CBAC
WJEC

MATHEMATEG

Mathemateg Bur
Uned P2

Dr H Thomas

SAFON UG/UWCH

Cyhoeddwyd gan Uned Iaith Genedlaethol Cymru,
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru,
245 Rhodfa'r Gorllewin,
Caerdydd
CF5 2YX

Mae Uned Iaith Genedlaethol Cymru
yn rhan o WJEC CBAC Cyf.,
cwmni a gyfyngir gan warant
ac a reolir gan awdurdodau unedol Cymru.

Mathemateg Safon UG/Uwch CBAC
Mathemateg Bur
Uned P2

Cyhoeddwyd dan nawdd Cynllun Cyhoeddiadau
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru

Cyhoeddwyd gyntaf 2001

Argraffwyd gan gwmni Hackman Cyf.,
Cwm Clydach, Tonypandy, Rhondda CF40 2XX

ISBN: 1 86085 500 8

RHAGYMADRODD

Dyma'r ail o dair cyfrol sydd rhyngddynt yn ymdrin â'r rhan fwyaf o'r dulliau mathemategol sy'n angenrheidiol ar gyfer cwrs modylol Safon Uwch mewn mathemateg. Yn benodol, mae'r cynnwys wedi ei seilio ar Fanyleb P2 Cyd-bwyllgor Addysg Cymru a gyflwynwyd ym mis Medi 2000.

Cymerir yn ganiataol bod y darllenwyr wedi cwblhau cwrs TGAU mathemateg yn llwyddiannus a bod cyfrifiannell wrth law sy'n cynnwys ffwythiannau mathemategol.

Ar derfyn y gyfrol ceir chwe phapur adolygu. Credir y dylai myfyrwyr sy'n barod i sefyll eu harholiadau Safon Uwch gwblhau'r profion hyn mewn oddeutu awr.

CYNNWYS

Pennod 1

Datrys Anhafaleddau

Ystyriwyd sut i ddatrys hafaliadau yn **P1.** Yno, soniwyd am anhafaleddau wrth ystyried gwahanolyn ffwythiant cwadratig. Yma, rydym yn edrych yn fanylach ar anhafaleddau.

1.1 Anhafaleddau

Yn aml mewn mathemateg gofynnir i ni ystyried perthnasoedd megis

$$2b + 6 > 4$$

neu $$c^2 - 2c < 6$$

neu $$2y^2 + 3y + 5 \geq 0 \quad \text{ac ati.}$$

Mae'r symbol $>$ yn golygu mwy na,
$<$ yn golygu llai na,
ac mae $\geq$ yn golygu mwy na neu'n hafal i.

Nodwch fod pen miniog y saethau $>$ a $<$ bob amser yn pwyntio at y rhif lleiaf. Felly mae $6 > 5$ ac mae $3 < 4$.

Ymarferion 1.1

Defnyddiwch yr arwyddion $>$, $<$ a $\geq$ i ysgrifennu'r datganiadau canlynol:

a) Mae 12 yn fwy na 9.
b) Mae 4 yn llai na 7.
c) Mae x yn fwy na neu'n hafal i y.
d) Mae m yn bositif.
e) Nid yw p yn negatif.

Gelwir perthnasoedd sy'n cynnwys $>$ a $<$ yn **anhafaleddau**. Pan na chaniateir y posibilrwydd o hafaledd (h.y. $>$ a $<$ yn hytrach na $\geq$ neu $\leq$) dywedir bod yr anhafaledd yn **anhafaledd manwl**.

Pan fo anhafaleddau yn cynnwys llythrennau, e.e. $2z + 6 > 10$, rydym fel arfer am ddarganfod amrediad gwerthoedd y llythyren (z yn yr enghraifft uchod) er mwyn bodloni'r anhafaledd; hynny yw, rydym am <u>ddatrys</u> yr anhafaledd. Yn y llyfr hwn ystyrir sut i ddatrys anhafaleddau llinol neu gwadratig, er enghraifft

$$6 - 4a < 3,$$

a $$2x^2 + 9x + 7 \geq 0.$$

Dechreuwn ag anhafaleddau llinol. Gellir addasu'r rheolau yn llyfr **P1** sy'n ymwneud â hafaliadau er mwyn eu defnyddio gydag anhafaleddau.

Rheolau trin a thrafod anhafaleddau

Yn y rheolau canlynol mae a, b, c a d yn rhifau real.

(i) Os yw $a > b$ yna mae
$a - b > 0$.

$6 > 2$
$6 - 2 > 2 - 2$
h.y. $4 > 0$

(ii) Os yw $a > b$ yna mae
$a + c > b + c$
ac $a - d > b - d$.

$7 > 3$
$7 + 2 > 3 + 2$
h.y. $9 > 5$

$8 > 5$
$8 - 3 > 5 - 3$
h.y. $5 > 2$

(iii) Os yw $ad > bd$ a d yn bositif ($d > 0$)
yna mae $a > b$.

$12 > 9$
felly $\frac{12}{3} > \frac{9}{3}$
h.y. $4 > 3$

(iv) Os yw $ad > bd$ a d yn negatif ($d < 0$)
yna mae $a < b$.

$6 > -4$
$\frac{6}{-2} < \frac{-4}{-2}$
h.y. $-3 < 2$

(v) Os yw $\dfrac{a}{d} > b$ a d yn bositif ($d > 0$)
yna mae $a > bd$.

$\frac{36}{9} > 3$
felly $36 > 27$

(vi) Os yw $\dfrac{a}{d} > b$ a d yn negatif ($d < 0$)
yna mae $a < bd$.

$\frac{-24}{-3} > 5$
felly $-24 < -15$

(vii) Os yw $ab > 0$
yna mae $a > 0$ <u>ac</u> mae $b > 0$
<u>neu</u> mae $a < 0$ <u>ac</u> mae $b < 0$.

Mae lluoswm dau rif positif neu ddau rif negatif yn bositif.

(viii) Os yw $ab < 0$
yna mae $a < 0$ <u>ac</u> mae $b > 0$

<u>neu</u> mae $a > 0$ <u>ac</u> mae $b < 0$.

Mae lluoswm rhif positif a rhif negatif yn negatif.

Mae rheolau (iii) – (vi) yn bwysig iawn ac yn aml yn arwain at gamgymeriadau mewn problemau. Yn y bôn, nid yw lluosi (neu rannu) trwy anhafaledd cyfan yn achosi newid yng nghyfeiriad yr anhafaledd (mae > yn arwain at >, ac mae < yn arwain at <) os yw'r rhif sy'n lluosi neu'n rhannu yn bositif.
Fodd bynnag, os yw'r lluosi neu'r rhannu yn cynnwys rhif negatif caiff cyfeiriad yr anhafaledd ei gildroi (h.y. mae > yn arwain at < , ac mae < yn arwain at >).

Enghraifft 1.1
Datryswch (darganfyddwch amrediad gwerthoedd x) yr anhafaledd

$$3x - 6 < 4.$$

Mae'r strategaeth gyffredinol yn debyg i'r un ar gyfer hafaliadau llinol: sef cael x yn unig ar un ochr.

$\therefore$ $3x < 4 + 6$ (Rheol (ii), adio 6 at bob ochr)
ac felly $3x < 10$.
$\therefore$ $x < \dfrac{10}{3}$. (Rheol (iii), rhannu â rhif positif)

Enghraifft 1.2
Datryswch $2x - 4 \geq 7x - 2$.
Yna mae $2x - 4 - 7x \geq -2$ (Rheol (ii), tynnu $7x$ o'r ddwy ochr)
ac felly $-5x - 4 \geq -2$.
$\therefore$ $-5x \geq -2 + 4$ (Rheol (ii), adio 4 at bob ochr)
a $-5x \geq 2$.
$\therefore$ $x \leq -\dfrac{2}{5}$. (Rheol (iv), mae rhannu â rhif negatif, sef -5 yma, yn cildroi'r anhafaledd)

Nid oes angen nodi'r rheolau fel a wnaed yn enghreifftiau 1.1 ac 1.2, ond nes eich bod yn gyfarwydd â hwy, fe'ch cynghorir i gyfiawnhau pob cam fel hyn. Mae'r dull o ddatrys anhafaleddau cwadratig hefyd yn defnyddio Rheol (viii).

Enghraifft 1.3
Datryswch $x^2 - 6x + 8 > 0$.

Mae'r ochr chwith yn ffactorio a chawn $(x - 4)(x - 2) > 0$.
Yna naill ai $x - 4 > 0$ <u>ac</u> $x - 2 > 0$ (Rheol vii)
neu $x - 4 < 0$ <u>ac</u> $x - 2 < 0$.
Felly naill ai $x > 4$ <u>ac</u> $x > 2$ h.y. $x > 4$
<u>neu</u> $x < 4$ <u>ac</u> $x < 2$ h.y. $x < 2$.
Felly mae cyfuno'r ddau ddatganiad yn rhoi'r datrysiad $x > 4$ neu $x < 2$.

Enghraifft 1.4
Datryswch $x^2 - x - 4 \leq x + 4$.

Rydym yn symud pob term i un ochr

$\therefore$ $x^2 - x - 4 - x - 4 \leq 0$

Rheol (i) gyda $\leq$ yn lle $>$.

sy'n rhoi $x^2 - 2x - 8 \leq 0$.
Mae'r ochr chwith yn ffactorio.
$\therefore (x - 4)(x + 2) \leq 0$.
O Reol (viii), mae un ffactor yn bositif ac un yn negatif. Mae'r geiriau 'yn gynwysedig' yn y llinell olaf isod yn caniatáu'r posibilrwydd o gael hafaledd.

Achos 1 $\quad x-4>0$ a $x+2<0$

$\therefore \quad x>4$ a $x<-2$.

Mae hyn yn amhosibl.

Anwybyddwch hafaledd posibl, gweler y llinell olaf.

Achos 2 $\quad x-4<0$ a $x+2>0$

$\therefore \quad x<4$ a $x>-2$

$\therefore \quad -2\le x\le 4$,

h.y. mae x yn gorwedd rhwng -2 a 4 (yn gynwysedig).

Cofiwch nawr ganiatáu ar gyfer hafaledd posibl.

Weithiau ni fydd y cwadratig yn ffactorio, ac mewn achosion o'r fath rydym yn troi at gwblhau'r sgwâr.

Enghraifft 1.5

Datryswch $\quad x^2+8x-18<0$.

Nid yw'r ochr chwith yn ffactorio, ac rydym yn cwblhau'r sgwâr.

Yna mae $\quad (x+4)^2-16-18<0$.

$\therefore \quad (x+4)^2-34<0$

ac felly $\quad (x+4)^2<34$.

Nawr mae $\quad -\sqrt{34}<x+4<\sqrt{34}$.

$\therefore \quad -\sqrt{34}-4<x<\sqrt{34}-4$.

Rhaid i werthoedd x fod rhwng $-\sqrt{34}-4$ a $\sqrt{34}-4$.

Gweler P1 ar gyfer cwblhau'r sgwâr.

Mae gan unrhyw rif rhwng $-\sqrt{34}$ a $\sqrt{34}$ sgwâr sy'n llai na $+34$.

Enghraifft 1.6

Datryswch $\quad x^2-4x-10\ge 0$.

Mae cwblhau'r sgwâr yn rhoi

$$(x-2)^2-4-10\ge 0$$

ac felly $\quad (x-2)^2\ge 14$.

Yna mae $(x-2)\ge\sqrt{14}$ neu $(x-2)\le-\sqrt{14}$.

Mae'r cyntaf yn rhoi $\quad x\ge 2+\sqrt{14}$,

mae'r ail yn rhoi $\quad x\le 2-\sqrt{14}$.

$\therefore$ Y datrysiad yw $\quad x\ge 2+\sqrt{14}$

neu $\quad x\le 2-\sqrt{14}$.

Yn aml mae anhafaleddau yn digwydd fel rhan o broblem fwy.

Enghraifft 1.7

Canfyddwch amrediad gwerthoedd d fel bod gan yr hafaliad cwadratig (yn x)

$$(d+2)x^2-2dx+1=0 \quad \text{wreiddiau real.}$$

Wrth gymharu hwn â'r hafaliad cwadratig safonol, gwelwn fod

$$a = d+2, b = -2d, \ c = 1$$

Mae gan gwadratig $ax^2 + bx + c = 0$ wreiddiau real os yw $b^2 \geq 4ac$.

Felly mae $\quad (-2d)^2 - 4(1)(d+2) \geq 0$

ac felly $\quad 4d^2 - 4(d+2) \geq 0$

neu $\quad d^2 - (d+2) \geq 0.$ (Rheol (iii) gan rannu â 4)

$\therefore \quad d^2 - d - 2 \geq 0.$

Trwy ffactorio, cawn $(d+1)(d-2) \geq 0.$

Yna mae $d+1 \geq 0$ <u>ac mae</u> $d-2 \geq 0$

neu mae $d+1 \leq 0$ <u>ac mae</u> $d-2 \leq 0.$ (Rheol vii)

Mae'r pâr cyntaf o anhafaleddau yn rhoi $d \geq 2$
ac mae'r ail bâr o anhafaleddau yn rhoi $d \leq -1$.
Felly mae gan yr hafaliad cwadratig wreiddiau real os yw $d \leq -1$ neu $d \geq 2$.

Ymarferion 1.2

1. Darganfyddwch amrediad gwerthoedd x sy'n bodloni'r anhafaleddau llinol canlynol:
(i) $6 < 2 + x$ (ii) $7 > 3 - x$ (iii) $4 - x < 6x$
(iv) $5 - 2x > 3x + 2$ (v) $7 - 2x > -5 - 3x$
(vi) $3(x-1) \leq 2$ (vii) $3(x+5) > 2(x-3)$
(viii) $2(x-3) - 3(x-1) \leq 4(x+1) - 7(x-3)$

2. Darganfyddwch amrediad gwerthoedd x sy'n bodloni'r anhafaleddau canlynol:
(i) $x^2 + 6x + 5 > 0$ (ii) $x^2 - 9x + 20 < 0$
(iii) $x^2 + 6x - 7 \geq 0$ (iv) $x^2 + 18x + 72 \leq 0$
(v) $2x^2 - 5x + 1 > 0$ (vi) $5x^2 - 18x + 16 < 0$
(vii) $5x^2 - 2x - 16 > 0$ (viii) $2x^2 - 5x - 1 \leq 0$
(ix) $3x^2 - 7x + 3 \geq 0$ (x) $4x^2 + 5x - 1 \leq 0$
(xi) $x^2 + x + 3 < 2x + 5$

3. Darganfyddwch amrediad gwerthoedd k
(i) fel bod gan $(k+1)x^2 - 2x - 3 = 0$ wreiddiau real
(ii) fel nad oes gan $3x^2 - kx + 4 = 0$ wreiddiau real
(iii) fel bod gan $(2k+1)x^2 + (k+2)x + 1 = 0$ wreiddiau real
(iv) fel nad oes gan $(k+1)x^2 + 3x - 2 = 0$ wreiddiau real
(v) fel bod gan $(k+3)x^2 + (2k+1)x + (k+1) = 0$ wreiddiau real.

4. Dangoswch fod gan yr hafaliad $(2a-1)x^2 - 2ax + 1 = 0$
wreiddiau real beth bynnag yw gwerth a, cyn belled â bod a yn real.

1.2 Yr Arwydd Modwlws

Modwlws rhif real yw mesur o'i faint heb ystyried arwydd y rhif. Dynodir y modwlws gan y symbol | |. Felly mae

$$|3| = 3 \text{ yn ogystal â } |-3| = 3.$$

Ymarferion 1.3

1. Ysgrifennwch fodwli y rhifau real canlynol:

(i) -2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) $4-16-12$

Effaith yr arwydd modwlws felly yw neilltuo arwydd positif i bob rhif. Weithiau ceir yr arwydd modwlws mewn anhafaleddau.

Enghraifft 1.8

Datryswch yr anhafaledd

$$|x-6| < 4.$$

Os yw maint rhif yn llai na 4, beth bynnag fo'r arwydd, rhaid i'r rhif fod rhwng –4 a 4.

$\therefore \quad -4 < x-6 < 4$

ac felly $-4+6 < x < 4+6$.

$\therefore \quad 2 < x < 10$.

Rheol (ii) adran 1.1

Enghraifft 1.9

Datryswch $|2x-7| > 5$.

Noder bod $|-8| > 5$, er enghraifft.

Yna mae $2x-7 > 5$

neu $2x-7 < -5$.

Mae'r cyntaf yn rhoi $2x > 7+5$

ac felly $2x > 12$

ac $x > 6$.

Mae'r ail yn rhoi $2x < 7-5$

ac felly $2x < 2$

ac $x < 1$.

Y datrysiad yw $x > 6$ neu $x < 1$.

Ymarferion 1.4

1. Datryswch yr anhafaleddau :-

(i) $|x+7| < 9$ (ii) $|2x-3| > 6$

(iii) $|5-4x| < 6$ (iv) $|3-2x| \geq 2$

2. Datryswch yr hafaliadau

(i) $|x-2| = 5$ (ii) $|2x-3| = 7$

(iii) $|5-2x| = 13$ (iv) $|x^2-12x+5| = 3$

(v) $|2y^2+4y-1| = 2$

Awgrym: os yw $|a| = 3$ yna mae $a = 3$ neu -3.

1.3 Nodiant Cyfwng

Yn y ddwy adran flaenorol mynegwyd datrysiadau i anhafaleddau ar y ffurf $x > -5$, $x \leq 7$, $9 \leq x < 12$, $x > 2$ neu $x \leq -4$, ac ati. Mae'n gyfleus ysgrifennu datrysiadau o'r fath ar ffurf cyfyngau.

Gellir ysgrifennu'r amrywiol achosion fel a ganlyn:

(i) $x > -5$ fel $(-5, \infty)$,

(ii) $x \geq -5$ fel $[-5, \infty)$,

(iii) $x < 7$ fel $(-\infty, 7)$,

Mae '∞' yn nodi rhifau'n cynyddu'n ddiderfyn. Mae '$-\infty$' yn nodi rhifau'n lleihau'n ddiderfyn.

(iv) $x \le 7$ fel $(-\infty, 7]$,
(v) $9 \le x < 12$ fel $[9, 12)$,
(vi) $x < 2$ neu $x \ge 7$ fel $(-\infty, 2) \cup [7, \infty)$
(vii) $-8 < x < 4$ fel $(-8, 4)$.

Ceir y cromfachau gydag anhafaleddau manwl, a'r bachau petryal mewn anhafaleddau sydd hefyd yn caniatáu hafaledd.
Mae'r symbol $\cup$ yn y mynegiad $(-\infty, 2) \cup [7, \infty)$ yn nodi uniad dau gyfwng, neu mewn geiriau eraill, bob gwerth yn y naill gyfwng neu'r llall.

Ymarferion 1.5

1. Cynrychiolwch yr anhafaleddau canlynol ar ffurf cyfyngau:
(a) $x > -3$ (b) $x \le 6$ (c) $x \ge 9$ (d) $x < -4$
(e) $-3 \le x < 21$ (f) $x \ge 9$ a $x < 12$
(g) $x > -5$ ac $x \le 20$ (h) $x \ge -20$ neu $x \le -30$

2. Mynegwch ddatrysiadau'r anhafaleddau yn Ymarferion 1.2, cwestiynau 2(i) – (iv) ar ffurf cyfyngau.

Pennod 2

Ffactorio a Dwy Theorem

Yng nghyfrol **P1**, fe wnaethom ystyried sut i ffactorio mynegiadau cwadratig, h.y. polynomialau o radd dau. Yma rydym am ystyried sut i ffactorio polynomialau o radd uwch.

Gall ffactorio polynomialau olygu rhannu un polynomial ag un arall. Am y rheswm hwnnw, byddwn yn dechrau drwy ystyried y broses o rannu polynomialau.

2.1 Rhannu polynomialau

Dewch i ni ddechrau drwy ystyried enghraifft.

Enghraifft 2.1

Rhannwch $x^3 + 7x^2 + 4x - 9$ ag $x + 2$.

Mae'r dull a ddefnyddir yma yn debyg i'r dull o rannu rhif â rhif arall heb ddefnyddio cyfrifiannell. Rydym yn tynnu $x + 2$ o $x^3 + 7x^2 + 4x - 9$ cymaint o weithiau ag sy'n bosibl.

Gyda rhifau, gellir rhannu 38 â 6 drwy dynnu 6 o 38 chwe gwaith, gan adael gweddill o 2.

Caiff y termau yn $x^3 + 7x^2 + 4x - 9$ eu diddymu fesul un fel a ganlyn:

$$
\begin{array}{lr}
 & x^2 + 5x - 6 \\
x + 2 & \overline{)\,x^3 + 7x^2 + 4x - 9} \\
 & \underline{x^3 + 2x^2} \qquad\quad \\
\textbf{Tynnu} & 5x^2 + 4x \qquad \\
 & \underline{5x^2 + 10x} \qquad \\
\textbf{Tynnu} & -6x - 9 \\
 & \underline{-6x - 12} \\
\textbf{Tynnu} & 3
\end{array}
$$

I ddiddymu x^3, lluosi $x + 2$ ag x^2.

Dod â'r term nesaf i lawr a diddymu $5x^2$ trwy luosi $x + 2$ â $5x$.

Dod â'r term nesaf i lawr a diddymu $-6x$ trwy luosi $x + 2$ â -6.

$-9 - (-12) = -9 + 12 = 3.$

Nid yw'r gweddill 3 yn cynnwys x felly nid oes angen diddymu ymhellach ac rydym wedi gorffen.

Felly mae
$$\frac{x^3 + 7x^2 + 4x - 9}{x + 2} \equiv x^2 + 5x - 6 + \frac{3}{x + 2} \qquad (x \neq -2)$$
neu yn yr un modd mae
$$x^3 + 7x^2 + 4x - 9 \equiv (x^2 + 5x - 6)(x + 2) + 3.$$

Dylid nodi'r pwyntiau canlynol.

1. Mae dull y rhaniad hir yn golygu bod rhaid ceisio diddymu'r pŵer uchaf o x ym mhob cam.
2. Daw'r broses i ben pan na ellir diddymu ymhellach drwy luosi â phŵer o x neu â rhif.
3. Ym mhob cam, mae arwyddion y termau sydd â'r pwerau uchaf yr un fath ac felly trwy dynnu y bydd modd diddymu bob tro.

$$\begin{array}{r} -6x-9 \\ \underline{-6x-12} \\ 3 \end{array}$$

Enghraifft 2.2

Rhannwch $8x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 9x + 5$ â $2x - 3$.

Er bod y term cyntaf yn cynnwys x^4 yn hytrach nag x^3, fel gyferbyn, yr un yw'r dull.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 4x^3 - 6x^2 - 7x - 15 \\ \hline 2x-3 & 8x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 9x + 5 \\ & \underline{8x^4 - 12x^3} \\ & \quad -12x^3 + 4x^2 \\ & \quad \underline{-12x^3 + 18x^2} \\ & \qquad -14x^2 - 9x \\ & \qquad \underline{-14x^2 + 21x} \\ & \qquad\quad -30x + 5 \\ & \qquad\quad \underline{-30x + 45} \\ & \qquad\qquad -40 \end{array}$$

diddymu $8x^4$

diddymu $-12x^3$

diddymu $-14x^2$

ni ellir diddymu -40

Felly mae $\dfrac{8x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 9x + 5}{2x - 3} \equiv 4x^3 - 6x^2 - 7x - 15 - \dfrac{40}{2x - 3}$ $(x \neq \tfrac{3}{2})$

Neu mae $8x^4 - 24x^3 + 4x^2 - 9x + 5 \equiv (4x^3 - 6x^2 - 7x - 15)(2x - 3) - 40$.

Gellir defnyddio'r dull hwn hefyd pan fo gradd y mynegiad ar y gwaelod yn fwy nag un.

Enghraifft 2.3

Rhannwch $2x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ ag $x^2 + 6x + 1$.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x^2 - 9x + 61 \\ \hline x^2+6x+1 & 2x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 5x + 1 \\ & \underline{2x^4 + 12x^3 + 2x^2} \\ & \quad -9x^3 + 7x^2 - 5x \\ & \quad \underline{-9x^3 - 54x^2 - 9x} \\ & \qquad 61x^2 + 4x + 1 \\ & \qquad \underline{61x^2 + 366x + 61} \\ & \qquad\quad -362x - 60 \end{array}$$

diddymu $2x^4$

diddymu $-9x^3$

$7x^2 - (-54x^2)$
$= 7x^2 + 54x^2 = 61x^2$

Daw'r broses hon i ben gan fod gradd $-362x - 60$ yn llai na gradd $x^2 + 6x + 1$ ac felly ni ellir diddymu ymhellach.

$\therefore \quad 2x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 5x + 1 \equiv (x^2 + 6x + 1)(2x^2 - 9x + 61) - 362x - 60.$

Weithiau, bydd un polynomial yn rhannu'n berffaith i un arall ac ni cheir gweddill.

Enghraifft 2.4

Dangoswch fod $2x + 3$ yn rhannu'n berffaith i $2x^3 + 5x^2 - 9x - 18$.

$$
\begin{array}{r l}
 & \phantom{2x^3+{}} x^2 + x - 6 \\
2x + 3 & \overline{)\, 2x^3 + 5x^2 - 9x - 18} \\
 & \underline{2x^3 + 3x^2} \\
 & \phantom{2x^3+{}} 2x^2 - 9x \\
 & \phantom{2x^3+{}} \underline{2x^2 + 3x} \\
 & -12x - 18 \\
 & \underline{-12x - 18} \\
 & - - - -
\end{array}
$$

Felly mae $\quad 2x^3 + 5x^2 - 9x - 18 \equiv (2x + 3)(x^2 + x - 6).$

Os yw ffactor llinol yn rhannu'n berffaith i bolynomial arall, gellir gwneud y rhaniad drwy ddefnyddio dull gwahanol.

Enghraifft 2.5

O wybod fod $3x - 2$ yn rhannu'n berffaith i $3x^3 - 17x^2 + 37x - 18$, gallwn ysgrifennu

$$3x^3 - 17x^2 + 37x - 18 = (3x - 2)(x^2 + ax + 9).$$

Rhaid i radd y mynegiad yn yr ail gromfach fod yn ddau a rhaid iddo fod yn y ffurf a ddangosir fel bod y termau x^3 a'r termau cysonyn yn cyd-fynd.

$$3x^3 \_\_\_\_\_\_ - 18 \equiv (3x - 2)(x^2 + ax + 9)$$

$$3x^3 \qquad\qquad -18$$

Mae'r cysonyn a yn anhysbys ond gellir ei ddarganfod yn hawdd drwy ystyried y termau yn x^2 neu yn x.

<u>Y term yn x^2</u>

$$3x^3 - 17x^2 + 37x - 18 = (3x - 2)(x^2 + ax + 9)$$

Ffurfir y termau x^2 fel a ddangosir.

Felly mae $\quad -17x^2 \equiv -2x^2 + 3ax^2$

a $\quad -17 + 2 = 3a \quad$ (drwy ganslo x^2).

$\therefore \quad a = -5,$

neu, ar gyfer y term yn x

$$(3x - 2)(x^2 + ax + 9)$$

mae $\quad 37x \equiv 27x - 2ax$

felly $\quad 10 = -2a$

ac $\quad a = -5, \quad$ fel o'r blaen.

Mae amnewid am a yn y ffactoriad a awgrymir yn rhoi

$$3x^3 - 17x^2 + 37x - 18 \;=\; (3x-2)(x^2 - 5x + 9).$$

Enghraifft 2.6

O wybod fod $2x - 5$ yn rhannu'n berffaith i $2x^4 - 11x^3 + 17x^2 - x - 10$, gallwn ysgrifennu

$$2x^4 - 11x^3 + 17x^2 - x - 10 \;\equiv\; (2x-5)(x^3 + ax^2 + bx + 2).$$

$$2x^4 \qquad\qquad -10$$

Ceir ffurf y mynegiad ciwbig ar yr ochr dde drwy ystyried y termau yn x^4 $(2x^4)$ a'r term cysonyn (-10). Ceir gwerth y cysonion a a b drwy ystyried y termau yn x^3, x^2 neu x.

<u>Y term yn x</u>

	$-x$	$\equiv 4x - 5bx$
felly	$-5x$	$\equiv -5bx$
neu	b	$= 1.$

$(2x-5)(x^3 + ax^2 + bx + 2)$

<u>Y term yn x^2</u>

	$17x^2$	$\equiv 2x^2 - 5ax^2$
felly	$15x^2$	$\equiv -5ax^2$
ac	a	$= -3.$

$(2x-5)(x^3 + ax^2 + x + 2)$

Yna mae $\;2x^4 - 11x^3 + 17x^2 - x - 10 \;=\; (2x-5)(x^3 - 3x^2 + x + 2).$

O ystyried y term yn x^3 cawn

	$-11x^3$	$\equiv -5x^3 + 2ax^3$
felly mae	$-6x^3$	$\equiv 2ax^3$
ac	a	$= -3$, fel o'r blaen.

Nid oes angen gwneud hyn, ond fe'i rhoddir fel ffordd o wirio:
$(2x-5)(x^3 + ax^2 + bx + 2)$

Ymarferion 2.1

1. Darganfyddwch y berthynas rhwng y polynomialau A a B yn y ffurf

Polynomial A $\equiv$ (polynomial B)(polynomial) + gweddill

ar gyfer yr achosion canlynol:

(i)	(A) $x^2 - 3x - 2$	(B) $x + 3$
(ii)	(A) $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$	(B) $x - 5$
(iii)	(A) $2x^3 - 7x^2 + 6x - 3$	(B) $2x + 1$
(iv)	(A) $12x^4 - 8x^3 + 21x^2 + 1$	(B) $6x + 5$
(v)	(A) $12x^4 - x^3 + 12x^2 - 7$	(B) $4x^2 - 3x + 2$

2. Darganfyddwch y mynegiadau a ddynodir gan (?) yn y canlynol:

(i) $3x^3 + 5x^2 - 25x - 7 = (3x-7)(?)$

(ii) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+2)(?)$

(iii) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = (x^2 - 3x + 2)(?)$

3. Dangoswch fod $x - 5$ yn rhannu'n berffaith i $x^3 - 4x^2 - 17x + 60$ a ffactoriwch y polynomial.

4. Dangoswch fod $x - 2$ ac $x - 3$ yn rhannu'n berffaith i $x^4 - 6x^3 - x^2 + 54x - 72$ a ffactoriwch y polynomial.

2.2 Dwy theorem

Mae Cwestiwn 3, Ymarferion 2.1 yn dangos ei bod yn hawdd darganfod y ffactorau eraill mewn polynomial ciwbig os yw un o'r ffactorau yn hysbys. Yn benodol, mae

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= x^3 - 4x - 17x + 60 \\ &\equiv (x-5)(x^2+x-12) \\ &\equiv (x-5)(x+4)(x-3). \end{aligned}$$

Yn amlwg, mae'r broses o ffactorio polynomialau o radd uwch na dau yn dibynnu'n fawr ar wybod ffactor er mwyn dechrau'r broses. Mae llawer o'r adran hon yn ymwneud â dod o hyd i'r ffactor cyntaf hollbwysig hwnnw.

Dewch i ni fwrw golwg dros ein darganfyddiadau yn Adran 2.1. Pan gaiff polynomial $\mathrm{f}(x)$ ei rannu â ffactor llinol $x - a$ cawn

$$\mathrm{f}(x) \equiv (x-a)\,Q(x) + R,$$

lle mae $Q(x)$ yn bolynomial a'r gweddill R yn rhif.

Yn enghraifft 2.1,

$$\boldsymbol{x^3 + 7x^2 + 4x - 9 \equiv (x+2)(x^2+5x-6) + 3}$$

Mae gradd $Q(x)$ un yn llai na gradd $\mathrm{f}(x)$ ac mae gradd y rhif R, wrth gwrs, un yn llai na gradd $x - a$.

Yna, o'r uchod, drwy osod $x = a$, cawn

$$f(a) = (a-a)\,Q(a) + R$$

fel bod $\quad \mathrm{R} = f(a).$

Gelwir y canlyniad hwn yn **Theorem y Gweddill.**

<u>Theorem y Gweddill</u>
Pan gaiff mynegiad polynomaidd $f(x)$ ei rannu gyda mynegiad llinol $x - a$, ceir $f(a)$ yn weddill.

Enghraifft 2.7

Darganfyddwch y gweddill pan gaiff $x^2 + 3x + 5$ ei rannu â $x + 2$.

Drwy ysgrifennu $f(x) = x^2 + 3x + 5$ a nodi bod $a = -2$, cawn

y gweddill $= f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 5 = 3.$

Enghraifft 2.8

Pan gaiff $x^2 + bx + c$ ei rannu â $x - 1$, -14 yw'r gweddill; pan gaiff ei rannu ag $x + 1$, 0 yw'r gweddill. Darganfyddwch b ac c.

Os yw

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + bx + c, \\ f(1) &= -14, \\ f(-1) &= 0. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} 1 + b + c &= -14, && (1) \\ 1 - b + c &= 0. && (2) \end{aligned}$$

O (1), (2) gwelwn fod $b = -7$, $c = -8$.

Gwiriwch

O theorem y gweddill, gwelsom fod

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R$$

gyda $\quad R = f(a)$

Nawr pan fo $x - a$ yn ffactor o $f(x)$, ni cheir gweddill pan gaiff $f(x)$ ei rannu â $x - a$. Felly mae

$$\mathrm{R} = f(a) = 0.$$

Gelwir y canlyniad hwn yn **Theorem Ffactorio.**

> <u>Y Theorem Ffactorio</u>
> Os yw $\mathrm{f}(a) = 0$ mewn mynegiad polynomaidd $\mathrm{f}(x)$, yna mae $x - a$ yn ffactor neu, mewn geiriau eraill, mae $x - a$ yn rhannu'n berffaith i $\mathrm{f}(x)$.

Mae'r theorem ffactorio yn ddefnyddiol ar gyfer ffactorio polynomialau.

Enghraifft 2.9

Ffactoriwch $2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

Os yw $\mathrm{f}(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$, rydym yn edrych am rif i'w amnewid am x er mwyn gwneud $\mathrm{f}(x)$ yn hafal i sero.

Nawr mae

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(0) &= 2.(0^3) - (0)^2 - 13(0) - 6 = -6 \neq 0. \\
\mathrm{f}(1) &= 2 - 1 - 13 - 6 = -18 \neq 0. \\
\mathrm{f}(-1) &= -2 - 1 + 13 - 6 = 4 \neq 0. \\
\mathrm{f}(2) &= 2(2)^3 - (2)^2 - 13(2) - 6 \\
&= 16 - 4 - 26 - 6 = -20 \neq 0. \\
\mathrm{f}(-2) &= 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6 \\
&= -16 - 4 + 26 - 6 = 0.
\end{aligned}$$

nid yw'n gweithio

gwyliwch yr arwyddion: defnyddiwch gromfachau

Gan fod $\mathrm{f}(-2) = 0$, mae $x + 2$ yn ffactor.

Yna gellir rhannu gyda'r ffactor hwn i roi

$$\begin{aligned}
2x^3 - x^2 - 13x - 6 &\equiv (x + 2)(2x^2 - 5x - 3) \\
&\equiv (x + 2)(x - 3)(2x + 1),
\end{aligned}$$

drwy ffactorio'r mynegiad cwadratig yn y ffordd arferol (gweler **P1**).

$$\begin{array}{r|l}
 & \mathbf{2x^2 - 5x - 3} \\
\hline
\mathbf{x + 2} & \mathbf{2x^3 - x^2 - 13x - 6} \\
 & \underline{\mathbf{2x^3 + 4x^2}} \\
 & \quad \mathbf{-5x^2 - 13x} \\
 & \quad \underline{\mathbf{-5x^2 - 10x}} \\
 & \qquad \mathbf{-3x - 6} \\
 & \qquad \underline{\mathbf{-3x - 6}} \\
 & \qquad \mathbf{- - -}
\end{array}$$

Pan fo'r ffactor llinol yn rhannu'n berffaith i'r polynomial nid oes rhaid defnyddio dull y rhaniad hir er mwyn darganfod y ffactoriad cyntaf, fel y gwelsom yn gynharach.

Enghraifft 2.10

O wybod bod $x + 3$ yn un o ffactorau $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$, gallwn ysgrifennu

$$2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 \equiv (x+3)(2x^2 + ax + 1),$$

gyda gwerth y cysonyn a i'w ddarganfod. Mae'r dewis o gwadratig yn yr ail gromfach yn codi oherwydd

(a) fod y radd un yn llai na 3,

(b) mae $(x + 3)(2x^2 + ax + 1)$ yn rhoi'r term $2x^3$ sy'n bresennol ar y chwith,

(c) mae $(x + 3)(2x^2 + ax + 1)$ yn rhoi'r term 3 sy'n bresennol ar y chwith.

Yna ceir gwerth a drwy gymharu'r termau x neu x^2 ar yr ochr chwith â'r rhai a geir drwy gael gwared â'r cromfachau.

<u>Y term yn x</u>

$$(x + 3)(2x^2 + ax + 1)$$

	$-8x$	$\equiv x + 3ax$
$\therefore$	$-9x$	$\equiv 3ax$
ac	a	$= -3$

neu, fel arall,

$$(x + 3)(2x^2 + ax + 1)$$

<u>y term yn x^2</u>	$3x^2$	$\equiv ax^2 + 6x^2$
felly mae	$-3x^2$	$\equiv ax^2$
neu	a	$= -3$ fel o'r blaen.

Yna mae amnewid y gwerth hwn am a yn y ffactoriad gwreiddiol yn rhoi

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 &\equiv (x + 3)(2x^2 - 3x + 1) \\ &\equiv (x + 3)(2x - 1)(x - 1). \end{aligned}$$

Gellir defnyddio'r dull a ddefnyddiwyd yn Enghraifft 2.10 ar gyfer polynomialau o radd uwch.

Enghraifft 2.11

Ysgrifennwch $3x^4 - 8x^2 + 9x + 2$ fel lluoswm ffactor llinol a pholynomial o radd 3

Gwelwn fod $f(-2) = 48 - 32 - 18 + 2 = 0$
ac felly mae $x + 2$ yn ffactor.
Yna mae

$$(x + 2)(3x^3 \text{- - - -} 1) \qquad 3x^4 \qquad 2$$

$$3x^4 - 8x^2 + 9x + 2 \equiv (x + 2)(3x^3 + ax^2 + bx + 1),$$

gyda gwerthoedd a a b yn anhysbys.
Fel o'r blaen, gellir cael y termau $3x^3$ ac 1 yn hawdd drwy gymharu'r termau yn $3x^4$ a'r term cysonyn. Gellir darganfod gwerth y cysonion a a b drwy gymharu'r termau yn x, x^2 neu x^3.

<u>x</u>

$$(x + 2)(3x^3 + ax^2 + bx + 1)$$

	$9x$	$\equiv x + 2bx$
felly mae	$8x$	$\equiv 2bx$
a	b	$= 4.$

<u>x^2</u>

$$(x + 2)(3x^3 + ax^2 + 4x + 1)$$

	$-8x^2$	$\equiv 4x^2 + 2ax^2$
felly mae	$-12x^2$	$\equiv 2ax^2$
ac	a	$= -6.$

Drwy amnewid y gwerthoedd hyn am a a b cawn

$$3x^4 - 8x^2 + 9x + 2 \equiv (x + 2)(3x^3 - 6x^2 + 4x + 1).$$

Ymarferion 2.2

1. Darganfyddwch y gweddill pan gaiff y mynegiadau canlynol eu rhannu â'r mynegiadau llinol a nodir.

   (i) $x^3 + x - 2, \quad x + 1$ (ii) $x^3 - 2x^2 + 3x + 1, \quad x - 2$

   (iii) $x^4 + x^3 - 2, \quad x - 1$ (iv) $x^4 + x^3 - 3x^2 + 1, \quad x + 2$

2. Os oes gan $x^4 + 7x^2 - x + a$ weddill 2 pan gaiff ei rannu ag $x + 1$, darganfyddwch a.

3. O wybod bod gan $x^3 + bx^2 + cx - 2$ weddill 12 pan gaiff ei rannu ag $x - 2$, a gweddill 0 pan gaiff ei rannu â $x + 1$, darganfyddwch b ac c.

4. Ffactoriwch y mynegiadau canlynol. Gallai'r atebion gynnwys ffactorau cwadratig.

   (i) $x^3 - 3x^2 + 4$ (ii) $x^3 - 2x^2 + 1$

   (iii) $x^4 - x^2 + 4x - 4$ (iv) $x^3 - 3x^2 - x + 6$

5. Darganfyddwch werth k os yw $x - 2$ yn un o ffactorau $x^3 + 6x^2 + kx - 4$.

6. Darganfyddwch werthoedd a a b os yw $x - 2$ ac $x + 3$ yn rhannu'n berffaith i $x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 24$.

7. O wybod bod $x - 2$ yn un o ffactorau $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$, lle mae a a b yn gysonion, a bod gan f werth sefydlog pan fo $x = -1$, darganfyddwch werthoedd a a b. Ffactoriwch $f(x)$.

8. Dangoswch na ellir darganfod cyfanrif positif n fel bod $x + 4$ yn un o ffactorau $x^{2n} + 64$.

9. Darganfyddwch werth n os yw $x + 2$ yn un o ffactorau $x^{2n} + 64$.

Pennod 3

Ehangiad binomaidd gydag indecs cyfannol positif

Mae mynegiad binomaidd yn cynnwys dau derm. Felly mae $2 + x$, $a + b$, $7y + 3$, $x^2 - 7$ ac $8a^3 + 2b^2$ i gyd yn fynegiadau binomaidd.
Weithiau rhaid lluosi allan neu ehangu pŵer binomial.
Er enghraifft,

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &\equiv (a+b)(a+b) &&\equiv a^2 + ab + ba + b^2\\ & &&= a^2 + 2ab + b^2,\\ (a+b)^3 &\equiv (a+b)^2(a+b) &&\equiv (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)\\ & &&\equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\end{aligned}$$

ar ôl symleiddio.
Nid yw'r broses luosi a roddwyd uchod yn un ymarferol. Yn ffodus ceir dwy reol ar gyfer ehangu pwerau: mae'r rheol gyntaf yn defnyddio triongl Pascal a'r ail reol yn defnyddio'r cysyniad o gyfuniadau.
Yn y bennod hon, dim ond ychydig o ystyriaeth a roddir i driongl Pascal a chanolbwyntiwn ar yr ail ddull.

3.1 Triongl Pascal

Nodwn fod

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1,\\ (a+b)^1 &= a+b.\end{aligned}$$

(unrhyw beth)^0 = 1

Trwy luosi'r ddwy ochr drosodd a throsodd ag $(a + b)$, ar ôl cyfrifiadau syml ond llafurus, ceir bod

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2,\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

Gellir ysgrifennu cyfernodau'r termau yn yr ehangiadau uchod ac ehangiadau eraill mewn trefn a elwir yn driongl Pascal (nodir hyn heb ei brofi).

Mynegiad binomaidd	Cyfernodau yn yr ehangiad
$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1

Gelwir y trefniad hwn yn driongl Pascal a gall barhau am ba nifer bynnag o resi sydd eu hangen.

Eto heb ei brofi, gwelwn y ceir y cyfernodau mewn unrhyw res yn y tabl (ar wahân i'r ffigurau 1) trwy adio'r cyfernodau cyfagos yn y rhes uwchben. Er enghraifft ystyriwch y rhesi ar gyfer $(a + b)^4$ ac $(a + b)^5$, sef

$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1

Dyma ddwy enghraifft. Rhoddir y 5 yn yr ail res gan yr 1 + 4 yn y rhes gyntaf; a rhoddir y 10 yn yr ail res gan y 6 + 4 yn y rhes gyntaf.
Gellir gweld y ceir y rhifau eraill, 10 a 5, yn yr ail res yn yr un ffordd.

Enghraifft 3.1
Gwiriwch y berthynas rhwng y cyfernodau ar gyfer $(a + b)^5$ ac $(a + b)^6$.

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Er mwyn hwylustod, gwiriwn ddau o'r cyfernodau yn rhes 2 fel a ddangosir.
Mae cyfrifo unrhyw res o driongl Pascal yn ein galluogi i ysgrifennu unrhyw ehangiad binomaidd.

Enghraifft 3.2
Ysgrifennwch res y cyfernodau ar gyfer $(a + b)^6$ a diddwythwch y rhes gyfatebol ar gyfer $(a + b)^7$. Trwy hyn, ehangwch $(a + b)^7$.

$(a + b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a + b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1

Yna $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Ymarferion 3.1

1. Defnyddiwch driongl Pascal i ehangu
   (i) $(a + b)^5$ (ii) $(a + b)^6$ (iii) $(a + b)^8$

2. Defnyddiwch driongl Pascal ac ysgrifennwch $a = 1$, $b = 2y$ i ehangu $(1 + 2y)^3$.

3. Ehangwch $(x + 3y)^4$.

4. Ehangwch $(1 - 3y)^3$.

5. Ehangwch a symleiddiwch
   (i) $\left(1+\sqrt{2}\right)^4$ (ii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3$ (iii) $\left(1+\sqrt{5}\right)^3+\left(1-\sqrt{5}\right)^3$

Mae defnyddio triongl Pascal i ehangu $(a + b)^{15}$, er enghraifft, yn llafurus oherwydd bod angen cynhyrchu rhesi o gyfernodau. Oherwydd hyn, ystyriwn ddull arall. Er mwyn cyflwyno'r dull hwn, rhaid trafod <u>trynewidion</u> a <u>chyfuniadau</u> yn gyntaf.

3.2 Trynewidion

Gadewch i ni ystyried yr enghraifft ganlynol.

Enghraifft 3.3

Gyda'r gair 'canu', sawl trefniant gwahanol y gellir ei wneud trwy gymryd dwy lythyren ar y tro?

Gellir gosod y trefniadau posibl yn gyfleus fel a ganlyn

ca	cn	cu
ac	an	au
nc	na	nu
uc	ua	un

Yma, mae gan bob pâr mewn rhes yr un llythyren gyntaf ac mae cyfanswm o bedair rhes: gellir dewis y llythyren gyntaf mewn pedair ffordd.

O fewn rhes mae tri phâr sy'n cyfateb i'r tri dewis posibl o ail lythyren (a, n, u yn y rhes gyntaf er enghraifft).

Yna nifer y trefniadau a restrwyd o bedair llythyren a gymerir fesul dwy yw

$$12 = \underbrace{4}_{\text{nifer y ffyrdd o ddewis y llythyren gyntaf}} \times \underbrace{3}_{\text{nifer y ffyrdd o ddewis yr ail lythyren}}.$$

Diffiniad

Gelwir pob un o'r trefniadau y gellir eu gwneud trwy gymryd y cyfan neu rai o blith nifer o wrthrychau yn **drynewid**. Yn enghraifft 3.3 ystyriwyd trynewidion pedair llythyren a gymerwyd fesul dwy.

Tybiwch nawr fod angen trynewidion pedair llythyren a gymerir fesul tair. Yna gellir cymryd rhes gyntaf y trefniadau posibl fel a ganlyn:

can cau cna cnu cua cun

gyda thair rhes arall o'r fath sy'n cynnwys a, n, u fel eu llythrennau cyntaf. Yna, nifer y trynewidion o 4 a gymerir fesul 3 yw

$$24 = \underbrace{4}_{\text{ffordd o ddewis y llythyren gyntaf o blith pedair}} \times \underbrace{3}_{\text{ffordd o ddewis yr ail o blith y tair sy'n weddill}} \times \underbrace{2}_{\text{ffordd o ddewis y drydedd o blith y ddwy sy'n weddill}}$$

Y canlyniad cyffredinol yw mai nifer y trynewidion a gymerir fesul r yw

$$n \times (n-1) \times (n-2) \ldots . (n-r+1) \qquad \textbf{r ffactor}$$
$$= n(n-1)(n-2) \ldots . (n-r+1).$$

Ysgrifennir y nifer hwn o drynewidion (n gwrthrych a gymerir fesul r) fel ${}^{n}\mathrm{P}_{r}$.

Nifer y trynewidion o n gwrthrych a gymerir fesul n yw

$${}^{n}\mathrm{P}_{n} = n(n-1)(n-2) \ldots . (1).$$

Caiff $n(n-1)(n-2) \ldots . (1)$ ei dalfyrru fel $n!$

(felly, er enghraifft, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$).

Gyda'r nodiant hwn,

mae ${}^{n}\mathrm{P}_{n} = n!$

ac ${}^{n}\mathrm{P}_{r} = n(n-1)(n-2) \ldots . (n-r+1)$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(1)}{(n-r)(n-r-1)\ldots(1)}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Yma, lluoswn ag 1.

Ymarferion 3.2

1. Ysgrifennwch nifer y trynewidion o 7 gwrthrych a gymerir (i) fesul 7;
(ii) fesul 5.

2. Sawl rhif tri digid y gellir ei wneud o'r set o gyfanrifau {1,2,3,4,5}?

3. Mewn sawl ffordd y gellir trefnu chwe llyfr gwahanol ar silff?

4. Sawl trefniant gwahanol y gellir ei wneud o'r gair 'modiwl', gan gymryd 3 llythyren ar y tro?

5. Ysgrifennwch werthoedd $^5P_5$ a $^5P_2$.

6. Cyfrifwch 6! + 2!.

Nid 8! yw'r ateb.

