Uned 1 Pellach Haf 2018

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\det(B) = 4 \times 1 - 2 \times 2$
$= 4 - 4$
$= 0$

Nid oes gan B wrthdro gan fod $\det(B) = 0$.

b) i) $\det(A) = 4 \times -3 - 2 \times -1$
$= -12 + 2$
$= -10$

$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

ii) $AX = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1}AX = A^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X = \frac{-1}{10}\begin{pmatrix} -3 \times -4 + -2 \times 1 \\ 1 \times -4 + 4 \times 1 \end{pmatrix}$

$X = \frac{-1}{10}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Uned 1 Pellach Haf 2018

2) Profi $\sum_{r=1}^{n} r(r+3) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$

Achos $n=1$: Ochr chwith $= \sum_{r=1}^{1} r(r+3)$

$= 1(1+3)$

$= 4$

Ochr Dde $= \frac{1}{3}(1)(1+1)(1+5)$

$= \frac{1}{3} \times 2 \times 6$

$= 4$

Mae'r ddwy ochr yn 4 felly rydym wedi profi'r achos $n=1$.

Cymerwn fod y gosodiad yn wir ar gyfer $n=k$, fel bod

$\sum_{r=1}^{k} r(r+3) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+5)$.

Gadewch i ni ystyried yr achos $n=k+1$.

Ochr chwith $= \sum_{r=1}^{k+1} r(r+3)$

$= \left(\sum_{r=1}^{k} r(r+3)\right) + (k+1)((k+1)+3)$

$= \left(\sum_{r=1}^{k} r(r+3)\right) + (k+1)(k+4)$

$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+5) + (k+1)(k+4)$ trwy'r hypothesis anwythol

$= (k+1)\left[\frac{1}{3}k(k+5) + (k+4)\right]$

$= \frac{1}{3}(k+1)\left[k(k+5) + 3(k+4)\right]$

$$= \frac{1}{3}(K+1)\left[K^2+5K+3K+12 \right]$$

$$= \frac{1}{3}(K+1)(K^2+8K+12)$$

$$= \frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+6)$$

$$= \frac{1}{3}(K+1)((K+1)+1)((K+1)+5)$$

= ochr dde.

Rydym wedi profi os ywir gosodiad yn wir ar gyfer $n=K$, mae hefyd yn wir ar gyfer $n=K+1$.
Gan ei fod yn wir ar gyfer $n=1$, gallwn ddweud trwy anwythiad mathemategol fod y gosodiad yn wir ar gyfer pob cyfanrif positif n.

Uned 1 Pellach Haf 2018

3) $\alpha+\beta+\gamma=-9$ $\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=20$ $\quad \alpha\beta\gamma=0$

a) **DULL 1** Gan fod $\alpha\beta\gamma=0$, mae un o'r gwreiddiau α, β, γ yn sero. Gadewch i ni ddewis α fel y gwreiddyn sydd yn sero. Felly

$$0+\beta+\gamma=-9, \quad 0\beta+\beta\gamma+\gamma(0)=20$$

$$\beta+\gamma=-9 \qquad \beta\gamma=20$$

$$\beta=-9-\gamma \longrightarrow (-9-\gamma)\gamma=20$$

$$-9\gamma-\gamma^2=20$$

$$0=\gamma^2+9\gamma+20$$

$$0=(\gamma+4)(\gamma+5)$$

Naill ai $\gamma+4=0$ neu $\gamma+5=0$

$\gamma=-4$ $\qquad \gamma=-5$

Felly $\beta=-9--4$ $\qquad \beta=-9--5$

$\beta=-5$ $\qquad \beta=-4$

Y gwreiddiau yw 0, -4 a -5.
Felly dewiswn $\alpha=0$, $\beta=-4$, $\gamma=-5$.

