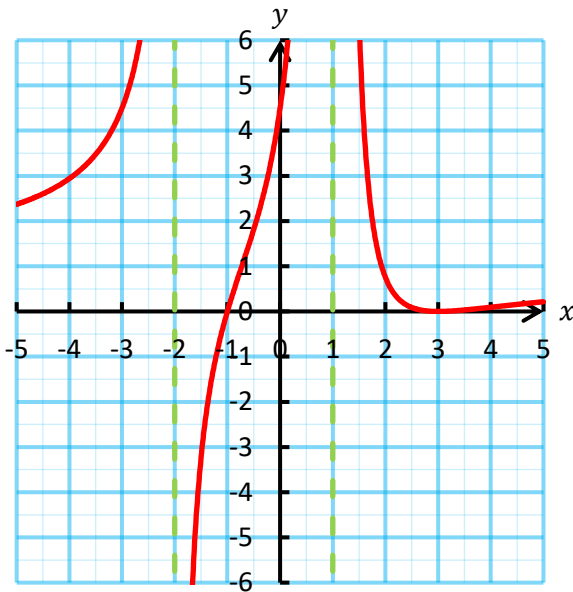
Os yw ffwythiant yn torri trwy'r echelin  $-x$ , yna gallwn ddangos bod gan y ffwythiant wreiddyn trwy edrych ar arwydd y ffwythiant bob ochr i'r gwreiddyn. Mae'r **newid arwydd** yn dangos bod gan y ffwythiant wreiddyn yn y cyfwng a nodwyd.

Er enghraifft, ar gyfer y ffwythiant ar y dde, mae'r newid arwydd rhwng  $f(2.5)$  a  $f(3.5)$  yn dangos bod gwreiddyn yn bodoli yn y cyfwng  $[2.5, 3.5]$ .

Fodd bynnag, nid yw'r dull newid arwydd yn gweithio bob tro.



## Ymarfer 1



Ystyriwch y ffwythiant sy'n cael ei ddangos ar y chwith.

(a) Mae newid arwydd rhwng  $f(-3)$  a  $f(-1.5)$ .  
Pam na ellir casglu felly bod gwreiddyn yn y cyfwng  $[-3, -1.5]$ ?

.....

.....

.....

(b) Mae'r graff yn dangos bod gan y ffwythiant wreiddyn pan fo  $x = 3$ . Pam na fyddai'r dull newid arwydd, yn y cyfwng  $[2, 4]$ , yn gallu lleoli'r gwreiddyn yma?

.....

.....

.....

(c) Ysgrifennwch gyfwng lle fyddai'r dull newid arwydd yn gallu lleoli gwreiddyn.

.....

## Ymarfer 2

Ystyriwch y ffwythiant sy'n cael ei ddangos ar y dde.

(a) Beth sydd o'i le efo defnyddio'r dull newid arwydd i leoli gwreiddyn yn y cyfwng  $[0, 2]$ ?

.....

.....

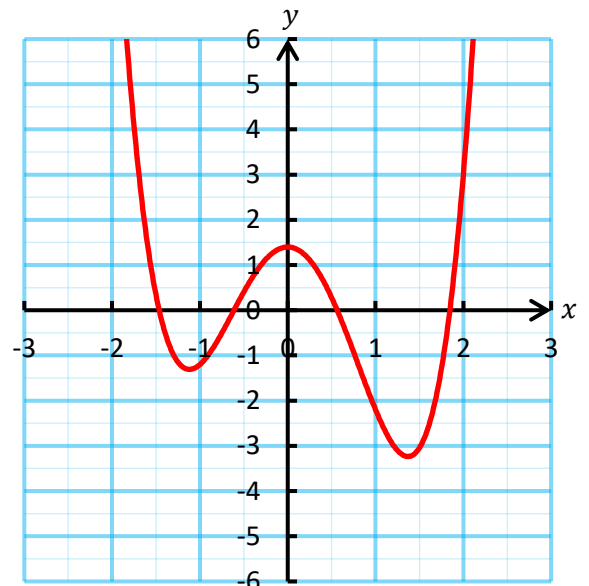
.....

(b) Beth sydd o'i le efo defnyddio'r dull newid arwydd i leoli gwreiddyn yn y cyfwng  $[-1.75, 1.5]$ ?

.....

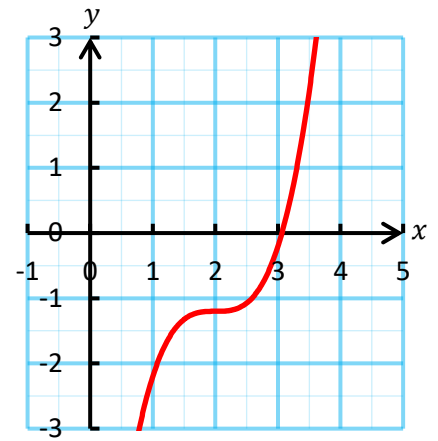
.....

.....

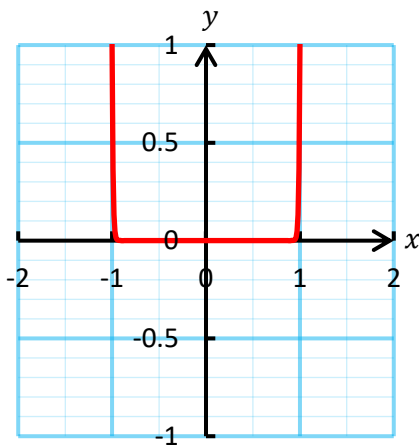


**Ymarfer 3**

Ar gyfer y graff ar y dde, beth fyddai'r broblem efo cychwyn y dull Newton-Raphson ar  $x_0 = 2$ ?

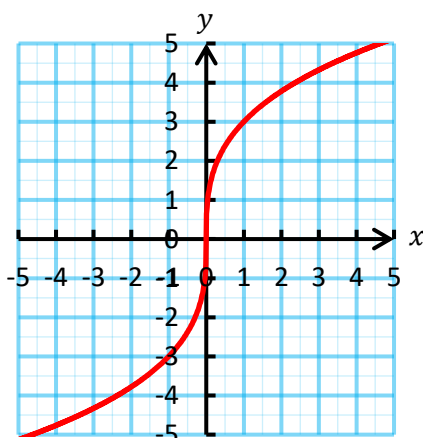


**Ymarfer 4**



(a) Mae'r graff ar y chwith yn dangos y gromlin  $y = x^{100}$ .

Mae cefnogwr brwd dull Newton-Raphson yn penderfynu defnyddio'r dull i ddarganfod gwreiddyn  $y = x^{100}$ , sydd yn  $(0, 0)$ . Beth sy'n digwydd wrth ddefnyddio'r dull gan gychwyn efo  $x_0 = 0.1$ ?



(b) Mae'r cefnogwr brwd nawr yn penderfynu defnyddio'r dull i ddarganfod gwreiddyn  $y = 3x^{1/3}$ , sydd eto yn  $(0, 0)$ . Beth sy'n digwydd wrth ddefnyddio'r dull gan gychwyn efo  $x_0 = 0.1$ ?



A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2018)

1	7
---	---

Trwy luniadu graffiau addas, dangoswch fod gan  $x - 1 = \cos x$  un gwreiddyn yn unig. Gan ddechrau gydag  $x_0 = 1$ , defnyddiwch y dull Newton-Raphson i ddarganfod gwerth y gwreiddyn hwn yn gywir i ddau le degol. [6]