7. Cyfrifwch $\frac{8!}{(4!)^2}$.

8. Cyfrifwch $\frac{^7P_4}{4!}$.

9. Ysgrifennwch $\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$ ar ffurf ffactorial.

10. Dangoswch fod $(n-1)! + n! = (n+1)[(n-1)!]$.

3.3 Cyfuniadau

Ystyriwn eto drynewidion llythrennau'r gair 'canu', o'u cymryd fesul 3. Gwelwyd mai nifer y trynewidion yw

$$^4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

Tybiwch fod angen gwybod sawl set o 3 llythyren y gellir ei chymryd o'r gair 'canu', gan gyfrif pob set unwaith.

Nifer y setiau yw 4:

can, cau, cnu, anu

Noder nad yw'r llythrennau c, a, n, yn ymddangos hefyd fel cna, acn, nca, ac ati

Cyfeirir at nifer y setiau o 4 gwrthrych a gymerir fesul 3 fel nifer y **cyfuniadau** o 4 gwrthrych a gymerir fesul 3.

Diffiniad
Nifer y cyfuniadau o *n* gwrthrych a gymerir fesul *r* yw nifer y setiau (gan anwybyddu'r drefn) o *n* gwrthrych a gymerir fesul *r*. Fe'i dynodir gan y symbol $\binom{n}{r}$. Felly yn y sefyllfa uchod, $\binom{4}{3} = 4$.

Enghraifft 3.4

Darganfyddwch y cyfuniad $\binom{3}{2}$ o A, B, C gan gymryd dwy lythyren ar y tro.

Y cyfuniadau yw AB, BC, CA. Felly $\binom{3}{2} = 3$.

Mae'n amlwg na ellid gwneud llawer o gynnydd petai angen ysgrifennu pob cyfuniad posibl. Er enghraifft mae'r Loteri yn ymwneud â dewis 6 rhif o blith 49 ac $\binom{49}{6} = 13,983,816$ sydd bron yn 14 miliwn.

Hyd yn oed pe gallech ysgrifennu detholiad bob 5 eiliad, byddai rhestru pob achos yn cymryd dros 2 flynedd.

Fel mae'n digwydd, ceir fformiwla gyfleus ar gyfer $\binom{n}{r}$.

Er mwyn olrhain y fformiwla hon, ystyriwn enghraifft yn gyntaf.

Enghraifft 3.5
Ystyriwch y dull canlynol o ddarganfod ${}^5P_3$, nifer y trynewidion o 5 gwrthrych A, B, C, D, E (dyweder), a gymerir fesul 3.
Rydym yn gwybod mai'r ateb yw $\frac{5!}{2!} = 60$, ond anghofiwch hynny.

Yn gyntaf, ystyriwn y detholiad o 3 gwrthrych a gymerir o blith A, B, C, D, E gan gyfrif set benodol o 3 unwaith yn unig; e.e. cymerir y set A, B, C unwaith ac nid yw'r drefn y detholwyd y llythrennau ynddi yn bwysig. Yn ôl y diffiniad, nifer y setiau o'r fath yw $\binom{5}{3}$.

Yn achos trynewid lle mae'r drefn yn bwysig, bydd pob set o 3 megis A, B, C yn cynhyrchu chwe thrynewid (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA). Felly bydd pob set o 3 gwrthrych yn cynhyrchu ${}^3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1$ o drynewidion.

Yna gellir ystyried bod cyfanswm y trynewidion o 5 a gymerir fesul 3 wedi cael eu cynhyrchu trwy gymryd setiau o 3 yn gyntaf ac yna aildrefnu pob set o 3 mewn ${}^3P_3$ ffordd. Felly,

$$ {}^5P_3 \quad = \quad \binom{5}{3} \quad \times \quad 3!. $$

cyfanswm nifer y trynewidion o 5 a gymerir fesul 3 = **nifer y cyfuniadau o 5 a gymerir fesul 3** **nifer y trynewidion o set o 3 a gymerir fesul 3**

ac felly $\binom{5}{3} = \frac{^5P_3}{3!} = \frac{5!}{2!3!}$,

$\frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 10$

drwy amnewid am $^5P_3$.

Yn fwy cyffredinol,

$$^nP_r = \binom{n}{r} \times r!$$

$$\text{ac felly } \binom{n}{r} = \frac{^nP_r}{r!}.$$

$$\therefore \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Enghraifft 3.6

Sawl ffordd sydd o ddewis 11 dyn o blith 15? Petai'r dynion yn ffurfio tîm criced, darganfyddwch gyfanswm y nifer posibl o drefniadau batio.

$$\text{Nifer y setiau o 11 o blith 15} = \binom{15}{11}$$

$$= \frac{15!}{4!11!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 11!}$$

$$= 1365.$$

Noder pa mor gyfleus yw defnyddio 11! yn y mynegiad ar gyfer 15!

Cyfanswm nifer y trefniadau batio yw nifer y trynewidion o 15 a gymerir fesul 11, sef $^{15}P_{11} = \frac{15!}{4!} = 54{,}486{,}432{,}000$. Mae hyn yn llawer o drefniadau batio.

Ymarferion 3.3

1. Darganfyddwch werthoedd (i) $^9P_8$ (ii) $^{26}P_6$ (iii) $\binom{25}{5}$ (iv) $\binom{20}{15}$
2. Sawl trefniad gwahanol y gellir ei wneud trwy gymryd chwech o lythrennau'r gair <u>geometreg</u>?
3. Sawl rhif gwahanol y gellir ei wneud trwy ddewis 4 digid o blith y set $\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$? Faint ohonynt sy'n dechrau ag 8?
4. Darganfyddwch werthoedd posibl n os yw
$$\binom{n}{3} = 10\binom{n}{5} \text{ o wybod bod } n > 4.$$
5. Dewisir tîm o 4 person o blith 20 o breswylwyr mewn cartref i'r henoed i gystadlu mewn cwis cenedlaethol. Mewn sawl ffordd y gellir dewis y tîm os
(a) gellir dewis unrhyw bedwar,
(b) oes angen dewis 'yr athrylith' sy'n byw yno ymhlith y pedwar?
6. Ym Mhrydain, dechreuodd y loteri cenedlaethol ym 1995, gyda 6 phêl yn cael eu dethol o blith 49. Mewn sawl ffordd y gellir dethol set o 5, gan gyfrif pob set unwaith yn unig?

3.4 Y Theorem Finomaidd

Yn yr adran hon ystyriwn ehangiad $(x+a)^n$, lle mae n yn gyfanrif positif. Dechreuwn trwy ystyried ehangiadau $(x + a)(x + b)$, $(x + a)(x + b)(x + c)$ ac $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$.

Mae $\quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

ac $\quad (x + a)(x + b)(x + c) = [x^2 + (a + b)x + ab][x + c]$

$$= x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc.$$

Yn yr un modd, mae

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab+bc+ad+bd+cd+ac)x^2 + (abc + abd + bcd + acd)x + abcd.$$

Gan edrych ar y canlyniad diwethaf hwn, gwelir bod y cyfernodau fel a ganlyn.

x^4 1

x^3 swm y llythrennau fesul un, h.y. $(a + b + c + d)$,

x^2 swm lluosymiau'r llythrennau fesul dwy, h.y. $(ab+bc+ad+bd+cd+ac)$,

x swm lluosymiau'r llythrennau fesul tair, h.y. $(abc + abd + bcd + acd)$,

a'r term sy'n annibynnol ar x yw $abcd$.

Nawr rydym yn gwybod mai nifer y ffyrdd o

(i) grwpio 4 llythyren fesul 1 yw $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$,

(ii) grwpio 4 llythyren fesul 2 yw $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$,

(iii) grwpio 4 llythyren fesul 3 yw $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$,

(iv) grwpio 4 llythyren fesul 4 yw $\binom{4}{4} = 1$.

Yn yr enghraifft uchod, gadewch i $b = c = d = a$. Yna mae

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

neu $$(x + a)^4 = x^4 + \binom{4}{1}ax^3 + \binom{4}{2}a^2x^2 + \binom{4}{3}a^3x + a^4.$$

Trwy broses debyg gellid cael

$$(x + a)^5 = x^5 + \binom{5}{1}ax^4 + \binom{5}{2}a^2x^3 + \binom{5}{3}a^3x^2 + \binom{5}{4}a^4x + a^5.$$

Wrth ystyried y canlyniadau cyffredinol hyn gallwn dybio, ond nid profi, y canlyniadau cyffredinol ar gyfer unrhyw gyfanrif positif n:

$$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \binom{n}{3}a^3x^{n-3} + \ldots + a^n.$$

Mae ffurf fwy cyfleus ar gael ar gyfer yr ehangiad pan fo'r gwahanol $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ ac ati yn cael eu hysgrifennu'n llawn:

Y theorem finomaidd ar gyfer cyfanrif positif *n*

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^4x^{n-4} + \ldots \ + a^n.\end{aligned}$$

Enghraifft 3.7
Ehangwch $(x + a)^6$.
Yn yr achos hwn mae $n = 6$ ac

$$\begin{aligned}(x+a)^6 &= x^6 + 6ax^5 + \frac{6(6-1)}{1.2}a^2x^4 + \frac{6(6-1)(6-2)}{1.2.3}a^3x^3 \\ &\quad + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{1.2.3.4}a^4x^2 + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{1.2.3.4.5}a^5x + a^6 \\ &= x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.\end{aligned}$$

Enghraifft 3.8
Ehangwch $(2x + 3y)^4$.
Ysgrifennwn $a = 2x$, $b = 3y$ yn yr ehangiad ar gyfer $(a + b)^4$. Yna mae

$$\begin{aligned}(2x+3y)^4 &= (2x)^4 + 4(2x)^3(3y) + \frac{4.3}{1.2}(2x)^2(3y)^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}(2x)(3y)^3 + (3y)^4 \\ &= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4.\end{aligned}$$

Enghraifft 3.9
Ehangwch $(a - 2x)^3$.

Nodwch yr arwydd –

Yma ysgrifennwn $b = -2x$. Yna mae

$$\begin{aligned}(a-2x)^3 &= a^3 + 3a^2(-2x) + \frac{3.2}{1.2}a(-2x)^2 + (-2x)^3 \\ &= a^3 - 6a^2x + 12ax^2 - 8x^3.\end{aligned}$$

Enghraifft 3.10

Darganfyddwch y term yn x^2 yn ehangiad $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$.

Mae'n gyfleus ysgrifennu

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 = x^6\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^6$$

a chwilio am y term gydag $\frac{1}{x^4}$ yn ehangiad $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^6$.

Nawr mae $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^6 = 1 + \frac{6}{x^2} + \frac{6.5}{1.2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots$

$(a + b)^6$ gydag $a = 1$, $b = 1/x^2$

Y term yn $\frac{1}{x^4}$ yw $15.\frac{1}{x^4}$.

Felly y term yn x^2 yn $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ yw

$$x^6 . \frac{15}{x^4} \;=\; 15x^2.$$

Enghraifft 3.11

Os yw cyfernodau'r 3ydd a'r 5ed term yn ehangiad $(1 + x)^n$ yn hafal, darganfyddwch n o wybod bod $n > 3$.

Y 3ydd term yw'r term yn x^2 sef $\dfrac{n(n-1)}{1.2}x^2$. Y 5ed term yw'r term yn x^4 sef $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^4$.

Yna mae $\dfrac{n(n-1)}{1.2} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$. **mae'r cyfernodau yn hafal**

Gellir canslo hwn a chael

$$1 = \frac{(n-2)(n-3)}{3.4} \text{ gan fod } n \neq 0,1.$$ **$n > 3$**

$\therefore$ $12 = n^2 - 5n + 6$

ac felly $n^2 - 5n - 6 = 0$.

Trwy ffactorio: $(n+1)(n-6) = 0$.

Yna mae $n + 1 = 0$ ac felly $n = -1$ (amhosibl)

neu $n - 6 = 0$ ac felly $n = 6$. Hwn yw'r datrysiad.

Ymarferion 3.4

1. Ehangwch (i) $(1 + 2z)^5$ (ii) $(x - 2y)^4$ (iii) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$ (iv) $(2y - z)^3$

2. Ysgrifennwch dri therm cyntaf ehangiadau
   (i) $(1 + x)^{12}$ (ii) $(1 - 2y)^{14}$ (iii) $(p + q)^{16}$
   (iv) $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{10}$ (v) $(2 - 3x)^8$ (vi) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^{11}$

3. Yn ehangiad $(2x - y)^{20}$ darganfyddwch y term sy'n cynnwys y^3.

4. Yn ehangiad $(1 - 2x)^{10}$ darganfyddwch y term sy'n cynnwys x^3.

5. Trwy roi $x = 0.01$ yn ehangiad binomaidd $(1 - 2x)^8$, darganfyddwch $(0.98)^8$ yn gywir i bedwar lle degol.

6. Trwy roi 0.1 yn lle x yn ehangiad binomaidd $\left(1+\dfrac{x}{10}\right)^8$, darganfyddwch werth $(1.01)^8$ yn gywir i bedwar ffigur ystyrlon.

7. Os yw x mor fach fel bod x^3 a'r pwerau uwch yn ddibwys, dangoswch fod $(3 - 2x)(1 + 2x)^{10} \approx 3 + 58x + 500x^2$.

8. Os yw x mor fach fel y gellir anwybyddu x^2 a'r pwerau uwch o x, dangoswch fod y ffwythiant $(x + 2)(1 - 3x)^8 \approx 2 - 47x$.

9. Darganfyddwch y os yw $(1 - 3y)^3 + (1 + 3y)^3 = 218$.

10. Ysgrifennwch gyfernodau x^4 ac x^5 yn ehangiad binomaidd $(1 + ax)^{10}$.
O wybod bod y cyfernod cyntaf uchod yn 8 gwaith yr ail gyfernod, darganfyddwch werth a.

11. Yn ehangiad binomaidd $(3 + x)^n$, mae cyfernod x^2 yn 1.5 gwaith cyfernod x^3. Darganfyddwch werth n.

12. Yn ehangiad binomaidd $(a + x)^8$, mae cyfernod x^3 yn 28 gwaith cyfernod x. Darganfyddwch werth a.

Pennod 4

Ffwythiannau

Yn **P1** trafodwyd yn fras y cysyniad o ffwythiannau, rhai polynomaidd yn benodol. Cafodd mynegiadau yn x sy'n cymryd gwerthoedd o ganlyniad i roi gwerthoedd i x eu disgrifio fel ffwythiannau. Felly er enghraifft,

os yw $\quad \mathrm{f}(x) = x^2 + 2x - 3$

yna mae $\quad \mathrm{f}(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4,$

$\quad \mathrm{f}(0) = (0)^2 + 2(0) - 3 = -3,$

ac yn y blaen.

Yn y bennod hon datblygir y syniad o ffwythiant ymhellach. Un ffordd o ddatblygu'r syniad yw caniatáu mynegiadau eraill yn ogystal ậ pholynomialau.

Enghraifft 4.1

Mae $\mathrm{f}(x) = x + \dfrac{1}{x}$ a $\mathrm{g}(x) = \sqrt{x+1}$ yn ddau ffwythiant y gellir eu hystyried.

Defnyddir y llythyren f yn aml i ddynodi ffwythiant, ond defnyddir g a llythrennau eraill hefyd i ddynodi ffwythiannau eraill.

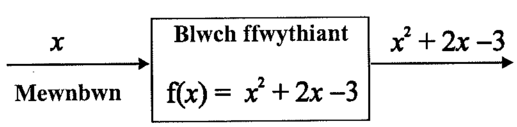
4.1 Ffwythiannau a phrosesau

Edrychwn eto ar y syniad o ffwythiant trwy ddefnyddio diagram bloc.

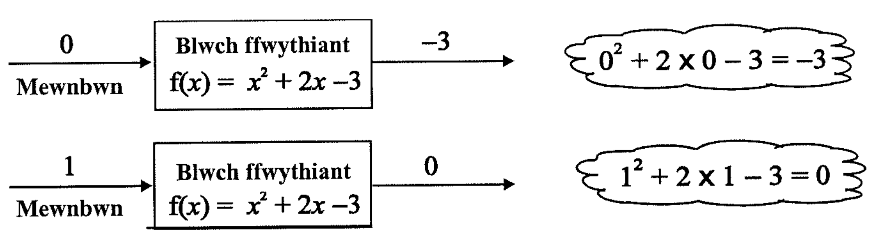
Enghraifft 4.2

Ystyriwch $\mathrm{f}(x) = x^2 + 2x - 3$.

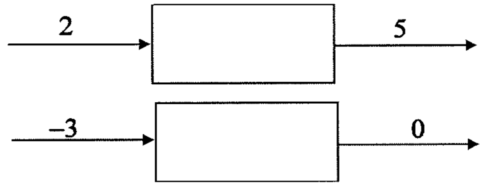
Gellir cynrychioli hyn fel a ganlyn.



Ystyrir blwch y ffwythiant fel blwch du, h.y. dyfais sydd rywsut yn derbyn mewnbwn ac yn cynhyrchu allbwn. Yna, ceir gyda gwahanol fewnbynnau :-



Dyma fewnbynnau ac allbynnau eraill



Cyflwynwyd y syniad o flwch du er mwyn tanlinellu'r pwynt fod ffwythiant yn y bôn yn broses ar gyfer cynhyrchu allbynnau o fewnbynnau a roddir. Dylid nodi nad yw'r broses (yn wahanol i'r allbwn) yn dibynnu ar ba lythyren a ddefnyddir.

Felly, yn y bôn, yr un broses yw

$$\mathrm{f}(x) = x^2 + 2x - 3$$

ac $\quad \mathrm{f}(a) = a^2 + 2a - 3$

oherwydd rhoddir rhif, caiff ei sgwario, ychwanegir dwywaith y rhif, yna fe dynnir 3.

Enghraifft 4.3

Ysgrifennwch ddwy ffurf arall i gynrychioli'r broses

$$\mathrm{g}(x) = 3x + 4.$$

Gellir defnyddio unrhyw lythrennau eraill :-

$$\mathrm{g}(a) = 3a + 4,$$
$$\mathrm{g}(b) = 3b + 4.$$

Ail bwynt y dylid ei nodi yw, gyda mewnbwn a roddwyd, yna mae'r allbwn wedi'i ddiffinio yn unigryw. Felly mae

$$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x+4} \quad \text{yn ffwythiant.}$$

Fodd bynnag, nid yw

$$\mathrm{g}(x) = \pm\sqrt{x+4}$$

yn ffwythiant oherwydd gellid cael dau ateb neu allbwn posibl o un mewnbwn,

e.e. $\quad \mathrm{g}(5) = \pm\sqrt{5+4} = \pm 3.$

Rheol

Rhaid i ffwythiant roi un ateb ar gyfer unrhyw un mewnbwn "derbyniol".

Peidiwch â phoeni am y gair 'derbyniol' ar hyn o bryd.

Wrth fynd heibio dylid nodi y gellir cael yr un allbwn gyda mewnbynnau gwahanol.

Yn enghraifft 4.2 gyda

$$\mathrm{f}(x) = x^2 + 2x - 3$$

gwelwn fod $\quad \mathrm{f}(1) = 0$

a bod $\quad \mathrm{f}(-3) = 0,$

h.y. gellir cael yr allbwn 0 gyda dau fewnbwn gwahanol.

Ymarferion 4.1

1. Os yw $\mathrm{f}(x) = x + \dfrac{1}{x}$, ysgrifennwch f(1), f(2), f(–1) ac f(a).

2. A yw $\mathrm{g}(x) = \dfrac{1}{x^2} \pm x$ yn broses ffwythiant posibl?

3. Dangoswch ar gyfer $h(x) = (x+2)^2 + 3$, fod $h(0) = h(-4)$.

4. A oes gwerthoedd x a fyddai'n allbynnau annerbyniol ar gyfer $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x+2)}$? Awgrym: A ellir darganfod $\dfrac{2}{0}$? Rhowch gynnig arni ar eich cyfrifiannell.

4.2 Parthau ffwythiannau

Yn adran 4.1 ystyriwyd y mynegiad ffwythiant fel proses i gynhyrchu allbynnau o fewnbynnau a roddwyd, gyda'r rheol y dylai'r mewnbwn gynhyrchu un allbwn. Ystyrir yma a yw mewnbynnau yn dderbyniol ai peidio.

Enghraifft 4.4

Ystyriwch $f(x) = \sqrt{x}$ ac $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

A ellir darganfod $f(-2)$ a $g(0)$? Rhowch gynnig arni ar eich cyfrifiannell!
Mewn gwirionedd, mae'n amhosibl darganfod allbynnau ar gyfer y mewnbynnau a'r prosesau arbennig hyn.

Mae enghraifft 4.4 yn dangos ei bod yn aml yn fuddiol nodi, ynghyd â'r fformiwla, y rheol neu'r broses, yr elfennau mae'r broses yn gweithredu arnynt. Felly bydd y rheol $\sqrt{x}$ yn gweithredu ar werthoedd x sy'n annegatif yn unig; a bydd y rheol $\dfrac{1}{x}$ yn gweithredu ar werthoedd x sy'n ansero yn unig, h.y. pan fo $x \neq 0$.
Gelwir y set o rifau y gall rheol neu broses weithredu arnynt yn **barth**.

Enghraifft 4.5

Beth yw'r parth mwyaf posibl ar gyfer y rhain?

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, (b) $g(x) = (x+1)^2$, (c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

Oni ddywedir fel arall, defnyddir y confensiwn fod y broses neu'r rheol yn gweithredu ar bob rhif real ond â rhai eithriadau penodol posibl a nodir bob amser.

Felly (a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $(x \neq -1)$

(b) $g(x) = (x+1)^2$, (dim eithriadau, h.y. caniateir pob gwerth x)

(c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$. $(x > -2)$

Yn nodiant cyfyngau, y parthau yw

(a) $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ (b) $(-\infty, \infty)$ (c) $(-2, \infty)$.

Noder yn (c) nad yw $x = -2$ yn cael ei ganiatáu oherwydd nad yw rhannu â 0 wedi ei ddiffinio.

Weithiau byddwn yn dymuno cyfyngu ar y parth hyd yn oed os yw'r rheol neu'r broses yn derbyn pob rhif neu'r rhan fwyaf o rifau.

Enghraifft 4.6

$$f(x) = x^2 + 4x + 5, \qquad 0 \le x \le 5$$
$$g(x) = x^3 + 4. \qquad 4 \le x < 16$$

Y parthau yma felly yw [0, 5] a [4, 16).

Ymarferion 4.2

1. Darganfyddwch barth mwyaf posibl, mewn nodiant cyfyngau, y ffwythiannau a ddiffinnir gan y rheolau canlynol:

(a) $f(x) = \sqrt{2-x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{x-1}$ (e) $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$

(f) $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)(x+3)}$ (g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}}$

(h) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{9-x}{16-x}}$

4.3 Amrediadau ffwythiannau

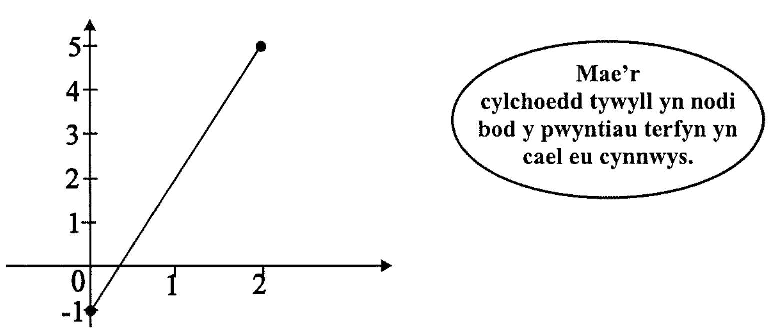
Yn yr adran flaenorol ystyriwyd parth ffwythiant, sef y set o rifau y mae'r rheol yn gweithredu arni. Ystyriwn yn awr y set o rifau a gynhyrchir gan y broses, h.y. yr allbynnau. Gelwir y set o allbynnau yn **amrediad** y ffwythiant.
Pan ofynnir i ni ddarganfod yr amrediad a geir trwy weithredu rheol ffwythiant a roddwyd ar barth, yn aml mae'n fuddiol i ni ddefnyddio <u>cynrychiolaeth graffigol</u> o ffwythiannau.

Enghraifft 4.7

Darganfyddwch yr amrediadau, mewn nodiant cyfyngau, pan fydd y rheol ffwythiant a roddir yn gweithredu ar elfennau'r parth a roddir:-

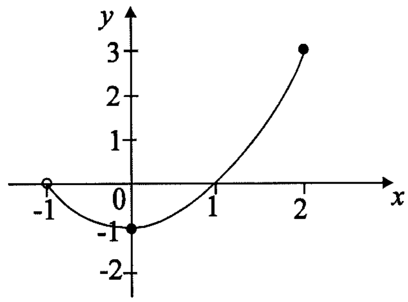
(i)	$f(x) = 3x - 1$	[0, 2]
(ii)	$f(x) = x^2 - 1$	(−1, 2]
(iii)	$f(x) = x^2 + 2x + 3$	(−∞, ∞)

(i) Ysgrifennwn $f(x) = 3x - 1$ fel $y = 3x - 1$.
Yna y yw'r allbwn ar gyfer x penodol. Mae cyflwyno y yn ein galluogi i blotio mewnbynnau (x) ac allbynnau (y) ar graff yn y ffordd arferol. Yn yr achos hwn mae'r graff yn llinell syth fel a ddangosir.



Yr amrediad yw [−1, 5].

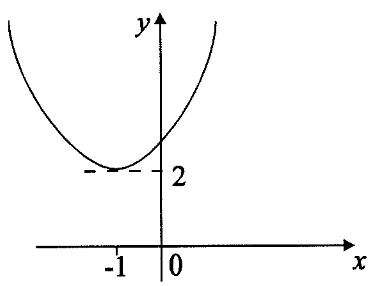
(ii) Yma mae $y = x^2 - 1$ ac ar gyfer y parth a roddir, sef $(-1, 2]$, mae'n hawdd (trwy ddefnyddio tabl, er enghraifft) llunio'r graff.



Mae'r cylch agored yn nodi nad yw $x = -1$ yn rhan o'r parth.

Yma yr amrediad yw $(-1, 3]$, a phwyntiau terfyn y cyfwng hwn yw pwynt isaf a phwynt uchaf y graff. Dylid nodi y byddai darganfod yr allbynnau ar bwyntiau terfyn y parth wedi rhoi $(0, 3]$. Nid dyma'r amrediad yn yr achos hwn.

(iii) Yn yr achos hwn mae $y = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$, wrth gwblhau'r sgwâr. Ceir y gwerth lleiaf pan fydd $x = -1$, a'r gwerth lleiaf hwn yw 2. Yna, yr amrediad yw $[2, \infty)$.



Eto, gellid diddwytho'r graff hwn o dabl gwerthoedd.

Ymarferion 4.3

1. Lluniwch y graffiau a nodwch yr amrediadau yn yr achosion canlynol:
   (a) $f(x) = 1 - x$, parth $[-3, 2]$ (b) $f(x) = (x-2)^2 + 4$, parth $(0, 4)$
   (c) $f(x) = \sqrt{x+2}$, parth $(-1, 7]$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $(x > 0)$
   (e) $f(x) = x^2$, parth $[-4, 5]$.

2. Ar gyfer pob un o'r rheolau ffwythiant a'r parthau canlynol, penderfynwch a oes dwy neu ragor o elfennau yn y parth sy'n cyfateb i elfen unigol yn yr amrediad, [er enghraifft ar gyfer $f(x) = x^2$, pob x, mae $f(-2) = f(2) = 4$ ac felly mae -2 a 2 yn y parth yn cyfateb i 4 yn yr amrediad].
   (a) $f(x) = 3x + 4$ $[-1, 20]$, (b) $f(x) = x^2 + 8x$ $[-4, 4]$ (Nodwch fod $x^2 + 8x \equiv (x + 4)^2 - 16$).
   (c) $f(x) = x^2 + 8x$ $[-5, 1]$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$ $(-\infty, \infty)$

(g) $f(x) = 4x - x^2$ $[0, 4]$ $4x - x^2 \equiv 4 - (x-2)^2$

Crynodeb

Mae ffwythiant yn cynnwys tair cydran, sef:

1. rheol neu fformiwla (a ystyrir fel proses) sy'n rhoi gwerth allbwn unigol ar gyfer gwerth mewnbwn unigol;
2. set o werthoedd mewnbwn y mae'r rheol yn gweithredu arnynt, sef y *parth*;
3. set o werthoedd allbwn, sef yr *amrediad*.

4.4 Ffwythiannau gwrthdro

O wybod ffwythiant, f, sy'n cynnwys y tair elfen a nodir uchod, weithiau gellir darganfod ffwythiant arall sy'n cildroi effaith f. Byddai'r ffwythiant hwn yn cymryd allbwn o f ac yn darganfod y mewnbwn y mae'n deillio ohono. Gelwir ffwythiant newydd o'r fath yn **ffwythiant gwrthdro** ac efallai y bydd yn bodoli neu efallai na fydd. Ystyriwn yma pa ffwythiannau sydd â ffwythiannau gwrthdro a dangoswn sut y gellir darganfod ffwythiannau gwrthdro.

Enghraifft 4.8

O wybod bod $f(x) = x + 1$ $(-\infty, \infty)$,
a ellir darganfod ffwythiant sy'n cildroi effaith f?
Gellid cynrychioli'r broses fel blwch du.

$$\xrightarrow{\;x\;} \boxed{f(x) = x + 1} \xrightarrow{\;x+1\;}$$

Felly, er enghraifft

$$\overline{\;\;0\;\;}\,\boxed{f(x) = x + 1}\,\overline{\;\;1\;\;}$$

$$\overline{\;\;1\;\;}\,\boxed{f(x) = x + 1}\,\overline{\;\;2\;\;}$$

ac ati.

O wybod yr allbwn, a ellir dweud beth oedd y mewnbwn? Gellir gweld yn yr achos hwn fod allbwn a roddir yn deillio o fewnbwn sydd un yn llai. Felly gellir cynrychioli'r broses gildroi fel

$$\overline{\;\;1\;\;}\,\boxed{\text{Blwch ffwythiant}}\,\overline{\;\;0\;\;}$$

$$\overline{\;\;2\;\;}\,\boxed{\text{Blwch ffwythiant}}\,\overline{\;\;1\;\;}$$

Ystyriwn sut i ddarganfod y rheol newydd yn nes ymlaen.

Mae'n amlwg bod ffwythiant yn bodoli sy'n cildroi $f(x) = x + 1$: sef y ffwythiant sy'n tynnu 1 oddi ar werth y mewnbwn.

Enghraifft 4.9

O wybod bod f(x) = x^2 $(-\infty, \infty)$,
a ellir darganfod ffwythiant sy'n cildroi effaith f?
Gellid cynrychioli'r broses fel blwch du.

$$x \longrightarrow \boxed{f(x) = x^2} \longrightarrow x^2$$

ac felly er enghraifft

$$-1 \longrightarrow \boxed{f(x) = x^2} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \boxed{f(x) = x^2} \longrightarrow 1$$

O wybod yr allbwn, a ellir dweud beth oedd y mewnbwn? Gellir gweld y gellir cael dau fewnbwn ar gyfer un allbwn, er enghraifft, yn yr achos uchod gall allbwn o 1 ddeillio o fewnbynnau -1 ac 1.
Yn yr achos hwn ni ellir darganfod ffwythiant sy'n cildroi effaith f(x) = x^2.
Dyma grynhoi canlyniadau Enghreifftiau 4.8 a 4.9.

Ffwythiant		A yw'r ffwythiant gwrthdro yn bodoli?
f(x) = $x + 1$	Mae allbwn yn deillio o un mewnbwn yn unig	Ydy
f(x) = x^2	Mae dau fewnbwn sy'n rhoi'r un allbwn	Nac ydy

Gelwir ffwythiannau megis f(x) = $x + 1$ (unrhyw barth), lle mae un mewnbwn yn unig yn rhoi allbwn penodol, yn ffwythiannau **un-i-un**. Noder nad yw f(x) = x^2 gyda pharth $(-\infty, \infty)$ yn ffwythiant un-i-un (fel a welwyd uchod). Bydd ffwythiannau un-i-un yn cael eu trafod eto ym Mhennod 12.
Mae enghreifftiau 4.8 a 4.9 yn darlunio (ond heb brofi) canlyniad cyffredinol sy'n ymwneud â ffwythiannau un-i-un a ffwythiannau gwrthdro. Yn gyntaf, cofiwn ddiffiniad ffwythiant gwrthdro.

Diffiniad

Ffwythiant gwrthdro f^{-1} ffwythiant f yw ffwythiant sy'n cymryd allbynnau f a'u mapio i fewnbynnau f. Hynny yw, mae f^{-1} yn cildroi effaith f.

Rheol

Nid oes gan ffwythiant f wrthdro f^{-1} oni bai fod f yn ffwythiant un-i-un.

Enghraifft 4.10

Ar gyfer f(x) = $x^2 + 4x + 7$ gyda pharth $(-\infty, \infty)$, dangoswch nad oes ffwythiant gwrthdro yn bodoli.
Tybiwch fod gennym allbwn y a cheisiwch ddarganfod y mewnbwn x cyfatebol.
Felly gadewch i $y = x^2 + 4x + 7$ a cheisiwch ddarganfod x yn nhermau y.

$\therefore \quad x^2 + 4x + 7 - y = 0.$

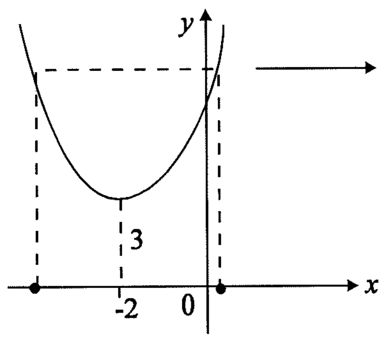
O'r fformiwla gwadratig, mae

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(7-y)}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{4 - 7 + y}}{2} = -2 \pm \sqrt{y-3}.$$

I gael gwreiddiau real, mae $y \geq 3$ ac felly amrediad f yw $[3, \infty)$. Gydag y a roddir yn yr amrediad hwn, mae gan x ddau werth.

Gwelir hyn yng ngraff $y = x^2 + 4x + 7$.

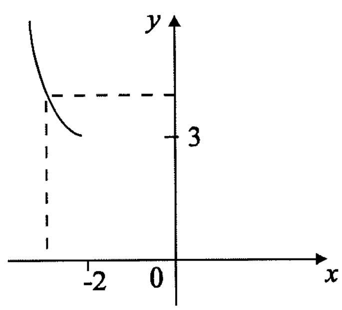


Mae dau werth yn cyfateb i'r gwerth hwn ar gyfer *y*.

Yn yr achos hwn, felly, nid yw'r ffwythiant gwrthdro yn bodoli.

Enghraifft 4.11

Gwelwn petai'r ffwythiant yn $f(x) = x^2 + 4x + 7$ (yr un rheol ag yn enghraifft 4.10) gyda pharth cyfyngedig $(-\infty, -2]$ y byddai'r graff fel a ddangosir, ac ni fyddai ond un mewnbwn ar gyfer y a roddir, lle mae $y \geq 3$.



Amrediad f yw [3,∞).

Yna mae'r ffwythiant gwrthdro yn bodoli ac ar gyfer y a roddir, mae

$$x = -2 - \sqrt{y-3}$$

o enghraifft 4.10.

Cymerir yr ail isradd negatif oherwydd bod pob *x* yn −2 neu lai.

Felly mae'r ffwythiant f^{-1} yn prosesu y gan roi

$$-2 - \sqrt{y-3}.$$

Mewn geiriau eraill, mae

$$f^{-1}(y) = -2 - \sqrt{y-3}.$$

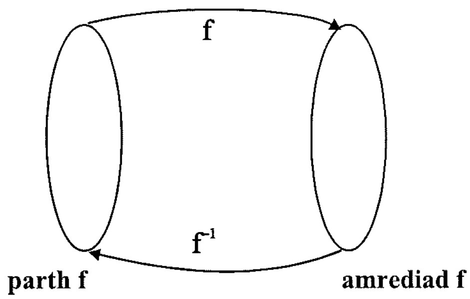
Nid yw'r ddau ail isradd yn bosibl; h.y. mae f yn un-i-un.

Gellir defnyddio unrhyw lythyren wrth ddiffinio'r rheol ar gyfer f^{-1} ac fel arfer dewisir y llythyren x. Yna yn yr achos hwn,

$$f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x-3}$$

yw gwrthdro $f(x) = x^2 + 4x + 7$ pan fo parth f yn $(-\infty, -2]$.

O wybod rheol unrhyw ffwythiant, mae'n briodol hefyd nodi parth ac amrediad y ffwythiant hwnnw. Er mwyn darganfod yr endidau hynny ar gyfer f^{-1}, nodwn y diagram canlynol, lle cynrychiolir parth ac amrediad f fel dau flwch.



Mae archwilio'r diagram yn dangos bod f^{-1} yn cymryd elfennau'r blwch ar yr ochr dde (h.y. amrediad f) ac yn darganfod elfennau cyfatebol yn y blwch ar yr ochr chwith (parth f).
Mewn geiriau eraill, mae

$$\begin{aligned} \text{amrediad f} &= \text{parth } f^{-1}, \\ \text{parth f} &= \text{amrediad } f^{-1}. \end{aligned}$$

Dyma, mewn gwirionedd, yw'r berthynas a geir rhwng parthau ac amrediadau ffwythiannau un-i-un a'u ffwythiannau gwrthdro. Yn yr achos presennol, felly,

f	f^{-1}
Parth $(-\infty, -2]$	Parth $[3, \infty)$
Amrediad $[3, \infty)$	Amrediad $(-\infty, -2]$

Crynodeb

(i) Pan fo ffwythiant f yn ffwythiant un-i-un, mae ei wrthdro f^{-1} yn bodoli.
(ii) Parth f^{-1} = amrediad f.
(iii) Amrediad f^{-1} = parth f.
(iv) Er mwyn darganfod y rheol ar gyfer f^{-1}
(a) ceisiwn ddatrys $y = f(x)$ ar gyfer x yn nhermau y fel bod $x = f^{-1}(y)$.
(b) rydym yn rhoi x yn lle y er mwyn rhoi $f^{-1}(x)$ yn y nodiant arferol.
Noder os ceir dau neu ragor o werthoedd yn (a) mae'n bosibl nad yw'r ffwythiant gwreiddiol f yn ffwythiant un-i-un dros y parth a roddir (Enghraifft 4.10); ond efallai ei fod yn ffwythiant un-i-un dros barth cyfyngedig arbennig (Enghraifft 4.11).

Enghraifft 4.12

O wybod bod $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x-5}}$,
nodwch y parth mwyaf posibl a'r amrediad cyfatebol.
Darganfyddwch $f^{-1}(x)$ a nodwch y parth a'r amrediad ar gyfer f^{-1}.

Gan fod f(x) yn cynnwys ail isradd, rhaid dewis x er mwyn cymryd ail isradd maint annegatif, h.y. dewis x fel bod

$$\frac{3-x}{x-5} \geq 0.$$

Noder na chaniateir $x = 5$.

Yna mae arnom angen $3 - x \geq 0$ ac $x - 5 > 0$ (i)
neu $3 - x \leq 0$ ac $x - 5 < 0$ (ii).
Mae (i) yn arwain at $x \leq 3$ ac $x > 5$ na all ddigwydd ar yr un pryd.
Mae (ii) yn arwain at $x \geq 3$ ac $x < 5$ y gellid eu cyfuno i un datganiad sef $3 \leq x < 5$, ac felly y parth mwyaf posibl ar gyfer f(x) yw $[3, 5)$.
Er mwyn darganfod yr amrediad cyfatebol, nodwn pan fo $x = 3$, bod f(x) = 0 ac wrth i $x \to 5$, f(x) $\to \infty$. Felly, amrediad f yw $[0, \infty)$.
Er mwyn darganfod $f^{-1}(x)$, gadewch i

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x-5}}.$$

Yna mae $$y^2 = \frac{3-x}{x-5}$$

ac felly $$(x-5)y^2 = 3 - x$$

ac $$x(y^2+1) = 3 + 5y^2.$$

$$\therefore \quad x = \frac{3+5y^2}{y^2+1}$$

ac felly $$f^{-1}(y) = \frac{3+5y^2}{y^2+1}.$$

Dim ond un gwerth x ar gyfer gwerth y a roddwyd; h.y. mae f yn un-i-un.

Wrth newid o y i x, ceir bod

$$f^{-1}(x) = \frac{3+5x^2}{x^2+1}.$$

Parth f^{-1} = amrediad f, sef $[0, \infty)$, ac amrediad f^{-1} = parth f, sef $[3,5)$.

Ymarferion 4.4

1. Gyda phob un o'r ffwythiannau canlynol, trwy fraslunio graffiau neu fel arall, penderfynwch a yw f yn ffwythiant un-i-un:

(a) $f(x) = 4x + 3$ parth $[-1,5]$

(b) $f(x) = 2x^2 + 1$ parth $[-3,3]$

(c) $f(x) = x^2 + 6x$ parth $[-3, 3]$

(d) $f(x) = x^2 + 6x$ parth $[-5,5]$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ parth $(-\infty, \infty)$

(f) $f(x) = (x+2)^2$ parth $(-\infty, \infty)$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ parth $(0, \infty)$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$ parth $(-\infty, \infty)$

2. Gyda'r holl ffwythiannau sy'n ffwythiannau un-i-un yng nghwestiwn 1, darganfyddwch eu ffwythiannau gwrthdro (rhowch y tair cydran).

3. Darganfyddwch wrthdro pob un o'r ffwythiannau un-i-un canlynol, gan nodi'r rheol, y parth a'r amrediad ym mhob achos :-

(a) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ parth $(0, \infty)$

(b) $f(x) = (x+2)^2 + 3$ parth $(0, \infty)$

(c) $f(x) = (x+1)(x+5)$ parth $(-3, \infty)$

(d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ parth $[-2, \infty)$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ parth $(-2, \infty)$

(f) $f(x) = \sqrt{(x+3)(x-1)}$ parth $[1, \infty)$

4. Darganfyddwch y parth mwyaf posibl ar gyfer y ffwythiant $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, a darganfyddwch wrthdro f, gan nodi parth ac amrediad f^{-1}.

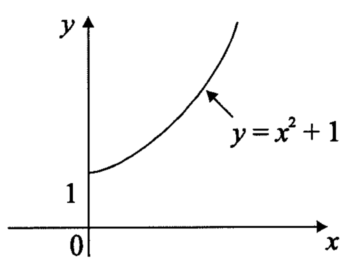
5. O wybod bod $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ gyda pharth $(-\infty, 0)$, darganfyddwch f^{-1}, gan nodi ei barth a'i amrediad.

6. Darganfyddwch barth mwyaf posibl $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, gan nodi'r amrediad cyfatebol. Darganfyddwch $f^{-1}(x)$.

7. Gan ganiatáu gwerthoedd annegatif yn unig, darganfyddwch y parth mwyaf posibl ar gyfer y ffwythiant f a roddir gan $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
Darganfyddwch
(i) amrediad f,
(ii) y rheol ar gyfer f^{-1}, h.y. $f^{-1}(x)$.

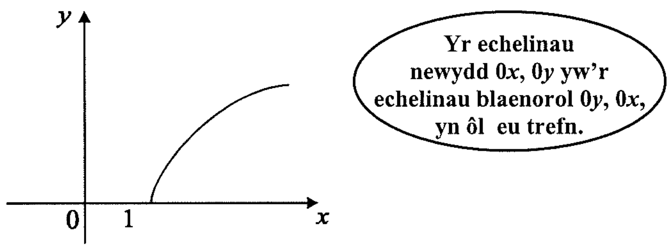
4.5 Braslunio ffwythiannau gwrthdro

Yn adran 4.3 dangoswyd sut y gall graff gynrychioli ffwythiant. Er enghraifft, os yw $f(x) = x^2+1$ gyda pharth $[0, \infty)$, ysgrifennir $y = x^2+1$ a cheir y graff:

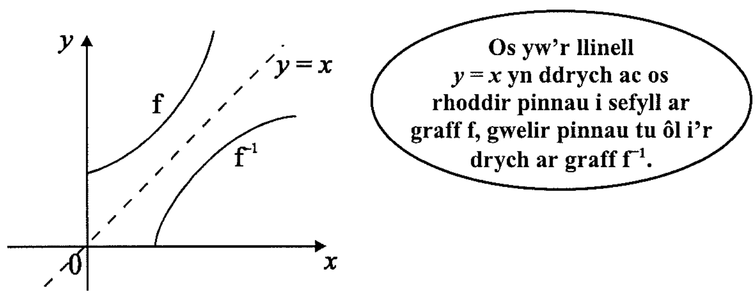


Er hwylustod, defnyddiwyd parth cyfyngedig i gael ffwythiant un-i-un.

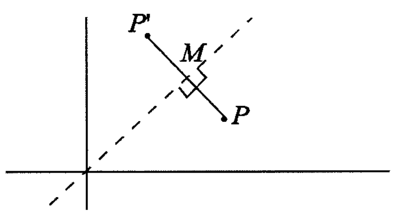
Mae gan y ffwythiant hwn amrediad $[1, \infty)$. Mae'n hawdd dangos mai'r ffwythiant gwrthdro yw $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$ gyda pharth $[1, \infty)$ ac amrediad $[0, \infty)$.
Er mwyn llunio'r graff hwn o f^{-1} addasir graff f fel bod yr echelin mewnbwn yn llorwedd a'r echelin allbwn yn fertigol. Yna graff f^{-1} yw



Yn wir, ceir graff f^{-1} yn hawdd trwy adlewyrchu graff f yn y llinell $y = x$.



Techneg
Er mwyn darganfod adlewyrchiad P' unrhyw bwynt P yn y llinell $y = x$ gollyngir perpendicwlar PM o P i'r llinell $y = x$ ac estyn PM i P' lle mae $MP' = PM$.
Yna, P' yw adlewyrchiad P yn y llinell.



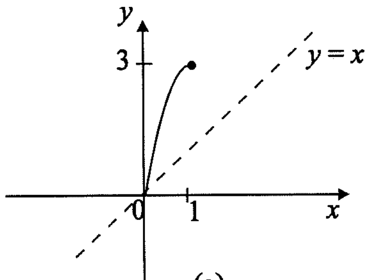
Rheol
Gellir darganfod graff f^{-1} o graff f trwy adlewyrchu graff f yn y llinell $y = x$.

Ymarferion 4.5

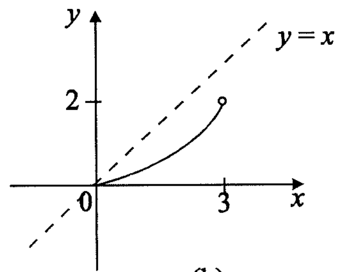
1. O wybod bod $f(x) = 3x + 2$, (pob x), darganfyddwch f^{-1}, a lluniwch graffiau f a f^{-1} ar yr un diagram.

2. O wybod bod $f(x) = x^2$ $[0, \infty)$, darganfyddwch f^{-1}. Lluniwch graff f^{-1} trwy adlewyrchu graff f yn y llinell $y = x$.

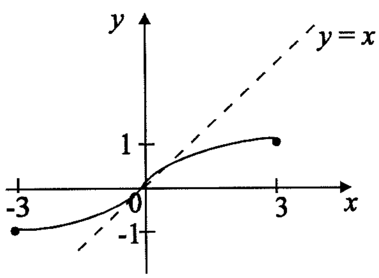
3. O gael y graffiau canlynol o ffwythiannau, lluniwch graffiau'r ffwythiannau gwrthdro cyfatebol.



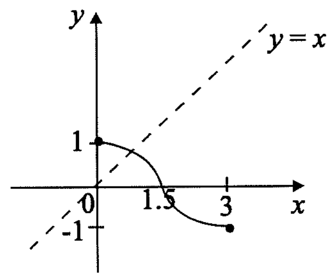
(a)



(b)



(c)



(d)

4.6 Cyfansoddi ffwythiannau

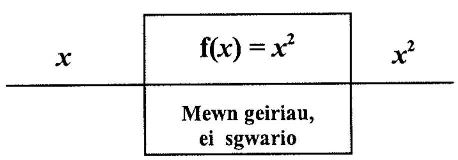
Yn yr adran hon trafodir dull o gyfuno ffwythiannau er mwyn cael ffwythiannau newydd. Ystyriwn yr enghraifft ganlynol.

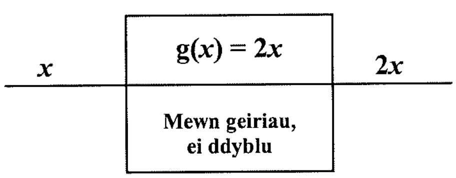
Enghraifft 4.13

Gadewch i $\quad f(x) = x^2 \quad$ gyda pharth $(-\infty, \infty)$,

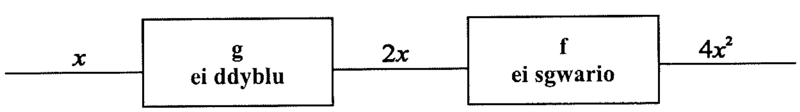
$\qquad\qquad\quad g(x) = 2x \quad$ gyda pharth$(-\infty, \infty)$.

Wrth gynrychioli hyn fel diagram bloc:-



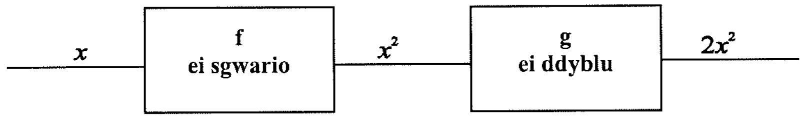


Ystyriwn y ffwythiant canlynol, sy'n gyfuniad o f a g.