DULL 2 Ar gyfer polynomial ciwbig cyffredinol

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

O'r wybodaeth sy'n cael ei roi, gwelwn fod

$$-\frac{b}{a}=-9 \qquad \frac{c}{a}=20 \qquad -\frac{d}{a}=0$$

Felly'r polynomial yw $x^3+9x^2+20x+0=0$

$$x(x^2+9x+20)=0$$

$$x(x+4)(x+5)=0$$

Naill ai $x=0$ neu $x+4=0$ neu $x+5=0$

$x=-4$ $\qquad x=-5$

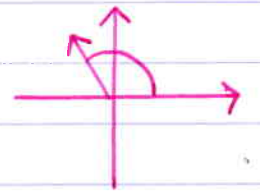
Felly'r gwreiddiau yw $\alpha=0, \beta=-4, \gamma=-5$

b) os yw $\alpha = 0$, $\beta = -4$ $\gamma = -5$
mae $3\alpha = 0$, $3\beta = -12$, $3\gamma = -15$

Yr hafaliad ciwbig efo'i gwreiddiau $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$ yw
$$(x - 3\alpha)(x - 3\beta)(x - 3\gamma) = 0$$

$$(x - 0)(x - -12)(x - -15) = 0$$
$$x(x + 12)(x + 15) = 0$$
$$x(x^2 + 15x + 12x + 180) = 0$$
$$x(x^2 + 27x + 180) = 0$$
$$x^3 + 27x^2 + 180x = 0$$

Uned 1 Pellach Haf 2018



4) $z = -3 + 4i$

a) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$ $\quad$ $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-3}\right)$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25}$ $\quad$ $= -0.927\cdots$ rad

$= 5$ $\quad$ neu $\underline{2.214}\cdots$ rad

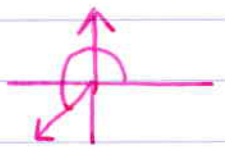
Ffurf trigonometrig: $z = |z|(\cos(\text{Arg}(z)) + i\sin(\text{Arg}(z)))$

$z = 5(\cos(2.21) + i\sin(2.21))$

i 2 le degol

ii) $\bar{z} = -3 - 4i$

$|\bar{z}| = 5$ $\quad$ $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-3}\right)$



$= 0.927\cdots$

neu $\underline{4.0688}\cdots$

Ffurf trigonometrig: $\bar{z} = 5(\cos(4.07) + i\sin(4.07))$

i 2 le degol.

Nid yw'r cwestiwn yn glir os oes angen $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Os oes, y ffurf trigonometrig yw

$\bar{z} = 5(\cos(-2.21) + i\sin(-2.21))$

$-\pi + 0.927\cdots$

b) $w = \sqrt{5}(\cos(2.68) + i\sin(2.68))$

$|zw| = |z| \times |w|$ $\quad$ $\text{Arg}(zw) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$

$= 5 \times \sqrt{5}$ $\quad$ $= 2.21 + 2.68$

$= 5\sqrt{5}$ $\quad$ $= 4.89$

Felly'r ffurf trigonometrig yw $\quad$ $= -1.39$

$\underline{5\sqrt{5}(\cos(-1.39) + i\sin(-1.39))}$ $\quad$ $4.89 - 2\pi$

Uned 1 Pellach Haf 2018

5) a) $\dfrac{2}{n-1} - \dfrac{2}{n+1}$

$= \dfrac{2(n+1)}{(n-1)(n+1)} - \dfrac{2(n-1)}{(n+1)(n-1)}$

$= \dfrac{2(n+1) - 2(n-1)}{(n-1)(n+1)}$

$= \dfrac{\cancel{2n} + 2 - \cancel{2n} + 2}{n^2 \cancel{+n} \cancel{-n} - 1}$

$= \dfrac{4}{(n^2-1)}$ ✓

b) $\displaystyle\sum_{r=2}^{n} \frac{4}{(r^2-1)} = \sum_{r=2}^{n} \frac{2}{r-1} - \frac{2}{r+1}$

$= \left(\dfrac{2}{2-1} - \dfrac{2}{2+1}\right) + \left(\dfrac{2}{3-1} - \dfrac{2}{3+1}\right) + \cdots$

$= \left(\dfrac{2}{1} - \cancel{\dfrac{2}{3}}\right) + \left(\dfrac{2}{2} - \cancel{\dfrac{2}{4}}\right) + \left(\cancel{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{2}{5}\right)$

$+ \left(\cancel{\dfrac{2}{4}} - \dfrac{2}{6}\right) + \cdots + \left(\dfrac{2}{n-1} - \dfrac{2}{n+1}\right)$

$= \dfrac{2}{1} + \dfrac{2}{2} + \cdots + \left(\cancel{\dfrac{2}{n-3}} - \cancel{\dfrac{2}{n-1}}\right)$