Gan alw'r ffwythiant newydd hwn, y ffwythiant cyfansawdd, yn h, yna mae $h(x) = 4x^2$.

Petai'r blwch f yn dod o flaen y blwch g fel a ddangosir isod, byddai'r mewnbwn x yn cynhyrchu allbwn o $2x^2$.



Felly os gelwir yr effaith o gyfuno f a g yma yn ffwythiant k, yna mae
$k(x) = 2x^2$.

Diffiniad
Canlyniad gweithredu ffwythiant f *gyntaf* ac *yna* ffwythiant g yw ffwythiant gf
lle mae $gf(x) = g(f(x))$.
Dylid nodi'r drefn :
mae gf yn golygu mai'r ffwythiant f a weithredir gyntaf.

Os yw $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $gf(x) = g(x^2) = 2x^2$.

Yn yr un modd, y ffwythiant a geir trwy weithredu g *gyntaf* ac *yna* f yw ffwythiant fg lle mae $fg(x) = f(g(x))$.
Gelwir y broses o gyfuno ffwythiannau yn y modd hwn yn **gyfansoddi ffwythiannau**.

Nid oes angen llunio'r diagramau bloc wrth gyfansoddi ffwythiannau.

Enghraifft 4.14
Os yw $f(x) = 3x - 2$
a $g(x) = x^2 + 1$ (parthau $-\infty, \infty$)
darganfyddwch $fg(x)$ a $gf(x)$.

Cofiwch nad yw'r llythyren x a ddefnyddir yn niffiniad y ffwythiannau o bwys. Er enghraifft mae g yn golygu 'sgwario ac adio un'.

Mae $fg(x)$ yn golygu $f(g(x))$ a geir trwy roi $g(x)$ yn lle x yn y mynegiad am $f(x)$.

$$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) - 2$$
$$= 3x^2 + 3 - 2 = 3x^2 + 1.$$

Golyga f 'lluosi â 3 ac yna tynnu 2'.

Yn yr un modd, mae $gf(x)$ yn golygu $g(f(x))$ a geir trwy roi $f(x)$ yn lle x yn y mynegiad am $g(x)$.

$$g(f(x)) = g(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 1$$
$$= 9x^2 - 12x + 5.$$

Golyga g 'sgwario ac adio 1'.

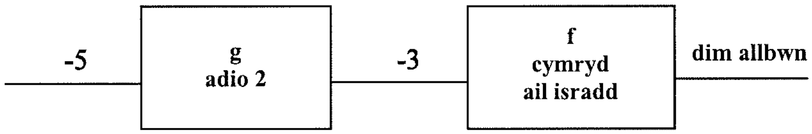
Ni ddylid cymryd yn ganiataol, o wybod dau ffwythiant f a g, y gellir ffurfio'r ffwythiannau fg a gf bob tro. Ni ellir gwneud hyn bob amser: weithiau nid yw'n bosibl ffurfio'r naill neu'r llall.

Enghraifft 4.15
Ystyriwn y ffwythiannau

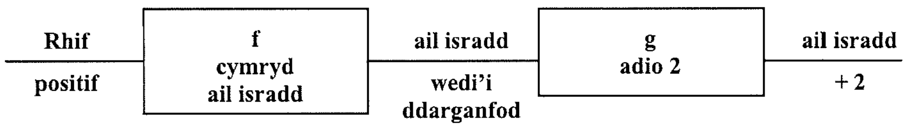
$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad \text{parth } (0, \infty)$$
$$g(x) = x + 2. \qquad \text{parth } (-\infty, \infty)$$

Yna mae $fg(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+2}$,
a $gf(x) = g(f(x)) = \sqrt{x} + 2$.

Sylwn fodd bynnag na ddiffinnir $f(g(x)) = \sqrt{x+2}$ ar gyfer $x < -2$ a bod gwerthoedd x o'r fath yn cael eu caniatáu ym mharth g, y ffwythiant sy'n gweithredu gyntaf. Gellir deall hyn yn haws trwy gyfeirio at y diagram bloc ac ystyried prosesu −5, er enghraifft.



Ar y llaw arall, nid oes anhawster wrth ffurfio gf(x), lle mae'r ffwythiant f yn gweithredu gyntaf. Y parth ar gyfer f yw $(0, \infty)$, h.y. y set o rifau annegatif, a gall y broses o gymryd yr ail israd ymdopi â rhifau o'r fath.



Cwestiwn amlwg yma yw: yn gyffredinol, pam mae fg yn bodoli ond nid gf ?
O ystyried, fe welwn y casgliad canlynol: nid yw gf yn bodoli oherwydd bod rhai o allbynnau'r ffwythiant cyntaf (f) yn fewnbynnau annerbyniol ar gyfer yr ail ffwythiant (g); ar y llaw arall, gellid ffurfio fg oherwydd bod holl allbynnau'r ffwythiant cyntaf (g) yn fewnbynnau derbyniol ar gyfer yr ail ffwythiant (f).
Cofiwn nawr fod y setiau o fewnbynnau ac allbynnau ffwythiant yn cael eu galw yn barth ac amrediad, yn ôl eu trefn. Yna gellir crynhoi'r drafodaeth uchod trwy gasglu bod fg yn bodoli os yw amrediad (set o allbynnau) y ffwythiant cyntaf (g) yn cael ei gynnwys ym mharth (set o fewnbynnau) yr ail ffwythiant f.

Rheol
Mae cyfansawdd dau ffwythiant yn bodoli os yw amrediad y ffwythiant cyntaf yn cael ei gynnwys ym mharth yr ail ffwythiant.

Yn fg, g yw'r ffwythiant cyntaf.

Enghraifft 4.16
O wybod ffwythiannau f a g lle mae

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 5 \qquad && (-\infty, \infty) \\ g(x) &= \frac{1}{x} && (0, \infty) \end{aligned}$$

darganfyddwch a yw fg a/neu gf yn bodoli.

fg Yn achos $g(x) = \frac{1}{x}$ â pharth $(0, \infty)$ mae'r amrediad hefyd yn $(0, \infty)$. Nawr mae'r amrediad hwn yn cael ei gynnwys ym mharth f (h.y. yn $(-\infty, \infty)$), ac felly gellir ffurfio fg.

Yna mae $\quad fg(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 5.$

Nodwn mai parth fg yw parth y ffwythiant cyntaf g.

gf Yn achos $f(x) = x - 5$ â pharth $(-\infty, \infty)$ mae'r amrediad hefyd yn $(-\infty, \infty)$. Mae'r amrediad hwn ar gyfer f yn cynnwys y gwerth 0 sy'n annerbyniol fel mewnbwn ar gyfer $g(x) = \frac{1}{x}$. Felly ni ellir ffurfio gf.

Ymarferion 4.6

1. Os yw $f(x) = x^2 + 2$ parth $(-\infty, \infty)$
a $g(x) = 3x - 2,$ parth $(-\infty, \infty)$
ysgrifennwch y rheolau ar gyfer y ffwythiannau fg a gf a nodwch y parthau a'r amrediadau yn y ddau achos.

2. O wybod bod $g(x) = 3x + 1$ parth $(-\infty, \infty)$
a bod $f(x) = 2x - 4,$ parth $(-\infty, \infty)$
darganfyddwch y rheolau ar gyfer y ffwythiannau fg a gf a nodwch y parthau a'r amrediadau yn y ddau achos.

3. O wybod bod $f(x) = 2x + 1$ parth $(0, \infty)$
a bod $g(x) = x - 1$ parth $(-\infty, \infty)$
darganfyddwch pa un o blith fg a gf sy'n bodoli, gan roi'r parth a'r amrediad yn yr achos hwnnw.

4. Diffinnir y ffwythiannau f, g a h fel a ganlyn :-

$$f(x) = x^2 + 3 \qquad \text{parth } [0, 4]$$
$$g(x) = \sqrt{x - 4} \qquad \text{parth } (4, 20]$$
$$h(x) = \frac{2}{x^2} \qquad \text{parth } (1, 15]$$

Nodwch pa rai o'r ffwythiannau cyfansawdd canlynol y gellir eu ffurfio a pha rai na ellir eu ffurfio, gan roi eich rhesymau ym mhob achos.
(a) gf (b) fg (c) fh (d) hf (e) gh (f) hg

5. O wybod bod $f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{9 + x}$ pan fo $f(x) = x^2 + 6x$ $[-3, 3]$, dangoswch fod $f^{-1}f(x) = x$.

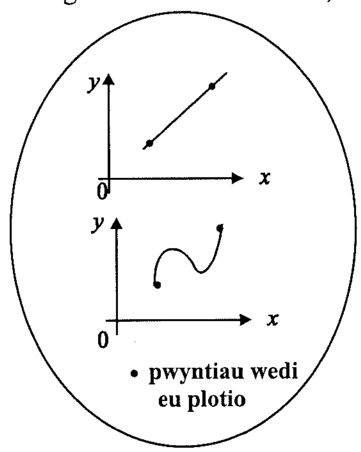
Pennod 5

Ffwythiannau a Graffiau: golwg arall

Gellir defnyddio graffiau i gynrychioli ffwythiannau sydd ag amrediadau a pharthau sy'n setiau o rifau real. Mae graffiau yn dangos yn glir ymddygiad ffwythiannau gan ein galluogi i ddarganfod ble mae'r gwerthoedd macsimwm a'r gwerthoedd minimwm, er enghraifft.

Hyd yn hyn, cynhyrchwyd graffiau trwy lunio tablau o $y = f(x)$ yn erbyn x ac yna plotio gwerthoedd x ac y. Er bod y dechneg hon wedi profi ei gwerth, weithiau mae'n gamarweiniol, yn benodol mewn perthynas ag ymddygiad graff y ffwythiant rhwng y pwyntiau sy'n cael eu plotio.

Yn y bennod hon, cyflwynir y dechneg o fraslunio graffiau o ffwythiannau, lle rhoddir llai o bwyslais ar blotio pwyntiau a mwy o bwyslais ar nodweddion graffiau. Gwneir hyn trwy ystyried graffiau rhai ffwythiannau sylfaenol ac ymchwilio i sut y gellir defnyddio'r rhain i gael graffiau eraill.



5.1 Graffiau ffwythiannau sylfaenol

Yn yr adran hon, oni nodir yn wahanol, mae pob ffwythiant wedi ei ddiffinio ar gyfer pob gwerth x.

Y graff symlaf yw llinell syth sy'n deillio o hafaliad llinol.

Enghraifft 5.1 Llinellau syth

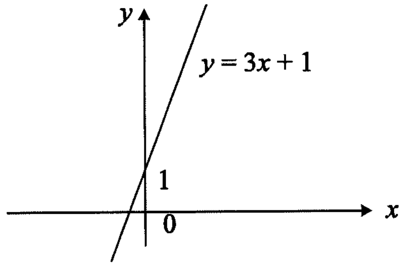
Ystyriwn y ffwythiant a ddiffinnir gan

$$f(x) = 3x + 1$$

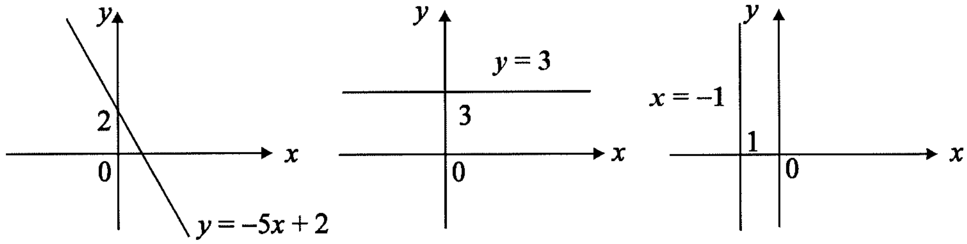
neu

$$y = 3x + 1.$$

Ystyriwyd hafaliadau llinol o'r math hwn yn **P1** lle nodwyd bod hafaliadau o'r fath yn cynhyrchu graffiau llinell syth. Dyma'r graff dan sylw:



Enghreifftiau eraill yw $y = -\ 5x + 2$, $y = 3$, ac $x = -1$.



Enghraifft 5.2 Y ffwythiant modwlws
Ysgrifennir y ffwythiant hwn fel

$$f(x) = +\sqrt{x^2} \quad \text{neu} \quad y = +\sqrt{x^2}.$$

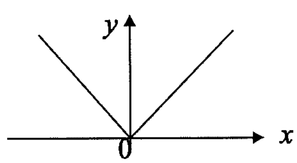
Nid yw gwerth y byth yn negatif, ac mae'n bositif ac eithrio pan fo $x = 0$.
Ysgrifennir y ffwythiant yn aml fel

$$f(x) = |x| \quad \text{neu} \quad y = |x|,$$

lle dehonglir y nodiant modwlws | | fel 'gwerth absoliwt' rhif (h.y. gan anwybyddu'r arwydd). Felly mae

$$|3| = 3 \quad \text{a} \quad |-5| = 5.$$

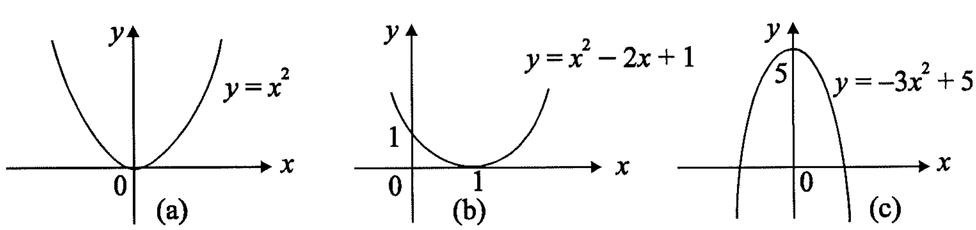
Dangosir isod graff $y = |x|$.



dwy ran
$y = x, \ x \geq 0$
$\ \ = -x, \ x < 0$

Dangosir ffordd arall o ysgrifennu'r ffwythiant modwlws, sydd efallai yn llai cyfarwydd, yn y swigen. Mae'r ffurf hon yn ddefnyddiol wrth ddefnyddio'r ffwythiant modwlws yn y gangen o fathemateg a elwir yn Galcwlws.

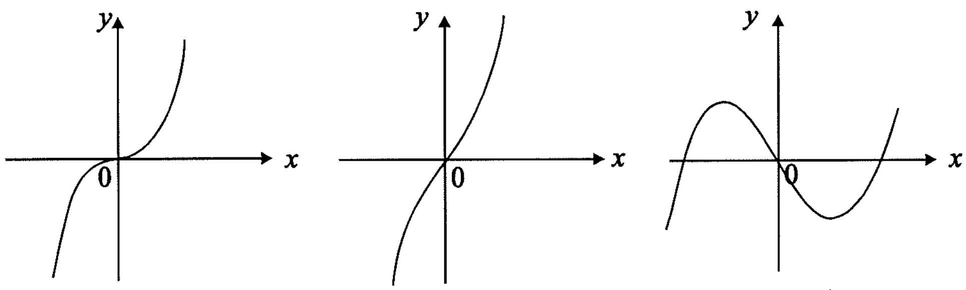
Enghraifft 5.3 Ffwythiannau cwadratig
Mae ffwythiannau cwadratig x yn cynnwys termau yn x^2 ond dim pwerau uwch o x.
Dyma enghreifftiau: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$, $h(x) = -3x^2 + 5$,
neu yn nhermau y, $y = x^2$, $y = x^2 - 2x + 1$, $y = -3x^2 + 5$.
Mae graff ffwythiant cwadratig yn x yn gromlin a elwir yn barabola.



Mae gan bob parabola nodwedd gyffredin, sef bod ganddo un trobwynt. Yn yr achosion a ystyrir yma (mae ffurfiau eraill yn bosibl): wrth i ni edrych o'r chwith i'r dde, mae graffiau (a) a (b) yn newid o fod yn symud i lawr y dudalen i fod yn symud i fyny'r dudalen, h.y. mae'r ffwythiannau yn newid o fod yn ffwythiannau sy'n lleihau i fod yn ffwythiannau sy'n cynyddu. I'r gwrthwyneb, mae graff (c) yn newid o fod yn symud i fyny'r dudalen i fod yn symud i lawr y dudalen, h.y. mae'r ffwythiant yn newid o fod yn ffwythiant sy'n cynyddu i fod yn ffwythiant sy'n lleihau.
Yn olaf, noder bod ffurfiau'r graffiau i gyd yn debyg, ac (c) yn graff tebyg i (a) a (b) wedi ei droi wyneb i waered.

Enghraifft 5.4 Ffwythiannau ciwbig

Yma mae'r ffwythiant polynomaidd yn cynnwys term yn x^3 ond dim pwerau uwch o x. Yn wahanol i ffwythiannau cwadratig lle mae'r ffurf sylfaenol [sef 'cwpan' yn (a), (b), 'het' yn (c)] yn sefydlog, gall ffwythiannau ciwbig ddangos amrywiaeth o siapiau.
Ystyriwn graffiau (a) $y = x^3$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3 - x$ fel a ddangosir isod.

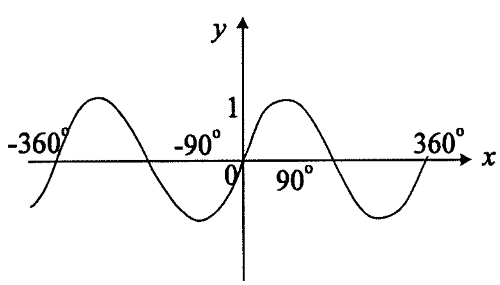


(a) $y = x^3$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3 - x$

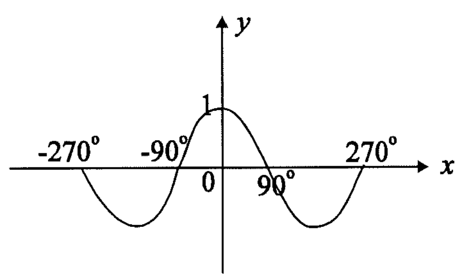
Mae'r graffiau i gyd yn mynd trwy (0,0) er bod graff (a) yn wastad ar y pwynt hwnnw, yn wahanol i (b) a (c).
Yn (c) mae dau o'r trobwyntiau a geir gyda ffwythiannau cwadratig.

Enghraifft 5.5 Ffwythiannau trigonometrig

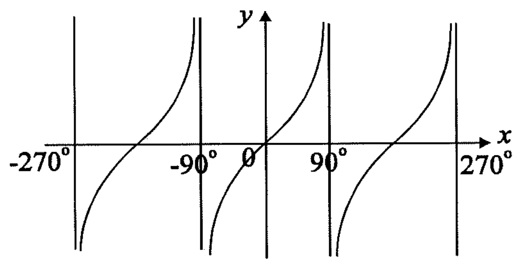
Cyflwynwyd y math hwn o ffwythiant yn **P1**. Er mwyn bod yn gyflawn, dangosir yma graffiau sin x, cos x a tan x.



$y = \sin x$



$y = \cos x$

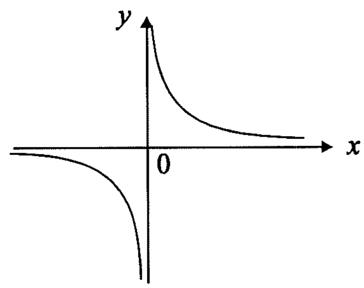


$y = \tan x$

Enghraifft 5.6 Y ffwythiant cilyddol

Ystyriwn $f(x) = \dfrac{1}{x}$ neu $y = \dfrac{1}{x}$.

Nid oes modd diffinio'r ffwythiant ar gyfer $x = 0$. Wrth i x nesáu at 0 trwy werthoedd positif x e.e. ($x = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ ayb) mae gan y werthoedd positif mwy a mwy (1, 10, 100, 1000 ac ati), ac wrth i x nesau at 0 trwy werthoedd negatif ($-1, -0.1, -0.01, -0.001$) mae gan y werthoedd negatif mwy a mwy ($-1, -10, -100, -1000$ ac ati). Wrth i x gymryd gwerthoedd mawr (positif neu negatif) mae gan y werthoedd bach (positif neu negatif). Mae'r graff fel a ddangosir isod.



Gwelir bod y ffwythiant yn doredig ar $x = 0$. Wrth fynd heibio, dylid nodi ar gyfer $f(x) = \dfrac{1}{x}$, bod $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$, a $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$ ond na ellir diddwytho bod $f(x) = 0$ ar gyfer rhyw x yn $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Enghraifft 5.7 Y ffwythiant esbonyddol

Ystyriwn ffwythiannau megis

$$f(x) = 2^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ h(x) = 4^{5x-1}$$

$$\text{neu } y = 2^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = 4^{5x-1},$$

lle mae x yn ymddangos yn yr esbonydd. Mae ffwythiannau o'r fath yn digwydd yn aml mewn mathemateg ac felly rhaid eu cynnwys yn ein rhestr o ffwythiannau sylfaenol.

Rydym am lunio tabl gwerthoedd (er gwaethaf yr amheuon a fynegwyd yn gynharach), a phlotio graffiau $y = 2^x$ ac $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

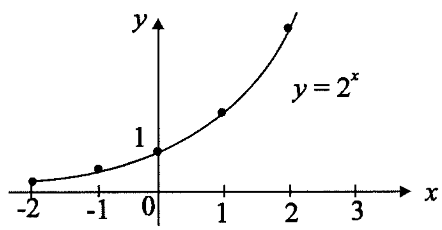
(a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$2^0 = 1$	2	4	8

(b)

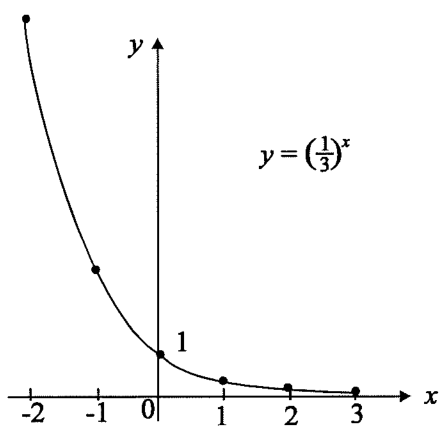
x	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = 3$	1	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{27}$

(a)



Cymerir bod cysylltu'r pwyntiau a gyfrifwyd yn cynrychioli'r cromliniau yn fanwl gywir.

(b)



Un nodwedd gyffredin ar y graffiau yw bod $y > 0$ ar gyfer pob pwynt ar y ddau graff, h.y. mae'r graffiau uwchben yr echelin x. Mae'r graffiau'n wahanol gan fod (a) yn ffwythiant cynyddol (mae'r graff yn codi wrth fynd i'r dde) a (b) yn ffwythiant lleihaol (mae'r graff yn disgyn wrth fynd i'r dde). Rhestrir isod nodweddion eraill y graffiau.

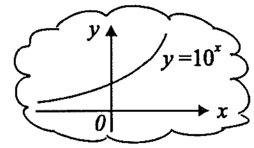
	(a)	(b)
(i)	$y = 1$ pan fo $x = 0$	$y = 1$ pan fo $x = 0$
(ii)	$y \to \infty$ wrth i $x \to \infty$	$y \to 0$ wrth i $x \to \infty$
(iii)	$y \to 0$ wrth i $x \to -\infty$	$y \to \infty$ wrth i $x \to -\infty$
(iv)	Mae'r graff yn mynd yn fwy serth wrth fynd i'r dde	Mae'r graff yn mynd yn fwy serth wrth fynd i'r chwith.

Gellir gweld yn hawdd bod y nodweddion cyferbyniol sy'n digwydd i $y = a^x$ yn dibynnu ar a yw a yn fwy yntau'n llai nag 1.

Dim ond ar gyfer $a > 0$ y gellir diffinio $y = a^x$

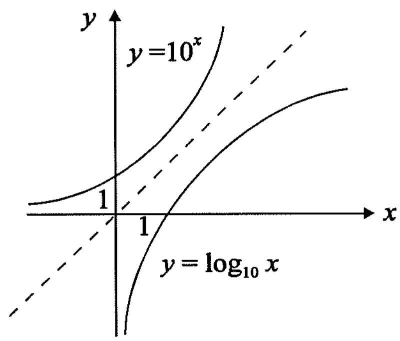
Enghraifft 5.8 Y ffwythiant log

Dychwelwn yn fyr at y ffwythiant esbonyddol. Er mwyn sefydlu eich syniadau, ystyriwch $f(x) = 10^x$.



Ffwythiant un-i-un yw hwn ac felly mae ei ffwythiant gwrthdro f^{-1} yn bodoli; caiff ei ddiffinio gan
$f^{-1}(x) = \log_{10} x$.

Gellir plotio graff $\log_{10}x$ yn rhwydd trwy ddefnyddio'r botwm $\log_{10}$ i gyfrifo gwerthoedd, neu drwy adlewyrchu graff $y = 10^x$ yn y llinell $y = x$.



O graff $y = \log_{10} x$ mae'r nodweddion canlynol yn amlwg :-

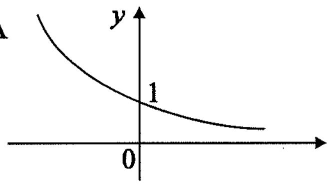
(a) $\log_{10}1 = 0$,
(b) $\log_{10} x \to -\infty$ wrth i $x \to 0$,
(c) $\log_{10} x \to \infty$ wrth i $x \to \infty$
ac mae gan $\log_{10} x$ barth $(0, \infty)$.

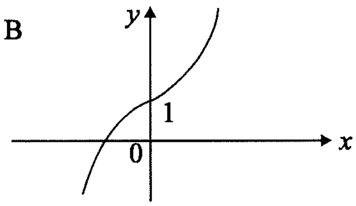
Ymarferion 5.1

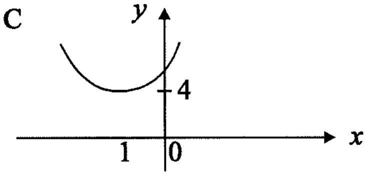
1. Mae'r graffiau ar y dudalen nesaf yn perthyn i'r ffwythiannau canlynol :-

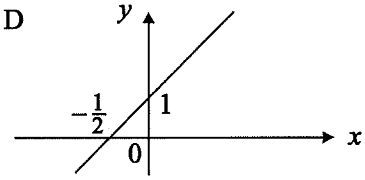
(i) $y = x^2 + 2x + 5$	(ii) $y = 2x + 1$
(iii) $y = x^3 + 1$	(iv) $y = -x^2 + 2x + 1$
(v) $y = x^3 - x + 1$	(vi) $y = (1.3)^x + 1$
(vii) $y = x^3 + x + 1$	(viii) $y = (0.2)^x$
(ix) $y = \log_{10}x$	(x) $y = \dfrac{1}{x} + 1$
(xi) $y = \lvert x - 1 \rvert$	(xii) $y = \dfrac{1}{\lvert x \rvert}$
(xiii) $y = -\dfrac{1}{5}x + 1$.	

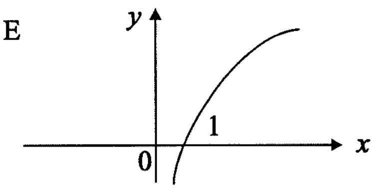
Trwy yn gyntaf ystyried ffurfiau rhai o'r graffiau yn **Enghreifftiau 5.1 – 5.8**, cysylltwch yr hafaliadau â'r graffiau, er enghraifft [(*i*), B]. (Nid yw'r canlyniad hwn o reidrwydd yn gywir!)

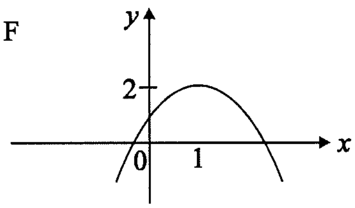
A


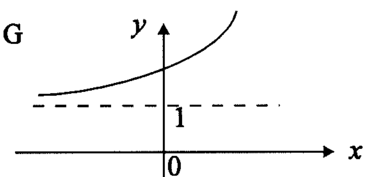
B


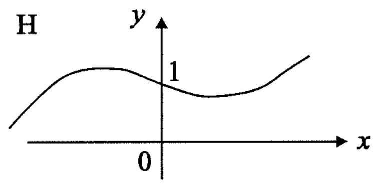
C


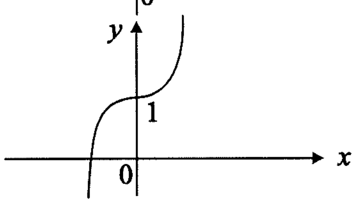
D


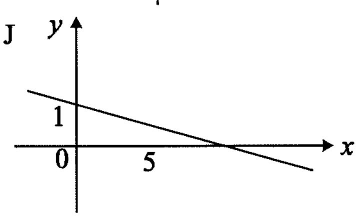
E


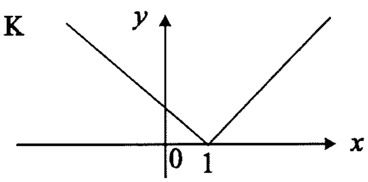
F


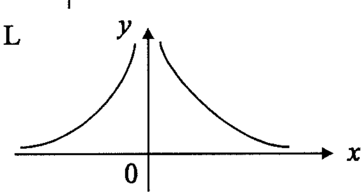
G


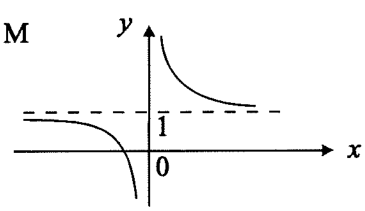
H


I


J


K


L


M


2. Brasluniwch graffiau $y = 3 - x$ ac $y = \log_{10} x$. Trwy hyn dangoswch nad oes ond un gwerth x sy'n bodloni

$$x + \log_{10} x - 3 = 0.$$

3. Dangoswch trwy fraslunio graffiau priodol nad oes gan yr hafaliad $e^x + x - 2 = 0$ ond un gwreiddyn a bod hwnnw'n bositif.

4. Brasluniwch graffiau $y = \sin x$ ac $y = x - 2$ a dangoswch nad oes gan $\sin x - x + 2 = 0$ ond un gwreiddyn.

5.2 Effeithiau trawsffurfiadau ar graff $y = f(x)$

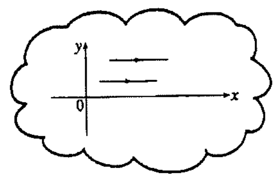
Yn yr adran hon byddwn yn ystyried effeithiau nifer o brosesau ar graff $y = f(x)$. Gelwir y prosesau hyn ac eraill yn drawsffurfiadau o blân *xy*. Yn benodol, rydym yn ystyried y trawsffurfiadau a elwir yn drawsfudiadau a ffactorau graddio.

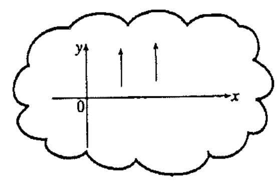
1. **Trawsfudiad**

Mae hyn yn ymwneud â sefyllfaoedd lle mae pob pwynt yn symud yr un pellter. Ystyrir dau achos, sef

(i) symudiad neu drawsfudiad o'r holl bwyntiau ym mhlân. *xy*, drwy'r un pellter yn baralel i'r echelin *x*,

(ii) symudiad neu drawsfudiad o'r holl bwyntiau ym mhlân *xy* yn baralel i gyfeiriad y.

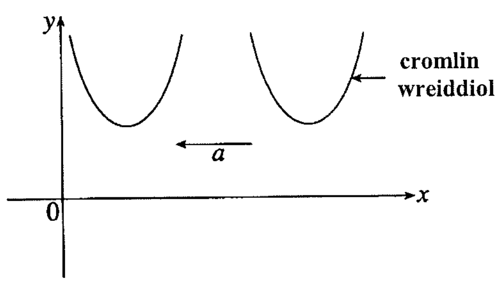




(i) Trawsfudiad yng nghyfeiriad *x*

Am reswm a ddaw'n amlwg yn nes ymlaen, mae'n hwylus i ni gymryd bod yr holl bwyntiau'n symud pellter $-a$ yng nghyfeiriad *x*, lle gall *a* fod yn bositif neu'n negatif.

Yn geometregol, yr effaith a gaiff y trawsfudiad $-a$ yng nghyfeiriad *x* yw symud y gromlin $y = f(x)$ yn gorfforol yng nghyfeiriad *x*, fel a ddangosir. Yn y diagram cymerir bod *a* yn bositif.



O wybod mai $y = f(x)$ yw hafaliad y gromlin wreiddiol, beth yw hafaliad y gromlin newydd?

Nawr gwelir bod effaith y trawsfudiad $(x, y) \to (x-a, y)$ yn ffurfio cyfesurynnau X, Y newydd a roddir gan

$$X = x - a,$$
$$Y = y.$$

X yn lleihau wrth a

Felly mae $x = X + a$ ac $y = Y$.
Mae amnewid am x, y yn $y = f(x)$ yn rhoi

$$Y = f(X + a).$$

Nawr gadewch i ni gael gwared â'r prif lythrennau gan fod y berthynas hon yr un mor ddilys gyda llythrennau eraill. Yna cawn

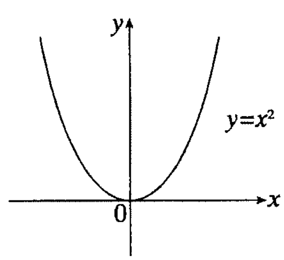
$$y = f(x + a).$$

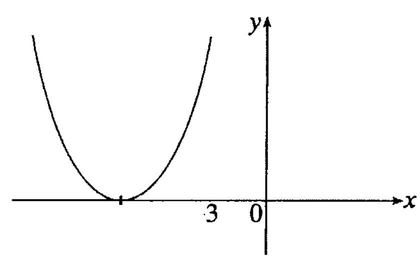
Nodwch y canlyniad sydd o bosib yn peri syndod:
mae trawsfudiad $-a$ yng nghyfeiriad x yn newid x i $x + a$ yn $f(x)$. Dyna pam y dewisom $-a$ yn y trawsfudiad x.

Rheol I

Mae trawsfudiad $-a$ yng nghyfeiriad x yn newid y gromlin $y = f(x)$ i $y = f(x + a)$, gan gyfeirio at yr echelinau gwreiddiol.

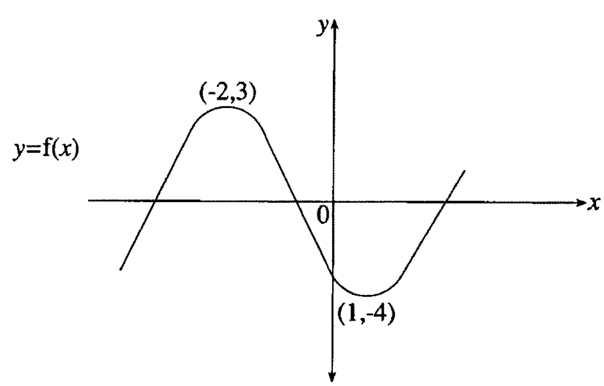
Enghraifft 5.9
Lluniwch graffiau $y = x^2$ ac $y = (x+3)^2$. Dangosir y graffiau isod.



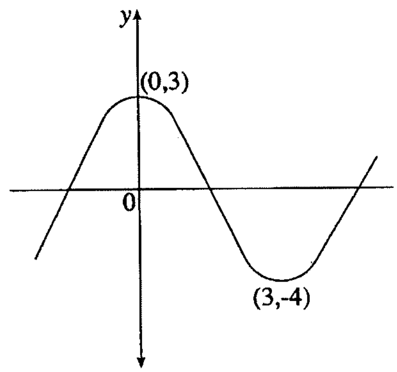


Nawr mae $f(x) = x^2$, $f(x+3) = (x+3)^2$ fel bod $a = 3$. Ceir yr ail graff o'r cyntaf drwy drawsfudiad o -3 ar hyd yr echelin x.

Enghraifft 5.10
O wybod bod gan $y = f(x)$ y graff a ddangosir, brasluniwch graff $y = f(x-2)$.

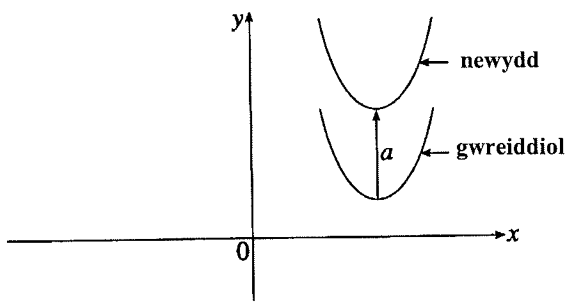


Yma mae $a = -2$ a cheir y graff newydd drwy symud y graff gwreiddiol drwy $-(-2) = 2$ ar hyd cyfeiriad x. Trawsfudir y pwyntiau sefydlog $(-2, 3)$, $(1, -4)$ i $(0, 3)$ a $(3, -4)$ yn y drefn honno. Felly mae'r graff sydd wedi'i drawsfudo fel a ddangosir.



(ii) Trawsfudiad yng nghyfeiriad y

Yn geometregol, yr effaith a gaiff y trawsfudiad a yng nghyfeiriad y yw symud y gromlin $y = f(x)$ bellter a yng nghyfeiriad y (nodwch nad ydym yn dewis $-a$ yma).



Yna mae'r trawsfudiad $(x, y) \to (x, y + a)$ yn diffinio cyfesurynnau newydd X, Y a roddir gan

$$X = x,$$
$$Y = y + a.$$

Felly mae $\quad x = X, \quad y = Y - a.$

Mae amnewid am x ac y yn $y = f(x)$ yn rhoi

$$Y - a = f(X)$$

neu $\quad Y = f(X) + a.$

Drwy gael gwared â'r prif lythrennau, cawn

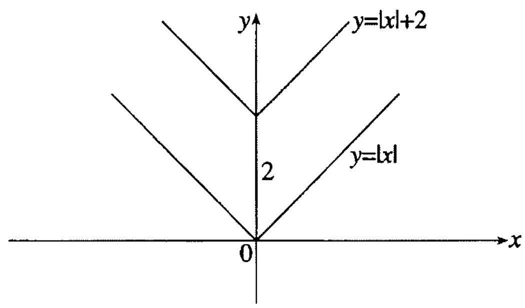
$$y = f(x) + a.$$

Rheol II

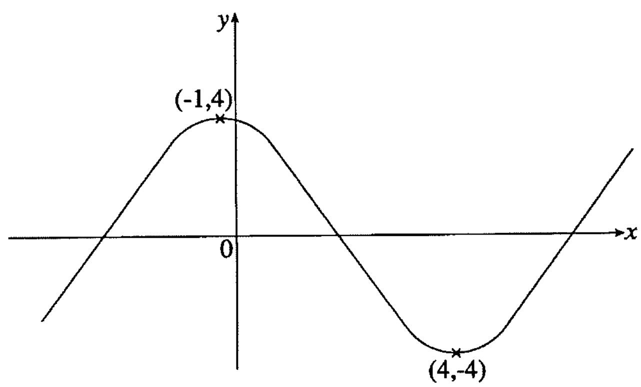
Mae trawsfudiad a yng nghyfeiriad y yn newid y gromlin $y = f(x)$ i $y = f(x) + a$, gan gyfeirio at yr echelinau gwreiddiol.

Enghraifft 5.11
Lluniwch graffiau $y = |x|$ ac $y = |x| + 2$.

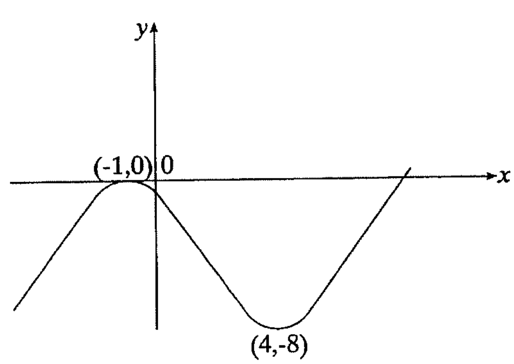
Yma mae $f(x) = |x|$ ac $a = 2$. Dangosir y graffiau isod, lle mae graff gwreiddiol $y = |x|$ wedi cael ei symud bellter o 2 yng nghyfeiriad y.



Enghraifft 5.12
O wybod bod graff $y = f(x)$ fel a ddangosir, darganfyddwch graff $y = f(x) - 4$.



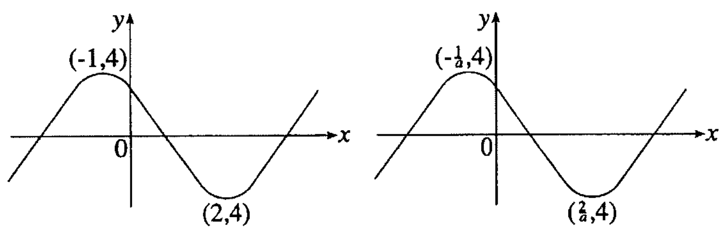
Ceir y graff newydd drwy symud graff $y = f(x)$ drwy -4 ar hyd cyfeiriad y. Mae'r pwyntiau sefydlog gwreiddiol yn newid i $(-1, 0)$ a $(4, -8)$.



2. **Ffactor graddio**
Mae hyn yn ymwneud â sefyllfaoedd lle lluosir pellteroedd â ffactor cyson. Fel gyda thrawsfudiadau, rydym yn ystyried ffactorau graddio yng nghyfeiriadau x ac y ar wahân.

(i) <u>Ffactor graddio yng nghyfeiriad x</u>
Am reswm a ddaw'n amlwg yn nes ymlaen, mae'n hwylus i ni gymryd y ceir ffactor graddio o $\frac{1}{a}$ yng nghyfeiriad x, h.y. caiff pob pellter ei luosi â $\frac{1}{a}$.
Dangosir isod yr effaith geometregol a gaiff hyn ar graff.

<u>gwreiddiol</u> <u>newydd</u>

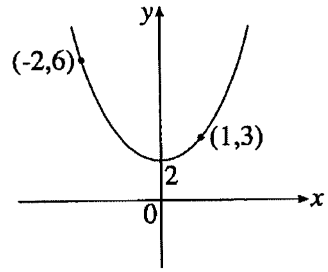


Yn benodol, mae cyfesurynnau x pwyntiau sefydlog y gromlin wreiddiol wedi cael eu lluosi ag $\frac{1}{a}$. Er mwyn darganfod hafaliad y graff newydd, rydym yn dilyn yr un camau ag o'r blaen.
Mae'r trawsffurfiad $(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{a}x, y\right)$
yn diffinio cyfesurynnau newydd X, Y a roddir gan
$$X = \frac{1}{a}x, \quad Y = y\,.$$
Felly mae $\quad x = aX, \quad y = Y$
ac aiff $y = f(x)$, ar ôl amnewid am x ac y, yn
$$Y = f(aX).$$
Drwy gael gwared â'r priflythrennau, cawn
$$y = f(ax).$$
Nodwch ganlyniad sydd efallai'n peri syndod unwaith eto: mae ffactor graddio o $\frac{1}{a}$ yng nghyfeiriad x yn newid x i ax yn $f(x)$.

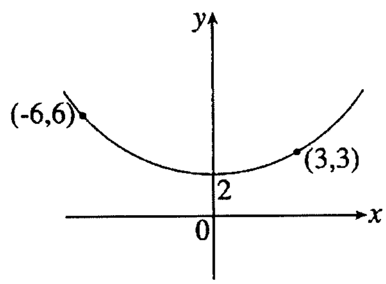
Rheol III

Mae ffactor graddio o $\frac{1}{a}$ yng nghyfeiriad x yn newid y gromlin $y = f(x)$ i $y = f(ax)$.

Enghraifft 5.13
Mae graff y = $x^2 + 2$ fel a ddangosir.



Yna mae ffactor graddio o 3 yng nghyfeiriad x yn rhoi'r graff canlynol, a nodir yr effaith a gaiff hyn ar bwyntiau (–2, 6) a (1, 3) y graff gwreiddiol.



Gan nodi bod y ffactor graddio $\dfrac{1}{a} = 3$, cawn $a = \dfrac{1}{3}$.

Nawr mae $f(x) = x^2 + 2$ fel bod

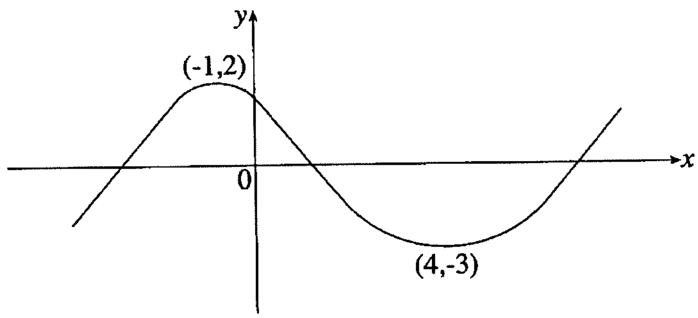
$$f(ax) = f\left(\frac{1}{3}x\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 2 = \frac{1}{9}x^2 + 2 .$$

Felly, hafaliad y graff wedi'i drawsffurfio yw

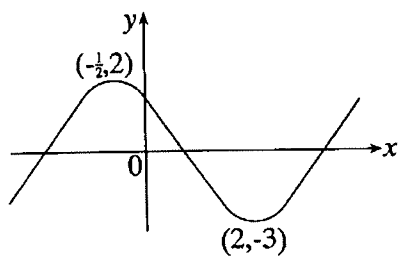
$$y = \frac{1}{9}x^2 + 2$$

neu $$9y = x^2 + 18 .$$

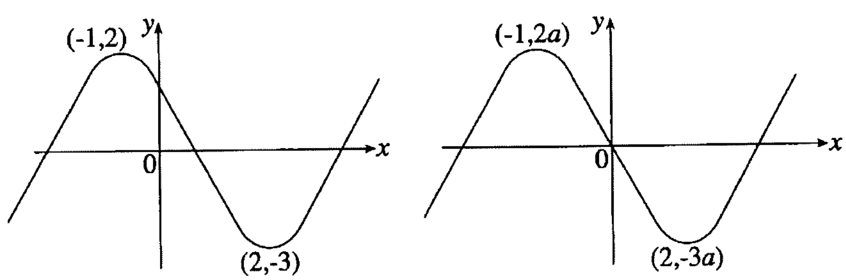
Enghraifft 5.14
O wybod bod graff $y = f(x)$ fel a ddangosir isod, brasluniwch graff $y = f(2x)$.



Yma mae $a = 2$ ac mae'r trawsffurfiad yn ffactor graddio x o $\frac{1}{2}$. Mae'r graff wedi'i drawsffurfio fel a ddangosir, gyda'r pwyntiau sefydlog gwreiddiol yn cael eu trawsffurfio i $(-\frac{1}{2}, 2)$ a $(2, -3)$.



ii) <u>Ffactor graddio yng nghyfeiriad *y*</u>
Cymerir bod ffactor graddio a yng nghyfeiriad y, h.y. caiff pob pellter yn y cyfeiriad hwnnw ei luosi ag a.
Dangosir isod yr effaith geometregol a gaiff hyn ar graff.



Yn benodol, mae cyfesurynnau y y pwyntiau sefydlog wedi cael eu lluosi ag a. Er mwyn darganfod hafaliad y graff newydd, rydym yn dilyn yr un camau ag o'r blaen.

Mae'r trawsffurfiad $(x, y) \rightarrow (x, ay)$
yn diffinio cyfesurynnau newydd (X, Y) a roddir gan

$$X = x, \quad Y = ay.$$

Yna mae $\quad x = X,\ y = \dfrac{Y}{a}$ fel bod $y = f(x)$

yn mynd yn $\quad \dfrac{Y}{a} = f(X)$

neu $\quad Y = a\,f(X).$

Drwy newid y prif lythrennau, cawn

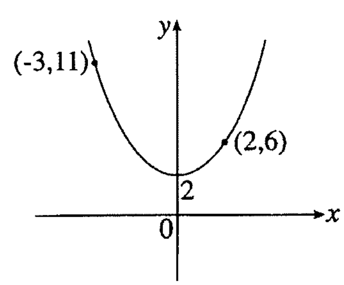
$$y = a\,f(x).$$

Rheol IV

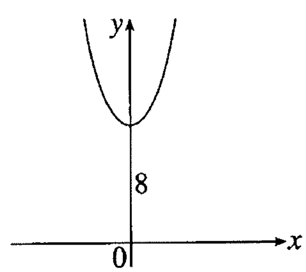
Mae ffactor graddio a yng nghyfeiriad y yn newid y gromlin $y = f(x)$ i $y = a f(x)$.

Enghraifft 5.15

Mae graff $y = x^2 + 2$ fel a ddangosir.



Mae ffactor graddio o 4 yng nghyfeiriad y yn rhoi'r graff canlynol, a nodir yr effaith a gaiff hyn ar y rhyngdoriad ar yr echelin x.