$+ \left(\cancel{\dfrac{2}{n-2}} - \dfrac{2}{n}\right) + \left(\cancel{\dfrac{2}{n-1}} - \dfrac{2}{n+1}\right)$

$= \dfrac{2}{1} + \dfrac{2}{2} - \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$

$= 3 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$

$= \dfrac{3n(n+1)}{n(n+1)} - \dfrac{2(n+1)}{n(n+1)} - \dfrac{2n}{n(n+1)}$

$$= \frac{3n(n+1) - 2(n+1) - 2n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{3n^2 + 3n - 2n - 2 - 2n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{3n^2 - n - 2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(3n+2)(n-1)}{n(n+1)}$$

(Felly $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$.)

c) Ar gyfer $\sum_{r=1}^{100} \frac{4}{(r^2-1)}$ y term cyntaf yw

$$\frac{4}{1^2-1} = \frac{4}{1-1}$$

$$= \frac{4}{0}$$

sydd heb ei ddiffinio.

Felly nid yw'r swm yn gallu cael ei gyfrifo.

Uned 1 Pellach Haf 2018:

6) Mae angen amnewid $x = 1-2i$ i mewn i'r hafaliad.

$$\begin{aligned}(1-2i)^2 &= (1-2i)(1-2i)\\ &= 1-2i-2i+4i^2\\ &= 1-4i+4(-1)\\ &= 1-4i-4\\ &= -3-4i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-2i)^3 &= (1-2i)(-3-4i)\\ &= -3-4i+6i+8i^2\\ &= -3+2i+8(-1)\\ &= -3+2i-8\\ &= -11+2i\end{aligned}$$

Felly, yn amnewid $x = 1-2i$:

$$\begin{aligned}&x^3+5x^2-9x+35\\ &= (-11+2i)+5(-3-4i)-9(1-2i)+35\\ &= -11+2i-15-20i-9+18i+35\\ &= -35+35+20i-20i\\ &= 0 \quad ✓\end{aligned}$$

Felly mae $1-2i$ yn wreiddyn i'r hafaliad ciwbig.

b) Os yw $1-2i$ yn wreiddyn, mae $1+2i$ yn wreiddyn (mae gwreiddiau cymhlyg yn ymddangos mewn parau cyfiau).

Felly mae $(x-(1-2i))(x-(1+2i))$ yn ffactor.

$$\begin{aligned}&= (x-1+2i)(x-1-2i)\\ &= x^2-x-\cancel{2ix}-x+1+\cancel{2i}+\cancel{2ix}-\cancel{2i}-4i^2\\ &= x^2-2x+1-4(-1)\\ &= x^2-2x+5\end{aligned}$$

Yn rhannu'r ffactor allan:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 7 \\
\hline
x^2-2x+5 & x^3+5x^2-9x+35 \\
 & \underline{x^3-2x^2+5x} \\
 & 7x^2-14x+35 \\
 & \underline{7x^2-14x+35}
\end{array}
$$

Felly $x^3+5x^2-9x+35 = (x^2-2x+5)(x+7)$

Y trydydd gwreiddyn yw $\underline{-7}$.

Uned 1 Pellach Haf 2018

7) $|z-4-i| = |z+2|$

a) Gadewch i $z = x+iy$:

$$|(x+iy)-4-i| = |(x+iy)+2|$$
$$|(x-4)+i(y-1)| = |(x+2)+iy|$$
$$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$$
$$(x-4)^2+(y-1)^2 = (x+2)^2+y^2$$
$$\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}-2y+1 = \cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}$$
$$-8x-2y+17 = 4x+4$$
$$0 = 12x+2y-13$$
$$2y = -12x+13$$
$$y = -6x+\frac{13}{2}$$

b) Locws P yw'r holl bwyntiau sy'n gytbell o'r pwyntiau $(4,1)$ a $(-2,0)$

NEU: Locws P yw hanerydd perpendicwlar y llinell sy'n cysylltu'r pwyntiau $(4,1)$ a $(-2,0)$.

[$|z-4-i|$ yw'r pellter o'r rhif cymhlyg $4+i$ sydd efo cyfesuryn $(4,1)$ ar y diagram Argand.

$|z+2|$ yw'r pellter o'r rhif cymhlyg $-2+0i$ sydd efo cyfesuryn $(-2,0)$ ar y diagram Argand.]

Uned 1 Pellach Haf 2018

8) T_1 = trawsfudiad $(x, y) \mapsto (x-1, y+1)$
T_2 = adlewyrchiad yn y llinell $y = x$.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $T = T_2 T_1$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Mae pwyntiau sefydlog yn aros yn yr un lle o dan T.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y+1 \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Felly $y + 1 = x$, $\quad x - 1 = y$

$\underline{y = x - 1}$ $\quad \underline{y = x - 1}$

Y llinell o bwyntiau sefydlog yw $\underline{y = x - 1}$

c) $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Felly $T^2 = I$
ond hefyd $TT^{-1} = I$
felly mae $T = T^{-1}$.

Felly $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Uned 1 Pellach Haf 2018

9) $A = (1, 2, -3)$. $B = (-2, 1, 0)$

$\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k}$ $\underline{b} = -2\underline{i} + \underline{j}$

a) i) $\underline{AB} = -\underline{a} + \underline{b}$

$= -\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k} - 2\underline{i} + \underline{j}$

$= -3\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}$.

Hafaliad fector L_1: $\underline{r} = \underline{a} + \lambda(\underline{AB})$

$\underline{r} = \underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k} + \lambda(-3\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k})$

$\underline{r} = \underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k} - 3\lambda\underline{i} - \lambda\underline{j} + 3\lambda\underline{k}$

$\underline{r} = (1-3\lambda)\underline{i} + (2-\lambda)\underline{j} + (-3+3\lambda)\underline{k}$

✓

ii) Hafaliad Cartesaidd llinell sy'n mynd trwy'r pwynt (a, b, c) ac sydd efo'r cyfeiriad $p\underline{i} + q\underline{j} + r\underline{k}$ yw

$$\frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}.$$

Felly hafaliad cartesaidd L_1 yw

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{3}$$

L_2: $\underline{r} = 2\underline{i} - 4\underline{j} + \mu(4\underline{j} + 7\underline{k})$

b) Os yw L_1 ag L_2 yn croestorri, yna

$1 - 3\lambda = 2$, $2 - \lambda = -4 + 4\mu$, $-3 + 3\lambda = 7\mu$

$1 - 2 = 3\lambda$

$-1 = 3\lambda$

$\lambda = -\frac{1}{3}$

$2 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -4 + 4\mu$

$\frac{7}{3} = -4 + 4\mu$

$\frac{19}{3} = 4\mu$

$\mu = \frac{19}{12}$

Os yw'r llinellau yn croestorri bydd $\lambda = -\frac{1}{3}$, $\mu = \frac{19}{12}$ yn gweithio yn y trydydd hafaliad.

$$-3 + 3\lambda = 7\mu$$
$$-3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 7\left(\frac{19}{12}\right)$$
$$-3 - 1 = \frac{133}{12}$$
$$-4 = \frac{133}{12}$$

Nid yw'r hafaliad yma'n wir felly nid yw L_1 ag L_2 yn croestorri.

c) Gadewch i'r normal cyffredin fod yn $\underline{n} = p\underline{i} + q\underline{j} + r\underline{k}$.

Mae $\underline{n}$ ag L_1 yn berpendicwlar felly
$$(p\underline{i} + q\underline{j} + r\underline{k}) \cdot (-3\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}) = 0$$
$$-3p - q + 3r = 0 \quad \text{—— } 1$$

Mae $\underline{n}$ ag L_2 hefyd yn berpendicwlar felly
$$(p\underline{i} + q\underline{j} + r\underline{k}) \cdot (4\underline{j} + 7\underline{k}) = 0$$
$$p \times 0 + 4q + 7r = 0$$
$$4q + 7r = 0 \quad \text{—— } 2$$

Gadewch i'r paramedr t gynrychioli r. $(t = r)$.

$2 \Rightarrow$
$$4q + 7t = 0$$
$$4q = -7t$$
$$q = -\frac{7}{4}t$$

$1 \Rightarrow$
$$-3p - \left(-\frac{7}{4}t\right) + 3t = 0$$
$$-3p + \frac{7}{4}t + 3t = 0$$
$$-3p = -\frac{19}{4}t$$
$$p = \frac{19}{12}t$$

Felly $\underline{n} = \frac{19}{12}t\underline{i} - \frac{7}{4}t\underline{j} + t\underline{k}$ (gyda $t \neq 0$)