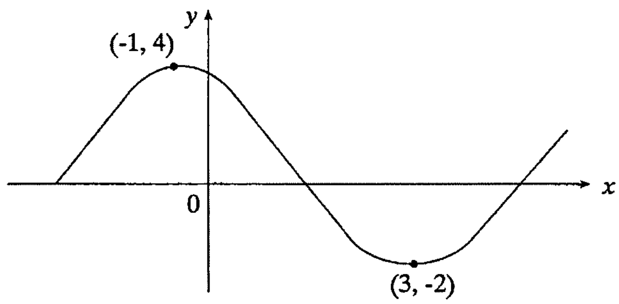


Gan nodi bod y ffactor graddio yng nghyfeiriad y yn $a = 4$ a bod $f(x) = x^2 + 2$, gwelwn mai'r hafaliad yw

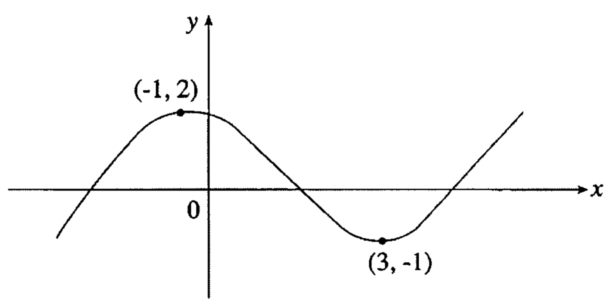
$$y = 4f(x) = 4(x^2 + 2)$$

neu $\quad y = 4x^2 + 8.$

Enghraifft 5.16
O wybod bod gan $y = f(x)$ y graff a ddangosir, darganfyddwch y graff a geir o ganlyniad i ddefnyddio ffactor graddio o $\frac{1}{2}$ yng nghyfeiriad y.



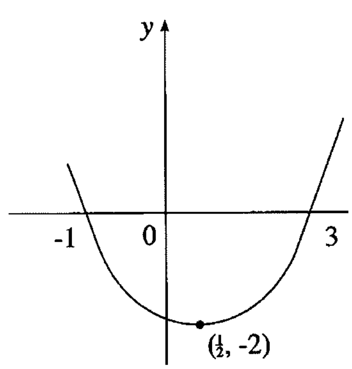
Dangosir y graff wedi'i drawsffurfio isod.



Mae'r pwyntiau sefydlog $(-1, 4)$ a $(3, -2)$ wedi cael eu trawsffurfio i $(-1, 2)$ a $(3, -1)$, yn y drefn honno.

Ymarferion 5.2

1.



Mae'r braslun yn dangos graff $y = f(x)$. Mae'r gromlin yn mynd drwy $(-1, 0)$ a $(3, 0)$, ac mae ganddi bwynt minimwm yn $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

Ar ddiagramau ar wahân, brasluniwch graffiau
(a) $y = f(x+2)$ (b) $y = f(x)+2$ (c) $y = f(3x)$

2. Brasluniwch graff $y = \dfrac{1}{x}$ a'r graff a geir yn sgîl y trawsfudiad $(x, y) \rightarrow (x-1, y)$ ac yna'r ffactor graddio $(x, y) \rightarrow (x, 2y)$. Beth yw hafaliad y graff a geir yn sgîl y trawsffurfiadau hyn?

3. Brasluniwch graff $y = |x|$. Pa drawsfudiadau x ac y sy'n trawsffurfio $y = |x|$ i $y = |x-2| - 4$? Brasluniwch yr ail graff.

4. Brasluniwch graffiau $y = \cos x$ ac $y = \sin x$. Dangoswch fod gan $y = \cos x$ ac $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ yr un graff.

5. Defnyddiwch graff $y = \sin x$ i fraslunio graff $y = 5\sin 3x + 4$.

6. Brasluniwch graff $y = 3^x$.
Defnyddiwch y graff hwn i fraslunio graff $y = 2 \times 3^x + 5$.

7. O wybod y gellir ysgrifennu $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+1} + 4$ fel $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 4$, brasluniwch y graff gan ddechrau gyda graff $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$.

8. Brasluniwch graffiau
(i) $y = \log_{10} x$ (ii) $y = 3\log_{10} x$ (iii) $y = 3\log_{10}(x) + 5$
(iv) $y = 3\log_{10}(2x) + 5$.

Pennod 6

Geometreg Gyfesurynnol Cartesaidd y Cylch

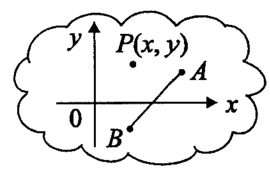
Yn **P1**, aethom ati i astudio nodweddion llinellau syth drwy ddefnyddio dulliau algebraidd. Yma rydym am ddechrau defnyddio algebra wrth astudio cromliniau.

6.1 Locws pwynt

Locws pwynt yw llwybr y pwynt wrth iddo deithio o dan amodau arbennig. Yn aml, fe ddisgrifir y locws neu'r llwybr ar ffurf hafaliadau mewn geometreg gyfesurynnol.

Enghraifft 6.1

Mae'r pwynt $P(x, y)$ yn symud fel ei fod yr un pellter oddi wrth bwyntiau A (5, 1) a $B(3, -1)$ drwy'r amser. Darganfyddwch hafaliad locws P.



Wedi ei fynegi'n geometrig, yr amod a fodlonir gan bwynt P yw fod $AP = BP$.

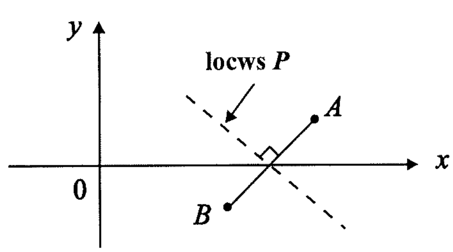
Nawr mae
$$AP^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2,$$
$$BP^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2.$$

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, **P1.**

Felly mae $AP = BP$ yn gywerth ag
$$AP^2 = BP^2$$
sy'n arwain at
$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2.$$
$$\therefore\ x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1$$
fel bod
$$4x + 4y - 16 = 0$$
neu
$$x + y - 4 = 0.$$

$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, **P1.**

Rydym yn adnabod yr uchod fel hafaliad llinell syth.
Mewn gwirionedd, mae'r hafaliad yn disgrifio'r llinell sy'n mynd trwy ganolbwynt AB ac sydd hefyd yn berpendicwlar i AB.



Oherwydd y cysylltiad agos rhwng y locws, a'r hafaliad a fodlonir gan yr holl bwyntiau sy'n gorwedd ar y locws, rydym yn cyfeirio at yr hafaliad ei hun fel y locws.

Enghraifft 6.2
Darganfyddwch locws pwynt P sydd â'i bellter oddi wrth bwynt A (1, −2) yn ddwywaith cymaint â'i bellter oddi wrth y tarddiad O.

Gadewch i P (x, y) fod y pwynt ar y locws.

Yna gan fod $\quad PA = 2PO,$

$$PA^2 = 4PO^2$$

fel bod $\quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4(x^2+y^2).$

$\therefore \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4x^2 + 4y^2$

sy'n rhoi $\quad 3x^2 + 3y^2 + 2x - 4y - 5 = 0.$

Nid oes disgwyl i chi adnabod y math hwn o hafaliad ar hyn o bryd.

Enghraifft 6.3
Darganfyddwch locws pwynt P fel bod PA yn berpendicwlar i PB lle mae A yn (0,1) a B yn (0, −1).

Gadewch i $P(x, y)$ fod yn bwynt ar y locws.

Graddiant PA yw $\dfrac{y-1}{x-0} = \dfrac{y-1}{x}.$

Graddiant PB yw $\dfrac{y+1}{x-0} = \dfrac{y+1}{x}.$

Gan fod y llinellau'n berpendicwlar, mae lluoswm eu graddiannau yn −1.

Felly $\quad \dfrac{y-1}{x} \times \dfrac{y+1}{x} = -1.$

$\therefore \quad y^2 - 1 = -x^2$

neu $\quad x^2 + y^2 = 1.$

Unwaith eto, nid oes disgwyl i chi adnabod y gromlin hon.

Enghraifft 6.4
Dewch o hyd i locws pwynt sy'n symud fel bod ei bellter oddi wrth bwynt A (1, 2) yn 2.

Gadewch i $P(x, y)$ fod yn bwynt ar y locws.

Felly mae $\quad PA = 2$

fel bod $\quad PA^2 = 4.$

$\therefore \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

fel bod $\quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4.$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$

Ymarferion 6.1

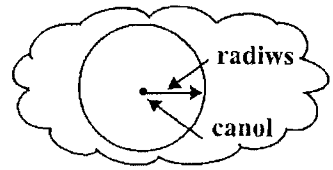
1. Darganfyddwch locws pwynt sy'n symud fel bod ei bellter o'r pwynt A (2, 0) deirgwaith cymaint â'i bellter o'r tarddiad O.
2. Mae'r pwynt P (x, y) yn symud fel bod ei bellter o'r tarddiad yn 5. Darganfyddwch hafaliad locws y pwynt.
3. Ysgrifennwch bellter y pwynt (x, y) o'r llinell $y = -1$. Darganfyddwch locws pwynt sy'n gytbell o'r tarddiad O a'r llinell $y = -1$.
4. A yw'r pwynt (−1, 2) a B yw'r pwynt (1, −2). Mae'r pwynt P yn symud fel bod AP a PB yn berpendicwlar. Darganfyddwch locws P.

5. Darganfyddwch locws pwynt sy'n symud fel ei fod yn gytbell o'r pwynt $(a, 0)$ a'r llinell $x = -a$.

6. Darganfyddwch locws pwynt sy'n symud fel bod ei bellter o'r pwynt $(a, 0)$ deirgwaith cymaint â'i bellter o'r llinell $x = -a$.

6.2 Y cylch

Locws pwynt sy'n symud mewn plân fel bod ei bellter oddi wrth bwynt sefydlog yn y plân yn gyson, yw cylch. Gelwir y pwynt sefydlog yn ganol a'r pellter cyson yn radiws.



Enghraifft 6.5

Darganfyddwch hafaliad y cylch sydd â'i ganol yn $C(1, -2)$ a'i radiws yn 3.

Gadewch i $P(x, y)$ fod yn bwynt ar y cylch.

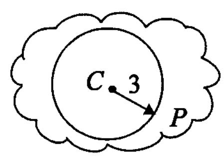
Felly mae $\quad CP = 3$

yn rhoi $\quad CP^2 = 9$

fel bod $\quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$

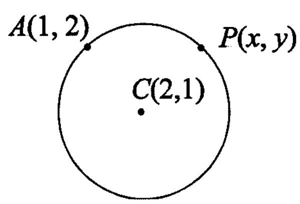
$\therefore \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$

sy'n rhoi $\quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$



Enghraifft 6.6

Darganfyddwch hafaliad y cylch sydd â'i ganol yn $C\,(2, 1)$ ac sy'n mynd drwy'r pwynt $A\,(1, 2)$.



Er nad ydym yn gwybod radiws y cylch, gallwn ei gyfrifo drwy ddefnyddio pwyntiau A ac C. Felly, pan fo $P\,(x, y)$ ar y cylch, mae

$$CP^2 = CA^2$$

fel bod $\quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = (1-2)^2 + (2-1)^2.$

$\therefore \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$

neu $\quad x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$

Hafaliad safonol cylch

Yn **P1**, nodwyd fod rhaid i hafaliad fod o radd un yn x ac y os yw'n cynrychioli llinell syth (pan fo x ac y yn ymddangos, o leiaf). A yw'n bosib i ni wneud datganiad tebyg mewn perthynas â hafaliad cylch? I ateb y cwestiwn hwn, gadewch i ni ddarganfod hafaliad safonol cylch.

e.e.
$\mathbf{2x + 3y - 5 = 0,}$
$\mathbf{x = -6, y = 2.}$

Dyma'r hafaliad mwyaf cyffredin i gylch

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

sy'n mynd yn

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Mae hyn yn awgrymu fod pob hafaliad yn y ffurf

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

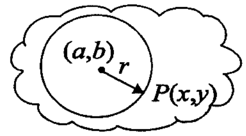
yn cynrychioli cylch.

Gellir mynegi'r hafaliad hwn yn y ffurf

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = \overline{g^2 + f^2 - c}$$

fel mai $(-g, -f)$ yw'r canol a $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ yw radiws y cylch.

I grynhoi, hafaliad cyffredinol y cylch yw



Mae cyfernodau x^2 ac y^2 yn hafal ac nid oes term yn *xy*.

Gwiriwch hyn trwy luosi'r ffactorau a diddymu cromfachau.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ gyda chanol $(-g, -f)$ a radiws $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

Enghraifft 6.7

Penderfynwch pa rai o'r hafaliadau canlynol sy'n cynrychioli cylchoedd. Os bydd yr hafaliad yn cynrychioli cylch, nodwch ei ganol a'i radiws.

(a) $3x + y - 5 = 0$ (b) $y^2 = 4x$ (c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
(d) $x^2 + y^2 + 3xy - 4y + 3 = 0$ (e) $3x^2 + 3y^2 = 5$
(f) $3y^2 + x^2 - y = 2$ (g) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 5y = 0$
(h) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 5 = 0$ (i) $2x^2 - 2y^2 = 5$

(a) Llinell syth.
(b) Cromlin ond dim cylch.
(c) Cylch gyda chanol $(-2, 1)$, radiws 2.
(d) Cromlin ond dim cylch (presenoldeb *xy*).
(e) Cylch gyda chanol $(0, 0)$, radiws $\sqrt{\frac{5}{3}}$.
(f) Cromlin ond dim cylch (nid yw cyfernodau x^2 ac y^2 yn hafal).
(g) Cylch gyda chanol $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$, radiws $\frac{\sqrt{61}}{4}$.
(h) Cylch gyda chanol $(-1, 0)$, radiws $\sqrt{\frac{8}{3}}$.
(i) Cromlin ond dim cylch (nid yw cyfernodau x^2 ac y^2 yn hafal).

Ymarferion 6.2

1. Darganfyddwch hafaliadau'r cylchoedd sydd â'r canolau a'r radiysau canlynol.

(a) $(0, 1)$; 3 (b) $(-1, 2)$; $\sqrt{5}$ (c) $(2, 3)$; 4
(d) $(-1, -1)$; $\sqrt{2}$ (e) $(4, 1)$; $\sqrt{5}$

2. Darganfyddwch ganol a radiws pob un o'r cylchoedd canlynol :-

(a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 3y = 12$ (d) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

(e) $4x^2 + 4y^2 - 8x - 7y = 2$ (f) $4x^2 + 4y^2 = 9$

3. Darganfyddwch hafaliad y cylch sydd â chanol $(2, -1)$ ac sy'n mynd trwy'r pwynt $(2, 1)$.

4. Darganfyddwch hafaliad y cylch sy'n mynd drwy'r pwyntiau $(0, 4)$, $(0, 9)$ a $(6, 0)$. (Gadewch i'r hafaliad fod yn $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.)

5. Darganfyddwch hafaliad y cylch a chanddo'r llinell sy'n cysylltu A $(1, 2)$ a B $(-1, 3)$ yn ddiamedr.
(Canolbwynt y diamedr yw canol y cylch.)

6. Mae

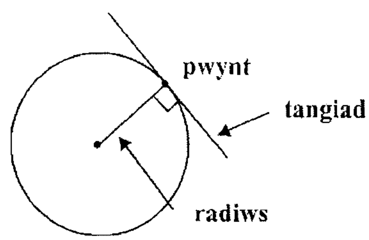
$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

yn hafaliad i gylch â chanol O.
Mae pwynt $P(\alpha, \beta)$ yn gorwedd y tu allan i'r cylch.

(a) Ysgrifennwch gyfesurynnau O a radiws y cylch.
(b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer OP.
(c) Mae tangiad i'r cylch o P yn croestorri'r cylch yn T.
Dangoswch fod $PT^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c$.

Hafaliad tangiad i gylch

Gellir darganfod hafaliad tangiad i unrhyw gromlin ar bwynt drwy ddefnyddio calcwlws. Yma, nid ydym am ddefnyddio calcwlws, ond yn hytrach fe ddefnyddiwn geometreg benodol y cylch. Yn arbennig, gadewch i ni gofio fod tangiad i gylch yn berpendicwlar i'r radiws ar y pwynt hwnnw.



Enghraifft 6.8

Gwiriwch fod y pwynt $(3, 5)$ yn gorwedd ar y cylch

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

a darganfyddwch hafaliad y tangiad ar y pwynt hwnnw.

Os yw'r pwynt yn gorwedd ar y cylch, rhaid i gyfesurynnau'r pwynt fodloni'r hafaliad. Drwy amnewid $x = 3$, $y = 5$ yn yr hafaliad cawn fod

$$\begin{aligned} \text{yr ochr chwith} &= 3^2 + 5^2 - 4(3) - 6(5) + 8 \\ &= 9 + 25 - 12 - 30 + 8 \\ &= 0 = \text{ochr dde.} \end{aligned}$$

$\therefore$ Mae'r pwynt $(3, 5)$ yn gorwedd ar y cylch.
Canol y cylch yw $(2, 3)$ fel bod graddiant y radiws i'r pwynt $(3, 5)$ yn

$$\frac{5-3}{3-2} = 2,$$

ac felly graddiant y tangiad yw $-\frac{1}{2}$.

-1 yw lluoswm graddiannau llinellau perpendicwlar, P1.

Felly hafaliad y tangiad yw

$$y-5 = -\frac{1}{2}(x-3).$$

$$\therefore \quad 2y-10 = -x+3$$

fel bod $2y+x-13 = 0.$

Enghraifft 6.9

(a) Darganfyddwch hafaliad y cylch sy'n mynd drwy'r tarddiad O a'r pwyntiau A (1, 0) a B (0, 1).

(b) Darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau i'r cylch yn B a P (1, 1).

(c) Mae'r tangiadau yn B a P yn cyfarfod yn Q. Profwch fod hyd PQ yn hafal i radiws y cylch.

(a) Gadewch i hafaliad y cylch fod yn

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0.$$

Gan fod y cylch yn mynd drwy (0, 0), cawn

$$0^2+0^2+2g(0)+2f(0)+c = 0.$$

$$\therefore \quad c = 0.$$

Yn yr un modd, gan fod A (1, 0) a B (0, 1) yn gorwedd ar y cylch, mae :

$$1^2+0^2+2g(1)+2f(0) = 0,$$

$$0^2+1^2+2g(0)+2f(1) = 0,$$

sy'n symleiddio i $1+2g = 0$

$$1+2f = 0.$$

$$\therefore \quad g = -\frac{1}{2},\ f = -\frac{1}{2}.$$

Felly, hafaliad y cylch yw

$$x^2+y^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)x+2\left(-\frac{1}{2}\right)y+c = 0$$

neu $x^2+y^2-x-y = 0.$

(b) Graddiant y radiws ym mhwynt B (0, 1) yw

Mae'r canol yn $(-g, -f)$ neu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} = -1.$$

Felly, ceir graddiant y tangiad ym mhwynt B o'r ffaith fod y

graddiant $\times -1 = -1$

fel bod y graddiant $= 1.$

Felly, hafaliad y tangiad ym mhwynt B yw

$$y-1 = 1(x-0)$$

neu $y-x-1 = 0.$ (1)

Yn yr un modd, graddiant y radiws ym mhwynt P (1, 1) yw

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Graddiant y tangiad ym mhwynt P felly yw -1.

Felly, hafaliad y tangiad ym mhwynt P (1, 1) yw

$$y-1 = -1(x-1)$$

neu $$y+x-2 = 0. \qquad (2)$$

(c) Mae cyfesurynnau Q, croestorfan y tangiadau, yn bodloni hafaliadau (1) a (2).

$$y-x-1 = 0, \qquad (1)$$
$$y+x-2 = 0. \qquad (2)$$

Drwy adio (1) a (2) cawn

$$2y-3 = 0$$

$$\therefore \qquad y = \frac{3}{2}.$$

Drwy amnewid am y yn (1) cawn

$$\frac{3}{2}-x-1 = 0$$

sy'n rhoi $$x = \frac{1}{2}.$$

Gwirio yn (2), $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2=0$

$\therefore \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ yw Q.

Yna, mae $$PQ^2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

felly $$PQ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\sqrt{g^2+f^2-c}$ **gydag** $g=-\frac{1}{2}$, $f=-\frac{1}{2}$, $c=0$.

O hafaliad y cylch,

$$x^2+y^2-x-y = 0$$

mae'r canol yn $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ a hyd y radiws yw

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-0} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore$ Mae hyd PQ yn hafal i radiws y cylch.

Ymarferion 6.3

1. Gwiriwch fod y pwyntiau a roddir yn gorwedd ar y cylchoedd, a darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau yn y pwyntiau hynny.

(a) (2, 2) ; $x^2+y^2=8$

(b) (1, 1) ; $x^2+y^2+4x+2y=8$

(c) (3, −1) ; $x^2+y^2+2x+4y-12=0$

(d) (1, −1) ; $2x^2+2y^2+5x+8y-1=0$.

2. Mae'r tangiad i'r cylch $x^2+y^2-4x-2y-8=0$ ym mhwynt (−1, 3) yn cwrdd â'r echelin x yn A. Darganfyddwch bellter A o ganol y cylch.

3. Darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau i'r cylch $x^2+y^2-4x+6y+5=0$ yn y pwyntiau hynny lle mae'r tangiad yn cyfarfod â'r echelin y.

4. Mae'r tangiad i'r cylch $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$ ym mhwynt $(-1, 2)$ yn cyfarfod â'r echelinau x ac y yn A a B, yn ôl eu trefn. Darganfyddwch gyfesurynnau A a B. Cyfrifwch arwynebedd triongl AOB, lle mae O yn cynrychioli'r tarddiad.

5. (a) Darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau i'r cylch

$$x^2 + y^2 - 8y + 8 = 0$$

ym mhwyntiau $A\ (-2, 2)$ a $B(\ 2, 2)$.

(b) Dangoswch fod y tangiadau hyn i'r cylch yn croestorri yn y tarddiad O. Dangoswch fod $ACBO$ yn sgwâr, lle mae C yn cynrychioli canol y cylch.

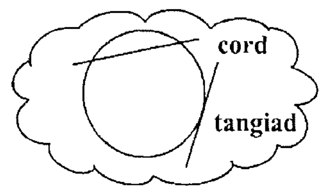
<u>Yr amod sy'n gwneud llinell yn dangiad i gylch</u>

Pan fo llinell yn croestorri cylch, ceir dau bosibilrwydd:

(a) fod y llinell yn cyfarfod y cylch mewn dau bwynt, gan greu <u>cord</u> i'r cylch,

(b) fod y llinell yn <u>dangiad</u> i'r cylch, a'i fod yn cyffwrdd â'r cylch neu'n cyfarfod ag ef mewn dau bwynt cyd-drawol.

Ceir y croestorfannau drwy ddatrys hafaliadau cydamserol.



Enghraifft 6.10

Darganfyddwch groestorfannau A a B y llinell

$$y - x + 2 = 0$$

a'r cylch

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$$

a darganfyddwch hyd cord AB.

Gadewch i ni ddatrys yr hafaliadau cydamserol.

O hafaliad y llinell syth,

$$y = x - 2.$$

Drwy amnewid yn hafaliad y cylch cawn

$$x^2 + (x - 2)^2 - 2x + 2(x - 2) - 6 = 0$$

sy'n symleiddio i

$$2x^2 - 4x - 6 = 0.$$

$\therefore \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$

$\therefore \quad (x - 3)(x + 1) = 0.$

Felly mae $\quad x = 3, -1.$

Mae amnewid y gwerthoedd hyn am x yn

$$y = x - 2$$

yn rhoi $\quad y = 1, -3.$

Yna, mae A yn $(3, 1)$, a B yn $(-1, -3)$.

Felly $\quad AB^2 = (3 + 1)^2 + (1 + 3)^2 = 32$

fel bod $\quad AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

Wrth gwrs, gallwch gyfnewid eich dewis o *A*, *B*.

Enghraifft 6.11

Profwch fod y llinell $y - x + 3 = 0$ yn dangiad i'r cylch

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0.$$

Ein strategaeth yma yw dangos fod y llinell yn croestorri'r cylch mewn un pwynt (neu ddau bwynt cyd-drawol).

Drwy amnewid $y = x - 3$ yn hafaliad y cylch cawn

$$x^2 + (x-3)^2 - 2x - 4(x-3) - 3 = 0.$$

$\therefore \quad 2x^2 - 12x + 18 = 0$

fel bod $\quad x^2 - 6x + 9 = 0.$

Yna mae $\quad (x-3)^2 = 0$

fel bod $\quad x = 3$ (ddwywaith).

(3, 0) yw'r croestorfan.

neu defnyddiwch y fformiwla gwadratig

Enghraifft 6.12

Darganfyddwch y berthynas rhwng m ac c os yw $y = mx + c$ yn dangiad i'r cylch

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Drwy amnewid $y = mx + c$ yn yr hafaliad cawn

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2.$$

$$\therefore \quad x^2(1 + m^2) + 2mcx + c^2 - a^2 = 0.$$

Os yw'r hafaliad cwadratig hwn yn cynnwys dau wreiddyn hafal, yr amodau yw fod

$$(2mc)^2 = 4(1 + m^2)(c^2 - a^2)$$

$\therefore \quad m^2c^2 = c^2 - a^2 + m^2c^2 - m^2a^2.$

$\therefore \quad c^2 = a^2(1 + m^2)$

neu $\quad c = \pm a\sqrt{(1+m^2)}.$

ar gyfer $ax^2 + bx + c = 0$, mae $b^2 - 4ac = 0$

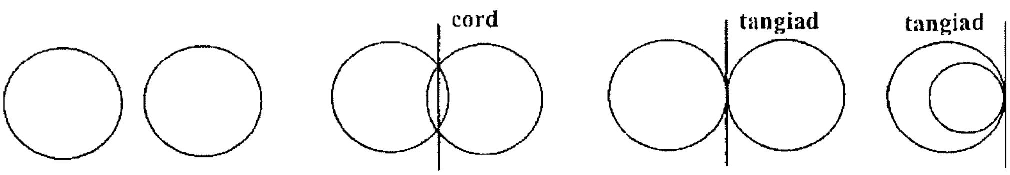
Peidiwch â cheisio cofio'r canlyniad: cofiwch yr amod ar gyfer gwreiddiau hafal.

Ymarferion 6.4

1. Mae'r llinell $y = -x + 3$ yn croestorri'r cylch $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ ym mhwyntiau A a B. O gael y pwynt C (3, 2) dangoswch fod AC a BC yn berpendicwlar. A yw C ar y cylch?
2. Darganfyddwch hyd y cord a wneir gan groestoriad y llinell $x + y = 4$ gyda'r cylch $x^2 + y^2 = 25$. Awgrym : cadwch y syrdiau.
3. Darganfyddwch y pwynt lle mae'r llinell $x - 4y - 3 = 0$ yn cyffwrdd y cylch $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$.
4. Darganfyddwch werthoedd m os yw $y = mx$ yn dangiad i'r cylch $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ a thrwy hynny darganfyddwch yr hafaliadau o'r tarddiad i'r cylch.
5. (a) Darganfyddwch berthynas rhwng m ac c os yw'r llinell $y = mx + c$ yn mynd drwy'r pwynt (1, 2).
   (b) Darganfyddwch berthynas rhwng m ac c os yw'r llinell $y = mx + c$ yn dangiad i'r cylch $x^2 + y^2 = 4$.
   (c) Defnyddiwch y canlyniadau a gawsoch yn (a) a (b) i ddarganfod hafaliadau'r tangiadau o'r pwynt (1, 2) i'r cylch a ddiffiniwyd yn (a).
6. Darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau i'r cylch $x^2 + y^2 = 4$ sydd â graddiant o $\frac{3}{4}$.

Croestoriad dau gylch

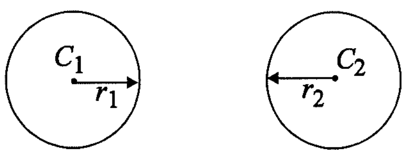
Gall dau gylch groestorri neu beidio. Os ydynt yn croestorri gallant wneud hynny mewn un neu ddau bwynt (croestorfan).



Dim croestoriad **Dau groestorfan** **Cylchoedd yn cyffwrdd, un croestorfan**

Pan fo'r cylchoedd yn croestorri mewn dau fan, mae ganddynt gord cyffredin; pan fo cylchoedd yn croestorri mewn un man, mae ganddynt dangiad cyffredin. Mae'n hawdd gweld a yw cylchoedd yn croestorri neu beidio ac, os ydynt, nifer y croestorfannau. Yn y canlynol, canol y cylchoedd yw C_1 ac C_2 , a'u radiysau yw r_1 ac r_2 .

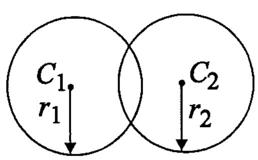
(a) Dim croestoriad



Yn yr achos hwn, mae'r pellter $C_1C_2 > r_1 + r_2$.

Mae'r pellter rhwng canol y cylchoedd yn fwy na chyfanswm y radiysau.

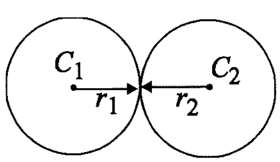
(b) Dau groestorfan



Yn yr achos hwn, mae $C_1\,C_2 < r_1 + r_2$.

Mae'r pellter rhwng canol y cylchoedd yn llai na chyfanswm y radiysau.

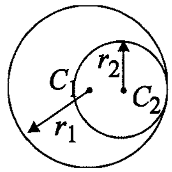
(c) Un croestorfan (y cylchoedd yn cyffwrdd yn allanol)



Yn yr achos hwn, mae $C_1\,C_2 = r_1 + r_2$.

Mae'r pellter rhwng canol y cylchoedd yn hafal i gyfanswm y radiysau.

(d) <u>Un croestorfan (y cylchoedd yn cyffwrdd yn fewnol)</u>



Mae'r pellter rhwng canol y cylchoedd yn hafal i'r gwahaniaeth rhwng y ddau radiws.

Yn yr achos hwn, mae $C_1 C_2 = r_1 - r_2$.

Enghraifft 6.13

Ymchwiliwch i weld a yw'r parau canlynol o gylchoedd yn croestorri ai peidio. Os ydynt yn croestorri, nodwch nifer y croestorfannau.

(a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 2x = 0$; $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

(c) $x^2 + y^2 = 16$; $5x^2 + 5y^2 - 18x - 24y + 40 = 0$

(d) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

(a) Ar gyfer y cylch cyntaf, y canol yw (2, 1) ac mae'r radiws yn $\sqrt{2^2 + 1^2 - 1} = 2$.

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

Ar gyfer yr ail gylch, y canol yw (−2, 3) ac mae'r radiws yn $\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 12} = \sqrt{25} = 5$.

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

Y pellter rhwng y ddau ganol yw

$$\sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$$

Nawr mae swm y radiysau > pellter rhwng y ddau ganol sy'n golygu bod y cylchoedd yn croestorri mewn dau fan.

$5 + 2 > \sqrt{20}$

(b) Ar gyfer y cylch cyntaf, y canol yw (−1, 0) ac mae'r radiws yn

$$\sqrt{(-1)^2 + 0^2 - 0} = 1.$$

Ar gyfer yr ail gylch, y canol yw (3, 2) ac mae'r radiws yn

$$\sqrt{3^2 + 2^2 - 9} = \sqrt{4} = 2.$$

Y pellter rhwng y ddau ganol yw $\sqrt{(3+1)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$.

Nawr mae swm y radiysau < pellter rhwng y ddau ganol sy'n golygu nad yw'r cylchoedd yn croestorri.

$2 + 1 < \sqrt{20}$

(c) Ar gyfer y cylch cyntaf, y canol yw (0, 0) ac mae'r radiws yn

$$\sqrt{0^2 + 0^2 - (-16)} = 4.$$

Ar gyfer yr ail gylch, y canol yw $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ac mae'r radiws yn

$$\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - 8} = 1.$$

Y pellter rhwng y ddau ganol yw $\sqrt{\left(\frac{9}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} = 3.$

Nawr mae'r pellter rhwng y ddau ganol = y gwahaniaeth rhwng y ddau radiws sy'n golygu bod y cylchoedd yn cyffwrdd yn fewnol. $3 = 4 - 1$

(d) Ar gyfer y cylch cyntaf, y canol yw $(-2, 2)$ ac mae'r radiws yn
$\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 - 4} = 2.$

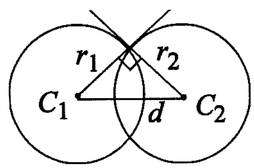
Ar gyfer yr ail gylch, y canol yw $(1, 2)$ ac mae'r radiws yn $\sqrt{1^2 + 2^2 - 4} = 1.$

Y pellter rhwng y ddau ganol yw $\sqrt{(-2-1)^2 + (2-2)^2} = 3.$

Nawr mae'r pellter rhwng y ddau ganol = swm y ddau radiws sy'n golygu bod y cylchoedd yn cyffwrdd yn allanol.

Cylchoedd Orthogonol

Os yw'r tangiadau i ddau gylch yn berpendicwlar yn eu croestorfannau, dywedir bod y cylchoedd yn orthogonol.



Yn yr achos hwn, os r_1 ac r_2 yw'r radiysau, ac $C_1C_2 = d$ yw'r pellter rhwng y ddau ganol, mae'n dilyn o Theorem Pythagoras fod

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Enghraifft 6.14

Dangoswch fod y cylchoedd

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 9 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 12x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

yn orthogonol.

Ar gyfer y cylch cyntaf, y canol yw $(1, -1)$ ac mae'r radiws yn $\sqrt{11}$.

Ar gyfer yr ail gylch, y canol yw $(-6, 0)$ ac mae'r radiws yn $\sqrt{39}$.

Y pellter rhwng y ddau ganol yw $\sqrt{(-6-1)^2 + (0-(-1)^2} = \sqrt{50}$.

Yna swm y radiysau wedi eu sgwario yw

$$(\sqrt{11})^2 + (\sqrt{39})^2 = 11 + 39 = 50,$$

sy'n hafal i'r pellter rhwng y ddau ganol wedi ei sgwario.

Felly, mae'r cylchoedd yn orthogonol.

Pan fo'r cylchoedd yn croestorri mae'n hawdd, mewn egwyddor o leiaf, i ddarganfod y croestorfannau.

Enghraifft 6.15

Darganfyddwch groestorfannau'r cylchoedd

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 &= 0. & (2) \end{aligned}$$

Rhaid i ni ddatrys yr hafaliadau hyn yn gydamserol.

Drwy dynnu (1) o (2), cawn

$$2x - 4y + 4 = 0$$

neu $$x - 2y + 2 = 0. \qquad (3)$$

Mae (3) yn disgrifio cord cyffredin y cylchoedd. I ddarganfod croestorfannau'r cylchoedd, rydym yn darganfod lle mae'r cord cyffredin yn croestorri un ohonynt.

Rydym yn amnewid o (3) i (1) am x.

O (3), $$x = 2y - 2.$$

Yna bydd (1) yn newid yn

$$(2y-2)^2 + y^2 = 1$$

fel bod $$5y^2 - 8y + 3 = 0$$

$$\therefore \quad (5y-3)(y-1) = 0$$

$$\therefore \quad y = \frac{3}{5}, 1.$$

neu defnyddiwch y fformiwla gwadratig

Pan fo $y = \dfrac{3}{5}$, mae $x = 2 \times \dfrac{3}{5} - 2 = -\dfrac{4}{5}$,

$y = 1$, $x = 2 \times 1 - 2 = 0.$

gan ddefnyddio (3)

Felly $\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ a (0, 1) yw'r croestorfannau.

Ymarferion 6.5

1. Dangoswch, heb ddarganfod y croestorfannau, fod y cylchoedd
   $x^2 + y^2 = 4$ a $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ yn croestorri mewn dau fan.
2. Dangoswch fod y cylchoedd
   $x^2 + y^2 + 10x - 4y - 3 = 0$ a $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ yn orthogonol.
3. Dangoswch fod y cylchoedd
   $5x^2 + 5y^2 - 6x - 8y = 0$
   $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$
   yn cyffwrdd ei gilydd.
4. Mae'r cylchoedd
   $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$,
   $x^2 + y^2 = 9$,
   yn croestorri mewn dau fan.
   Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwynt lle mae'r cord cyffredin yn croestorri'r llinell sy'n uno'r ddau ganol.
5. Profwch fod y cylchoedd
   $x^2 + y^2 + x + 3y = 0$,
   a $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$
   yn cyffwrdd ei gilydd. Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwynt cyswllt yn ogystal â hafaliad y tangiad cyffredin ar y pwynt hwnnw.
6. Mae'r cylchoedd
   $x^2 + y^2 = a^2$
   a $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 105 = 0$
   yn cyffwrdd yn allanol ar ryw bwynt.
   O wybod bod $a > 0$, darganfyddwch werth a.

Pennod 7

Rhagor o Ddifferu

Cyflwynwyd y syniad o ddifferu yn **P1.** Yno, defnyddiwyd dull yr egwyddorion cyntaf i ddifferu ffwythiannau polynomaidd.
Mae dau brif ddiben i'r bennod hon. Yn gyntaf, mae'n datblygu rhai technegau differu i gyd-fynd â dull yr egwyddorion cyntaf.
Yn ail, mae'n ystyried sut i ddifferu rhai ffwythiannau ychwanegol.
Nodwch yn y bennod hon ein bod yn cam-drin nodiant drwy gyfeirio at f(x) fel ffwythiant.

7.1 Differu ffwythiannau cyfansawdd (rheol ffwythiant ffwythiant)

Mae'n hanfodol, cyn ystyried sut i ddifferu ffwythiannau cyfansawdd, eich bod yn adnabod ffwythiannau cyfansawdd pan fyddant yn digwydd.

Enghraifft 7.1
Dewch o hyd i'r ffwythiannau cyfansawdd yn y mynegiadau canlynol.

(i) $(x+2)^2$	(ii) $\sin 3x$	(iii) $x(x+2)$
(iv) $\cos(x^2+2)$	(v) $x \sin x$	(vi) $\dfrac{x^2}{x+2}$
(vii) $x2^x$	(viii) $\sqrt{1+x}$	(ix) 3^{x+5}

Yma ceisiwn roi pob ffwythiant yn y ffurf f(g(x)) lle mae f a g yn ffwythiannau i'w hadnabod.

(i) Cyfansawdd. Gellir ystyried $(x+2)^2$ fel f(g(x)) lle mae g(x) = $x + 2$ a f(x) = x^2.
(ii) Cyfansawdd. Gellir ystyried $\sin 3x$ fel f(g(x)) lle mae g(x) = $3x$ a f(x) = $\sin x$.

Noder nad yw sin 3x yn golygu sin × 3x.

(iii) Nid yw'n gyfansawdd. Nid yw $x(x+2)$ ar ffurf f(g(x)) ond mae ar ffurf f(x) × g(x) lle mae f(x) = x, g(x) = $x + 2$.
(iv) Cyfansawdd. Mae $\cos(x^2+2)$ ar ffurf f(g(x)) lle mae g(x) = $x^2 + 2$ a f(x) = $\cos x$.

Nid yw cos (x^2 + 2) yn golygu cos × (x^2 + 2).

(v) Nid yw'n gyfansawdd. $x \sin x$ yw lluoswm f(x) = x, g(x) = $\sin x$.
(vi) Nid yw'n gyfansawdd. $\dfrac{x^2}{x+2}$ yw cyniferydd f(x) = x^2 a g(x) = $x + 2$.
(vii) Nid yw'n gyfansawdd. Lluoswm f(x) = x, g(x) = 2^x.
(viii) Cyfansawdd gyda g(x) = $x + 1$, f(x) = $\sqrt{x}$.
(ix) Cyfansawdd gyda g(x) = 3^x, f(x) = $x + 5$.

Ymarferion 7.1

Nodwch a yw'r ffwythiannau canlynol yn ffwythiannau cyfansawdd ynteu anghyfansawdd. Yn achos y ffwythiannau cyfansawdd, adnabyddwch y ffwythiannau mewnol (g(x)) ac allanol (f(x)).

(i) $x\sin 3x$	(ii) $\sqrt{x^3+2x+1}$	(iii) $\tan(5x+7)$
(iv) $(x^2+3)(x^2+5)$	(v) $(x^2+3)^{5/3}$	(vi) $\dfrac{x}{\sin 4x}$
(vii) $(x+3)^2+5$	(viii) 6^x+7	(ix) $(x+3)\cos x$

Mae'r enghreifftiau canlynol yn rhoi goleuni i ni ar sut i ddifferu ffwythiannau cyfansawdd.

Enghraifft 7.2

Differwch y ffwythiannau canlynol trwy luosi i ddiddymu'r cromfachau yn gyntaf. Er hwylustod labelir y ffwythiannau i gyd fel k(x).

(i) $k(x) = (3x+2)^2$ (ii) $k(x) = (x^2+1)^2$ (iii) $k(x) = (7x^2-2)^2$.

$(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

(i) Nawr $k(x) = 9x^2 + 12x + 4$

ac felly $k'(x) = 18x + 12$

$= 6(3x+2) = 2.3(3x+2)$.

Daw'r rheswm dros ffactorio yn glir yn nes ymlaen.

(ii) Nawr $k(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

ac felly $k'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1)$

$= 2.2x(x^2+1)$.

(iii) Nawr $k(x) = 49x^4 - 28x^2 + 4$

ac felly $k'(x) = 196x^3 - 56x$

$= 28x(7x^2-2) = 2.14x(7x^2-2)$.

Crynhoir y canlyniadau isod.

Ffwythiant	Ffwythiant Deilliadol
$(3x+2)^2$	$2(3x+2).3$
$(x^2+1)^2$	$2(x^2+1).2x$
$(7x^2-2)^2$	$2(7x^2-2).14x$

Bydd y rheswm dros aildrefnu'r ffactorau yn amlwg yn fuan.

Ym mhob achos,

$k(x) = (\text{mynegiad})^2$

a $k'(x) = 2(\text{mynegiad}) \times$ deilliad y mynegiad:-

$$2\,\boxed{\begin{matrix} 3x+2 \\ x^2+1 \\ 7x^2-2 \end{matrix}} \times \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2x \\ 14x \end{matrix}}$$

Mae'r rheol gyffredinol a awgrymir gan yr enghreifftiau uchod yn rheol ddilys.

Ymarferion 7.2
Gwiriwch fod y rheol
'os yw $k(x) = (\text{mynegiad})^2$ yna mae $k'(x) = 2(\text{mynegiad}) \times$ deilliad y mynegiad'
yn wir yn yr achosion canlynol.
(i) $k(x) = (2x-3)^2$ (ii) $k(x) = (3x^2+4)^2$ (iii) $k(x) = (x^3+x)^2$

Ceir rheol debyg ar gyfer pwerau gwahanol o'r mynegiad.

Ymarferion 7.3
Gwiriwch os yw

$k(x) = (\text{mynegiad})^3$

yna mae $k'(x) = 3(\text{mynegiad})^2 \times$ deilliad y mynegiad

ar gyfer (i) $k(x) = (x+1)^3$

(ii) $k(x) = (2x-1)^3$

(iii) $k(x) = (x^2+1)^3$

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
$(x^2+1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$

Dyma gyffredinoli'r canlyniadau a ystyriwyd yn ymarferion 7.2 a 7.3:

Rheol (I)

Os yw $k(x) = (\text{mynegiad})^n$ yna mae $k'(x) = n(\text{mynegiad})^{n-1} \times$ deilliad y mynegiad. Yn wir, mae'r rheol hon yn ddilys os yw n yn gyfanrif neu'n rhif cymarebol positif neu negatif.

Enghraifft 7.3
Defnyddiwch reol I i ysgrifennu deilliadau
(i) $(5x+6)^9$ (ii) $(2x-1)^{-1}$ (iii) $(2x^3+x^2-4)^{-3/2}$

(i) Os yw $k(x) = (5x+6)^9$
yna mae $k'(x) = 9(5x+6)^{9-1} \times (5) \leftarrow$ ------------- **deilliad $5x+6$**
$= 45(5x+6)^8$,
lle caiff y ffactorau eu grwpio ar y diwedd er mwyn hwylustod.

(ii) Gyda $(2x-1)^{-1}$, mynegiad $= 2x-1$ a $n = -1$.
Yna'r deilliad yw $-1(2x-1)^{-1-1} \times (2) \leftarrow$ --------- **deilliad $2x-1$**
$= -(2x-1)^{-2} \times 2$
$$= -\frac{2}{(2x-1)^2}.$$

(iii) Mynegiad $= 2x^3 + x^2 - 4$, $n = -\frac{3}{2}$.

Deilliad $= -\frac{3}{2}(2x^3+x^2-4)^{-3/2-1} \times (6x^2+2x) \leftarrow$ - - **deilliad $2x^3+x^2-4$**
$= -3x(3x+1)(2x^3+x^2-4)^{-5/2}$
$$= \frac{-3x(3x+1)}{(2x^3+x^2-4)^{5/2}}.$$

Noder: $-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$, nid $-\frac{1}{2}$

Ymarferion 7.4

1. Defnyddiwch Reol I i ysgrifennu'r ffwythiannau deilliadol yn yr achosion canlynol:

(i) $(9x-2)^4$ (ii) $(3x^2+2)^{-1}$ (iii) $(x^2+3x+4)^2$

(iv) $(2x+1)^{1/2}$ (v) $(x^7+4x^3)^3$ (vi) $\dfrac{1}{x+1}$

(vii) $(x^2-4x+2)^{-5/2}$ (viii) $\dfrac{1}{(3x+2)^{1/2}}$ (ix) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

(x) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ (xi) $\left(3x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $\left(7x-\dfrac{4}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Gellir ailysgrifennu rheol I fel a ganlyn:-
Gadewch i $y = (\mathrm{g}(x))^n$
fel bod $y = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$,
lle mae $\mathrm{f}(x) = x^n$.

Galwyd g(x) yn 'fynegiad' ynghynt.

Yna gellir ysgrifennu $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = n(\mathrm{g}(x))^{n-1}\mathrm{g}'(x)$

fel $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}'(\mathrm{g}(x))\,\mathrm{g}'(x)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) &= x^n\\ \mathrm{f}'(x) &= nx^{n-1}\\ \mathrm{f}'(\mathrm{g}(x)) &= n(\mathrm{g}(x))^{n-1}\end{aligned}$$

Felly Rheol (I')

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Os yw} & y &= \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))\\ &\text{yna mae} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{f}'(\mathrm{g}(x))\times \mathrm{g}'(x)\end{aligned}}$$

Bydd arwyddocâd yr ailysgrifennu hwn yn amlwg yn ddiweddarach.

Mae I' yn rheol gyffredinol beth bynnag yw ffwythiannau f a g. Wrth gwrs mae'r rheol yn ymwneud â differu ffwythiannau cyfansawdd a chyfeirir ati yn aml fel y **rheol ffwythiant ffwythiant**. Cewch ymarfer defnyddio'r rheol hon gyda ffwythiannau eraill yn nes ymlaen.
Yma, cyfyngir y drafodaeth i brofi (I'), yna rhoddir enghreifftiau eraill. Ni ddisgwylir i chi brofi Rheol I' mewn arholiad.

Gadewch i $y = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$.
Os yw $u = \mathrm{g}(x)$ yna mae
$y = \mathrm{f}(u)$.
Os yw δx yn gynnydd bach yn x ac os yw δu, δy yn gynnydd bach cyfatebol yn u ac y, yn ôl eu trefn, yna mae

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u}\times\frac{\delta u}{\delta x}.$$

Yna wrth i $\mathrm{d}x \to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta u}\times\frac{\delta u}{\delta x}\right)\\ &= \lim_{\delta u\to 0}\frac{\delta y}{du}\,\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{dx}\\ &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\times\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

Cymerir yn ganiataol bod terfyn y lluoswm yn hafal i luoswm y terfynau. Nid yw'n syml profi hyn, gyda llaw.

$$= \mathrm{f}'(u) \times \mathrm{g}'(x)$$
$$= \mathrm{f}'(\mathrm{g}(x)) \times \mathrm{g}'(x).$$

$y = \mathrm{f}(u)$
$u = \mathrm{g}(x)$

Mae hyn yn profi Rheol I'.

Os yw $y = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$
yna mae $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}'(\mathrm{g}(x))\,\mathrm{g}'(x)$.

Mae'r dull o brofi a roddir uchod yn awgrymu dull arall o gynrychioli differiad ffwythiannau cyfansawdd.

Enghraifft 7.4

(i) Os yw $y = (x^3 + 3x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ gellir ysgrifennu $y = u^{\frac{3}{2}}$ lle mae $u = x^3 + 3x^2 + 1$.

Yna
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$= \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}} \times (3x^2 + 6x)$$
$$= \frac{9}{2}x(x+2)(x^3 + 3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}},$$

drwy ffactorio ac adfer y ffwythiant $u = x^3 + 3x^2 + 1$.

(ii) Os yw $y = \left(x^4 + 6x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$

yna mae $y = u^{-\frac{1}{2}}$ lle mae $u = x^4 + 6x^2 - \dfrac{2}{x}$.

Nawr $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = -\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}$ (o **P1**)

a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4x^3 + 12x - 2(-1)x^{-1-1}$

$-\dfrac{2}{x} = -2x^{-1}$

$$= 4x^3 + 12x + \frac{2}{x^2}.$$

Felly mae $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2}\left(x^4 + 6x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \left(4x^3 + 12x + \dfrac{2}{x^2}\right)$

$$= -\left(2x^3 + 6x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^4 + 6x^2 - \frac{2}{x}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

ar ôl adfer y ffwythiant $u = x^4 + 6x^2 - \dfrac{2}{x}$ a rhannu â 2.

Ymarferion 7.5

Darganfyddwch $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ yn yr achosion canlynol:

(i) $y = x^{-4}$ (ii) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$ (iii) $y = (3x^2 + 5x - 61)^{\frac{5}{2}}$

(iv) $y = \left(9x^4 - 7x^3 - \dfrac{3}{x^2}\right)^{-\frac{5}{2}}$ (v) $y = \dfrac{1}{7x^9 - 3x^6 + 2x + 1}$

(vi) $y = \dfrac{1}{\left(2x^7 - 7x^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$ (vii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2 + 5x - \dfrac{1}{x^3}}}$

(viii) $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 3\right)^{-6}$.

Gan adael ddifferiad y ffwythiant cyfansawdd dros dro, gadewch i ni ystyried ddifferiad yr hyn a elwir yn ffwythiant esbonyddol.

7.2 Ffwythiant f(x) = e^x a'i ffwythiant deilliadol

Trafodwyd ffwythiannau megis 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ym Mhennod 5. Mae'r ffwythiannau yn achosion arbennig o'r ffwythiant cyffredinol $f(x) = a^x$ lle mae $a > 0$.
Er mwyn differu $f(x) = a^x$ gallwn ddilyn y camau canlynol.

Ni chaiff hyn ei arholi.

Gadewch i $y = a^x$ ac i dx, dy fod yn gynnydd bach cyfatebol yn x ac y, yn ôl eu trefn.

Yna mae $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \lim \dfrac{\delta y}{\delta x}$.

fel a ddiffiniwyd yn P1

Nawr $y = a^x$
ac $y + dy = a^{x+\delta x}$.

Yna $dy = a^{x+\delta x} - a^x$

ac felly $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{a^{x+\delta x} - a^x}{\delta x}$

a
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{a^{x+\delta x} - a^x}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\delta x} - 1\right)}{\delta x}.$$

Neu,

$$\mathbf{f(x) = a^x}$$
$$\mathbf{f(x+h) = a^{x+h}}$$
$$\mathbf{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}.}$$

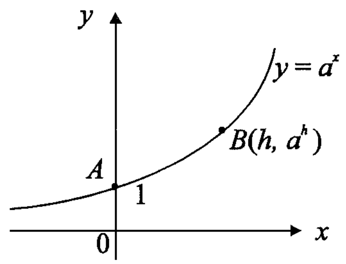
Felly,

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \left(\frac{a^h - 1}{h}\right)}$$

Nodwn fod $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\left(a^{\delta x} - 1\right)}{\delta x}$ a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(a^h - 1\right)}{h}$ yn fynegiadau am yr un terfyn.

Ystyrir yma y ffurf $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(a^h - 1\right)}{h}$.

Mae gwerth y terfyn yn dibynnu ar a. Er mwyn symud ymlaen, ystyriwn graff $y = a^x$ lle mae $a \geq 1$. Mae'r graff fel a ddangosir.



Mae pob cromlin ar ffurf $y = a^x$ yn mynd trwy'r pwynt (0, 1).

Dangosir pwyntiau $A(0, 1)$ a $B(h, a^h)$ ar y graff.
Yna goledd y cord AB yw

$$\frac{\text{gwahaniaeth mewn } y}{\text{gwahaniaeth mewn } x} = \frac{a^h - 1}{h - 0} = \frac{a^h - 1}{h}.$$

Wrth i $h \to 0$, mae goledd y cord yn tueddu at oledd y tangiad ar A. Hynny yw,

$$\text{goledd y tangiad ar } A = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Ymchwiliwn i'r terfyn hwn ar gyfer gwerthoedd gwahanol o a trwy ddefnyddio cyfrifiannell. Dylech ddefnyddio'r botwm y^x ar eich cyfrifiannell. Rhoddir y canlyniadau yn gywir i 2 le degol.

		Gwerthoedd $\dfrac{a^h - 1}{h}$			
a	a^x	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$	Terfyn bras
1	$1^x = 1$	0	0	0	0
2	2^x	0.72	0.70	0.69	0.69
3	3^x	1.16	1.10	1.10	1.10
4	4^x	1.49	1.40	1.39	1.39

Dylid nodi gyda llaw, pan fo $a = 1$, bod $a^h = 1^h = 1$ ar gyfer pob gwerth h ac felly

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{1^h - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Mae'r golofn olaf yn y tabl yn rhoi gwerthoedd bras $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$ ar gyfer gwerthoedd gwahanol o a.

Cofiwn os yw $f(x) = a^x$, y rhoddir $f'(x)$ gan

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Felly mae'r deilliadau bras ar gyfer 1^x, 2^x, 3^x, 4^x fel a ddangosir yn y tabl canlynol.

$f(x)$	$f'(x)$ (yn fras)
1^x	0
2^x	0.69×2^x
3^x	1.10×3^x
4^x	1.39×4^x

Tabl 1

Ac eithrio 1^x, y deilliadau yw'r ffwythiannau gwreiddiol wedi'u lluosi â chysonion (gwahanol) ansero.

Yn y tabl, rhoddir y cyfernodau yn gywir i 2 le degol. Gellir darganfod gwerthoedd y cyfernodau i werthoedd eraill a trwy ddefnyddio cyfrifiannell.

Ymarferion 7.6

1. Dangoswch fod $\lim_{h \to 0} \frac{2.7^h - 1}{h} \approx 0.99$,
a thrwy hyn ysgrifennwch ddeilliad bras ar gyfer $f(x) = 2.7^x$.

2. Dangoswch fod $\lim_{h \to 0} \frac{2.72^h - 1}{h} \approx 1.001$
a thrwy hyn ysgrifennwch ddeilliad bras ar gyfer $f(x) = 2.72^x$.

Gellir diddwytho o Dabl 1 a datrysiadau Ymarferion 7.6 fod $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$ ar gyfer rhyw werth o a rhwng 2 a 3. Mewn gwirionedd, mae datrysiadau Ymarferion 7.6 yn dangos bod y gwerth a hwn rhwng 2.7 a 2.72. Gelwir y rhif hwn yn e mewn mathemateg a'i werth bras yw 2.718282, yn gywir i 6 lle degol.
Arwyddocâd e yw,
os yw $f(x) = e^x$
yna mae $f'(x) = 1 \times e^x = e^x$.
Mae'r canlyniad hwn yn rhyfeddol ac mae'n werth ei ailadrodd :-
Ffwythiant deilliadol $f(x) = e^x$
yw $f'(x) = e^x$, sef yr un ffwythiant.

Rheol (II)

Os yw $f(x) = e^x$
yna mae $f'(x) = e^x$.

Mae gan y ffwythiant e^x bwysigrwydd sylfaenol mewn mathemateg oherwydd nad yw'n newid wrth gael ei ddifferu.
Gan ei fod yn ffwythiant, gellir defnyddio e^x yn yr un modd â ffwythiannau eraill. Yn benodol, gellir ei ddefnyddio wrth gyfansoddi ffwythiannau.

Enghraifft 7.5

Differwch y ffwythiannau (i) e^{2x+1} (ii) e^{x^2+4x+2}.

(i) Y ffwythiant yw $f(g(x))$ lle mae $g(x) = 2x + 1$ a $f(x) = e^x$.

Yna ei ddeilliad yw $f'(g(x)) \times g'(x)$

$$= e^{2x+1} \times 2 = 2e^{2x+1}$$

> $f(x) = e^x$
> $f'(x) = e^x$
> $f'(g(x)) = e^{2x+1}$

Neu fel arall,

$$y = e^u \quad \text{lle mae } u = 2x + 1.$$

Yna
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times 2 = 2e^{2x+1}.$$

> **Nodwch, os yw**
> $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
> **yna**
> $\frac{d}{du}(e^u) = e^u$.

(ii) Y ffwythiant yw $f(g(x))$ lle mae $g(x) = x^2 + 4x + 2$ a $f(x) = e^x$.

Yna ei ddeilliad yw $f'(g(x)) \times g'(x)$

$$= e^{x^2+4x+2} \times (2x + 4) = (2x + 4)e^{x^2+4x+2}.$$

<u>neu</u> os yw $y = e^u$ lle mae $u = x^2 + 4x + 2$,

yna mae
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times (2x + 4) = (2x + 4)e^{x^2+4x+2}.$$

Mae'n fuddiol symleiddio differiad ffwythiannau megis $e^{g(x)}$.

Os yw $y = e^{g(x)}$

yna mae $y = e^u$ lle mae $u = g(x)$.

Felly
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times g'(x) = e^{g(x)} \times g'(x).$$

> $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)g'(x)$
> $= e^{g(x)} g'(x)$

Rheol (III)

Os yw $y = e^{g(x)}$ yna mae $\dfrac{dy}{dx} = e^{g(x)} g'(x)$.

Felly, canlyniad differu $e^{(\text{mynegiad})}$ yw

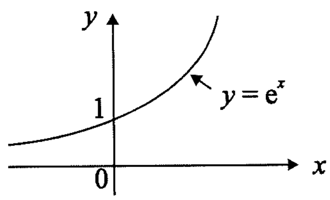
$e^{\text{mynegiad}} \times$ deilliad y mynegiad.

Ymarferion 7.7
Mae'r enghreifftiau isod yn defnyddio Rheol III.
Darganfyddwch ffwythiannau deilliadol y canlynol:

(i) e^{3x} (ii) e^{x^2} (iii) e^{x^3+2} (iv) $e^{x+\frac{1}{x}}$
(v) e^{-x} (vi) e^{-4x} (vii) e^{x^3-x+1}.

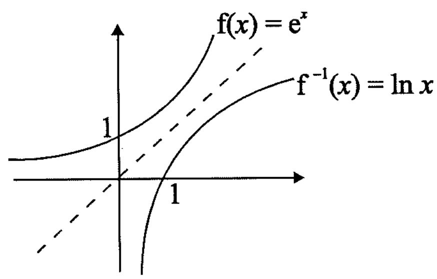
7.3 $\text{Log}_e\, x$ a'i ffwythiant deilliadol

Ffwythiant deilliadol y ffwythiant $f(x) = e^x$ yw $f\,'(x) = e^x$. Mae'r ffwythiant deilliadol hwn yn bositif ar gyfer pob gwerth x ac felly mae'r ffwythiant $f(x)$ yn ffwythiant cynyddol. Mae graff $f(x) = e^x$ fel a ddangosir.



Mae'r ffwythiant f yn un-i-un ac mae ganddo wrthdro f^{-1}. Diffinnir gwrthdro f (a roddir gan $f(x) = e^x$) fel $f^{-1}(x) = \ln x$ neu $\log_e x$.
Gelwir y ffwythiant gwrthdro hwn y **ffwythiant logarithmig i'r bôn e.**
Dangosir graffiau $f(x) = e^x$ a $f^{-1}(x) = \ln x$ isod.

Ym Mhennod 5 gwrthdro $f(x) = 10^x$ oedd $f^{-1}(x) = \log_{10}x$, sef y ffwythiant logarithmig i'r bôn 10.



Graff f^{-1} yw adlewyrchiad graff f yn y llinell $y = x$.
Yn ôl ei ddiffiniad, mae gweithred f (neu f^{-1}) yn cildroi effaith f^{-1} (neu f).
Felly mae $f\,f^{-1}(x) = x$
neu $f^{-1}f(x) = x$.
Gan fod $f(x) = e^x$ a $f^{-1}(x) = \ln x$, ceir:

Rheol (IV)

$$\boxed{\begin{aligned} e^{\ln(x)} &= x, \quad (1)\\ \ln(e^x) &= x. \quad (2)\end{aligned}}$$

Mae gan y ffwythiant logarithmig nifer o briodweddau eraill na fydd yn cael eu trafod yma. Cyfyngir ein trafodaeth i ddifferiad $\ln x$.
Gellir defnyddio canlyniad (1) yn Rheol IV, ynghyd â Rheol III uchod, er mwyn darganfod ffwythiant deilliadol $\ln x$.
Tybiwch fod $\quad g(x) = \ln x$. Yna gellir ysgrifennu (1) uchod fel

$$e^{g(x)} = x. \quad (3)$$

Differwch ddwy ochr (3) mewn perthynas ag x.

Mae'r ochr dde, h.y. x, yn newid yn 1 ar ôl cael ei ddifferu. Beth am ddifferiad $e^{g(x)}$?
Yn ôl rheol III, mae $e^{g(x)}$ yn newid yn $e^{g(x)} \times g'(x)$ wrth gael ei ddifferu.
Felly os yw $\quad e^{g(x)} = x$
yna mae $\quad e^{g(x)} \times g'(x) = 1$
ac felly $\quad g'(x) = \dfrac{1}{e^{g(x)}}$.
Wrth gofio o hafaliad (3) fod $e^{g(x)} = x$,
ceir $\quad g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Felly Rheol (V)

Os yw $\quad g(x) = \ln x$
yna mae $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$y = \ln x$
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Gellir cyfansoddi'r ffwythiant $\ln x$ gyda ffwythiannau eraill e.e. $\ln(3x^2 + 2)$, $3 \ln(x + 2)$, $\ln(e^{3x} + x^2 - 5)$ ac yn y blaen.
Gellir differu ffwythiannau o'r fath trwy ddefnyddio Rheol I'.

Enghraifft 7.6
Differwch y ffwythiannau canlynol:

(i) $\ln 2x$ (ii) $\ln x^2$ (iii) $\ln\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ (iv) $(\ln x)^2$ (v) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(i) Nawr mae $\quad \ln 2x = f(g(x))$,

lle mae $\quad f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$\quad g(x) = 2x, \quad g'(x) = 2$

a $\quad f'(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{2x}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f'(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)}$

Yna os yw $\quad y = \ln 2x$,

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))\, g'(x) = \frac{1}{2x} \times 2 = \frac{1}{x}.$$

Neu fel arall,
os yw $\quad y = \ln 2x$,
yna mae $\quad y = \ln u \;$ lle mae $u = 2x$.

Nid yw'n gyd-ddigwyddiad bod gan $\ln 2x$ a $\ln x$ yr un deilliad.

Felly, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{u} \times 2 = \frac{1}{2x} \times 2 = \frac{1}{x}.$$

(ii) Gan ddefnyddio'r dull arall,

$$y = \ln u \quad \text{lle mae } u = x^2$$

a $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \times 2x = \frac{1}{x^2} \times 2x = \frac{2}{x}.$$

(iii) $$y = \ln u \quad \text{lle mae } u = x - \frac{1}{x}$$

a $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \times \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x^3 - x},$$

drwy luosi'r top a'r gwaelod ag x^2.

Mae $-\frac{1}{x} = -x^{-1}$ wedi'i ddifferu yn rhoi $(-1)(-x^{-1-1}) = \frac{1}{x^2}$.

(iv) $$y = u^2 \quad \text{lle mae } u = \ln x.$$

Yna mae $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 2u \times \frac{1}{x} = 2(\ln x) \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2}{x} \ln x.$$

(v) $$y = \ln u \quad \text{lle mae } u = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \times -\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}} \times -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

$$u = x^{-1}$$

$$\frac{du}{dx} = (-1)x^{-1-1}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

Gellir symleiddio differiad ffwythiannau ar ffurf $\ln(g(x))$.

Os yw $$y = \ln(g(x))$$

felly mae $$y = \ln u \quad \text{lle mae } u = g(x)$$

Yna $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \times g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Rheol (VI)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Felly os yw} \\ \quad y = \ln(g(x)) \\ \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g'(x)}{g(x)}.\end{array}}$$

Yna gellir differu $\ln(x^2 + 3x + 4)$ yn syth a chael

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+4}\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right).$$

Ymarferion 7.8

Mae'r ymarferion canlynol yn defnyddio Rheolau I – VI. Gallwch gymryd y gellir differu swm termau fesul term lle bo angen.

1. Ysgrifennwch trwy ddefnyddio Rheol VI ffwythiannau deilliadol y ffwythiannau canlynol:

(i) $\ln(5x)$ (ii) $\ln(6x + 5)$ (iii) $\ln(x^2 + x)$

(iv) $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (v) $\ln(9x^2 + 4x + 3)$ (vi) $\ln\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$

(vii) $\ln(x^7 + 1)$ (viii) $\ln x^{-\frac{5}{2}}$ (ix) $\ln((x + 1)^2)$

(x) $\ln((x^2 + x)^3)$ (xi) $\ln(e^{2x})$ (xii) $\ln(e^{x+5})$

2. Differwch

(i) $e^{\ln(x^2+1)}$ (ii) $(\ln x)^3$ (iii) $e^{\ln x^3}$ (iv) $e^{3\ln x}$

3. Darganfyddwch ffwythiannau deilliadol

$f(x) = \ln(x^3)$, $g(x) = \ln(x^4)$, $h(x) = \ln(x^7)$

a dangoswch fod $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

4. Dangoswch os yw $f(x) = \ln(x^n)$ yna fod $f'(x) = \dfrac{n}{x}$.

5. Dangoswch os yw $k(x) = \ln(x^9)$, $m(x) = \ln(x^6)$, $n(x) = \ln(x^3)$ yna fod $n'(x) = k'(x) - m'(x)$.

6. Dangoswch os yw $f(x) = \ln(e^x)$ yna fod $f'(x) = 1$.
Pa ffwythiant arall sydd â ffwythiant deilliadol 1?
Sut mae cysoni'r canlyniadau? (Awgrym : gweler Rheol IV, (2))

7. Dangoswch os yw $f(x) = e^{\ln x}$ yna fod $f'(x) = 1$.
Esboniwch y canlyniad.

7.4 Rhagor o dechnegau differu

Yn **P1**, nodwyd y gellir differu ffwythiant sy'n cynnwys swm algebraidd lluosrifau pwerau x a chysonion fesul term.

Yn wir, gellir differu swm unrhyw fath o ffwythiant fesul term. Felly, os yw

$$\mathrm{m}(x) = x^4 + 9x^3 + \mathrm{e}^x + \ln x$$

yna mae $\mathrm{m}'(x) = 4x^3 + 27x^2 + \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

Er hwylustod ystyriwn swm tri ffwythiant. Mae'r prawf yn ddilys ar gyfer unrhyw swm meidraidd.

Mae cyfiawnhad dros ddifferu fesul term fel a ganlyn.
Tybiwch fod $y = \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x) + \mathrm{h}(x)$. (1)
Gadewch i $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ fod yn gynnydd bach cyfatebol yn x ac y, yn ôl eu trefn.
Yna mae $y + \mathrm{d}y = \mathrm{f}(x + \mathrm{d}x) + \mathrm{g}(x + \mathrm{d}x) + \mathrm{h}(x + \mathrm{d}x)$. (2)
Tynnwch (1) o (2) a grwpiwch dermau yn f, g, h ar yr ochr dde.

$$\therefore \quad \mathrm{d}y = \mathrm{f}(x + \mathrm{d}x) - \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x + \mathrm{d}x) - \mathrm{g}(x) + \mathrm{h}(x + \mathrm{d}x) - \mathrm{h}(x)$$

ac mae $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\mathrm{f}(x+\delta x)-\mathrm{f}(x)}{\delta x} + \frac{\mathrm{g}(x+\delta x)-\mathrm{g}(x)}{\delta x} + \frac{\mathrm{h}(x+\delta x)-\mathrm{h}(x)}{\delta x}$$

Felly mae $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\mathrm{f}(x+\delta x)-\mathrm{f}(x)}{\delta x} + \frac{\mathrm{g}(x+\delta x)-\mathrm{g}(x)}{\delta x} + \frac{\mathrm{h}(x+\delta x)-\mathrm{h}(x)}{\delta x} \right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$= \mathrm{f}'(x) + \mathrm{g}'(x) + \mathrm{h}'(x),$$

a chymryd mai terfyn swm termau yw swm y terfynau ar wahân.

Rheol (VII)

Felly ffwythiant deilliadol $\mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x) + \mathrm{h}(x)$ yw $\mathrm{f}'(x) + \mathrm{g}'(x) + \mathrm{h}'(x)$, canlyniad sy'n cyffredinoli i swm unrhyw nifer meidraidd o ffwythiannau.

Mae cyfiawnhad felly dros ddifferu

$$\mathrm{e}^x + \ln(x^2 + 1) + x^2 + 3x + 5$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

fel $$\mathrm{e}^x + \frac{2x}{x^2+1} + 2x + 3 \ (+0)$$

Ymarferion 7.9

Differwch y ffwythiannau canlynol :-

(i) $\ln x + \mathrm{e}^x$ (ii) $\ln(x^2 + 1) + x^2 + 1$ (iii) $\mathrm{e}^{3x} + x^4 + 2$

(iv) $\ln(x^2 + x) + \mathrm{e}^{3x-7} + 2$ (v) $\ln(\mathrm{e}^x + x)$ (vi) $\ln(\mathrm{e}^{x^2} + x)$

(vii) $\ln(3x^2 + 2) + (x - 5)^2$ (viii) $\ln\left(\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x} + 2\right)$ (ix) $\ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$

(x) $\mathrm{e}^{3\ln x + x^2}$ (xi) $(\mathrm{e}^x - x + 2)^4$

Er bod y technegau a gyflwynwyd hyd yn hyn wedi bod yn ddefnyddiol, ceir problemau na ellir eu trin gyda'r technegau hyn. Er enghraifft, sut mae differu (i) x^3e^x neu (ii) $x^7 \ln(x^2+1)$?

Nawr gallwn ddifferu x^3, e^x, x^7, $\ln(x^2+1)$ fel termau ar wahân ond a yw hyn yn ein galluogi i ddifferu (i) a (ii)? Fel mae'n digwydd, mae yn ein galluogi i wneud hynny, ond mae arnom angen rheol arall.

Allwch chi?

Gallwn weld nad yw x^3e^x ac $x^7 \ln(x^2+1)$ yn symiau ffwythiannau nac yn gyfansoddion ffwythiannau. Mewn gwirionedd mae'r ddau ar ffurf $f(x) \times g(x)$, h.y. lluosymiau ffwythiannau.
Yn ddigon synhwyrol, gelwir y rheol briodol ar gyfer differu achosion o'r fath yn **Rheol y Lluoswm**.

(i) $f(x) = x^3$
$g(x) = e^x$, dyweder
(ii) $f(x) = x^7$
$g(x) = \ln(x^2+1)$
neu fel arall.

Y rheol yw Rheol(VIII)

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x).}$$

Felly i ddifferu lluoswm dau ffwythiant rydym yn differu'r ffwythiant cyntaf gan beidio â chyffwrdd â'r ail, yna differu'r ail ffwythiant gan beidio â chyffwrdd â'r cyntaf, ac adio'r ddwy gydran a geir.

D.S. <u>Nid</u>
$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g'(x)$
yw'r rheol.

Enghraifft 7.7

Differwch (i) x^3e^x (ii) $x^7 \ln x$ (iii) $x^2(x+1)^{20}$

(i)
$$f(x) = x^3, \quad g(x) = e^x,$$
$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = e^x,$$
felly
$$\frac{d}{dx}(x^3e^x) = e^x.3x^2 + x^3.e^x$$
$$= x^2e^x(3+x), \text{ wrth gasglu ffactorau cyffredin.}$$

(ii)
$$f(x) = x^7, \quad g(x) = \ln x,$$
$$f'(x) = 7x^6 \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$
felly
$$\frac{d}{dx}(x^7 \ln x) = (\ln x).7x^6 + x^7.\frac{1}{x}$$
$$= 7x^6 \ln x + x^6$$
$$= x^6(7\ln x + 1).$$

(iii)
$$f(x) = x^2, \quad g(x) = (x+1)^{20},$$
$$f'(x) = 2x \quad g'(x) = 20(x+1)^{19},$$
felly
$$\frac{d}{dx}(x^2(x+1)^{20}) = (x+1)^{20}.2x + x^2.20(x+1)^{19}$$
$$= x(x+1)^{19}[2(x+1) + 20x]$$
$$= x(x+1)^{19}[22x+2]$$
$$= 2x(x+1)^{19}[11x+1].$$

Sylwer y defnyddir y rheol ffwythiant ffwythiant er mwyn darganfod $g'(x)$.

I gwblhau'r drafodaeth, rhoddir y prawf i Reol VIII ynghyd â ffurf arall arni.

Gadewch i $y \;=\; \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)$

neu $\quad y \;=\; uv, \;\; (1) \qquad$ lle mae $\quad u \equiv \mathrm{f}(x), \quad v \equiv \mathrm{g}(x).$

Nawr gadewch i δx, δu, δv, δy fod yn gynnydd bach cyfatebol yn x ac y, yn ôl eu trefn.

Yna mae $y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v). \qquad (2)$

Trwy dynnu (1) o (2), ceir

$$\begin{aligned}\delta y &= (u+\delta u)(v+\delta v) - uv\\ &= u\,\delta v + v\,\delta u + \delta u\,\delta v.\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u\,\delta v}{\delta x}.$$

Pan fo $\delta x \to 0$, $\quad \dfrac{\delta u}{\delta x} \to \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\delta v}{\delta x} \to \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

a $\quad \dfrac{\delta u \delta v}{\delta x} \to 0.$

$$\text{Yna mae } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = \lim_{\delta x\to 0}\left(u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u\,\delta v}{\delta x}\right)$$

$$= u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

lle mae $u = \mathrm{f}(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathrm{g}'(x)$, $v = \mathrm{g}(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}'(x)$.

Felly gellir ysgrifennu Rheol VIII fel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(a)}$$

neu yn y ffurf a roddwyd eisoes,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)) = \mathrm{g}(x)\mathrm{f}'(x) + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}'(x). \qquad \text{(b)}$$

Fel arfer, ffurf VIII (a) yw'r ffurf fwyaf poblogaidd gyda myfyrwyr ac fe'i cofir yn aml fel

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$$

neu mewn geiriau

' mae d uv yn hafal i v d u adio u d v '.

Yn ymarferol, gellir defnyddio'r naill ffurf neu'r llall, wrth gwrs.

Enghraifft 7.8

Differwch (i) $x^2(2x+1)^3$ (ii) $(x^2+1)\ln x$ (iii) $\mathrm{e}^{2x}\ln(3x^4+x+1)$.

(i) $\quad u = x^2, \qquad v = (2x+1)^3,$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3(2x+1)^2.\,2 = 6(2x+1)^2.$$

$\mathrm{f}(x) = x^2$, $\mathrm{g}(x) = (2x+1)^3$
$\mathrm{f}'(x) = 2x$, $\mathrm{g}'(x) = 6(2x+1)^2$

[Noder y defnyddiwyd y rheol ffwythiant ffwythiant er mwyn differu $(2x+1)^3$ neu (mynegiad)^3].

Yna y canlyniad yw

$$(2x+1)^3.2x + x^2.6(2x+1)^2 = 2x(2x+1)^2[2x+1+3x] \quad \text{(gan ffactorio)}$$
$$= 2x(2x+1)^2(5x+1)$$
$$\text{neu } 2x(5x+1)(2x+1)^2.$$

(ii) $\quad f(x) = x^2+1, \qquad g(x) = \ln x,$

$\quad f'(x) = 2x, \qquad g'(x) = \dfrac{1}{x}.$

$u = x^2+1, \ v = \ln x$
$\dfrac{du}{dx} = 2x, \ \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{x}$

Y canlyniad yw

$$\ln(x).\,2x + (x^2+1).\frac{1}{x} = 2x\ln x + \frac{1}{x}(x^2+1)$$
$$= x(2\ln x + 1) + \frac{1}{x}.$$

Defnyddiwch gromfachau er mwyn gwahaniaethu rhwng termau.

(iii) $\quad u = e^{2x}, \qquad v = \ln(3x^4+x+1)$

$\quad \dfrac{du}{dx} = 2e^{2x}, \qquad \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{12x^3+1}{3x^4+x+1}.$

Defnyddiwch Reolau III a VI er mwyn differu e^{2x} a $\ln(3x^4+x+1)$.

Y canlyniad yw

$$\ln(3x^4+x+1).2e^{2x} + e^{2x}.\frac{12x^3+1}{3x^4+x+1}$$
$$= e^{2x}\left[2\ln(3x^4+x+1) + \frac{12x^3+1}{3x^4+x+1}\right].$$

Rhaid ystyried un dechneg arall; rheol y cyniferydd. Mae'r rheol hon yn ymwneud â differu ffwythiannau megis

(i) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (ii) $\dfrac{\ln(x^3+4)}{3x+1}$

h.y. y ffwythiannau sydd ar ffurf

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ neu } \left(\frac{u}{v}\right).$$

Nodwn a defnyddiwn reol y cyniferydd cyn ei phrofi.

Rheol IX

Os yw $\quad y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

yna $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \qquad$ (a)

neu fel arall, os yw $y = \dfrac{u}{v} \qquad u \equiv f(x), \ v \equiv g(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \text{(b)}$$

Eto y ffurf sy'n defnyddio u, v yw'r ffurf fwyaf poblogaidd o Reol IX ac fe'i cofir fel

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

neu mewn geiriau,

'mae d u dros v yn hafal i v d u tynnu u d v i gyd dros v wedi ei sgwario'.
Gelwir Rheol IX ar y naill ffurf neu'r llall yn rheol y cyniferydd.

Enghraifft 7.9

Defnyddiwch reol y cyniferydd i ddifferu

(i) $\dfrac{x}{x^2+1}$ (ii) $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ (iii) $\dfrac{\ln(x^3+4)}{3x+1}$.

(i) $u = x,\quad v = x^2+1,$

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1,\quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x.$

$f(x) = x$, $g(x) = x^2+1$
$f'(x) = 1$, $g'(x) = 2x$

Y canlyniad yw

$$\frac{(x^2+1).1 - x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Rhybudd : camgymeriadau cyffredin yw
(a) cael y termau ar y top yn y drefn anghywir, neu
(b) ysgrifennu'r top fel
$v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

(ii) $u = x^3-1,\quad v = x^3+1,$

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2,\quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3x^2.$

Y canlyniad yw

$$\frac{(x^3+1).3x^2 - (x^3-1).3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^5+3x^2-3x^5+3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}.$$

Defnyddiwch gromfachau a nodwch y newid yn yr arwydd pan gaiff y cromfachau eu diddymu.

(iii) $u = \ln(x^3+4),\quad v = 3x+1,$

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{x^3+4},\quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 3.$

Y canlyniad yw

$$\frac{(3x+1).\dfrac{3x^2}{x^3+4} - \ln(x^3+4).3}{(3x+1)^2}.$$

Nid yw'n bosibl symleiddio'r mynegiad hwn yn sylweddol.

Ni wnawn brofi Rheol IX tan ar ôl i ni weithio trwy'r ymarferion canlynol.

Ymarferion 7.10

Defnyddiwch reol y cyniferydd i ddifferu'r mynegiadau canlynol:

(i) $\dfrac{x-1}{x+1}$ (ii) $\dfrac{x}{\ln x}$ (iii) $\dfrac{e^x}{x+2}$ (iv) $\dfrac{5-3x}{5+3x}$ (v) $\dfrac{1}{x+1}$

(vi) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ (vii) $\dfrac{\ln x}{e^x}$ (viii) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3}$ (ix) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Dyma ymarferion amrywiol ychwanegol sy'n rhoi cyfle i chi berffeithio eich sgiliau differu trwy ymarfer. Dyma grynodeb o'r holl reolau i'ch cynorthwyo:

	y	$\dfrac{dy}{dx}$
I'	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \times g'(x)$
II	e^x	e^x
III	$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} \times g'(x)$
IV	$e^{\ln x} = x$	1
	$\ln(e^x) = x$	1
V	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
VI	$\ln(g(x))$	$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$
VII	$f(x) + g(x) + h(x)$	$f'(x) + g'(x) + h'(x)$
VIII	$\left.\begin{matrix} uv \\ f(x)g(x) \end{matrix}\right\}$	$v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$ $g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$
IX	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
neu	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
	$a^x \; (a > 0)$	$a^x \ln a$

Differiad a^x yw testun cwestiwn 8 yn yr ymarferion nesaf.

Ymarferion 7.11

1. Differwch y ffwythiannau canlynol mewn perthynas â'r newidyn priodol:

(i) $x^3 - 3x^2 + x + 2 + \dfrac{1}{x}$ (ii) $x \ln x$ (iii) $\dfrac{x^4-1}{x^4+1}$

(iv) $(x^2+1)^{15}$ (v) $\sqrt{1-x}$ (vi) e^{-4x}

(vii) $x(\ln x)^2$ (viii) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ (ix) $(e^x + 1)\ln(e^x + 1)$

(x) $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ (xi) $x(1 - x)$ (xii) $x(1 - x)^{10}$

(xiii) $x + \dfrac{1}{x}$ (xiv) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\ln x$ (xv) $\dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$

2. Darganfyddwch oledd y tangiad i'r gromlin a roddir gan $y = \dfrac{2x}{x+1}$ ar y pwynt $(1, 1)$. (Goledd y tangiad yw gwerth $\dfrac{dy}{dx}$ ar y pwynt dan sylw, gweler **P1**.)

3. Dangoswch os yw $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ yna fod $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$.

4. Darganfyddwch oledd y tangiad i'r gromlin a roddir gan $y = e^{x^2+x}$ ar y pwynt $(1, e^2)$.

5. Darganfyddwch werthoedd macsimwm a minimwm y ffwythiant f a roddir gan

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

6. Darganfyddwch werthoedd macsimwm a minimwm y ffwythiant f a roddir gan

$$f(x) = x + \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2).$$

7. Darganfyddwch gyfesurynnau pwyntiau macsimwm a minimwm y gromlin a roddir gan $y = x^2e^{-x}$.

8. O Reol IV, gellir gweld bod $e^{\ln a} = a$ $(a > 0)$ ac felly bod $a^x = e^{(\ln a)x}$. Defnyddiwch y canlyniadau hyn i ddangos bod

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \quad (a > 0).$$

9. Differwch y ffwythiannau canlynol mewn perthynas ag x.

(i) 2^x (ii) $x3^x$ (iii) $\dfrac{5^x}{x}$ (iv) $3^x \ln(3x + 1)$ (v) $3^x e^x$.

Ôl-nodyn i Adran 7.4 (ni chaiff ei arholi)

I gwblhau'r drafodaeth, dyma brawf ar gyfer rheol y cyniferydd (Rheol IX), h.y. dangoswn os yw $y = \dfrac{u}{v}$ yna fod $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$.

$u \equiv f(x)$
$v \equiv g(x)$

Profir y rheol trwy ddefnyddio rheol y lluoswm fel a ganlyn.

O wybod $\qquad y = \dfrac{u}{v},$

ceir $\qquad yv = u.$

Differwn y ddwy ochr mewn perthynas ag x.

$$\therefore \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(yv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Nawr lluoswm yw yv a gellir defnyddio rheol y lluoswm i'w ddifferu fel a ganlyn: cadwch yr ail derm (v) yn sefydlog a differwch y term cyntaf (y), yna cadwch y term cyntaf yn sefydlog a differwch yr ail, ac adiwch y canlyniadau.

$$\therefore \qquad v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

$$\therefore \qquad v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

ac felly $\qquad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{v}.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \dfrac{y}{v}.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad$ (trwy rannu'r cyfan â v).

Felly $\qquad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{v}.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \dfrac{u}{v^2}.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad \left(y = \dfrac{u}{v}\right)$

$$= \frac{v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

neu $\qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}.$

Yn nhermau f(x) a g(x) : -

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)}\right) = \frac{\mathrm{g}(x)\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x)\mathrm{g}'(x)}{(\mathrm{g}(x))^2}.$$

Pennod 8

Differu Ffwythiannau Trigonometrig

Mae'r bennod hon yn ymwneud yn bennaf â differu sin x, cos x, tan x, sec x, cosec x a cot x.

8.1 Golwg eto ar ddifferu

Cyflwynwyd y broses o ddifferu yn **P1**. Diffiniwyd deilliad neu ffwythiant deilliadol y ffwythiant f(x) fel

$$\mathrm{f}'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{f}(x+h)-\mathrm{f}(x)}{h}$$

neu $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\mathrm{f}(x+\delta x)-\mathrm{f}(x)}{\delta x}, \text{ lle mae } y = \mathrm{f}(x).$$

8.2 Differu ffwythiannau trigonometrig

Er mwyn differu sin x o'r egwyddorion cyntaf byddai'n rhaid i ni ddarganfod

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin(x+\delta x)-\sin x}{\delta x}$$

neu

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}.$$

Yma, nid ydym yn dilyn y dull egwyddorion cyntaf hwn ond yn hytrach rydym yn bodloni ar ddatgan y canlyniad.

Os yw $y = \sin x$,

mae $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$.

Hefyd, os yw $y = \cos x$,

mae $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$.

Nodwch yr ateb negatif.

Gellir differu tan x drwy ddefnyddio ffwythiannau deilliadol sin x a cos x ynghyd â rheol y cyniferydd (**Pennod 7**).

Gellir differu tan x trwy ddefnyddio egwyddorion cyntaf ond ni wneir hynny yma.

Gadewch i $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{u}{v}$ (dyweder).

Yna mae
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$y = \dfrac{u}{v}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

Gweler y canlyniadau cynharach.

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Mae $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, gweler P1.

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \sec^2 x, \text{ gan fod } \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Ffwythiant deilliadol tan x yw $\sec^2 x$.

Rydym nawr am ddifferu $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Nid oes disgwyl i chi wybod unrhyw beth arall am sec x ar hyn o bryd.

Er mwyn differu sec x, sylwer bod $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$.

Felly
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}((\cos x)^{-1})$$
$$= (-1)(\cos x)^{-1-1}\frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= -(\cos x)^{-2}(-\sin x)$$
$$= \frac{\sin x}{(\cos x)^2}$$
$$= \sec x \tan x, \text{ gan fod } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ffwythiant deilliadol $(f(x))^n$ yw $n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$, gweler Pennod 7.

Ffwythiant deilliadol sec x yw sec x tan x.

Ymarferion 8.1

Ysgrifennwch $\operatorname{cosec} x = (\sin x)^{-1}$
a chasglwch mai ffwythiant deilliadol cosec x yw $-$ cosec x cot x, lle mae $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Nid oes disgwyl i chi fod ag unrhyw wybodaeth arall am cosec x.

Ffwythiant deilliadol cosec x yw $-$ cosec x cot x.

Yn olaf, differwn $\cot x$ drwy nodi fod $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = (\tan x)^{-1}$.

Nid oes disgwyl i chi fod ag unrhyw wybodaeth arall am cot *x*.

Yna
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cot x) &= \frac{d}{dx}((\tan x)^{-1}) \\
&= (-1)(\tan x)^{-1-1}\frac{d}{dx}(\tan x) \\
&\qquad\downarrow \\
&= -\ (\tan x)^{-2}\ \ (\sec^2 x) \\
&= \frac{-1}{(\tan x)^2}.\sec^2 x \\
&= -\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 \times \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
&= -\operatorname{cosec}^2 x.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Ffwythiant deilliadol $\cot x$ yw $-\operatorname{cosec}^2 x$.

Dyma grynodeb o'r canlyniadau uchod er hwylustod.

Ffwythiant (f(x))	Deilliad (f '(x))
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$

Mewn perthynas â'r tabl uchod disgwylir i chi
a) wybod y tri chanlyniad cyntaf,
b) allu deillio'r tri chanlyniad olaf o'r tri chanlyniad cyntaf.

Gallwn ddefnyddio'r canlyniadau hyn, ynghyd â'r rheolau a roddwyd ym **Mhennod 7**, er mwyn differu ffwythiannau mwy cymhleth.

Enghraifft 8.1

Cofiwn y rheol ffwythiant ffwythiant (differu ffwythiant cyfansawdd), sef mai deilliad f(g(x)) yw f '(g(x)) × g'(x) neu os yw $y = f(u)$ lle mae $u = g(x)$ yna mae
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$
Defnyddiwch y rheol hon a'r rheolau a roddwyd yn gynharach i ddifferu'r canlynol.

(i) $\cos^2 x$ (ii) $\sin(\sqrt{x})$ (iii) $\tan(4x^2 + 2x + 1)$.

(i) Y ffwythiant yw $f(g(x))$ lle mae $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$.

Y deilliad yw $\quad f'(g(x)) \times g'(x)$

$f'(x) = 2x$
$f'(g(x)) = 2\cos x$

$$\begin{aligned} &= 2\cos x \times (-\sin x) \\ &= -2\cos x \sin x. \end{aligned}$$

Neu, $y = u^2$ lle mae $u = \cos x$

a $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$\begin{aligned} &= 2u \times (-\sin x) \\ &= 2\cos x \times (-\sin x) \\ &= -2\cos x \sin x. \end{aligned}$$

(ii) Y ffwythiant yw $f(g(x))$ lle mae $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Yna y deilliad yw $\quad f'(g(x)) \times g'(x)$

$f'(x) = \cos x$
$f'(g(x)) = \cos(\sqrt{x})$

$$\begin{aligned} &= \cos(\sqrt{x})\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Neu, $y = \sin u$ lle mae $u = \sqrt{x}$.

Yna $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$\begin{aligned} &= \cos u \times \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \text{ fel o'r blaen.} \end{aligned}$$

(iii) Gadewch i $y = \tan u$ lle mae $u = 4x^2 + 2x + 1$

fel bod $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$\begin{aligned} &= \sec^2 u \times (8x + 2) \\ &= 2(4x + 1)\sec^2(4x^2 + 2x + 1). \end{aligned}$$

Enghraifft 8.2

Defnyddiwch y rheol differu lluoswm, sef
$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

Pennod 7.

i ddifferu'r canlynol.

(i) $y = (x^2 + 3x + 2)\sin x$ (ii) $y = x^3 \tan x$

(iii) $y = \sin x \cos x$ (iv) $y = \cos^2 x$ $(\cos x \times \cos x)$

(v) $e^{2x} \sin x$ (vi) $(x^2 + 2)\sec 2x$

(vii) $(2x + 1)\operatorname{cosec}(x^3 - x)$ (viii) $e^{x^3} \cot 4x$ (ix) $(\ln x) \sin 3x$.

(i) $\quad u = x^2 + 3x + 2, \quad v = \sin x$

felly $\quad \dfrac{du}{dx} = 2x + 3\,, \quad \dfrac{dv}{dx} = \cos x$

felly
$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)(2x+3) + (x^2+3x+2)(\cos x)$$
$$= (2x+3)\sin x + (x^2+3x+2)\cos x.$$

(ii) $\quad u = x^3, \quad v = \tan x$

felly $\quad \dfrac{du}{dx} = 3x^2, \quad \dfrac{dv}{dx} = \sec^2 x$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = (\tan x)(3x^2) + (x^3)(\sec^2 x)$$
$$= x^2(3\tan x + x\sec^2 x).$$

(iii) $\quad u = \sin x, \quad v = \cos x$

felly $\quad \dfrac{du}{dx} = \cos x, \quad \dfrac{dv}{dx} = -\sin x.$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)(\cos x) + (\sin x)(-\sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x.$$

(iv) $\quad u = \cos x, \quad v = \cos x$

fel bod $\quad \dfrac{du}{dx} = -\sin x, \quad \dfrac{dv}{dx} = -\sin x.$

$\therefore$
$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)(-\sin x) + (\cos x)(-\sin x)$$
$$= -2\cos x\sin x.$$

(v) $\quad u = e^{2x}, \quad v = \sin x$

felly $\quad \dfrac{du}{dx} = 2e^{2x}, \quad \dfrac{dv}{dx} = \cos x.$

$\therefore$
$$(e^{2x}\sin x) = (\sin x)(2e^{2x}) + (e^{2x})(\cos x)$$
$$= e^{2x}(2\sin x + \cos x).$$

(vi) $\quad u = x^2 + 2\,, \quad v = \sec 2x$

fel bod $\quad \dfrac{du}{dx} = 2x, \quad \dfrac{dv}{dx} = (\sec 2x\tan 2x)2 = 2\sec 2x\tan 2x.$

$$\frac{d}{dx}((x^2+2)\sec 2x) = (\sec 2x)(2x) + (x^2+2)(2\sec 2x\tan 2x)$$
$$= 2\sec 2x[x + (x^2+2)\tan 2x].$$

(vii) $\quad u = (2x+1),\; v = \operatorname{cosec}(x^3 - x)$

fel bod $\quad \dfrac{du}{dx} = 2, \quad \dfrac{dv}{dx} = -\operatorname{cosec}(x^3 - x)\cot(x^3 - x) \times (3x^2 - 1)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((2x+1)\operatorname{cosec}(x^3 - x)) &= (\operatorname{cosec}(x^3 - x)(2) \\ &\quad + (2x+1)(-\operatorname{cosec}(x^3 - x)\cot(x^3 - x)) \times (3x^2 - 1) \\ &= \operatorname{cosec}(x^3 - x)[2 - (2x+1)(3x^2 - 1)\cot(x^3 - x)].\end{aligned}$$

(viii) $\quad u = e^{x^3}, \quad v = \cot 4x$

fel bod $\quad \dfrac{du}{dx} = e^{x^3} \times 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$

Nodwch eto ein bod yn defnyddio'r rheol ffwythiant ffwythiant.

a $\quad \dfrac{dv}{dx} = (-\operatorname{cosec}^2 4x) \times 4 = -4\operatorname{cosec}^2 4x.$

$$\therefore \quad \begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}\cot 4x\right) &= (\cot 4x)\left(3x^2 e^{x^3}\right) + \left(e^{x^3}\right)(-4\operatorname{cosec}^2 4x) \\ &= e^{x^3}[3x^2\cot 4x - 4\operatorname{cosec}^2 4x].\end{aligned}$$

(ix) $\quad u = \ln x, \quad v = \sin 3x$

fel bod $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}, \quad \dfrac{dv}{dx} = 3\cos 3x.$

$$\therefore \quad \begin{aligned}\frac{d}{dx}((\ln x)\sin 3x) &= (\sin 3x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(3\cos 3x) \\ &= \frac{1}{x}\sin 3x + 3(\ln x)\cos 3x.\end{aligned}$$

Enghraifft 8.3

Defnyddiwch y rheol differu cyniferydd, sef

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

i ddifferu'r canlynol.

(i) $\dfrac{\sin x}{x^2}$ (ii) $\dfrac{\sin x + \cos x}{x}$ (iii) $\dfrac{e^{2x}}{\cos 3x}$

(iv) $\dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$ (v) $\dfrac{e^{-2x}}{\cos 2x + \sin 2x}$.

(i) $\quad u = \sin x, \quad v = x^2$

fel bod $\quad \dfrac{du}{dx} = \cos x, \quad \dfrac{dv}{dx} = 2x.$

$$\therefore \quad \begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) &= \frac{(x^2)\cos x - (\sin x)(2x)}{x^4} \\ &= \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}.\end{aligned}$$

canslo un x

(ii) $u = \sin x + \cos x, \quad v = x$

fel bod $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x - \sin x, \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1.$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x + \cos x}{x}\right) = \frac{(x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{(x-1)\cos x - (x+1)\sin x}{x^2}.$$

(iii) $u = \mathrm{e}^{2x}, \quad v = \cos 3x$

fel bod $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2\mathrm{e}^{2x}, \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -3\sin 3x$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos 3x}\right) = \frac{(\cos 3x)\left(2\mathrm{e}^{2x}\right) - \left(\mathrm{e}^{2x}\right)(-3\sin 3x)}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)}{\cos^2 3x}.$$

(iv) $u = \tan x - 1, \quad v = \sec x$

fel bod $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x, \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \sec x \tan x.$

$$\text{Felly} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\tan x - 1}{\sec x}\right) = \frac{(\sec x)(\sec^2 x) - (\tan x - 1)(\sec x \tan x)}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{\sec x(\sec^2 x - \tan^2 x + \tan x)}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{\sec^3 x - \sec x \tan^2 x + \sec x \tan x}{\sec^2 x}.$$

(v) $u = \mathrm{e}^{-2x}, \quad v = \cos 2x + \sin 2x$

fel bod $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2\mathrm{e}^{-2x}, \quad \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2\sin 2x + 2\cos 2x.$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\cos 2x + \sin 2x}\right)$$

$$= \frac{(\cos 2x + \sin 2x)(-2\mathrm{e}^{-2x}) - (\mathrm{e}^{-2x})(-2\sin 2x + 2\cos 2x)}{(\cos 2x + \sin 2x)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-2x}(-2\cos 2x - 2\sin 2x + 2\sin 2x - 2\cos 2x)}{(\cos 2x + \sin 2x)^2}$$

$$= \frac{-4\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x}{(\cos 2x + \sin 2x)^2}.$$

Ymarferion 8.2

Differwch y canlynol.

1. (i) $3 \sin x$ (ii) $\cos 3x$ (iii) $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (iv) $\tan\left(\dfrac{x}{4}\right)$

(v) $\sec\left(\dfrac{3}{4}x\right)$ (vi) $\operatorname{cosec} 2x$ (vii) $\sin 3x + \cos 3x$ (viii) $\sec x + \tan x$

(ix) $2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (x) $x^{\frac{1}{3}} \cos x$ (xi) $2x^2 \cos x + (x^2 + 1) \sin x$

(xii) $\dfrac{2}{x^3} + 5x \sin x - x \tan x$ (xiii) $\cos^3 (x^2)$ (xiv) $\sqrt{\tan x}$

(xv) $x^2 \cos 2x$ (xvi) $x\sqrt{\sin x}$ (xvii) $\sin^2 x + \cos^2 x$

(xviii) $\dfrac{\cos x}{2x+3}$ (xix) $\dfrac{e^{3x}}{\cos x}$ (xx) $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{x}}$

(xxi) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ (xxii) $\ln (\cos x)$ (xxiii) $\ln(\cot x + \operatorname{cosec} x)$

(xxiv) $\sqrt{2 + \sin^2 x}$.

8.3 Problemau macsima a minima sy'n cynnwys ffwythiannau trigonometrig

Fe ystyriwn ddefnydd pellach o'r technegau a gyflwynwyd yn **P1** i ymchwilio i werthoedd sefydlog ffwythiannau.

Dewch i ni yn gyntaf gofio'r dulliau y dylid eu mabwysiadu wrth ymchwilio i werthoedd sefydlog ffwythiant $f(x)$.

Dull 1	Dull 2
(a) $f'(x) = 0$, felly	(a) $f'(x) = 0$, felly
un ai (b) mae $f'(x)$ yn newid o + i –, macsimwm	un ai (b) $f''(x) < 0$ ar gyfer macsimwm
neu (c) mae $f'(x)$ yn newid o – i +, minimwm	neu (c) $f''(x) > 0$ ar gyfer minimwm
neu (d) nid yw $f'(x)$ yn newid arwydd, pwynt ffurfdro sefydlog	neu (d) $f''(x) = 0$, dim gwybodaeth.

Mae'r ail ddull yn defnyddio ail ddeilliadau er mwyn dosbarthu gwerthoedd sefydlog. Gellir darganfod ail ddeilliadau ffwythiannau trigonometrig yn hawdd, mewn egwyddor o leiaf.

Enghraifft 8.4

(i) Os yw $y = e^x(\cos x + \sin x)$, darganfyddwch $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(ii) O wybod fod $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$, darganfyddwch $f''(x)$.

(i) $$\frac{dy}{dx} = (\cos x + \sin x)(e^x) + (e^x)(-\sin x + \cos x) = 2e^x \cos x.$$

$\boldsymbol{u = e^x,\ v = \cos x + \sin x}$

$\boldsymbol{\dfrac{du}{dx} = e^x,\ \dfrac{dv}{dx} = -\sin x + \cos x}$

Yn yr un modd, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = (2\cos x)(e^x) + (e^x)(-2 \operatorname{Sin} x)$

$= 2e^x(\cos x - \sin x)$.

(ii) $$f'(x) = \frac{(1+\sin x)(-\cos x)-(1-\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$u = 1-\sin x$, $v = 1+\sin x$
$\frac{du}{dx} = -\cos x$, $\frac{dv}{dx} = \cos x$

$$= \frac{-\cos x - \sin x\cos x - \cos x + \sin x \cos x}{(1+\sin x)^2}$$

felly mae $f'(x) = \dfrac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$.

rheol ffwythiant ffwythiant gydag u^2 lle mae $u = 1 + \sin x$

Ar gyfer y ffwythiant hwn gadewch i $u = -2\cos x$, $v = (1+\sin x)^2$

fel bod $\dfrac{du}{dx} = 2\sin x$, $\dfrac{dv}{dx} = 2(1+\sin x)(\cos x)$.

Yna mae $$f''(x) = \frac{(1+\sin x)^2(2\sin x)-(-2\cos x)2(1+\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^4}$$

$$= \frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)^4}[2\sin x(1+\sin x)+4\cos^2 x]$$

canslo $1 + \sin x$

$$= \frac{2\sin x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x}{(1+\sin x)^3}$$

$$= \frac{2(\sin x + \sin^2 x + 2\cos^2 x)}{(1+\sin x)^3}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{2(1+\sin x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^3}.$$

Fe ddefnyddiwn y prawf ail ddeilliad (dull 2) i ymchwilio i werthoedd sefydlog ffwythiant.

Enghraifft 8.5

Darganfyddwch y gwerthoedd sefydlog neu'r pwyntiau tro ar y gromlin

$$y = \sin x + \cos x \quad \text{ar gyfer} \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

Ar gyfer pwyntiau tro, mae $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Nawr mae $$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$$

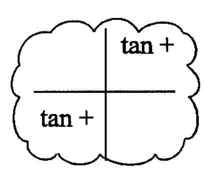
a $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - \cos x.$$

Felly mae $$\frac{dy}{dx} = 0$$

yn rhoi $\cos x - \sin x = 0$

$\therefore \quad \cos x = \sin x$

a $$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1.$$



Felly mae $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ yn yr amrediad 0 i 2π.

Pan fo $x = \dfrac{\pi}{4}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0,$$

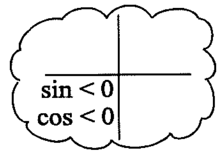
sy'n cyfateb i bwynt macsimwm.
Y gwerth macsimwm cyfatebol yw

$$y = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Peidiwch ag amcangyfrif y swrd os nad oes gofyn i chi wneud hynny.

Pan fo $x = \dfrac{5\pi}{4}$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4}\\ &= -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \sqrt{2} > 0, \text{ sy'n cyfateb i bwynt minimwm.}\\ y &= \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$



Y pwyntiau tro neu sefydlog felly yw

$\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ pwynt macsimwm,

$\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ pwynt minimwm.

Yn yr enghraifft nesaf, byddwn yn defnyddio'r prawf arwydd ar y deilliad cyntaf er mwyn dosbarthu'r gwerthoedd sefydlog.

Enghraifft 8.6

Darganfyddwch werthoedd sefydlog

$$f(x) = \tan^2 x - 2\tan x \qquad \text{ar gyfer } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Ar gyfer gwerth sefydlog, mae

$$f'(x) = 0.$$

Nawr mae

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\tan x)(\sec^2 x) - 2\sec^2 x\\ &= 2\sec^2 x(\tan x - 1).\end{aligned}$$

I ddifferu $\tan^2 x$ gallem ysgrifennu u^2 lle mae $u = \tan x$.

Yna mae $f'(x) = 0$ yn rhoi

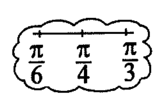
$$2\sec^2 x(\tan x - 1) = 0.$$

$\therefore \quad \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \quad$ (amhosibl)

neu $\quad \tan x = 1.$

$\therefore \quad x = \dfrac{\pi}{4}.$

Er mwyn defnyddio'r prawf arwydd ar $f'(x)$, gadewch i ni ystyried arwyddion $f'(x)$ pan fo $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}$.



$\underline{x = \frac{\pi}{6}}$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

neu defnyddiwch eich cyfrifiannell

fel bod $$f'(x) = 2 \times \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)$$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) < 0.$$

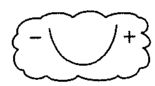
$\underline{x = \frac{\pi}{3}}$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

fel bod $$f'(x) = 2 \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$= 8\left(\sqrt{3} - 1\right) > 0.$$

Felly wrth i x fynd trwy $\frac{\pi}{4}$, mae $f'(x)$ yn newid arwydd o $-$ i $+$,



sy'n cyfateb i werth minimwm.
Y gwerth sefydlog cyfatebol yw

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\frac{\pi}{4} - 2\tan\frac{\pi}{4} = 1 - 2 = -1.$$

Felly mae gan f(x) werth minimwm o -1 pan fo $x = \frac{\pi}{4}$.

<u>Neu,</u>

$$f'(x) = \underbrace{2\tan x}_{u}\,\underbrace{\sec^2 x}_{v} - 2\sec^2 x$$

prawf ail ddeilliad

$$f''(x) = \sec^2 x\frac{d}{dx}(2\tan x) + 2\tan x\frac{d}{dx}(\sec^2 x) - 2\frac{d}{dx}(\sec^2 x)$$

rheol lluoswm

$$= 2\sec^4 x + (2\tan x)(2\sec x \times \sec x\tan x) - 2(2\sec x \times \sec x\tan x)$$

rheol ffwythiant ffwythiant

sy'n rhoi $f''(x) = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x\tan^2 x - 4\sec^2 x\tan x$

Pan fo $x = \frac{\pi}{4}$, mae $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$.

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$$f''(x) = 2(\sqrt{2})^4 + 4(\sqrt{2})^2(1)^2 - 4(\sqrt{2})^2(1)$$
$$= 8 + 8 - 8 = 8 > 0,$$

sy'n cyfateb i bwynt minimwm fel o'r blaen.

Ymarferion 8.3

1. Darganfyddwch werthoedd macsimwm a minimwm y ffwythiannau canlynol ar gyfer $0 \leq x \leq 2\pi$.

(i) $\cos 2x - x$ (ii) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ (iii) $e^x(2\cos x + \sin x)$

(iv) $\cos x + \sin x \cos x$. (v) $\cos^2 x + 4\cos x + 6$

2. Profwch fod gan y ffwythiant $8 \sec \theta + 27 \operatorname{cosec} \theta$ werthoedd sefydlog pan fo $\tan \theta = \dfrac{3}{2}$.

Os yw θ yn ongl lem, cyfrifwch y gwerth sefydlog.

3. Dangoswch mai gwerth lleiaf $3 \sec x - 2 \tan x$ ar gyfer $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ yw tua 2.24.

4. Mewn theori fe ddangosir effaith troi llyw llong fel $k \cos \theta \sin^2 \theta$, gyda θ yn cynrychioli'r ongl rhwng y llyw a'r cilbren, ac mae k yn gysonyn.

Ar gyfer pa werth o θ y mae'r llyw fwyaf effeithiol?

Nodwch fod y gwerthoedd θ sydd o ddiddordeb yn gorwedd yn yr amrediad $-90°$ i $90°$.

5. Darganfyddwch werthoedd macsimwm a minimwm $\cos^3 x + \sin^3 x$ ar gyfer $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Pennod 9

Rhagor o Integru

Cyflwynwyd integru yn **P1.** Yno, ni ddefnyddiwyd integru ond i integru cysonion a ffwythiannau polynomaidd. Yma, rydym yn estyn y rhestr o ffwythiannau sylfaenol a gaiff eu hintegru: byddwn yn ystyried $\frac{1}{x}$, e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Yn ail, cyflwynir rheol integru newydd lle gellir integru mathau penodol o ffwythiannau cyfansawdd. Yn ddiweddarach, caiff rhai integrynnau pendant eu cyfrifo. Ystyrir Rheol y Trapesiwm sy'n ein galluogi i gyfrifo gwerthoedd bras ar gyfer integrynnau pendant.

9.1 Technegau a rheolau

Gadewch i ni gychwyn drwy gofio rheol o **P1.**

Rheol I

$$\boxed{\int cx^n \,\mathrm{d}x = \frac{cx^{n+1}}{n+1} + k, (n \neq -1)}$$

lle mae c a k yn gysonion.

Efallai yr hoffai'r darllenydd adolygu'r rheol hon yn sydyn drwy wneud yr ymarferion canlynol. Cyn gwneud hynny, rhaid cofio y gellir differu fesul term wrth ddifferu nifer penodol o dermau. Gan mai'r gwrthwyneb i ddifferu yw integru, gallwn hefyd integru fesul term.

Ymarferion 9.1

Integrwch y canlynol mewn perthynas â'r llythyren briodol, gan anwybyddu'r cysonion integru.

(i) x^6 (ii) $x^{1/3}$ (iii) $\frac{4}{x^4}$ (iv) $\sqrt{x}$

(v) $x + \frac{1}{x^2}$ (vi) $\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)^2$

Mae'n bosibl cyffredinoli Rheol I i ffwythiannau ar ffurf $(ax + b)^n$ lle mae a, b a n yn gysonion. Ystyriwn enghraifft cyn rhoi'r canlyniad cyffredinol.

Enghraifft 9.1

Nawr $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((7x+5)^4) = 4(7x+5)^3.7$$
$$= 28(7x+5)^3$$

neu $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(7x+5)^4}{28}\right) = (7x+5)^3.$$

Felly wrth ysgrifennu yn nhermau integrynnau, ceir

$$\int (7x+5)^3 \mathrm{d}x \;=\; \frac{(7x+5)^4}{28} + k.$$

Noder hefyd na fyddai cysonyn yn yr integryn yn cyflwyno unrhyw anhawster. Felly

$$\int 3(7x+5)^3 \mathrm{d}x \;=\; \frac{3(7x+5)^4}{28} + k.$$

Felly dyma'r rheol gyffredinol

Rheol II $\boxed{\int c(ax+b)^n \mathrm{d}x \;=\; \frac{c(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + k}$

lle mae a, b ac c yn gysonion.

<u>RHYBUDD</u>

Pwysleisir bod Rheol II yn ddilys oherwydd bod $ax + b$ yn ffwythiant llinol, fel y'i gelwir, yn x, h.y. mae x yn digwydd fel x^1 yn unig. Mae hyn yn cau allan $\frac{3}{x} + 2$, er enghraifft, gan fod $\frac{3}{x}$ yn hafal i $3x^{-1}$.

Nodwch fod $\int \left(ax^2 + b\right)^n \mathrm{d}x \;\neq\; \frac{(ax^2+b)^{n+1}}{(n+1)2ax} + k$

gan fod $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(ax^2+b)^{n+1}}{(n+1)2ax}\right) \neq (ax^2+b)^n$.

Fe'ch anogir yn gryf i <u>beidio</u> â defnyddio canlyniad cyfeiliornus o'r fath nac unrhyw ganlyniad tebyg nad yw'n ymwneud â ffwythiannau llinol.

Ymarferion 9.2

1. Integrwch y mynegiadau canlynol trwy ddefnyddio Rheolau I a II. Nodwch nad oes rhaid dileu'r cromfachau cyn integru. Anwybyddwch y cysonion integru.

   (i) $(x+1)^2$ (ii) $(2x-1)^3$ (iii) $(3x+7)^4$

   (iv) $(7x-6)^{-6}$(v) $(3x+1)^{\frac{1}{2}}$ (vi) $(9x-8)^{-\frac{1}{2}}$

   (vii) $\frac{1}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (ix) $(3-2x)^{\frac{3}{2}} + (3-2x)^{\frac{1}{2}}$

   (x) $(lx+m)^s$ (mae l, m, s yn gysonion, $s \neq -1$).

2. Pa rai o'r mynegiadau canlynol y gellir eu cyfrifo trwy ddefnyddio rheol II?

   (i) $\int (2x+3)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$ (ii) $\int (5x^3-1)^{\frac{7}{2}} \mathrm{d}x$ (iii) $\int (7-x)^4 \mathrm{d}x$

   (iv) $\int (3+x^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$.

9.2 Integru $\frac{1}{x}$, e^x, sin x a cos x

Nodwyd eisoes yn **P1** nad yw Rheol I: $\int cx^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{cx^n}{n+1} + k$ yn ddilys ond pan fo $n \neq -1$, gan fod rhannu â sero yn anniffiniedig. Felly nid yw Rheol I yn cynorthwyo gyda darganfod $\int \frac{1}{x} dx$.

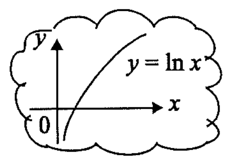
$\int x^n \, \mathrm{d}x$ gydag $n = -1$

Ym **Mhennod 7**, dangoswyd bod

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

fel bod $$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k.$$

Mae anhawster yn codi yn y ffaith bod ln x yn anniffiniedig ar gyfer $x < 0$. Mewn mathemateg rhaid ystyried yr integryn hyd yn oed pan fo $x < 0$. Er mwyn cwrdd â'r angen hwn, ysgrifennir



$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{-1}{-x} dx = \int \frac{d(-x)}{-x}$$
$$= \ln(-x) + k.$$

Felly $$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k \qquad x > 0$$
$$= \ln(-x) + k. \qquad x < 0$$

Gellir cyfuno'r datganiadau hyn i ffurfio datganiad unigol

Rheol III $$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k}$$

$|x| = x, \ x \geq 0$
$= -x, \ x < 0$
Gweler Pennod 1.

Gellir datblygu Rheol III i ystyried integrynnau megis $\dfrac{dx}{3x+2}$ a $\displaystyle\int \frac{dx}{5-7x}$.

Mae'r integrynnau hyn yn achosion arbennig o'r achos mwy cyffredinol $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$, lle mae a a b yn gysonion. Nodwch fod $ax + b$ yn ffwythiant llinol.

Nawr $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(ax+b) = \frac{1}{ax+b} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax+b)$$
$$= \frac{a}{ax+b}.$$

Rheol VI
Pennod 7

Felly $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + k$$

ac yn fwy cyffredinol,

Rheol IV $$\boxed{\int \frac{c}{ax+b} \mathrm{d}x = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + k}$$

Eto fe'ch anogir i <u>beidio</u> â defnyddio canlyniad o'r fath gydag unrhyw beth ond ffwythiannau llinol.

$\displaystyle\int \frac{c \, \mathrm{d}x}{ax^2+b} \neq \frac{c}{2ax}\ln|ax^2+b| + k$

Enghraifft 9.2

$$\int \frac{5}{3x+2}dx = \frac{5}{3}\ln|3x+2|+k.$$

$$\int \frac{6}{5-7x}dx = -\frac{6}{7}\ln|5-7x|+k.$$

Ymarferion 9.3

Integrwch y mynegiadau canlynol.

(i) $\frac{2}{x}$ (ii) $\frac{1}{3x}$ (iii) $\frac{1}{x+1}$ (iv) $\frac{1}{9x+7}$

(v) $\frac{1}{1-x}$ (vi) $\frac{1}{3-x}+\frac{1}{3+2x}$

Nawr ystyriwn y ffwythiant e^x. Gan fod

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

ceir

Rheol V $\boxed{\int e^x dx = e^x + k.}$

Nawr gan fod $\frac{d}{dx}(ce^{ax+b}) = ce^{ax+b}a$

$= cae^{ax+b}$

Rheol III
Pennod 7

yna

Rheol VI $\boxed{\int ce^{ax+b}\, dx = \frac{c}{a}e^{ax+b} + k.}$

Gofynnir i chi nodi eto ein sylwadau blaenorol ynghylch ffwythiannau llinol : peidiwch â defnyddio Rheol VI ar gyfer ffwythiannau aflinol.
Nodwn wrth fynd heibio nad ystyrir integryn a^x ($a > 0$) yn yr ymarferion canlynol.

Ymarferion 9.4

1. Defnyddiwch Reol VI i integru'r mynegiadau canlynol.

(i) e^{2x+1} (ii) e^{-x+3} (iii) e^{-2x} (iv) e^{5-3x}

(v) $\frac{1}{e^{4x}}$ (vi) $e^{3x}+\frac{1}{e^{3x}}$ (vii) $(e^x)^{\frac{5}{2}}$ (viii) $2e^{5x}-6e^{-2x}$

2. Pa rai o'r mynegiadau canlynol y gellir eu cyfrifo trwy ddefnyddio Rheol VI?

(i) e^{2x-1} (ii) e^{-10x} (iii) $e^{9x}-6e^{-4x}$

(iv) $e^{\frac{1}{x}+1}$ (v) $e^{\frac{1}{x^2}}$ (vi) e^{71-3x}

Nodwyd ym **Mhennod 8** fod

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

fel bod

Rheol VII $\boxed{\int \cos x dx = -\sin x + k.}$

Hefyd mae $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

fel bod

Rheol VIII $\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + k.}$

Nodwch yr arwydd negatif yn y canlyniad.

Yna gan fod $\frac{d}{dx}(\sin(ax+b)) = a\cos(ax+b)$

$$\frac{d}{dx}(\cos(ax+b)) = -a\sin(ax+b)$$

Rheol I' Pennod 7

gallwn gyffredinoli Rheolau VII, VIII fel a ganlyn:

Rheol IX $\boxed{\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k.}$

Rheol X $\boxed{\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k.}$

Ymarferion 9.5

Integrwch y canlynol drwy ddefnyddio Rheol IX a X, gan anwybyddu'r cysonion integru.

1. (i) $\sin(x+2)$ (ii) $\cos 5x$ (iii) $\sin(9-5x)$
(iv) $\cos(4x-7) - 3\sin(2x+5)$ (v) $2\cos(7x+1) + 5\sin 3x$

2. Pa rai o'r canlynol y gellir eu cyfrifo drwy ddefnyddio Rheol IX a X?

(i) $\sin(3x+1)$ (ii) $\cos(9-5x^2)$ (iii) $\sin(2x^2+1)$
(iv) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (v) $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (vi) $\cos(9-7x)$

Fel gyda differu, gellir perffeithio eich techneg drwy ymarfer. Oherwydd hynny, rhoddir ymarferion ychwanegol ar y dudalen nesaf. Er mwyn cwblhau'r drafodaeth, rhoddir crynodeb yn gyntaf o'r rheolau a sefydlwyd yn y Bennod hon. Nid ydym wedi cynnwys y cysonion mympwyol er mwyn osgoi eu hailadrodd.

	ffwythiant f(x)	$\int$f(x) dx
Rheol I	cx^n	$\dfrac{cx^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
Rheol II	$c(ax+b)^n$	$\dfrac{c(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} \quad (n \neq -1)$
Rheol III	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert$
Rheol IV	$\int \dfrac{c}{ax+b} dx$	$\dfrac{c}{a}\ln\lvert ax+b \rvert$
Rheol V	$\int e^x dx$	e^x
Rheol VI	$\int ce^{ax+b} dx$	$\dfrac{c}{a}e^{ax+b}$
Rheol VII	$\int \cos x dx$	$\sin x$
Rheol VIII	$\int \sin x dx$	$-\cos x$
Rheol IX	$\int \cos(ax+b) dx$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$
Rheol X	$\int \sin(ax+b) dx$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$

Ymarferion 9.6

Integrwch y ffwythiannau canlynol mewn perthynas â'r llythyren briodol.

(i) $\dfrac{1}{x^2}$ (ii) $\dfrac{1}{x}$ (iii) $x^{\frac{3}{4}}$ (iv) $x+3$

(v) $\sqrt{x+3}$ (vi) $x^2 - \dfrac{3x}{2}$ (vii) $\dfrac{1}{10x-9}$ (viii) e^{x+3}

(ix) e^{5-9x} (x) $(3x+2)^{10}$ (xi) $\dfrac{1}{(2x+9)^3}$

(xii) $\dfrac{2x^3+6x^2+3}{x^3}$ (xiii) $\sqrt{x}\left(2x+x^{-\frac{3}{2}}\right)$ (xiv) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$

(xv) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (xvi) $(a+bt)^2$ (xvii) $\dfrac{1}{\sqrt{3-2y}}$ (xviii) $y(2-5y^2)$

(xix) $\dfrac{3}{2+3y}$ (xx) $\dfrac{x^2-4}{x^4}$ (xxi) $\dfrac{1}{t\sqrt{t}} + \dfrac{5}{\sqrt{3+5t}}$ (xxii) $\dfrac{5}{(13-5w)^3}$

(xxiii) $\sin 5x$ (xxiv) $3\sin\left(2y - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(xxv) $4\cos 3y - 6\sin(7y+5)$ (xxvi) $7\sin(3-2x) + 2\cos(10-x)$

9.3 Integrynnau Pendant a Rheol y Trapesiwm

Yn yr adran hon rydym yn dychwelyd at y testun integru pendant a gyflwynwyd yn **P1.** Cofiwn y gellir dehongli'r integryn pendant $\int_a^b fx\mathrm{d}x$ fel yr arwynebedd dan y gromlin $y = f(x)$ rhwng $x = a$ a $x = b$.

Enghraifft 9.3

Cyfrifwch (i) $\int_2^3 \frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\mathrm{d}x$ (iii) $\int_1^2 e^{5-3x}\mathrm{d}x$

(i) $\int_2^3 \frac{1}{2x+3}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(|2x+3|)\right]_2^3$

$= \frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 7$

$\simeq$ 0.126, gan ddefnyddio cyfrifiannell.

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right)$

$= \frac{1}{2}.$

(iii) $\int_1^2 e^{5-3x}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}e^{5-3x}\right]_1^2$

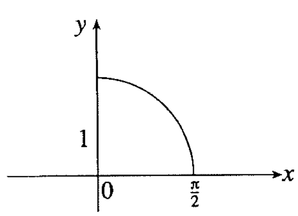
$= -\frac{1}{3}e^{-1} - \left(-\frac{1}{3}e^2\right)$

$= \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}e^{-1} \simeq$ 2.340, gan ddefnyddio cyfrifiannell.

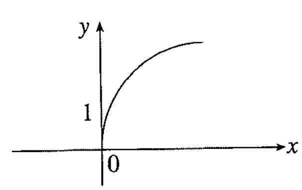
Enghraifft 9.4

Brasluniwch y gromlin $y = \cos x - \sin x$ ar gyfer $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, gan nodi'n eglur ym mhle mae'r gromlin yn croesi'r echelin x. Trwy hynny, cyfrifwch yr arwynebedd sydd rhwng y gromlin, yr echelin y ac $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

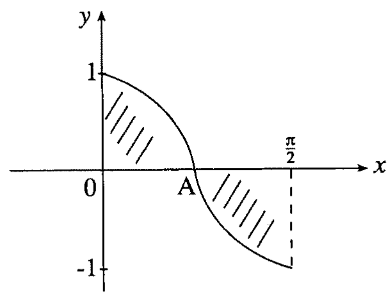
Mae'r gromlin $y = \cos x - \sin x$ yn gyfuniad o gromlin $y = \cos x$ ac $y = \sin x$.



$y = \cos x$



$y = \sin x$



Mae'r arwynebedd dan sylw wedi'i dywyllu. Rhoddir cyfesuryn x pwynt A lle mae'r gromlin yn croesi'r echelin x gan

$$\cos x - \sin x = 0.$$

$$\therefore \quad \cos x = \sin x.$$

$$\therefore \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1.$$

$$\therefore \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Cyfanswm yr arwynebedd sydd wedi'i dywyllu yw

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x$$

$$= \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\sin x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 - \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} - 2$$

$$\mathbf{\cos 0 = 1,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin 0 = 0}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\simeq 0.828$$

$$\mathbf{\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

Ymarferion 9.7

1. Cyfrifwch $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x+4)^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Darganfyddwch yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = \sin x$ a'r echelin x rhwng llinellau $x = 0$ a $x = \pi$.

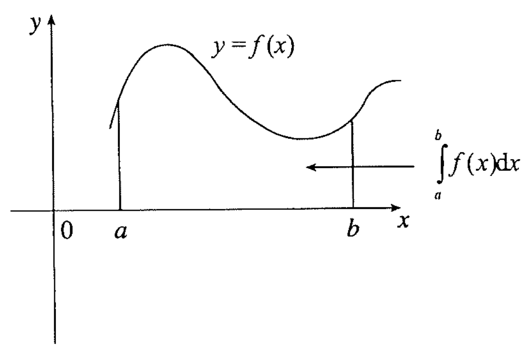
3. Cyfrifwch $\displaystyle\int_0^2 \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{e^x}\,dx$.

4. Cyfrifwch yr integrynnau (a) $\int_0^1 \frac{9}{2+3x}\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \frac{9}{\sqrt{2+3x}}\mathrm{d}x$.

5. Brasluniwch y gromlin $y = e^x$. Darganfyddwch yr arwynebedd rhwng y gromlin a'r llinellau $x = 1$ ac $y = 1$.

Weithiau, ni allwn gyfrifo integrynnau pendant drwy ddarganfod yr integryn amhendant cysylltiedig yn gyntaf; er enghraifft, mae'n amhosibl darganfod yr integryn amhendant $\int\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Os ydych chi'n meddwl eich bod wedi ei ddarganfod, differwch eich ateb i weld a gewch chi $\sqrt{\sin x}$!

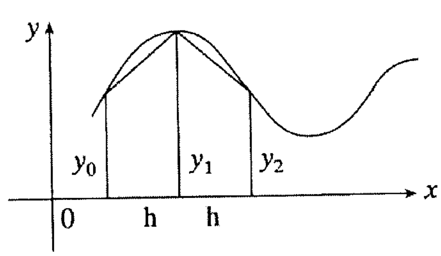
Er mwyn ymdrin ag achosion o'r fath, cofiwn fod integryn pendant $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ yn rhif sy'n cynrychioli'r arwynebedd rhwng $y = f(x)$ a $x = a$, $x = b$. (Yma, cymerir yn ganiataol nad yw $y = f(x)$ yn croesi'r echelin x.)



Felly wrth ddarganfod gwerth bras ar gyfer yr arwynebedd, rydym yn darganfod gwerth bras ar gyfer $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Gellir darganfod gwerth bras ar gyfer yr arwynebedd drwy ddefnyddio amryw o ddulliau. Yma, rydym yn ystyried <u>Rheol y Trapesiwm</u> er mwyn darganfod brasamcan.

Ceir y gwerth bras drwy uno pen cyfesurynnau dilynol a thrin pob trapesiwm a ffurfir fel brasamcan ar gyfer yr arwynebedd dan rannau cyfatebol y gromlin.



Os y_o, y_1, y_2 yw'r tri mesuryn cyntaf, a h yw'r pellter rhwng mesurynnau dilynol, arwynebeddau'r ddau drapesiwm cyntaf yw $\frac{h}{2}(y_o + y_1)$, $\frac{h}{2}(y_1 + y_2)$.
Gan gymryd y ceir n trapesiwm neu stribed, ac felly n + 1 mesuryn, gwelwn mai cyfanswm arwynebedd y trapesiymau yw

$$\frac{h}{2}[(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \ldots\ldots + (y_{n-1} + y_n)],$$

lle mae y_n yn cynrychioli'r mesuryn olaf.

Yna ceir yr arwynebedd dan y gromlin = $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ yn fras fel

$$\frac{h}{2}(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{mesuryn} \\ \text{cyntaf}}}{y_o} + 2y_1 + 2y_2 + \ldots\ldots + 2y_{n-1} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{mesuryn} \\ \text{olaf}}}{y_n}).$$

Gelwir y fformiwla hon yn **rheol y trapesiwm.**

Enghraifft 9.5
Defnyddiwch reol y trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod gwerth bras ar gyfer

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Nodwn fod pum mesuryn neu bedwar stribed. Felly mae $h = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{4} = \dfrac{\pi}{16}$.

Y gwerth bras yw $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{16}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4]$ lle gwelir mai gwerthoedd y yw gwerthoedd $\sqrt{\sin x}$ pan fo $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi$.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$y = \sqrt{\sin x}$	1	0.9611865	0.8408964	0.6186141	0
Ffactor	1	2	2	2	1

Felly mae $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{16}[1 + 2(0.9611865 + 0.8408964 + 0.6186141) + 0]$

$= 0.57348\ldots$
$\simeq 0.5735$, gan dalgrynnu i bedwar lle degol.

Ymarferion 9.8

1. Defnyddiwch reol y trapesiwm gyda saith stribed i ddarganfod gwerth bras ar gyfer

$$\int_0^{0.7} \ln(1+x)\mathrm{d}x .$$

2. Defnyddiwch reol y trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod gwerth bras ar gyfer

$$\int_0^{0.8} e^{x^2}\,\mathrm{d}x .$$

3. Defnyddiwch reol y trapesiwm gydag un mesuryn ar ddeg i ddarganfod gwerth bras ar gyfer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

O wybod mai $\frac{\pi}{6}$ yw gwerth yr integryn, darganfyddwch werth bras ar gyfer π.

4. Defnyddiwch reol y trapesiwm gyda chwe mesuryn i ddarganfod gwerth bras ar gyfer

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x .$$

5. Llunnir tabl ffwythiant $y = f(x)$ ar gyfer gwerthoedd amrywiol o x fel a ddangosir isod.

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
y	3.70	3.82	4.15	4.51	5.07

Cyfrifwch frasamcan o $\int_{1.0}^{1.8} y\mathrm{d}x$, gan ddefnyddio rheol y trapesiwm.

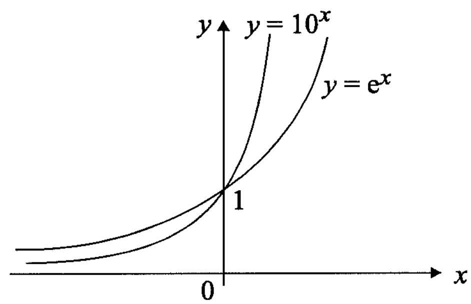
Pennod 10

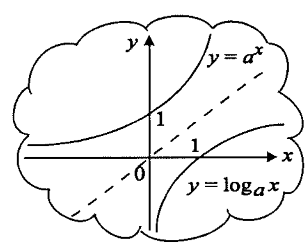
Rheolau Logarithmau

Cawsom olwg ar y ffwythiannau esbonyddol a logarithmig (log) ym **Mhennod 5** a **7**. Yno, soniwyd am ddifferu'r ffwythiannau ac am eu graffiau. Yma byddwn yn datblygu rhai rheolau a fodlonir gan logarithmau.
Rydym am ddechrau drwy gofio rhai o'r syniadau a gododd yn gynharach.

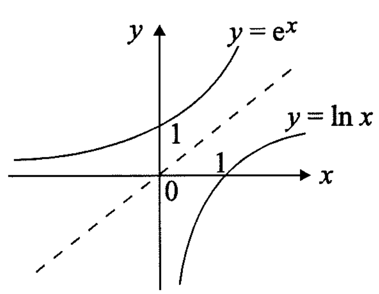
10.1 Ffwythiannau esbonyddol a logarithmig : crynodeb

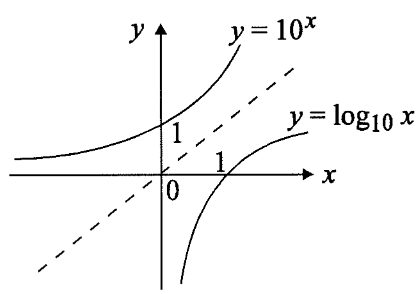
f(x) = a^x yw ffurf fwyaf cyffredin y ffwythiant esbonyddol, lle mae a yn gysonyn positif.
Mae'r achosion hynny lle mae a = e ac a = 10 o ddiddordeb arbennig, y cyntaf oherwydd differiad e^x, a'r ail oherwydd mai 10 yw'r sail ar gyfer ein system rifau o ddydd i ddydd.
Mae graffiau $y = e^x$ ac $y = 10^x$ yn debyg: maent yn disgyn i'r chwith, yn dringo i'r dde, ac yn mynd drwy'r pwynt (1, 0). Yn wir, mae pob graff sydd yn y ffurf $y = a^x$ $(a > 0)$ yn mynd drwy'r pwynt (0, 1).





Mae'r ffwythiant f(x) = a^x $(a \neq 1)$ yn ffwythiant un-i-un ac mae ganddo ffwythiant gwrthdro $\log_a x$, a elwir yn ffwythiant log. Dywedir bod y log i'r **bôn *a*** yn yr achos hwn.
Dangosir isod graffiau f(x) = e^x a g(x) = 10^x ynghyd â'u ffwythiannau gwrthdro.





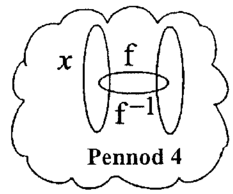
Mae nodweddion canlynol y graffiau yn bwysig.

$\ln 1 = 0, \ \log_{10} 1 = 0.$ $\ln x \to \infty, \ \log_{10} x \to \infty$ wrth i $x \to \infty.$ $\ln x \to -\infty, \ \log_{10} x \to -\infty$ wrth i $x \to 0.$ Nid yw $\ln x$ a $\log_{10} x$ wedi eu diffinio ar gyfer $x < 0.$

(I)

Mewn gwirionedd, mae $\log_a 1 = 0$ ar gyfer unrhyw fôn a.

Mae'r perthnasau arferol rhwng ffwythiannau a'u ffwythiannau gwrthdro yn arbennig o bwysig yn achos ffwythiannau esbonyddol a logarithmig.



Felly pan fo $f(x) = e^x$, mae $f^{-1}(x) = \ln x$
ac mae'r canlyniadau arferol $ff^{-1}(x) = x,$
$f^{-1}f(x) = x,$

yn arwain at
a

$$\boxed{\begin{aligned} e^{\ln x} &= x, \\ \ln(e^x) &= x. \end{aligned}} \quad * \ \text{(II)}$$

***Defnyddir y canlyniad pwysig hwn yn Adran 10.2.**

gyda chanlyniadau tebyg ar gyfer 10^x a $\log_{10} x$, ac yn wir ar gyfer unrhyw fôn.

$$\boldsymbol{a^{\log_a x} = x,}$$
$$\boldsymbol{\log_a(a^x) = x}$$

Gan roi $x = 1$ yn (II) uchod, cawn y canlyniadau pwysig canlynol:

$$\boxed{\begin{aligned} e^{\ln 1} &= 1, \\ \ln(e^1) &= 1. \end{aligned}} \quad \text{(III)}$$

Dengys y canlyniadau hyn fod $e^0 = 1$ a hefyd fod $\log_e e = 1$.

$\ln 1 = 0$

Yn fwy cyffredinol ar gyfer $a > 0$,

$$\boxed{\begin{aligned} a^{\log_a 1} &= 1, \\ \log_a a &= 1. \end{aligned}} \quad \text{(IV)}$$

$10^{\log_{10} 1} = 1,$
$\log_{10} 10 = 1.$

Ymarferion 10.1

1. Symleiddiwch y canlynol heb ddefnyddio cyfrifiannell.

(i) $\log_{10}(10^{1.314})$ (ii) $\ln(e^{4.92})$ (iii) $\ln(e^{-5.61})$ (iv) $e^{\ln 3.61}$

(v) $10^{\log_{10}(5.16)}$ (vi) $15^{\log_{15} 1}$ (vii) $\log_{30} 30$

2. Ysgrifennwch y canlynol mewn nodiant logarithmig.

(i) $a = e^x$ (ii) $b = 10^y$ (iii) $c = d^z$ (iv) $10^0 = 1$

(v) $e^2 = 7.389056$ (yn gywir i chwe lle degol)

(vi) $10^{2.31} = 204.1738$ (yn gywir i bedwar lle degol)

Trafodwyd deilliadau $f(x) = e^x$ a $f^{-1}(x) = \ln x$ yn **P1** (Pennod 7).

Yna, o wybod bod

$$y = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = e^x;$$

rheol ffwythiant ffwythiant

$$y = e^{f(x)}, \quad \frac{dy}{dx} = e^{f(x)} f'(x);$$

$$y = \ln x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x};$$

$$y = \ln g(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

rheol ffwythiant ffwythiant

Ymarferion 10.2

1. Differwch y canlynol mewn perthynas ag x.
(i) $\ln(x+1)$ (ii) $\ln(x^2+1)$ (iii) $\ln(3x)$ (iv) $\ln(4x^2)$

2. Gan ysgrifennu $10^x = e^{\ln 10}$ yn gyntaf, mynegwch 10^x fel pŵer o e a thrwy hynny dangoswch fod

$$\frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \ln 10.$$

3. Dangoswch fod gan y parau canlynol o ffwythiannau yr un deilliadau. Cewch dybio fod $x > 0$.
(i) $\ln(6x)$, $\ln x$
(ii) $\ln\left(\frac{x}{7}\right)$, $\ln x$
(iii) $\ln(Ax)$, $\ln x$
(iv) $\ln\left(\frac{x}{B}\right)$, $\ln x$

Mae A a B yn gysonion positif.

(v) $\ln(x^2)$, $2\ln x$
(vi) $\ln(x^n)$, $n\ln x$
(vii) $\ln(Ax^2)$, $2\ln x$

Cyn symud ymlaen i adran 10.2, gadewch i ni ystyried cwestiwn 3, ymarferion 10.2 mewn ychydig mwy o fanylder. Yn benodol, fe edrychwn ar gwestiwn 3(i).

Mae gan y ffwythiannau $\ln(6x)$ a $\ln x$ yr un deilliad $\left(\frac{1}{x}\right)$, ond maent yn ffwythiannau gwahanol. O'n gwybodaeth am ddifferu, gwyddom fod cysonyn yn gwahaniaethu rhyngddynt a bod y cysonyn hwnnw'n diflannu wrth ddifferu.

er enghraifft, mae gan x^2 ac $x^2 + 3$ yr un deilliad

$\therefore \quad \ln(6x) = \ln x + \text{cysonyn}.$

Yn yr un modd ar gyfer rhannau eraill o'r cwestiwn :

$$\ln\left(\frac{x}{7}\right) = \ln x + \text{cysonyn},$$

$$\ln(x^2) = 2\ln x + \text{cysonyn},$$

$\ln(Ax^2) = 2\ln x +$ cysonyn.

Mae'r adran nesaf yn ymchwilio i'r perthnasau uchod gan sefydlu rheolau logarithmau.

10.2 Rheolau logarithmau

Mae'r rheolau logarithmau yn deillio o'r rheolau ar gyfer indecsau a drafodwyd yn **P1**. Y rheolau hynny yw

(adio indecsau) $b^m \times b^n = b^{m+n}$,
(tynnu indecsau) $b^m \div b^n = b^{m-n}$,
(lluosi indecsau) $(b^m)^n = b^{mn}$.

(i) Logarithm lluoswm dau rif

Ystyriwch y lluoswm pq. O nodweddion y ffwythiannau esbonyddol a logarithmig, mae

$$pq = e^{\ln pq}, \quad (1)$$
$$p = e^{\ln p}, \quad (2)$$
$$q = e^{\ln q}. \quad (3)$$

Gweler Rheol II yn adran 10.1 gydag $x = pq, x = p, x = q$ yn eu tro.

Nawr mae $pq = e^{\ln p} \times e^{\ln q}$ (gan ddefnyddio (2), (3))
$= e^{\ln p + \ln q}$ (adio indecsau)

felly mae $pq = e^{\ln p + \ln q}$. (4)

Wrth gymharu hafaliadau (4) ac (1) uchod, cawn

$$\boxed{\ln(pq) = \ln p + \ln q} \quad \text{(V)}$$

h.y. mae log lluoswm = swm y logarithmau.

Yn yr un modd, $\log_{10}(pq) = \log_{10}p + \log_{10}q$

(ii) Logarithm cyniferydd

Ystyriwch y cyniferydd $\frac{p}{q}$. Yn awr, fel o'r blaen,

mae $\frac{p}{q} = e^{\ln\left(\frac{p}{q}\right)}$, (5)

$p = e^{\ln p}$, (6)

$q = e^{\ln q}$. (7)

Felly mae $\frac{p}{q} = \frac{e^{\ln p}}{e^{\ln q}}$ (o hafaliadau (6) a (7) uchod)

$= e^{\ln p - \ln q}$ (tynnu indecsau)

ac felly $\frac{p}{q} = e^{\ln p - \ln q}$. (8)

Wrth gymharu (8) a (5) cawn

$$\ln\left(\frac{p}{q}\right) = \ln p - \ln q \qquad \text{(VI)}$$

neu mae log cyniferydd = log(rhifiadur) − log(enwadur).

Yn yr un modd mae $\log_{10}\left(\frac{p}{q}\right) = \log_{10}p - \log_{10}q$.

(iii) Logarithm pŵer

Fe ystyriwn p^n.

Nawr, fel o'r blaen, mae $\quad p = e^{\ln p} \quad (9)$

a $\quad p^n = e^{\ln(p^n)}. \quad (10)$

O hafaliad (9), mae $\quad p^n = (e^{\ln p})^n = e^{n \ln p},$

lluosi indecsau

ac felly $\quad p^n = e^{n \ln p}. \quad (11)$

O hafaliad (10), mae $\quad p^n = e^{\ln(p^n)}. \quad (10)$

Wrth gymharu hafaliadau (11) a (10) cawn

$$\ln(p^n) = n \ln p \qquad \text{(VII)}$$

h.y. mae log(pŵer rhif a roddir) = pŵer × log(y rhif a roddir).

Yn yr un modd mae $\log_{10}p^n = n\log_{10}p$.

Enghraifft 10.1

Dychwelwn at gwestiwn 3, ymarferion 10.2.

(i)	$\ln(6x) = \ln 6 + \ln x$	(Rheol V)
(ii)	$\ln\left(\frac{x}{7}\right) = \ln x - \ln 7$	(Rheol VI)
(iii)	$\ln(Ax) = \ln A + \ln x$	(Rheol V)
(iv)	$\ln\left(\frac{x}{B}\right) = \ln x - \ln B$	(Rheol VI)
(v)	$\ln(x^2) = 2 \ln x$	(Rheol VII)
(vi)	$\ln(x^n) = n \ln x$	(Rheol VII)
(vii)	$\ln(Ax^2) = \ln A + 2 \ln x$	(Rheol V yna Rheol VII)

Bydd y cysonion yn (i)–(iv), (vii) yn diflannu wrth ddifferu, gan arwain at y canlyniadau a ddyfynnwyd yng nghwestiwn 3, ymarferion 10.2.

Gellir ymestyn y dadleuon sy'n arwain at Reolau V – VII i sefyllfaoedd sy'n cynnwys mwy na dau rif. Mae'r enghraifft ganlynol yn dangos yr achos pan fo mwy na dau rif dan sylw.

Enghraifft 10.2

$$\ln\left(\frac{3^2 5^3 11^{-6}}{7^3 13^7}\right) = 2\ln 3 + 3\ln 5 - 6\ln 11 - 3\ln 7 - 7\ln 13.$$

Enghraifft 10.3

1. Mynegwch y canlynol yn nhermau $\ln x$, $\ln y$, $\ln z$ neu $\log_{10}x$, $\log_{10} y$ a $\log_{10} z$.

(i) $\ln xy$ (ii) $\ln xyz$ (iii) $\ln \frac{x}{y}$ (iv) $\ln \frac{xy}{z}$ (v) $\ln \frac{x}{yz}$ (vi) $\ln \frac{1}{x}$

(vii) $\ln \frac{x^2}{y}$ (viii) $\ln \frac{x^3}{\mathrm{e}}$ (ix) $\ln \frac{x}{\mathrm{e}y}$ (x) $\log_{10} \frac{10^2}{\sqrt{x}}$ (xi) $\log_{10} \frac{x^2 y^3}{10\sqrt{z}}$

Atebion

(i) $\ln x + \ln y$ (ii) $\ln x + \ln y + \ln z$ (iii) $\ln x - \ln y$

(iv) $\ln x + \ln y - \ln z$ (v) $\ln x - \ln y - \ln z$ (vi) $-\ln x$

(vii) $2\ln x - \ln y$ (viii) $3\ln x - 1$ $(\ln \mathrm{e} = 1)$

(ix) $\ln x - 1 - \ln y$ (x) $2 - \frac{1}{2}\log_{10} x$ $(\log_{10} 10^2 = 2)$

(xi) $2\log_{10} x + 3\log_{10} y - 1 - \frac{1}{2}\log_{10} z$

Yn aml gellir differu logarithmau lluosymiau a/neu gyniferyddion ffwythiannau yn eithaf hawdd os ehangir y logarithmau yn gyntaf.

Enghraifft 10.4

Darganfyddwch $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ os yw $y = \ln\left(\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(2x-3}}\right)$ $\left(x > \frac{3}{2}\right)$.

Nawr
$$y = \ln\left(\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(2x-3}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(2x-3). \quad \text{(Rheolau V, VI, VII)}$$
$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{2x-3}.$$

differu pob logarithm yn ei dro

Ymarferion 10.3

1. Ysgrifennwch y canlynol yn nhermau $\ln a$, $\ln b$, $\ln x$, $\ln y$, $\ln z$, $\log_{10} x$, $\log_{10} y$, $\log_{10} z$ lle y bo'n briodol.

(i) $\ln \frac{1}{x^4}$ (ii) $\ln xy^{\frac{3}{2}}$ (iii) $\ln x^4 y^{\frac{3}{2}}$ (iv) $\ln \sqrt[3]{x}$ (v) $\ln \frac{x^{\frac{2}{3}} y^4}{z^3}$

(vi) $\ln(\mathrm{e}a)$ (vii) $\ln \frac{1}{\mathrm{e}^2 b^2}$ (viii) $\log_{10} \sqrt{\frac{x}{y}}$ (ix) $\log_{10} x^2 \sqrt{\frac{y^3}{2}}$

(x) $\log_{10}\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}\right)$.

2. Dewiswch yr opsiynau cywir yn y canlynol.

	Opsiynau			
(i) $\ln 2 + \ln 3$	(a) $\ln 5$	(b) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	(c) $\ln 6$	(d) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$
(ii) $\ln 18 - \ln 9$	(a) $\ln 9$	(b) $\ln 2$	(c) $2\ln 2$	(d) $\frac{\ln 18}{\ln 19}$
(iii) $\ln\left(\frac{27}{5}\right)$	(a) $\frac{\ln 27}{\ln 5}$	(b) $\ln 22$	(c) $\ln 27 - \ln 5$	(d) $\ln\left(\frac{5}{27}\right)$
(iv) $\ln x + \ln y - \ln z$	(a) $\ln xyz$	(b) $\ln(x+y-z)$	(c) $\ln\frac{z}{xy}$	(d) $\ln\frac{xy}{z}$
(v) $\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{3}\ln y + \ln e^2$	(a) $\ln\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}$	(b) $\ln\sqrt{x} - \ln\sqrt[3]{y} + 2$	(c) $\ln\frac{2x}{\sqrt[3]{y}}$	(d) $\ln\frac{e^2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
(vi) $2 + 3\log_{10} x$	(a) $\log_{10}\frac{2}{3}x$	(b) $\log_{10} 6x$	(c) $\log_{10}\frac{x^3}{2}$	(d) $\log_{10} 100x^3$

3. Drwy symleiddio'r canlynol gan ddefnyddio rheolau V – VI yn gyntaf, darganfyddwch werthoedd x.

(i) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 2$ (ii) $\ln(x+1) - \ln(x^2-1) = 1$

(iii) $\ln x^3 = 2 + \ln x$

4. O wybod bod $\ln x + 2\ln y - \ln 5 = 0$, mynegwch y yn nhermau x yn y ffurf $y = Ax^n$, gan roi gwerthoedd A ac n.

5. Mynegwch $\ln y = 2\ln(x+1) - 3\ln x + \ln(x^2+1) + 2$ yn y ffurf $y = f(x)$.

6. Drwy ehangu'r log a roddir ymhob achos yn gyntaf, differwch y canlynol. Nid oes rhaid i chi symleiddio eich atebion.

(i) $\ln 6x^2$ (ii) $\ln(x+1)(x+2)$ (iii) $\ln\left(\frac{(2x+1)(x+2)^4}{(3x-5)}\right)$

(iv) $\ln((x-2)^3(2x+5)^2)$ (v) $\ln\frac{(x+1)^3(3x-2)^4}{(2x+1)^2}$

7. Os yw $y = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$, dangoswch fod $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2-1}$.

Pennod 11

Datrys Hafaliadau

Mae hafaliadau llinol fel
$$3x + 5 = 7 - x$$
a hafaliadau cwadratig fel
$$x^2 + 5x + 3 = 0$$
yn enghreifftiau syml o hafaliadau polynomaidd. Cawsom olwg ar sut i ddatrys hafaliadau o'r fath yn **P1**.
Mae'r bennod hon yn cyflwyno dulliau o ddatrys hafaliadau sy'n cynnwys polynomialau o radd uwch. Gellir defnyddio un o'r dulliau a gyflwynir hefyd ar gyfer datrys hafaliadau nad ydynt yn cynnwys polynomialau, er enghraifft hafaliadau fel
$$e^{-x} = \ln x.$$
Dangosir hefyd y gellir defnyddio rheolau logarithmau i ddatrys rhai mathau arbennig o hafaliadau.

11.1 Hafaliadau polynomaidd: defnyddio'r theorem ffactorio

Gellir datrys hafaliadau cwadratig drwy ffactorio neu drwy ddefnyddio'r fformiwla gwadratig. Nid oes fformiwla ar gael ar gyfer datrys hafaliadau sy'n cynnwys polynomialau o radd uwch. Sut bynnag, weithiau bydd y polynomial yn ffactorio.

Enghraifft 11.1
Datryswch yr hafaliad
$$2x^3 + x^2 - 15x - 18 = 0.$$

Gelwir hafaliad o'r fath yn hafaliad ciwbig.

Dyma hafaliad sy'n cynnwys polynomial o radd tri.
Gadewch i $\quad f(x) = 2x^3 + x^2 - 15x - 18.$
Rydym yn ffactorio'r mynegiad drwy ddefnyddio'r theorem ffactorio. (Gweler **Pennod 2**.)
Nawr mae
$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + 1 - 15 - 18 &&= -30 \neq 0. \\ f(-1) &= -2 + 1 + 15 - 18 &&= -4 \neq 0. \\ f(2) &= 16 + 4 - 30 - 18 &&= -28 \neq 0. \\ f(-2) &= -16 + 4 + 30 - 18 &&= 0. \end{aligned}$$
Yna, gan fod $f(-2) = 0$, mae $x + 2$ yn ffactor o'r polynomial.

rhannu hir neu gymharu termau, Pennod 2

Rydym yn rhannu â'r ffactor er mwyn cael
$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 - 15x - 18 &= (x + 2)(2x^2 - 3x - 9) \\ &= (x + 2)(x - 3)(2x + 3), \end{aligned}$$

P1

drwy ffactorio'r mynegiad cwadratig.

Mae'r hafaliad yn newid i fod yn

$$(x+2)(x-3)(2x+3) = 0$$

fel bod $x = -2$ neu 3 neu $-\dfrac{3}{2}$.

Y gwreiddiau felly yw $-2, 3, -\dfrac{1}{2}$. x_n

Os yw $abc = 0$, yna mae $a = 0$, neu $b = 0$, neu $c = 0$.

Enghraifft 11.2
Datryswch yr hafaliad

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 8x - 6 = 0.$$

Gadewch i $f(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 8x - 6$.
Nawr mae $f(1) = 1 + 6 + 7 - 8 - 6 = 0$
felly mae $(x - 1)$ yn ffactor o'r polynomial.

Gan rannu â'r ffactor, cawn

$$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 8x - 6 = (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 6).$$

Gwiriwch hwn.

Yna defnyddir y theorem ffactorio gyda

$$g(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 6.$$

Pan fyddwch yn ceisio ffactorio $g(x)$ dylech wirio'r posibilrwydd fod $x - 1$ hefyd yn ffactor o $g(x)$.

Trwy waith tebyg i'r hyn a wnaed yn yr enghraifft flaenorol, dangosir bod

$$\begin{aligned} g(-3) &= (-3)^3 + 7(-3)^2 + 14(-3) + 6 \\ &= -27 + 63 - 42 + 6 = 0. \end{aligned}$$

Felly mae $(x + 3)$ yn ffactor o $x^3 + 7x^2 + 14x + 6$.
Yna mae $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 8x - 6 = (x-1)(x+3)(x^2 + 4x + 2)$,
ar ôl rhannu â'r ffactorau.

Nid yw'r mynegiad $x^2 + 4x + 2$ yn cynnwys unrhyw ffactorau amlwg.
Yna mae $x - 1 = 0$, h.y. $x = 1$
neu $x + 3 = 0$, h.y. $x = -3$
neu $x^2 + 4x + 2 = 0$,
sy'n rhoi $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \dfrac{9x_n^2 + 13}{x_n^2 + 24} = -2 \pm \sqrt{2}$.
Y gwreiddiau felly yw $1, -3$ a $-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}$.

Peidiwch ag amcangyfrif y syrdiau oni ofynnir i chi wneud hynny.

Ymarferion 11.1

1. Datryswch yr hafaliad $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.
2. Datryswch yr hafaliad $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.
3. Darganfyddwch werth k os yw $x = -2$ yn wreiddyn i $x^3 + kx^2 + 6x - 4 = 0$.
4. Datryswch yr hafaliad $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15 = 0$.
5. O wybod bod $x = \pm 1$ yn wreiddiau i'r hafaliad
   $$x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0,$$
   darganfyddwch wreiddyn arall yr hafaliad.
6. Dangoswch mai dim ond dau wreiddyn real sydd gan yr hafaliad
   $$x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 20 = 0.$$

Pan na ellir datrys hafaliadau'n union, rydym yn darganfod gwerthoedd bras ar gyfer eu gwreiddiau. Yna darganfyddir y gwreiddiau i unrhyw lefel cywirdeb penodol. Mae rhai dulliau o ddarganfod gwerthoedd bras ar gyfer gwreiddiau'n golygu defnyddio brasamcan cychwynnol. Ystyrir dull o ddarganfod brasamcan cychwynnol yn yr adran nesaf.

11.2 Darganfod gwreiddiau $f(x) = 0$

Fel enghraifft, ystyriwn yr hafaliad

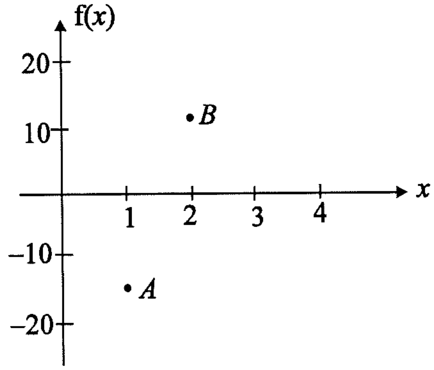
$$f(x) = 0,$$

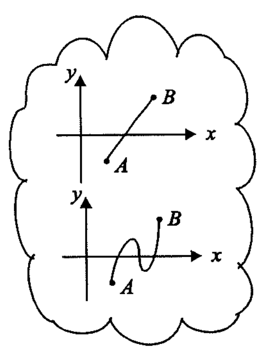
lle mae $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 20x - 5.$

Nawr mae $f(1) = 4(1)^3 + 6(1)^2 - 20(1) - 5 = -15$

a $f(2) = 4(2)^3 + 6(2)^2 - 20(2) - 5 = 11$

fel bod arwyddion f(1) a f(2) yn wahanol i'w gilydd.





Felly gyda graff $y = 4x^3 + 6x^2 - 20x - 5$, mae'r pwynt A o dan yr echelin x tra bo'r pwynt B uwchben yr echelin x.
Gan nad oes toriadau yng ngraff $y = 4x^3 + 6x^2 - 20x - 5$, h.y. mae'n llinell ddi-dor, rhaid iddo groesi'r echelin x o leiaf unwaith rhwng $x = 1$ a $x = 2$. Felly ceir gwerth x rhwng $x = 1$ a $x = 2$ lle mae $4x^3 + 6x^2 - 20x - 5 = 0$.
Mae'r enghraifft hon yn achos arbennig o sefyllfa fwy cyffredinol.
Os yw f yn unrhyw ffwythiant di-dor (fel bod graff f yn llinell ddi-dor) **ac os yw arwyddion f(a) a f(b) yn wahanol i'w gilydd, ceir o leiaf un gwreiddyn i $f(x) = 0$ yn (a, b).**
Mae'r datganiad hwn yn darparu dull o ddarganfod gwreiddiau hafaliadau o'r math $f(x) = 0$, lle mae f yn ffwythiant di-dor.

Enghraifft 11.3

Trwy ddarganfod gwerth $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 3$ ar $x = 0, 1, 2, \ldots$ dangoswch fod gan $f(x) = 0$ o leiaf un gwreiddyn positif. Darganfyddwch wreiddyn yn gywir i un lle degol.

	x	f(x)
	0	−3
	1	−3
	2	−5
Gwreiddyn yma →	- - - -	- - - -
	3	9

Nid gwerthoedd f(x) sy'n bwysig: arwyddion y gwerthoedd sydd o ddiddordeb pennaf, ond darganfyddwch nhw.

Gan fod gan f(2) a f(3) arwyddion gwahanol a chan fod f yn ffwythiant di-dor, mae yna wreiddyn i $x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ rhwng $x = 2$ a $x = 3$. Er mwyn darganfod y gwreiddyn yn gywir i 1 lle degol trwy ddefnyddio'r dull hwn, gellid ystyried gwerthoedd f(2.1), f(2.2), ..., f(2.9) a chwilio am newid arwydd rhwng gwerthoedd cyfagos f(x).

	x	f(x)
	2.1	−4.8
	2.2	−4.5
	2.3	−3.9
	2.4	−3.1
	2.5	−2.1
	2.6	−0.7
Gwreiddyn yma →	- - - - - -	- - - - - -
	2.7	1.1

D.S. Dull cyfleus o gyfrifo gwerthoedd $x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 3$ yw ysgrifennu'r polynomial yn y ffurf $(((x - 3)x + 1)x + 1)x - 3$.

Gan fod f(x) yn newid arwydd rhwng $x = 2.6$ a $x = 2.7$, mae'r gwreiddyn rhwng 2.6 a 2.7. Mae'n ymddangos bod y gwreiddyn yn agosach at 2.6 na 2.7 gan fod f(2.6) = −0.7 yn agosach at 0 na f(2.7) = 1.1.

Er mwyn gwirio hyn darganfyddwn werth f ar y pwynt sydd hanner ffordd rhwng $x = 2.6$ a $x = 2.7$, h.y. pan fo $x = 2.65$. Gwelwn fod f(2.65) = 0.2.

x	**f(x)**
2.6	**−0.7**
2.65	**0.2**

Gan fod f(x) yn newid arwydd rhwng $x = 2.6$ a $x = 2.65$, mae'r gwreiddyn rhwng 2.6 a 2.65. Mae'r gwreiddyn yn agosach at 2.6 na 2.7 ac felly mae'n 2.6, i un lle degol.

Dull arall, sy'n lleihau nifer y cyfrifiadau, yw nodi bod f(x) yn newid arwydd rhwng $x = 2$ a $x = 3$, a darganfod gwerth f(x) ar ganolbwynt [2, 3], h.y. ar 2.5.

	x	f(x)
	2	−5
	2.5	−2.1
	2.6	−0.7
Gwreiddyn yma →	- - - -	- - - -
	2.7	1.1

Gan nad yw f(x) yn newid arwydd rhwng $x = 2$ a $x = 2.5$, cyfrifwn f(2.6), f(2.7), . . .

Fel o'r blaen, mae $x = 2.6$ yn wreiddyn bras a chyfrifwn f(2.65) fel o'r blaen. Yna mae $x = 2.6$ yn wreiddyn bras i un lle degol.

Mae'r dull hwn o ddarganfod gwreiddiau, trwy nodi newidiadau yn arwydd gwerthoedd y ffwythiant, yn mynd yn llafurus pan fo angen mwy o fanwl gywirdeb. Yn ffodus, ceir dulliau eraill o ddatrys hafaliadau. Mae'r dull hwn o chwilio am newid arwydd yn ddefnyddiol gan ei fod yn darparu brasamcan cychwynnol i'w ddefnyddio gyda'r dulliau mwy manwl.

Ymarferion 11.2

1. O wybod bod $x = 2$ yn wreiddyn bras o'r hafaliad
$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0,$$
darganfyddwch werth y gwreiddyn hwn yn gywir i un lle degol.

2. Trwy wneud tabl o werthoedd $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$ ar gyfer gwerthoedd cyfanrifol x rhwng -2 a 5 yn gynwysedig, darganfyddwch dri gwreiddyn
$$x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$
Darganfyddwch y gwreiddyn mwyaf yn gywir i un lle degol.

3. Darganfyddwch wreiddyn, yn gywir i un lle degol, rhwng -3 a 0, ar gyfer yr hafaliad
$$4x^3 + 6x^2 - 20x - 5 = 0.$$

4. Trwy ystyried $f(x) = x^2 - 2$ yn gyntaf, dangoswch fod $\sqrt{2}$ rhwng 1.41 ac 1.42.

11.3 Dulliau iterus

Hyd yma, datryswyd hafaliadau drwy ddefnyddio dulliau uniongyrchol, er enghraifft y dulliau ffactorio, y fformiwla gwadratig a graffiau. Defnyddir dull gwahanol wrth ddefnyddio'r dull iterus: caiff brasamcan cychwynnol o'r gwreiddyn ei wella nes bod gennym ateb i'r cywirdeb angenrheidiol.

Mae'r dull a ddefnyddir yma yn dibynnu'n gyntaf ar ailysgrifennu hafaliad
$$f(x) = 0$$
yn y ffurf
$$x = g(x).$$

Enghraifft 11.4

O wybod fod gan yr hafaliad
$$x^3 - 9x^2 + 24x - 13 = 0$$
wreiddyn rhwng 0 ac 1, darganfyddwch y gwreiddyn hwn yn gywir i 3 lle degol.

Nodwn wrth fynd heibio, os yw
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 13$$
yna mae
$$f(0) = -3, \quad f(1) = 3.$$
Gan fod $f(x)$ yn ddi-dor a bod arwyddion $f(0)$, $f(1)$ yn wahanol, mae'n rhaid bod gwreiddyn rhwng 0 ac 1.

Adran 11.2

Yn ôl â ni i ddarganfod yr ateb hwn.

Nawr, gellir ailysgrifennu'r hafaliad
$$x^3 - 9x^2 + 24x - 13 = 0$$
fel
$$24x = -x^3 + 9x^2 + 13$$
felly mae
$$x = \frac{1}{24}(-x^3 + 9x^2 + 13). \qquad (1)$$

Mae $f(x) = 0$ wedi ei ailysgrifennu ar ffurf $x = g(x)$.

Rydym yn adio'r olddodiaid n a $n + 1$ i'r termau x yn (1) i gael
$$x_{n+1} = \frac{1}{24}\left(-x_n^3 + 9x_n^2 + 13\right) \qquad (2)$$

$n + 1$ ar yr ochr chwith, n ar yr ochr dde.

Yna os yw $n = 0$ yn (2), mae
$$x_1 = \frac{1}{24}\left(-x_0^3 + 9x_0^2 + 13\right) \qquad (3)$$
fel bod modd i ni ddarganfod gwerth am x_1 drwy amnewid gwerth am x_0.

Beth a ddefnyddiwn ar gyfer x_0? Wel, ceir gwreiddyn rhwng 0 ac 1 felly dewch i ni gymryd
$$x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5.$$

cymedr y gwerthoedd terfynol

Wrth amnewid am x_0 yn (3) cawn fod

$$x_1 \quad = \frac{1}{24}(-(0.5)^3 + 9(0.5)^2 + 13) \; = \; 0.63021.$$

Gweithiwn â 5 lle degol.

Pan fo $n = 1$ yn (2), mae

$$x_2 \quad = \frac{1}{24}\left(-x_1^3 + 9x_1^2 + 13\right) \; = \; 0.68017,$$

wrth amnewid $x_1 = 0.63021$.

Yn yr un modd, rydym yn amnewid am x_2 i ddarganfod x_3 o (2) gyda $n = 2$, h.y. o

$$x_3 \quad = \frac{1}{24}\left(-x_2^3 + 9x_2^2 + 13\right).$$

Gellir parhau â'r broses hon ar hyd y trywydd uchod gan osod y gwaith ar ffurf tabl yn y drefn a ddangosir yma.

n	x_n	x_{n+1}
0	0.5	0.63021
1	0.63021	0.68017
2	0.68017	0.70204
3	0.70204	0.71207
4	0.71207	0.71676
5	0.71676	0.71898
6	0.71898	0.72003
7	0.72003	0.72053
8	0.72053	0.72077
9	0.72077	0.72088
10	0.72088	0.72093
11	0.72093	0.72096
12	0.72096	0.72097

$$x_{n+1} = \frac{1}{24}(-x_n^2 + 9x_n^2 + 13)$$

Yr allbwn ar unrhyw gam yw'r mewnbwn i'r cam nesaf.

Yn ymarferol, nid oes rhaid defnyddio tabl fel hwn gan fod modd storio canlyniadau pob cam yn eich cyfrifiannell.

Daw'r broses i ben pan fo'r allbynnau (gwerthoedd x_{n+1}) yn cytuno i nifer penodol o leoedd degol. Yn y tabl, mae'n amlwg ar ôl $n = 7$ nad yw'r newidiadau rhwng y gwerthoedd x_{n+1} yn amharu ar y trydydd lle degol.
Ymddengys mai'r gwreiddyn yw $x = 0.721$, yn gywir i 3 lle degol.
Rydym yn gwirio mai 0.721 yw'r gwreiddyn, yn gywir i dri lle degol, fel a ganlyn.
Ymddengys fod y gwreiddyn rhwng 0.720 a 0.721.

0.7209 . . .

Dewch i ni ddarganfod gwerthoedd

$$f(x) \; = \; x^3 - 9x^2 + 24x - 13$$

pan fo $x = 0.7205$ a 0.721, gan fod y gwreiddyn yn **ymddangos** fel petai'n agosach at 0.721 na 0.720.

Yr hafaliad yw $x^3 - 9x^2 + 24x - 13 = 0$

$\underline{x}$	$\underline{f(x)}$	
0.7205	− 0.006	
← − − − − − − − − − −		← gwreiddyn
0.721	+ 0.0002	

Mae'r gwreiddyn rhwng 0.7205 a 0.721, h.y. yn agosach at 0.721 na 0.720, ac felly 0.721 ydyw, yn gywir i dri lle degol.

Un o gryfderau'r dull uchod, a elwir yn **iteriad**, yw'r ffaith y gellir ei ddefnyddio gyda hafaliadau nad ydynt yn cynnwys polynomialau.

Yn y geiriadur, y diffiniad o iteriad yw 'ailadrodd'.

Enghraifft 11.5

Mae'n hysbys fod gan $x - \sin x - 0.2 = 0$, lle mae x wedi ei fesur mewn radianau,
wreiddyn bras sy'n hafal i 1.1. Darganfyddwch y gwreiddyn hwn yn gywir i 4 lle degol.

Ailysgrifennwch yr hafaliad yn y ffurf

$$x = \sin x + 0.2$$

er mwyn dechrau'r broses iterus

$$x_{n+1} = \sin x_n + 0.2.$$

Yna gan ddefnyddio $x_0 = 1.1$, cawn

$$x_1 = \sin(1.1) + 0.2 = 1.091207,$$
$$x_2 = \sin(1.091207) + 0.2 = 1.087184.$$

Yn yr un modd, $x_3 = 1.085321$, $x_4 = 1.084453$,
$x_5 = 1.084048$, $x_6 = 1.083859$,
$x_7 = 1.083770$, $x_8 = 1.083728$,
$x_9 = 1.083709$, $x_{10} = 1.083700$.

Ysgrifennir y canlyniadau i 6 lle degol.

Nodwch fod x_8, x_9, x_{10} yn cytuno o fewn 4 lle degol a chredwn fod $x = 1.0837$, yn gywir i 4 lle degol. Dewch i ni wirio hyn.

Ymddengys fod y gwreiddyn rhwng 1.0837 ac 1.0838. Darganfyddwn werthoedd

$$f(x) = x - \sin x - 0.2$$

pan fo $x = 1.0837$ ac 1.08375.

$\underline{x}$	$f(x)$
1.0837	+ 0.0000043 . .
1.08375	+ 0.00003907
1.08365	− 0.000022 . .

dim gwreiddyn yma, rhowch gynnig ar 1.08365

Ceir gwreiddyn rhwng 1.08365 ac 1.0837.
Felly 1.0837 yw'r gwreiddyn, yn gywir i bedwar lle degol.

Efallai eich bod yn teimlo nad oes angen y dulliau gwirio a ddefnyddiwyd yn enghreifftiau 11.4 ac 11.5. Sut bynnag, mae tuedd i orffen proses iterus yn rhy gynnar, cyn darganfod y gwreiddyn cywir. Dylai'r drefn wirio ddileu unrhyw gamgymeriadau posibl o'r math hwnnw.

Nid oes un ffordd arbennig o ailysgrifennu hafaliad at ddibenion iteru.

Enghraifft 11.6

Yn yr enghraifft hon rhoddir ffyrdd posibl o aildrefnu'r hafaliadau a ystyriwyd yn enghreifftiau 11.4 ac 11.5.

(a) Dangoswch fod $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sin x_n + 0.2)$ yn broses iterus bosibl ar gyfer datrys yr hafaliad $x - \sin x - 0.2 = 0$.

(b) Dangoswch fod $x_{n+1} = \dfrac{9x_n^2 + 13}{x_n^2 + 24}$ yn broses iterus bosibl ar gyfer datrys yr hafaliad $x^3 - 9x^2 + 24x - 13 = 0$.

O wybod fformiwla iterus gallwn ddarganfod yr hafaliad gwaelodol drwy gael gwared â'r olddodiaid.

(a) Yr hafaliad gwaelodol yw

$$x = \frac{1}{2}(x + \sin x + 0.2)$$

felly $\quad 2x = x + \sin x + 0.2$

$\therefore \quad x - \sin x - 0.2 = 0.$

(b) Yr hafaliad gwaelodol yw

$$x = \frac{9x^2 + 13}{x^2 + 24}$$

fel bod $\quad x^3 + 24x = 9x^2 + 13$

$\therefore \quad x^3 - 9x^2 + 24x - 13 = 0.$

O wybod fod sawl ffordd o ailysgrifennu hafaliad er mwyn dod o hyd i broses iterus, pa un y dylid ei defnyddio? Mae'r ateb i'r cwestiwn hwnnw y tu hwnt i faes y cwrs hwn. Mae'n ddigon dweud nad yw pob aildrefniad yn ddefnyddiol!

Mae nifer diddiwedd mewn gwirionedd.

Enghraifft 11.7

Mae gan yr hafaliad

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 13 = 0$$

wreiddyn bras o 0.7.

Gweler Enghraifft 11.4. 0.721 yw'r gwreiddyn, yn gywir i 3 lle degol.

Mae aildrefnu'r hafaliad i gael

$$x = \frac{1}{x^2}(9x^2 - 24x + 13)$$

yn rhoi'r fformiwla iterus

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2}\left(9x_n^2 - 24x_n + 13\right).$$

Gan ddefnyddio $x_0 = 0.7$ gyda'r fformiwla hon, cawn

$x_1 = 1.244898, \quad x_2 = -1.890352$

$x_3 = 25.334009, \quad x_4 = 8.072912.$

Er bod y gwerth cychwynnol yn agos i'r gwreiddyn, mae'n amlwg nad yw gwerthoedd olynol $x_1, x_2, \ldots$ yn dangos unrhyw berthynas â'r gwreiddyn hwn. Felly nid yw'r aildrefniad arbennig hwn yn ddefnyddiol.

Ymarferion 11.3

1. Datryswch yr hafaliad $x^2 - 2x - 1 = 0$ drwy ei aildrefnu yn y ffurf $x = \dfrac{1}{x-2}$ a defnyddio $x_0 = -0.4$ i ddechrau'r iteriad. Rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

2. Dangoswch fod

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1}$$

yn fformiwla iterus sy'n deillio o ailysgrifennu'r hafaliad $x^3 - x - 1 = 0$. Defnyddiwch y fformiwla iterus hon gyda gwerth cychwynnol $x_0 = 1.3$ er mwyn darganfod gwreiddyn, yn gywir i bedwar lle degol.

3. Dangoswch fod

$$x_{n+1} = \frac{\sin x_n - x\cos x_n + 0.2}{1 - \cos x_n}$$

yn fformiwla iterus sy'n deillio o aildrefnu'r hafaliad $x - \sin x - 0.2 = 0$. Defnyddiwch y fformiwla hon, gyda gwerth cychwynnol $x_0 = 1.1$, er mwyn darganfod gwreiddyn i'r hafaliad hwn yn gywir i bedwar lle degol.

4. Dangoswch fod modd defnyddio'r fformiwla iterus

$$x_n = e^{-xn}$$

gyda gwerth cychwynnol $x_0 = 0.57$ er mwyn darganfod gwreiddyn i $xe^x = 1$ yn gywir i dri lle degol.
Dangoswch ymhellach y gellir cael y fformiwla iterus $x_{n+1} = -\ln x_n$ o'r hafaliad ond na ellir ei defnyddio gydag $x_0 = 0.57$ er mwyn darganfod y gwreiddyn.

5. Gan ystyried yn gyntaf y newid mewn arwydd yn

$$f(x) = \tan x - 2x$$

darganfyddwch werth bras i wreiddyn positif $\tan x - 2x = 0$ ar gyfer $1 < x < 2$.
Defnyddiwch y fformiwla iterus

$$x_{n+1} = \frac{x\sec^2 x_n + x_n - \tan x_n}{\sec^2 x_n - 1}$$

gydag $x_0 = 1.2$ er mwyn darganfod gwreiddyn i'r hafaliad hwn yn gywir i dri lle degol.

6. Lluniwch fraslun o'r graff

$$y = x^3 - 3x^2 - 1$$

a chasglwch mai dim ond un gwreiddyn sydd gan $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$.
Dangoswch fod y gwreiddyn hwn rhwng 3 a 4. Defnyddiwch $x_0 = 3.1$ gyda'r fformiwla

$$x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n^2}$$

i ddarganfod y gwreiddyn hwn yn gywir i 4 lle degol.

11.4 Datrys hafaliadau lle mae'r anhysbysyn yn yr indecs

Dewch i ni ystyried yr enghreifftiau canlynol.

Enghraifft 11.8

Darganfyddwch x o wybod fod

$$5^x = 8.$$

Gallwn symud yr anhysbysyn o'r indecs drwy gymryd logarithmau.

Yna mae $\ln(5^x) = \ln 8$.

felly $x \ln 5 = \ln 8$. **Rheol VII Pennod 10**

$\therefore$ $x = \dfrac{\ln 8}{\ln 5}$.

Gadewch yr ateb yn ei union ffurf os nad oes gofyn am werth bras.
Fel arall, mae $x = 1.2920$, yn gywir i bedwar lle degol, dyweder.

Enghraifft 11.9

Gan ysgrifennu $y = 3^x$ yn gyntaf, datryswch yr hafaliad

$$3^{2x} - 3^{x+2} + 20 = 0.$$

Nawr os yw $y = 3^x$, yna mae $3^{2x} = y^2$
ac mae $3^{x+2} = 3^2.3^x = 9y$.
Drwy amnewid yn yr hafaliad gwreiddiol cawn

$$y^2 - 9y + 20 = 0.$$

neu defnyddiwch y fformiwla gwadratig

$\therefore$ $(y-5)(y-4) = 0$

fel bod $y = 5, 4$.

Yna mae $3^x = 5$ neu $3^x = 4$

ac fellymae $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$ neu $\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$.

Enghraifft 11.10

Darganfyddwch y o wybod bod

$$7 \times 2^y = 3 \times 5^{2y}$$

Gan gymryd logarithmau, cawn

$\ln(7 \times 2^y) = \ln(3 \times 5^{2y})$ **Rheol V, Pennod 10**

$\therefore$ $\ln 7 + \ln 2^y = \ln 3 + \ln 5^{2y}$

$\therefore$ $\ln 7 + y \ln 2 = \ln 3 + 2y \ln 5$ **Rheol VII, Pennod 10**

$\therefore$ $y(2\ln 5 - \ln 2) = \ln 7 - \ln 3$

fel bod $y = \dfrac{\ln 7 - \ln 3}{2\ln 5 - \ln 2} \simeq 0.3355$,

yn gywir i bedwar lle degol.

Nodwch mai union werth yr ateb yw

$$\frac{\ln 7 - \ln 3}{2\ln 5 - \ln 2} = \frac{\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)}{\ln\left(\dfrac{25}{2}\right)}.$$

Ymarferion 11.4

1. Darganfyddwch x o wybod bod $3^x = 7$.
2. O wybod bod $3^{2x+1} = 2^x$, darganfyddwch x.
3. O wybod bod $3^{y+1} = 4^{y-1}$, darganfyddwch y.
4. Gan ysgrifennu $y = 2^x$ yn gyntaf, datryswch
$$2^{2x} - 2^{x+2} - 12 = 0.$$
5. Gan ysgrifennu $5^x = a$, $3^y = b$ yn gyntaf, darganfyddwch werthoedd x ac y sy'n bodloni
$$3(5^x) - 3^y = 4,$$
$$5^{x+1} + 2(3^{y+1}) = 45.$$
6. Defnyddiwch y theorem ffactorio i ddatrys
$$2y^3 - 5y^2 - 9y + 18 = 0.$$
Darganfyddwch werth x sy'n bodloni
$$2(5^{3x}) - 5^{2x+1} - 9(5^x) + 18 = 0.$$
4. Defnyddiwch y fformiwla iterus
$$x_{n+1} = \ln x_n + 3$$
gyda gwerth cychwynnol $x_0 = 4.5$ i ddarganfod, yn gywir i dri lle degol, werth am x sy'n bodloni
$$x - \ln x - 3 = 0.$$
Darganfyddwch werth bras am y sy'n bodloni
$$3^y = y \ln 3 + 3.$$

ÔL-NODYN

Gair o rybudd

Hanfod y dull ffactorio o ddatrys hafaliadau yw ysgrifennu'r mynegiad ar ffurf lluoswm o fynegiadau mewn cromfachau.

Yna $(\quad)(\quad)(\quad) = 0.$

Gallai un o'r ffactorau hyn fod yn hafal i sero.
Yna gellid darganfod gwreiddiau'r hafaliad drwy ystyried y posibilrwydd fod pob un o'r mynegiadau yn y cromfachau yn hafal i sero. <u>Nodwch fod presenoldeb 0 ar yr ochr dde yn hanfodol.</u>

Dylai myfyrwyr <u>osgoi</u> y ddadl afresymegol ganlynol.

O wybod bod $2x^3 + x^2 - 15x - 18 = 0$
yna mae $2x^3 + x^2 - 15x = 18.$
$\therefore$ $x(2x^2 + x - 15) = 18.$

Iawn hyd yma ond nid yw'n ddefnyddiol iawn.

Felly mae $x = 18$
neu $2x^2 + x - 15 = 18.$ **X**

RHESYMEG WALLUS: os yw $ab = 18$, nid yw'n **dilyn** fod $a = 18$ neu $b = 18$.

Nodwch fod
$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ neu } b = 0$$
ond os yw $ab = c$ (gydag $c \neq 0$) **nid** yw'n dilyn fod $a = c$ neu $b = c$.

Pennod 12

Rhai Agweddau o Brofi

Yn y bennod hon, rydym yn edrych yn fras ar sut y defnyddir dulliau profi mewn mathemateg.

12.1 Yr angen i brofi

Mewn mathemateg, cawn ein temtio i ddod i'r casgliad bod tybiaeth gyffredinol yn wir, ar sail gwirio nifer o achosion arbennig.

Enghraifft 12.1

Mae rhif cysefin yn rhif sydd â dim ffactorau ar wahân iddo'i hun ac un. Felly mae 1, 2, 3, 5, 7, 11 yn rhifau cysefin ond nid yw $6 = 2 \times 3$, $9 = 3 \times 3$.

Gadewch i ni ystyried $f(n) = n^3 - 4n^2 + 7n + 1$, lle mae n yn gyfanrif positif.

Nawr mae $f(1) = 5$, $f(2) = 7$, $f(3) = 13$, $f(4) = 29$, $f(5) = 61$, i gyd yn rhifau cysefin.

Dyma felly gasgliad posibl: pan fo n yn gyfanrif, mae $n^3 - 4n^2 + 7n + 1$ yn rhif cysefin. Nodwch, er bod y dybiaeth yn wir ar gyfer n = 1, 2, 3, 4, 5, efallai nad yw'n wir ar gyfer yr holl werthoedd cyfanrifol. Yn wir, mae $f(6) = 115$ ac nid yw hwn yn gyfanrif.

Prawf cywir yw'r unig ffordd o argyhoeddi rhywun arall bod y dybiaeth yn wir. Ceir sawl dull o brofi.

Rhai enghreifftiau o brawf uniongyrchol yw deillio cyfansymiau cyfresi rhifyddol a geometrig (**P1**) a rheolau logarithmau (**Pennod 10**).

Ymdrinnir â phrawf drwy anwythiad mathemategol yng nghwrs **P4**.

Yn y bennod hon, rydym yn ystyried profi trwy wrth-ddweud a gwrthbrofi trwy ddefnyddio gwrthenghraifft.

12.2 Profi trwy wrth-ddweud

Mae profi'n ymwneud â dangos pa mor wir yw honiad. Prif hanfod profi trwy wrth-ddweud yw cymryd bod yr honiad yn anghywir a dangos bod yr honiad yn arwain at wrthddywediad. Dangosir y dull yn yr enghreifftiau canlynol.

Enghraifft 12.2

Profwch fod n yn eilrif os yw n^2 yn eilrif.

O wybod bod n^2 yn eilrif, tybiwch nad yw n yn eilrif h.y. bod n yn odrif.

Os yw n yn odrif, mae $n = 2k + 1$, lle mae k yn gyfanrif.

Yna mae
$$\begin{aligned} n^2 = (2k+1)^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 1 + 2(2k^2 + 2k), \text{ sy'n od.} \end{aligned}$$

Ond mae n^2 yn eilrif (rhoddir hyn).

Gwrthddywediad.

Mae'r dybiaeth yn anghywir ac mae n yn eilrif.

Enghraifft 12.3

Dangoswch fod $\sqrt[3]{2}$ yn anghymarebol, h.y. ni ellir ei fynegi yn y ffurf $\frac{r}{s}$, lle mae r ac s yn gyfanrifau.

Tybiwch fod $\sqrt[3]{2} = \frac{r}{s}$, (1)

lle mae r ac s yn gyfanrifau heb unrhyw ffactorau cyffredin.

Gellir canslo unrhyw ffactorau cyffredin.

Felly os yw $\sqrt[3]{2} = \frac{r}{s}$,

$$2 = \left(\frac{r}{s}\right)^3$$

a $r^3 = 2s^3$. (2)

Felly mae 2 yn rhannu r^3

neu 2 yn rhannu $r \times r \times r$.

Felly, mae 2 yn rhannu r.

$\therefore$ $r = 2k$, (3)

lle mae k yn gyfanrif.

Mae amnewid o (3) i (2) yn rhoi

$$(2k)^3 = 2s^3$$

neu $s^3 = 4k^3$.

Felly mae 2 yn rhannu s^3

Yn wir, mae 4 yn rhannu s^3

neu 2 yn rhannu s × s × s.

Felly mae 2 yn rhannu s fel bod

$s = 2l$, (4)

lle mae l yn gyfanrif.

O (3) a (4), mae gan r ac s ffactor cyffredin.
Ond nid oes gan r ac s ffactor cyffredin (tybiaeth).
Gwrthddywediad.
Mae'r dybiaeth yn anghywir ac mae $\sqrt[3]{2}$ yn anghymarebol.

Enghraifft 12.4

O wybod bod $f(x)$ yn bolynomial gradd n, dangoswch na all

$$f(x) = 0$$

gael mwy nag n gwreiddyn gwahanol.

Tybiwch fod gan $f(x) = 0$ fwy na n gwreiddyn gwahanol. Yna mae gan yr hafaliad o leiaf $n + 1$ gwreiddyn:

$$a_1,\ a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_n,\ a_{n+1} \text{ (er enghraifft).}$$

Yna mae $(x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots\ (x - a_n)(x - a_{n+1})$

yn ffactor o $f(x)$, mewn geiriau eraill mae gan $f(x)$ ffactor yn y ffurf

$$x^{n+1} + (\ldots\ldots)x^n + \ldots\ldots,$$

sef polynomial gradd $n + 1$.

Felly, mae $f(x)$ yn bolynomial â gradd $n + 1$ o leiaf.

Ond n yw gradd $f(x)$ (rhoddir hyn).

Gwrthddywediad.

Mae ein tybiaeth yn anghywir ac ni all $f(x)=0$ gael mwy nag n gwreiddyn gwahanol.

Enghraifft 12.5

Defnyddiwch brawf trwy wrth-ddweud i ddangos bod $a^2+b^2 \geq 2ab$ os yw a a b yn rhifau real.

<u>Tybiwch</u> fod $a^2+b^2<2ab$.

Yna mae $a^2+b^2-2ab<0$

fel bod $(a-b)^2<0$.

Gan na all sgwâr rhif real fod yn negatif, nid yw $a-b$ yn rhif real.

Ond mae a, b yn rhifau real (rhoddir hyn) fel bod $a-b$ yn rhif real.

Gwrthddywediad.

Mae ein tybiaeth yn anghywir ac mae $a^2+b^2 \geq 2ab$.

Enghraifft 12.6

Defnyddiwch brawf trwy wrth-ddweud i ddangos bod $-1<x<3$ os yw $(x+1)(x-3)<0$.

<u>Tybiwch</u> os yw $(x+1)(x-3)<0$

yna bod $x \leq -1$ neu $x \geq 3$.

Mae yma ddau achos i'w hystyried.

<u>$x \leq -1$</u>

Gadewch i $x=-1-a$ lle mae $a \geq 0$.

Yna mae
$$\begin{aligned}(x+1)(x-3) &= (-1-a+1)(-1-a-3)\\ &= (-a)(-1-a-3)\\ &= (-a)(-a-4)\\ &= a(a+4) \geq 0.\end{aligned}$$

$a \geq 0$

Ond mae $(x+1)(x-3)<0$ (rhoddir hyn).

Gwrthddywediad.

Mae'r dybiaeth yn anghywir ac $x>-1$ (i)

<u>$x \geq 3$</u>

Gadewch i $x = 3+b$ lle mae $b \geq 0$.

Felly mae
$$\begin{aligned}(x+1)(x-3) &= (1+3+b)(3+b-3)\\ &= (4+b)b \geq 0.\end{aligned}$$

$b \geq 0$

Ond mae $(x+1)(x-3)<0$.

Gwrthddywediad.

Mae'r dybiaeth yn anghywir ac $x<3$. (ii)

Drwy gyfuno datganiadau (i) a (ii), rydym yn dod i'r casgliad

fod $-1<x<3$ os yw $(x+1)(x-3)<0$.

Enghraifft 12.7
Profwch trwy wrth-ddweud bod

$$x + \frac{4}{x} \geq 4$$

os yw x yn real a $x > 0$.

<u>Tybiwch</u> fod $\qquad x + \frac{4}{x} < 4$.

Yna drwy luosi â x a nodi bod $x > 0$, cawn

$$x^2 + 4 < 4x$$

neu $\qquad x^2 - 4x + 4 < 0$.

$\therefore \qquad (x-2)^2 < 0$.

Yna nid yw $x - 2$ yn real gan nad yw sgwâr rhif real byth yn negatif.
Ond mae x yn real (rhoddir hyn) a 2 yn real ac felly mae $x - 2$ yn real.
Gwrthddywediad.
Mae ein tybiaeth yn anghywir a

$$x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

Gellir defnyddio prawf trwy wrth-ddweud weithiau er mwyn profi bod ffwythiant yn un-i-un.

Enghraifft 12.8
Nodwch fod ffwythiant f yn un-i-un os rhoddir bod $f(a) = f(b)$, yna bod $a = b$.
Dangoswch fod y ffwythiant f a ddiffinnir gan

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ ar gyfer } x > 1$$

yn un-i-un.

<u>Tybiwch</u> nad yw f yn ffwythiant un-i-un; mewn geiriau eraill ceir a a b
fel bod $\qquad f(a) = f(b)$
a $\qquad a \neq b$.
Dan y dybiaeth, mae

$$a^2 - 2a + 3 = b^2 - 2b + 3$$

neu $\qquad a^2 - b^2 - 2a + 2b = 0$

$\therefore \qquad (a-b)(a+b) - 2(a-b) = 0$.

$\therefore \qquad (a-b)(a+b-2) = 0. \qquad (1)$

Gan fod a$\neq b$, (tybiaeth)

$$a - b \neq 0$$

a gellir canslo'r ffactor ansero $a - b$ o (1).
Felly mae $\qquad a + b - 2 = 0. \qquad (2)$
Ond o ddiffiniad parth y ffwythiant, mae

$$a > 1,$$
$$b > 1$$

ac felly mae $\qquad a + b > 2$
neu $\qquad a + b - 2 > 0. \qquad (3)$
Nawr mae (3) yn gwrth-ddweud (2).
Mae ein tybiaeth yn anghywir ac mae f yn ffwythiant un-i-un.

Ymarferion 12.1
Defnyddiwch brawf trwy wrth-ddweud i brofi'r canlynol.

1. Dangoswch fod n yn odrif os yw n^3 yn odrif.

2. Dangoswch fod n yn eilrif os yw $2n^2 + n$ yn eilrif.

3. Dangoswch fod $\sqrt{3}$ yn anghymarebol.

4. Dangoswch fod

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

os yw x yn real a $x > 0$.

5. Dangoswch fod

$$x \leq 2 \text{ neu } x \geq 5$$

os yw $(x-2)(x-5) \geq 0$.

6. Dangoswch fod

$$x^2 + 4y^2 \geq 4xy$$

os yw x ac y yn real.

7. Dangoswch na all

$$f(x) = 0$$

gael mwy na 3 gwreiddyn gwahanol os yw $f(x)$ yn giwbig.

8. Dangoswch fod y ffwythiant a ddiffinnir gan

$$f(x) = x^2 + 4x + 5 \text{ ar gyfer } x \leq -2 \text{ yn un-i-un.}$$

9. Dangoswch fod y ffwythiant a ddiffinnir gan

$$f(x) = x^2 + 6x + 9 \text{ ar gyfer } x \geq 0 \text{ yn un-i-un.}$$

12.3 Gwrthbrofi trwy ddefnyddio gwrthenghraifft

Mae llawer o dybiaethau mewn mathemateg yn cynnwys y gair 'holl'. Er mwyn dangos bod tybiaeth sy'n cynnwys y gair 'holl' yn anghywir, mae'n ddigon dangos bod y dybiaeth yn anghywir mewn <u>un</u> achos yn unig. Gelwir y dull hwn yn wrthbrofi trwy ddefnyddio gwrthenghraifft.

Enghraifft 12.9
Mae myfyriwr yn tybio bod

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 + \sin\theta_2$$

ar gyfer holl onglau θ_1, θ_2.
Defnyddiwch wrthenghraifft i ddangos bod y dybiaeth hon yn anghywir.

Nawr os yw $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$ (er enghraifft),
mae

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

ac mae

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1.$$

Felly nid yw'n wir bod

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 + \sin\theta_2$$

ar gyfer holl onglau θ_1, θ_2.

Enghraifft 12.10
Defnyddiwch wrthenghraifft i wrthbrofi'r canlynol:
os yw $f'(0)=0$ yna mae gan $f(x)$ facsimwm neu finimwm pan fo $x=0$.

Gwrthenghraifft addas fyddai

$$f(x)=x^3.$$

Felly mae $f'(0)=0$ ond ni cheir macsimwm na minimwm pan fo $x=0$ ond yn hytrach ceir pwynt ffurfdro sefydlog.

Enghraifft 12.11
Defnyddiwch wrthenghraifft i ddangos nad yw ffwythiant f a ddiffinnir gan
$f(x)=3+4x-x^2$ ar gyfer holl x yn un-i-un.

I ddangos nad yw f yn un-i-un, rhaid cael gwerthoedd ar gyfer a a b fel bod

$$f(a)=f(b)$$

gydag $a \neq b$.
Nawr mae $f(x)=3+4x-x^2=7-(x-2)^2$.
Yna byddai $a=0$, $b=4$ yn gwneud y tric,
gan fod $f(0)=7-(-2)^2=3$
ac $f(4)=7-(4-2)^2=3$.
Felly nid yw f yn un-i-un.

Ymarferion 12.2
Defnyddiwch wrthenghreifftiau i ddangos bod y datganiadau canlynol yn anghywir.

1. $\cos 2\theta = 2\cos\theta$ ar gyfer holl werthoedd θ.

2. $\ln(x+y)=\ln x+\ln y$ ar gyfer holl $x, y>0$.

3. Ar gyfer holl werthoedd real x ac y,
os yw $x>y$ yna mae $x^2>y^2$.

4. Yn yr hafaliad cwadratig
$ax^2+bx+c=0$,
os yw a, b, c yn real a b yn negatif, yna mae'r gwreiddiau'n negatif.

5. Os yw $f'(0)=0$ a $f''(0)=0$, yna mae gan $f(x)$ bwynt ffurfdro sefydlog pan fo $x=0$.

6. Ar gyfer unrhyw rifau real n, p gyda $p>0$, mae
$\ln(p^n)=(\ln p)^n$.

Papur Adolygu 1

1. Datryswch yr anhafaleddau

(a) $|\,5x - 3\,| < 7$,

(b) $(x - 3)(x - 2) > 12$.

2. Ysgrifennwch yr ehangiad binomaidd ar gyfer $(1 + x)^{10}$ mewn pwerau cynyddol o x cyn belled â'r term yn x^3.

O wybod bod

$$(1 + ax + bx^2)(1 - 2x)^{10} \equiv 1 - 23x + 242x^2 + cx^3 + \ldots,$$

(a) darganfyddwch a a b,

(b) darganfyddwch c.

3. Os diffinnir ffwythiant f gan

$$\mathrm{f}(x) = 1 - \frac{1}{2x^2 + 3}, \qquad x > 0$$

(a) darganfyddwch $\mathrm{f}'(x)$ a diddwythwch fod f yn ffwythiant cynyddol,

(b) rhowch amrediad f,

(c) lluniwch fynegiad ar gyfer $\mathrm{f}^{-1}(x)$.

4. Os yw $\ln x = 1.3614$, $\ln y = 2.1469$, $\ln z = 0.6158$ cyfrifwch y canlynol, gan ddefnyddio eich cyfrifiannell ar gyfer $+$, $\times$, $\div$ yn unig a dangoswch eich holl waith cyfrifo.

(a) $\ln(xy)$ (b) $\ln\left(\dfrac{x^2\sqrt{y}}{z^{\frac{3}{2}}}\right)$.

5. (a) Integrwch y canlynol mewn perthynas ag x.

(a) e^{3-2x} (b) $\dfrac{1}{(7x-9)}$ (c) $\dfrac{1}{(2-5x)^2}$

6. (a) Differwch $(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)$ mewn perthynas ag x.

(b) Dangoswch fod $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{e^x + x}{x+1}\right) = \dfrac{xe^x + 1}{(x+1)^2}$.

Trwy hynny cyfrifwch $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

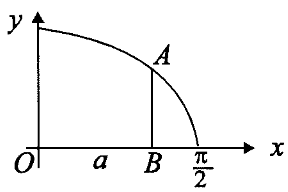
7. Dangoswch fod

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

yn cynrychioli cylch sydd â'r llinell sy'n uno dau bwynt (1, 1) a (3, 5) yn ddiamedr iddo.
Dangoswch mai hafaliad y tangiad i'r cylch yn (0, 2) yw

$$y + 2x = 2.$$

8. A yw'r pwynt (a, cos a) ar y gromlin $y = \cos x$ ac mae AB yn berpendicwlar i Ox fel a ddangosir.



Mae arwynebedd triongl AOB chwarter cymaint â'r arwynebedd o dan y gromlin rhwng llinellau $x = 0$, $x = a$ a'r echelin x.

(a) Dangoswch fod $a = \frac{1}{2}\tan a$.

(b) Dangoswch fod gan yr hafaliad wreiddyn rhwng $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{5\pi}{12}$.

(c) Defnyddiwch y broses iterus

$$a_{n+1} = \tan^{-1}(2a_n)$$

gydag $a_0 = 1.16$ i ddarganfod gwerth a yn gywir i dri lle degol.

9. Profwch trwy wrthddweud na all yr hafaliad

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

lle mae a_1, a_2, a_3, a_4 yn gysonion, gael mwy na phedwar gwreiddyn gwahanol.

Papur Adolygu 2

1. O wybod bod $x + 1$ a $x - 2$ yn ffactorau o

$$x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + 6,$$

darganfyddwch holl ffactorau'r mynegiad.

2. Ysgrifennwch ehangiad binomaidd $(1 + 2x)^4$.
Datryswch yr hafaliad

$$(1 + 2x)^4 + (1 - 2x)^4 - 34 = 0.$$

3. (a) Defnyddiwch wrthenghraifft i ddangos nad yw'r ffwythiant f a ddiffinnir gan

$$f(x) = x^2 + 6x + 11 \quad \text{ar gyfer holl } x$$

yn ffwythiant un-i-un.

(b) Defnyddiwch brawf trwy wrth-ddweud i ddangos bod y ffwythiant g a ddiffinnir gan

$$g(x) = x^2 + 6x + 11 \text{ ar gyfer } x > -3$$

yn ffwythiant un-i-un.

4. Darganfyddwch x yn yr achosion canlynol.

(a) $5^{2x} = 3(2^x)$, yn gywir i bedwar lle degol. (b) $4^{2x+1} + 16 = 65 \times 4^x$.

5. (a) O wybod bod $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{x^2 + a}$, darganfyddwch $f'(x)$.
O wybod bod $f'(1) = 1$, darganfyddwch werth a.

(b) Differwch y canlynol mewn perthynas ag x.
(i) $\ln(e^x + x)$ (ii) $x^2(1 + x)^{12}$ (iii) $\sin 4x$

6. Integrwch y canlynol mewn perthynas ag x.

(a) $\displaystyle\int \frac{3}{4x+5}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sin(3x+5)\,dx$

7. Mae gan gylch hafaliad

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0.$$

(a) Darganfyddwch gyfesurynnau canol y cylch.

(b) Darganfyddwch radiws y cylch.

(c) Mae'r llinell $y = 2x + 5$ yn croestorri'r cylch ym mhwyntiau A a B. O yw canol y cylch. Dangoswch fod BO yn berpendicwlar i AO a darganfyddwch arwynebedd triongl ABO.

8. Defnyddiwch reol y trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod gwerth bras ar gyfer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$ gan roi eich ateb yn gywir i dri lle degol.

Papur Adolygu 3

1. (a) Ffactoriwch $5x^3 - 4x^2 - 11x - 2$.

(b) Darganfyddwch y os yw $5^{3y+1} - 4 \times 5^{2y} - 11 \times 5^{y} - 2 = 0$.

2. Diffinnir ffwythiannau f ac g gan

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \qquad (x > 3)$$

a $$\mathrm{g}(x) = 3x^2 - 3 \qquad (x > 0).$$

(a) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $\mathrm{gf}(x)$.

(b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $\mathrm{g}^{-1}(x)$ a lluniwch fraslun o graffiau $\mathrm{g}(x)$ ac $\mathrm{g}^{-1}(x)$ ar yr un diagram.

3. (a) O wybod bod $p = e^{\ln p}$, lle mae p yn real ac yn bositif,

dangoswch fod $\ln(p^n) = n \ln p$.

(b) Mae myfyrwraig yn honni os yw x ac y yn real ac yn bositif, yna bod

$$\ln(xy) = (\ln x)(\ln y).$$

Defnyddiwch wrthenghraifft i ddangos bod y dybiaeth hon yn anghywir.

(c) O wybod bod

$$5 \times 2^{x+1} = 3 \times 5^{x+2},$$

dangoswch fod

$$x = \frac{\ln 2 - \ln 15}{\ln 5 - \ln 2}.$$

4. Rhoddir cylch C gan yr hafaliad

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0.$$

(a) Ysgrifennwch gyfesurynnau canol y cylch.

(b) Dangoswch fod y pellter rhwng canol y cylch a'r echelin y yn hafal i'r radiws. Beth mae'r canlyniad hwn yn ei nodi ynghylch yr echelin y a'r cylch?

5. (a) Differwch $\dfrac{e^{2x}}{3x-5}$ mewn perthynas ag x.

(b) Differwch $x^2 \ln x$ mewn perthynas ag x. Trwy hynny dangoswch fod

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

6. (a) Mae cord yn cysylltu'r pwyntiau lle mae $x = 0$ a $x = \dfrac{\pi}{6}$ ar y gromlin $y = \cos 2x$.

Darganfyddwch werthoedd x yn yr amrediad rhwng 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ ar y pwyntiau lle mae'r tangiadau'n baralel i'r cord.

(b) Dangoswch fod $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 3x - \sin 5x) dx = \frac{\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15}$, o wybod bod $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Dangoswch fod gan yr hafaliad

$$x = 2\sin x$$

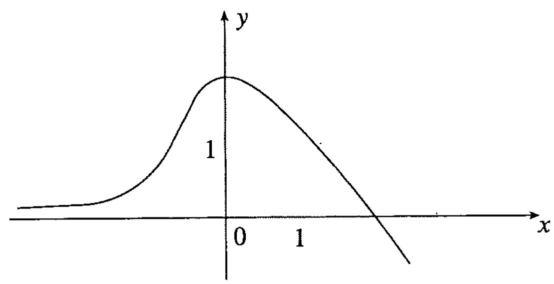
wreiddyn rhwng $\frac{\pi}{2}$ a π.

Defnyddiwch y fformiwla iterus

$$x_{n+1} = \frac{2(-x_n \cos x_n + \sin x_n)}{1 - 2\cos x_n}$$

gyda gwerth cychwynnol $x_0 = 2$ i ddarganfod y gwreiddyn yn gywir i ddau le degol.

8.



Mae'r braslun yn dangos graff $y = f(x)$. Mae'r gromlin yn mynd drwy'r pwynt (1, 0) a cheir pwynt macsimwm ar (0, 1). Brasluniwch y canlynol ar ddiagramau ar wahân:

(a) $y = f(x) + 1$

(b) $y = f(x+1)$

(c) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Papur Adolygu 4

1. Ysgrifennwch yr ehangiad binomaidd ar gyfer $(a + b)^4$.
Darganfyddwch y term sy'n annibynnol o x yn yr ehangiad binomaidd o
$\left(3x - \frac{2}{x}\right)^4$.

2. Profwch, trwy wrth-ddweud, os yw
$$x^2 - 6x + 8 < 0$$
yna bod $2 < x < 4$.

3. Os yw
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$
gyda pharth $x \geq 1$,

(a) darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f^{-1}x$,

(b) nodwch barth ac amrediad f^{-1},

(c) esboniwch pam na ellir ffurfio ffwythiant ff .

4. Datryswch yr hafaliadau canlynol:

(a) $3^x = e^{2x+1}$

(b) $3\ln 2x = 1 + \ln x$.

5. Mae'r hafaliad
$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$$
yn cynrychioli cylch C.
Mae'r llinell syth gyda hafaliad $x + y = 4$ yn croestorri C ym mhwyntiau A a B.

(a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a B.

(b) Os y pwynt O yw canol y cylch C, darganfyddwch arwynebedd triongl AOB.

6. Differwch y canlynol mewn perthynas ag x.

(a) $\dfrac{e^x + 1}{e^x + 2}$ (b) $\ln(\sin x)$ (c) $x^2(1 + x^3)^{20}$

7. (a) Integrwch y canlynol mewn perthynas ag x.

(i) $\dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{e^x}$ (ii) $\dfrac{1}{3x + 2} + \dfrac{2}{(4x + 7)^2}$

(b) Darganfyddwch yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = \sin 2x$, yr echelin x a'r llinellau $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

8. Defnyddiwch reol y trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod gwerth bras ar gyfer
$$\int_2^3 \sqrt{x - \frac{1}{x}}\,dx,$$ gan roi eich ateb yn gywir i ddau le degol.

Papur Adolygu 5

1. (a) Mynegwch y polynomial

$$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x - 2$$

fel lluoswm o ddau ffactor llinol ac un ffactor cwadratig.

(b) Defnyddiwch ganlyniad (a) i ddangos mai dim ond un gwerth θ yn yr amrediad rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$2 \sin^4 \theta - 3 \sin^3 \theta - 2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 2 = 0.$$

2. Brasluniwch graffiau (a) $y = \ln x$, (b) $y = \ln(2x)$ (c) $y = 2\ln x + 3$,
gan ddangos y pwyntiau (i) lle mae $y = 0$,
(ii) lle mae $x = \mathrm{e}$.

3. Diffinnir ffwythiannau f ac g gan

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2}{x-1}, \quad x \neq 1$$

$$\mathrm{g}(x) = x^2 + 2 \quad \text{ar gyfer holl } x.$$

(a) Darganfyddwch werthoedd x sy'n bodloni

$$\mathrm{f}(x) = x.$$

(b) Nodwch amrediad g.

(c) Darganfyddwch $\mathrm{fg}(x)$ a nodwch amrediad fg.

(d) Nodwch a yw gwrthdro g yn bodoli, gan roi rheswm dros eich ateb.

4. (a) O wybod bod x ac y yn real ac yn bositif, dangoswch fod

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

(b) Datryswch yr hafaliad

$$\ln(x^2 - 10) = \ln x + 2\ln 3.$$

5. Differwch y canlynol mewn perthynas ag x, gan symleiddio eich atebion cyn belled â phosibl.

(a) $\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$ (b) $x^3 \cos 3x$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+5}}$

6. (a) Darganfyddwch $\displaystyle\int \left(\frac{1}{4x+5} + \frac{3}{(3x+2)^3} \right) \mathrm{d}x.$

(b) Cyfrifwch $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin x)\, \mathrm{d}x.$

(c) Darganfyddwch $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}} \mathrm{d}x.$

7. Brasluniwch graffiau $y = \cos 2\theta + 1$ ac $y = 4\theta$ ar gyfer $0 \leq \theta \leq \pi$ a thrwy hynny dangoswch fod gan

$$\cos 2\theta + 1 = 4\theta$$

wreiddyn rhwng 0 a $\frac{\pi}{4}$. Dangoswch hefyd fod y gwreiddyn rhwng 0.4 a 0.5.

Defnyddiwch y fformiwla iterus

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta_n)$$

gyda gwerth cychwynnol $\theta_0 = 0.4$ i ddarganfod y gwreiddyn yn gywir i dri lle degol.

8. Defnyddiwch brawf trwy wrthddweud i ddangos bod $\sqrt{5}$ yn anghymarebol.

Papur Adolygu 6

1. (a) Ysgrifennwch ehangiad binomaidd $(a+bx)^8$ cyn belled â'r term yn x^3.

(b) Yn ehangiad binomaidd $(a+bx)^8$,

(i) 64 yw cyfernod y term yn x, (ii) mae cyfernod x^2 yn hafal i gyfernod x^3.

Dangoswch fod $a = \pm\sqrt{2}$.

2. Datryswch yr anhafaleddau

(a) $|2x+3| > 5$,

(b) $3x^2 - 4x + 3 \le 2x^2 - 3x + 5$.

3. Darganfyddwch werthoedd x ac y sy'n bodloni'r hafaliadau cydamserol canlynol:

$$3 \times 5^x + 2 \times 7^y = 13,$$
$$7 \times 5^x + 3 \times 7^y = 20.$$

4. Mae'r mynegiad cwadratig

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

yn bodloni'r datganiadau canlynol:

(a) pan gaiff ei rannu ag $x - 1$, ceir gweddill o 3,

(b) pan gaiff ei rannu ag $x + 1$, ceir gweddill o 7,

(c) $f(0) = 1$.

Darganfyddwch $f(x)$.

5. Diffinnir ffwythiant f gan

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ ar gyfer } x > 1$$

(a) Nodwch amrediad f.

(b) Dangoswch fod f yn ffwythiant cynyddol.

(c) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f^{-1}(x)$ a nodwch barth ac amrediad f^{-1}.

(d) Brasluniwch graffiau f ac f^{-1} ar yr un echelinau.

6. (a) Differwch $\sin x \cos x$ mewn perthynas ag x.

(b) Differwch $xe^{2x}\mathrm{d}x$. Trwy hynny cyfrifwch

$$\int_0^1 xe^{2x}\mathrm{d}x.$$

7. Integrwch y canlynol mewn perthynas ag x.

(a) e^{4x-9} (b) $\cos(5x+7)$ (c) $\dfrac{1}{(3+2x)}$

8. (a) Defnyddiwch wrthenghraifft i ddangos bod y dybiaeth ganlynol yn anghywir:

$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \tan\theta_1 - \tan\theta_2$ ar gyfer holl werthoedd θ_1, θ_2.

(b) Defnyddiwch brawf trwy wrthddweud i ddangos bod n yn odrif os yw $4n^2 + n + 1$ yn eilrif.

ATEBION

Pennod 1

Ymarferion 1.1

(a) $12 > 9$ (b) $4 < 7$ (c) $x \geq y$ (d) $m > 0$ (e) $p \geq 0$

Ymarferion 1.2

1. (i) $x > 4$ (ii) $x > -4$ (iii) $x > \frac{4}{7}$ (iv) $x < \frac{3}{5}$

(v) $x > -12$ (vi) $x \leq \frac{5}{3}$ (vii) $x > -21$ (viii) $x \leq 14$

2. (i) $x < -5$ neu $x > -1$ (ii) $4 < x < 5$ (iii) $x \leq -7$ neu $x \geq 1$

(iv) $-12 \leq x \leq -6$ (v) $x < \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ neu $x > \frac{5+\sqrt{17}}{4}$

(vi) $\frac{8}{5} < x < 2$ (vii) $x < -\frac{8}{5}$ neu $x > 2$

(viii) $\frac{5-\sqrt{33}}{4} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{33}}{4}$

(ix) $x \leq \frac{7-\sqrt{13}}{6}$ neu $x \geq \frac{7+\sqrt{13}}{6}$ (x) $\frac{-5-\sqrt{41}}{8} \leq x \leq \frac{-5+\sqrt{41}}{8}$

(xi) $-1 < x < 2$

3. (i) $k \geq -\frac{4}{3}$ (ii) $-\sqrt{48} < k < \sqrt{48}$ (iii) $k \leq 0$ neu $k \geq 4$

(iv) $k < -\frac{17}{8}$ (v) $k \leq -\frac{11}{12}$

Ymarferion 1.3

1. (i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 24

Ymarferion 1.4

1. (i) $-16 < x < 2$ (ii) $x < -\frac{3}{2}$ neu $x > \frac{9}{2}$ (iii) $-\frac{1}{4} < x < \frac{11}{4}$

(iv) $x \leq \frac{1}{2}$ neu $x \geq \frac{5}{2}$

2. (i) $x = -3, 7$ (ii) $x = -2, 5$ (iii) $x = -4, 9$

(iv) $x = 6 \pm \sqrt{34},\ 6 \pm 2\sqrt{7}$ (v) $y = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}, \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$

Ymarferion 1.5

1. (a) $(-3, \infty)$ (b) $(-\infty, 6]$ (c) $[9, \infty)$ (d) $(-\infty, -4)$ (e) $[-3, 21)$

(f) $[9, 12)$ (g) $(-5, 20]$ (h) $(-\infty, -30] \cup [-20, \infty)$

2. (i) $(-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$ (ii) $(4, 5)$ (iii) $(-\infty, -7] \cup [1, \infty)$ (iv) $[-12, -6]$

Pennod 2
Ymarferion 2.1

1. (i) $(x+3)(x-6)+16$ (ii) $(x-5)(x^2+2x+14)+65$
   (iii) $(2x+1)(x^2-4x+5)-8$ (iv) $(6x+5)(2x^3-3x^2+6x-5)+26$
   (v) $(4x^2-3x+2)(3x^2+2x+3)+5x-13$
2. (i) x^2+4x+1 (ii) x^2-1 (iii) $x^2-2x+1=(x-1)^2$
3. $(x-5)(x-3)(x+4)$
4. $(x-2)(x-3)(x+3)(x-4)$

Ymarferion 2.2

1. (i) -4 (ii) 7 (iii) 0 (iv) -3
2. -7 **3.** $2, -1$
4. (i) $(x+1)(x-2)^2$ (ii) $(x-1)(x^2-x-1)$
   (iii) $(x-1)(x+2)(x^2-x+2)$ (iv) $(x-2)(x^2-x-3)$
5. -14 **6.** $-15, 26$
7. $0, -2$; $(x+1)^2(x-2)$ **9.** 3

Pennod 3
Ymarferion 3.1

1. (i) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
   (ii) $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
   (iii) $a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$
2. $1+6y+12y^2+8y^3$ **3.** $x^4+12x^3y+54x^2y^2+108xy^3+81y^4$
4. $1-9y+27y^2-27y^3$ **5.** (i) $17+12\sqrt{2}$ (ii) $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$ (iii) 32

Ymarferion 3.2

1. (i) 5040 (ii) 2520 **2.** 60 **3.** 720 **4.** 120
5. 120 ; 20 **6.** 722 **7.** 70 **8.** 35 **9.** $\dfrac{n!}{3!(n-3)!}$

Ymarferion 3.3

1. (i) 362880 (ii) 165765600 (iii) 53130 (iv) 15504
2. 60480 **3.** 360 ; 60 **4.** 5 **5.** 4845 ; 969 **6.** 1906884

Ymarferion 3.4

1. (i) $1+10z+40z^2+80z^3+80z^4+32z^5$
   (ii) $x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4$ (iii) $x^3+3x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}$
   (iv) $8y^3-12y^2z+6yz^2-z^3$
2. (i) $1+12x+66x^2$ (ii) $1-28y+364y^2$ (iii) $p^{16}+16p^{15}q+120p^{14}q^2$
   (iv) $1+5x+\dfrac{45x^2}{4}$ (v) $256-3072x+16128x^2$ (vi) $x^{22}+11x^{18}+55x^{14}$
3. $-\binom{20}{17}2^{17}x^{17}y^3$ neu $-149422080x^{17}y^3$ **4.** $-960x^3$ **5.** 0.8508
6. 1.083 **9.** ± 2

10. $\frac{5}{48}$ **11.** 8 **12.** $\pm\frac{1}{2}$

Pennod 4
Ymarferion 4.1

1. $2\,;\ \frac{5}{2}\,;\ -2\,;\ a+\frac{1}{a}$ **2.** Nac ydy **4.** $-1, -2$

Ymarferion 4.2

1. (a) $(-\infty, 2]$ (b) $(-\infty, -3)\cup(-3, \infty)$ (c) $(0, \infty)$
(d) $(-2,1)\cup(1, \infty)$ (e) $(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$ (f) $(-\infty, 1)\cup(1, 3)\cup(3, \infty)$
(g) $(-\infty, -3)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ (h) $[-2, 2]$ (i) $(-\infty, 9]\cup(16, \infty)$

Ymarferion 4.3

1. (a) $[-1, 4]$ (b) $(4, 8)$ (c) $(1, 3]$ (d) $(0, \infty)$ (e) $[0, 25]$
2. (a) Nac oes (b) Nac oes (c) Oes (d) Nac oes (e) Nac oes
(f) Oes (g) Oes

Ymarferion 4.4

1. (a) Un-i-un (b) Ddim un-i-un (c) Un-i-un (d) Ddim un-i-un
(e) Ddim un-i-un (f) Ddim un-i-un (g) Un-i-un (h) Ddim un-i-un

2. (a) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{4}\ ;\ [-1, 23]\ ;\ [-1, 5]$
(c) $f^{-1}(x) = -3+\sqrt{9+x}\ ;\ [-9, 27]\ ;\ [-3, 3]$
(g) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}\ ;\ (0, \infty)\ ;\ (0, \infty)$

3. (a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}\ ;\ (1, \infty)\ ;\ (0, \infty)$
(b) $f^{-1}(x) = -2+\sqrt{x-3}\ ;\ (7, \infty)\ ;\ (0, \infty)$
(c) $f^{-1}(x) = -3+\sqrt{4+x}\ ;\ (-4, \infty)\ ;\ (-3, \infty)$
(d) $f^{-1}(x) = x^2-2\ ;\ [0,\ \infty)\ ;\ [-2,\ \infty)$
(e) $f^{-1}(x) = \frac{1-2x^2}{x^2}\ ;\ (0, \infty)\ ;\ (-2, \infty)$
(f) $f^{-1}(x) = -1+\sqrt{4+x^2}\ ;\ (0,\ \infty)\ ;\ [1,\ \infty)$

4. $(-\infty, -1)\cup(-1, \infty)\ ;\ f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}\ ;\ (-\infty, 0)\cup(0, \infty)\ ;\ (-\infty, -1)\cup(-1, \infty)$

5. $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}\ ;\ (0, 1)\ ;\ (-\infty, 0)$

6. $(-\infty, -3)\cup(-3, \infty)\ ;\ (-\infty, \infty)\ ;\ f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{2-x}$

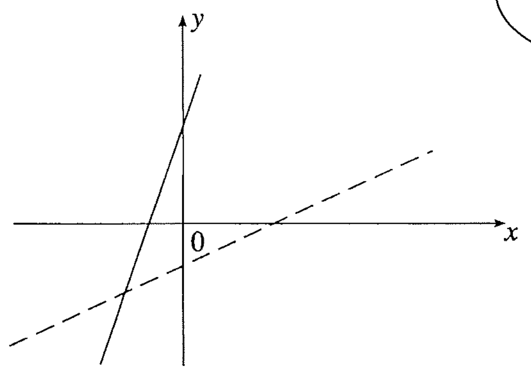
7. $[0, 2]\ ;\ [0, 2]\ ;\ f^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$

Ymarferion 4.5

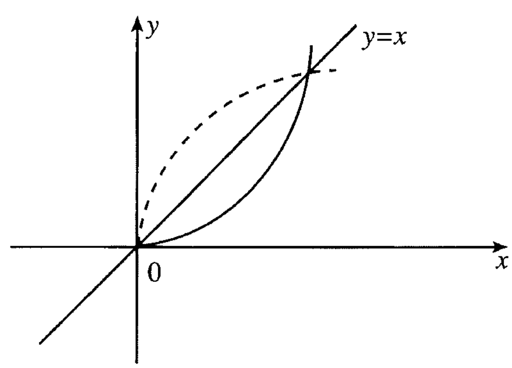
Yn y canlynol, mae'r graffiau llinell doredig yn perthyn i'r ffwythiannau gwrthdro.

1. $\mathrm{f}^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$ ar gyfer holl x.

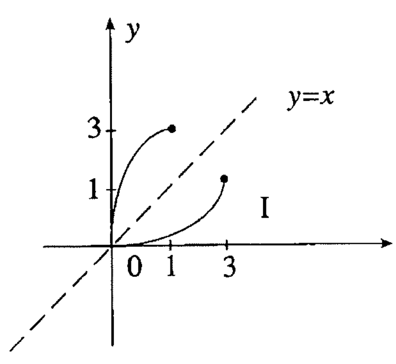
Yng nghwestiynnau 1 a 2, mae'r llinellau toredig yn nodi'r fwythiannau gwrthdro.



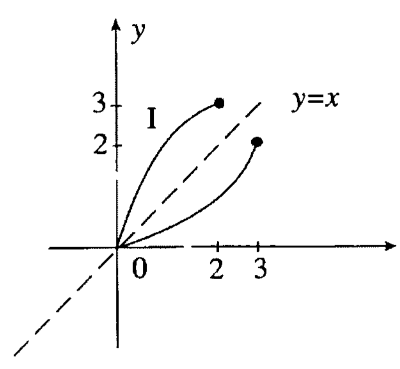
2. $\mathrm{f}^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ar gyfer $x \geq 0$.



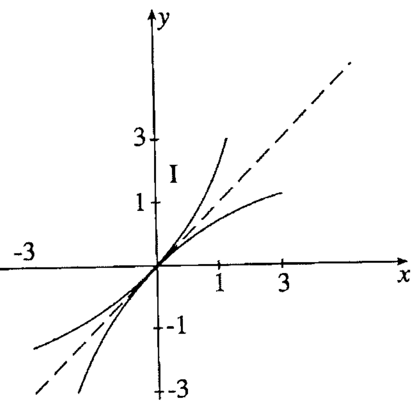
3. (a)



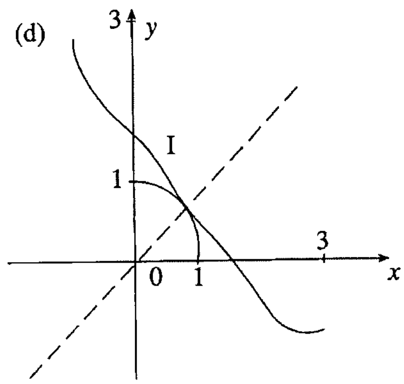
(b)



(c)



(d)



Mae I yn dynodi'r gwrthdro yn yr achosion uchod.

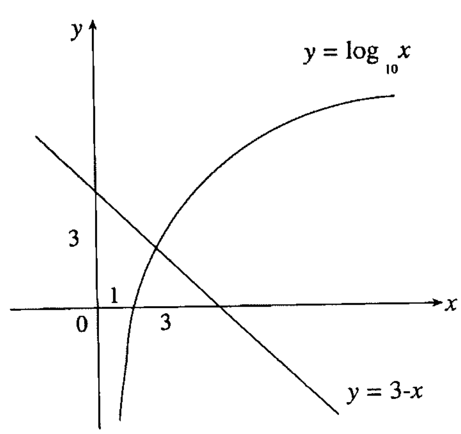
Ymarferion 4.6

1. $fg(x) = 9x^2 - 12x + 6$; $gf(x) = 3x^2 + 4$
   $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ yw'r parth a'r amrediad yn y ddau achos.
2. $fg(x) = 6x - 2$; $gf(x) = 6x - 11$
   $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ yw'r parth a'r amrediad yn y ddau achos.
3. Nid yw fg yn bodoli; $gf(x) = 2x$ gyda pharth $(0, \infty)$ ac amrediad $(0, \infty)$.
4. (a) Nid yw gf yn bodoli gan nad yw amrediad f ([0, 19]) wedi ei gynnwys ym mharth g ((4, 20)).
   (b) Mae fg yn bodoli gan fod amrediad g ((0, 4]) wedi ei gynnwys ym mharth f ([0, 4]).
   (c) Mae fh yn bodoli gan fod amrediad h $\left(\left(\frac{2}{225}, 2\right)\right)$ wedi ei gynnwys ym mharth f ([0, 4]).
   (d) Nid yw hf yn bodoli gan nad yw amrediad f ([3, 19]) wedi ei gynnwys ym mharth h ((1, 15]). Yn yr un modd, yn (e), (f), nid yw gh nac hg yn bodoli.

Pennod 5

Ymarferion 5.1

1. (i, C) (ii, D) (iii, I) (iv, F) (v, H) (vi, G) (vii, B) (viii, A)
   (ix, E) (x, M) (xi, K) (xii, L) (xiii, J)
2.



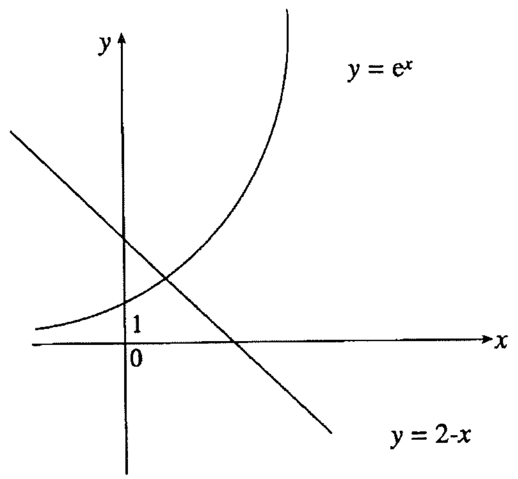
Lle mae'r graffiau'n croestorri mae

$$3 - x = \log_{10} x$$

neu $$x + \log_{10} x - 3 = 0\,.$$

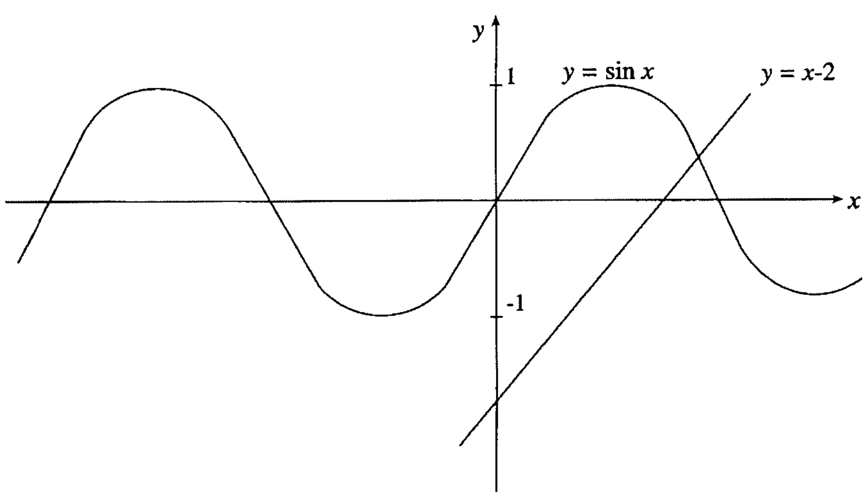
Mae'r graffiau'n croestorri mewn un pwynt. Felly, dim ond un gwreiddyn sydd gan yr hafaliad.

3.



Mae'r graffiau'n croestorri ar un gwerth o x yn unig, sy'n bositif. Felly dim ond un gwreiddyn sydd gan yr hafaliad, a hwnnw'n bositif.

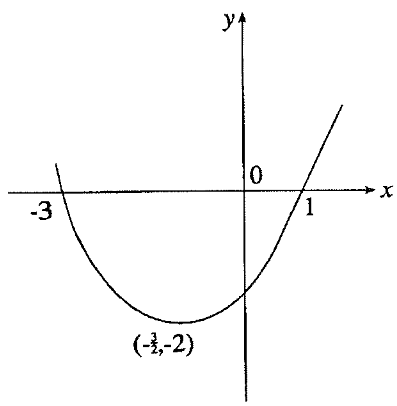
4.



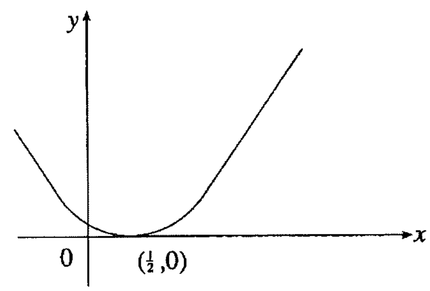
Mae'r graffiau'n croestorri mewn un pwynt ac felly dim ond un gwreiddyn sydd gan yr hafaliad.

Ymarferion 5.2 (Nid yw'r atebion hyn wedi eu lluniadu wrth raddfa.)

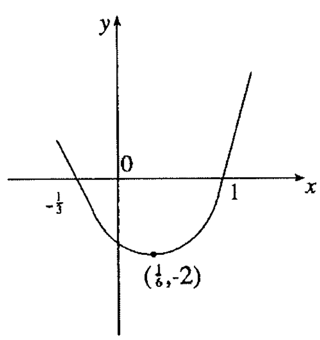
1 (a)



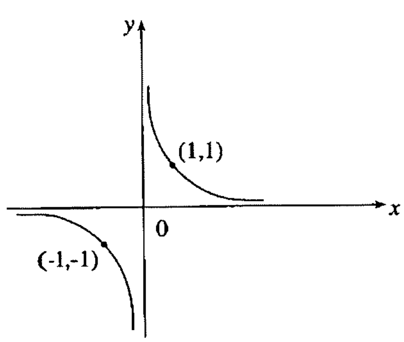
(b)

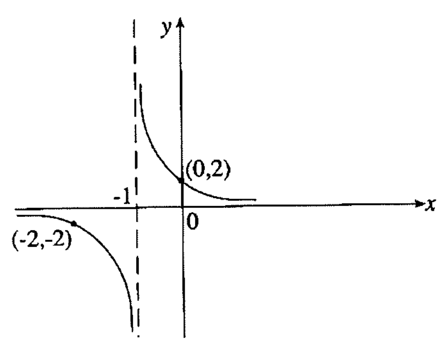


(c)



2.

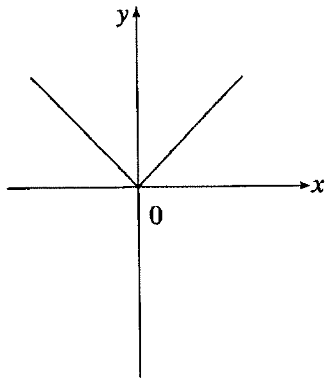




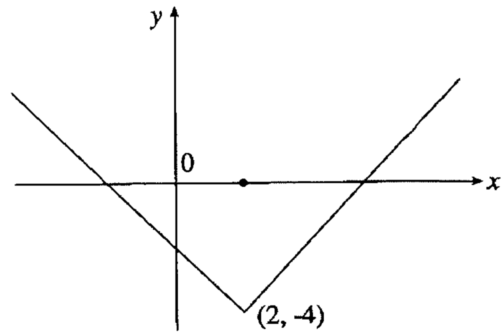
Hafaliad $y = \dfrac{1}{x}$

Hafaliad $y = \dfrac{2}{x+1}$

3.



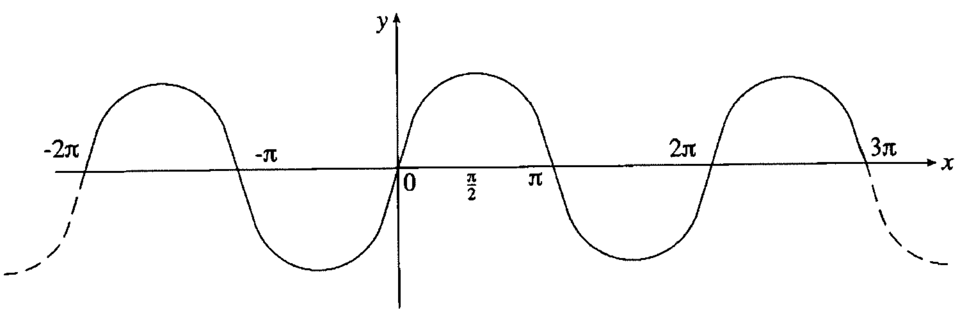
$y = |x|$



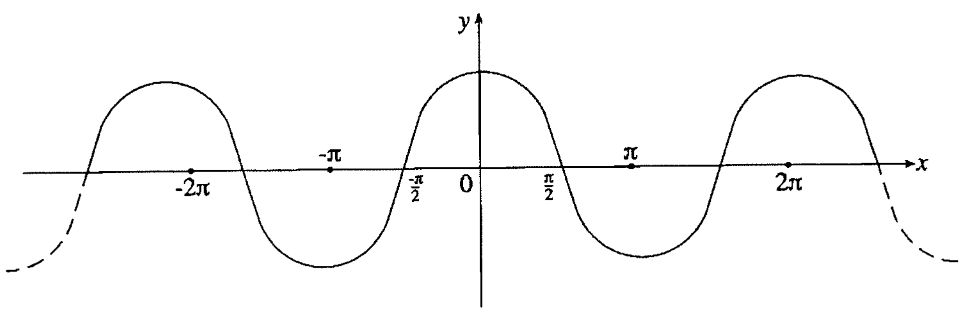
$y = |x - 2| - 4$

Trawsffurfiadau $(x, y) \to (x + 2, y)$, $\quad (x, y) \to (x, y - 4)$

4.



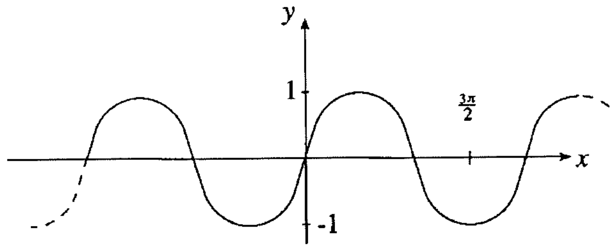
$y = \sin x$



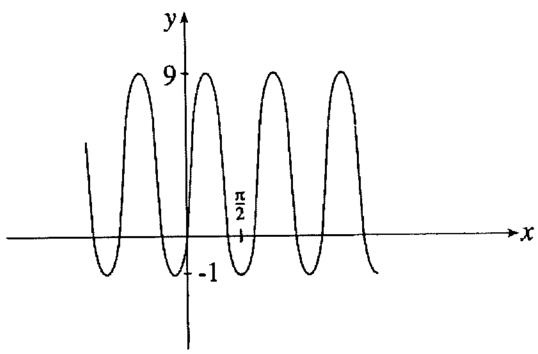
$y = \cos x$

Ceir graff $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ o $y = \sin x$ drwy drawsfudo x $\dfrac{\pi}{2}$ i'r chwith, sy'n creu graff $y = \cos x$.

5.

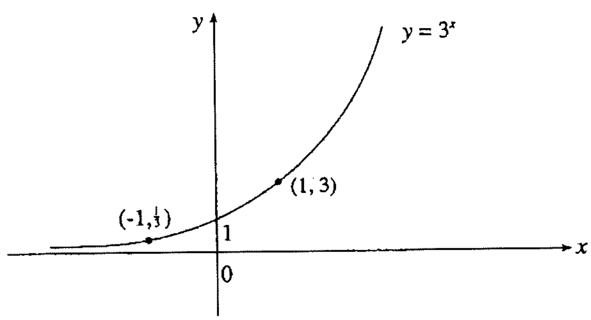


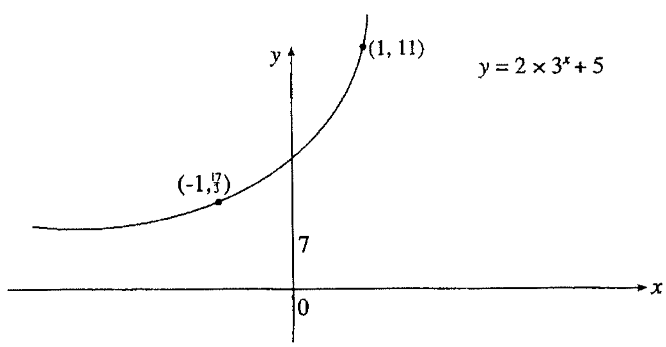
$y = \sin x$



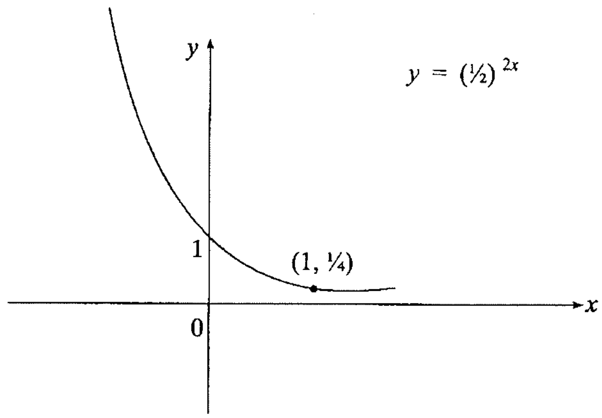
Yn $y = \sin x$, ceir y brigau a'r cafnau pan fo $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, (k yn unrhyw gyfanrif), gyda gwerthoedd yn ± 1. Gydag $y = 5\sin 3x + 4$, mae'r brigau a'r cafnau yn digwydd yn amlach pan fo $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$, gyda gwerthoedd 9 a -1.

6.

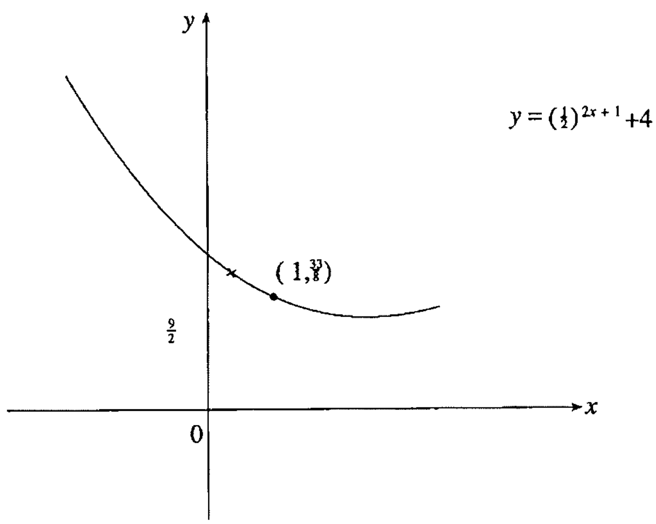




7.

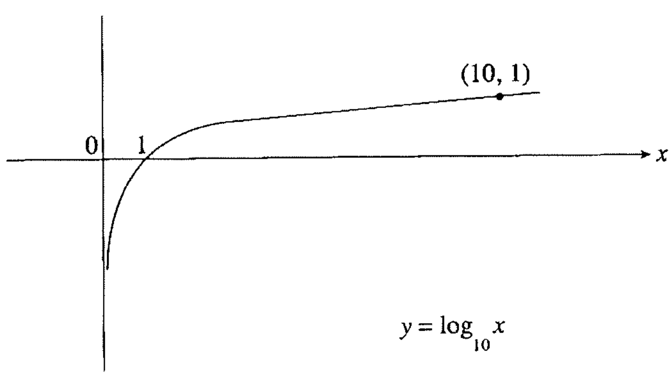


y
$y = (\tfrac{1}{2})^{2x}$
1
(1, ¼)
0
x



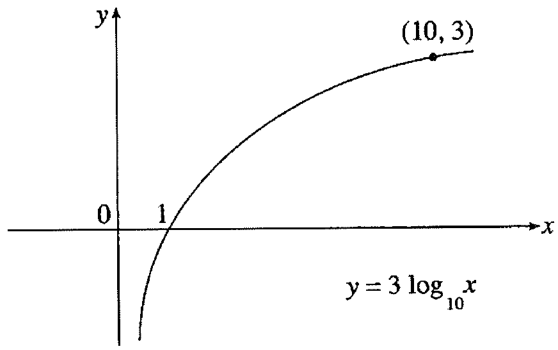
y
$y = (\tfrac{1}{2})^{2x+1} + 4$
$(1, \tfrac{33}{8})$
$\tfrac{9}{2}$
0
x

8. (i)

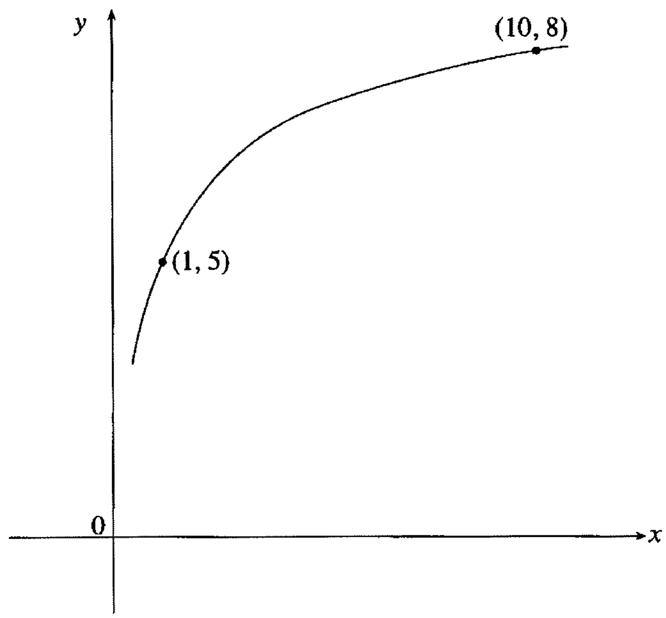


(10, 1)
0
1
x
$y = \log_{10} x$

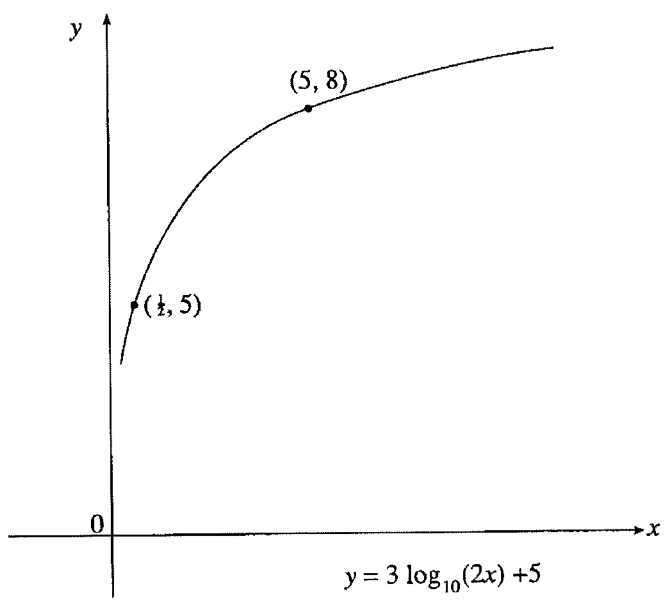
(ii)



(iii)



(iv)



Pennod 6
Ymarferion 6.1

1. $2x^2 + 2y^2 + x - 1 = 0$ **2.** $x^2 + y^2 = 25$
3. $|y+1|,\ 2y = x^2 - 1$ **4.** $x^2 + y^2 = 5$
5. $y^2 = 4ax$ **6.** $y^2 - 8x^2 - 20ax - 8a^2 = 0$

Ymarferion 6.2

1. (a) $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ (b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
(c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ (d) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$
(e) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

2. (a) $(-2, -1), 1$ (b) $(1, 2), 3$ (c) $\left(0, \frac{3}{2}\right), \frac{\sqrt{57}}{2}$
(d) $(2, 0), 2$ (e) $\left(1, \frac{7}{8}\right), \frac{\sqrt{145}}{8}$ (f) $(0, 0), \frac{3}{2}$

3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 12x - 13y + 36 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 5y + 5 = 0$
6. (a) $(-g, -f), \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ (b) $\sqrt{g^2 + f^2 + 2g\alpha + 2f\beta + \alpha^2 + \beta^2}$

Ymarferion 6.3

1. (a) $y + x - 4 = 0$ (b) $2y + 3x - 5 = 0$ (c) $y + 4x - 11 = 0$
(d) $4y + 9x - 5 = 0$
2. $\sqrt{26}$ **3.** $y - x + 1 = 0,\ y + x + 5 = 0$
4. $A(-5, 0),\ B\left(0, \frac{5}{2}\right),\ 6.25$
5. (a) $y + x = 0, y - x = 0$

Ymarferion 6.4

1. Mae C ar y cylch **2.** $2\sqrt{17}$ **3.** $(3, 0)$
4. $\pm\frac{3}{4}, y = \frac{3}{4}x, y = -\frac{3}{4}x$
5. (a) $c = 2 - m$ (b) $c = \pm 2\sqrt{1 + m^2}$
(c) $y = 2,\quad 3y + 4x - 10 = 0$
6. $4y - 3x + 10 = 0, 4y - 3x - 10 = 0$

Ymarferion 6.5

4. $\left(\frac{27}{25}, \frac{36}{25}\right)$ **5.** $(0, 0),\ 3y + x = 0$ **6.** 5

Pennod 7
Ymarferion 7.1

(i) anghyfansawdd (ii) cyfansawdd, $g(x) = x^3 + 2x + 1$; $f(x) = \sqrt{x}$
(iii) cyfansawdd, $g(x) = 5x + 7$, $f(x) = \tan x$ (iv) anghyfansawdd
(v) cyfansawdd, $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ (vi) anghyfansawdd

(vii) cyfansawdd, $g(x) = x + 3$, $f(x) = x^2 + 5$

(viii) $g(x) = 6^x$, $f(x) = x + 7$ (ix) anghyfansawdd

Ymarferion 7.2

(i) $2(2x - 3).2$ (ii) $2(3x^2 + 4).6x$ (iii) $2(x^3 + x)(3x^2 + 1)$

Ymarferion 7.3

(i) $3(x + 1)^2.1$ (ii) $3(2x - 1)^2.2$ (iii) $3(x^2 + 1)^2.2x$

Ymarferion 7.4

(i) $36(9x - 2)^3$ (ii) $-6x(3x^2 + 2)^{-2}$

(iii) $2(x^2 + 3x + 4)(2x + 3)$ (iv) $(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

(v) $3x^2(x^7 + 4x^3)^2(7x^4 + 12x^2)$ (vi) $-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(vii) $-5(x^2 - 4x + 2)^{-\frac{7}{2}}(x - 2)$ (viii) $-\dfrac{3}{2(3x+2)^{\frac{3}{2}}}$

(ix) $4\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (x) $\dfrac{1}{2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(xi) $\dfrac{1}{2}\left(3x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(3 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$ (xii) $-\dfrac{1}{2}\left(7x - \dfrac{4}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(7 + \dfrac{4}{x^2}\right)$

Ymarferion 7.5

(i) $-4x^{-5}$ (ii) $12\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{11}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (iii) $\dfrac{5}{2}\left(3x^2 + 5x - 61\right)^{\frac{3}{2}}(6x + 5)$

(iv) $-\dfrac{5}{2}\left(9x^4 - 7x^3 - \dfrac{3}{x^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\left(36x^3 - 21x^2 + \dfrac{6}{x^3}\right)$

(v) $\dfrac{-\left(63x^8 - 18x^5 + 2\right)}{\left(7x^9 - 3x^6 + 2x + 1\right)^2}$ (vi) $\dfrac{-21x\left(x^5 - 1\right)}{\left(2x^7 - 7x^2 + 1\right)^{\frac{5}{2}}}$

(vii) $\dfrac{-\left(6x + 5 + \dfrac{3}{x^4}\right)}{2\left(3x^2 + 5x - \dfrac{1}{x^3}\right)^{\frac{3}{2}}}$ (viii) $-6\left(\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 3\right)^{-7}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$

Ymarferion 7.6

1. 0.99×2.7^x **2.** 1.001×2.72^x

Ymarferion 7.7

(i) $3e^{3x}$ (ii) $2xe^{x^2}$ (iii) $3x^2e^{x^3+2}$ (iv) $e^{x+\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(v) $-e^{-x}$ (vi) $-4e^{-4x}$ (vii) $\left(3x^2 - 1\right)e^{x^3-x+1}$

Ymarferion 7.8

1. (i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{6}{6x+5}$ (iii) $\frac{2x+1}{x^2+x}$ (iv) $-\frac{2}{x}$ (v) $\frac{18x+4}{9x^2+4x+3}$

(vi) $\frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}$ (vii) $\frac{7x^6}{x^7+1}$ (viii) $-\frac{5}{2x}$ (ix) $\frac{2}{x+1}$ (x) $\frac{3(2x+1)}{x^2+x}$

(xi) 2 (xii) 1

2. (i) $2x$ (ii) $\frac{3}{x}(\ln x)^2$ (iii) $3x^2$ (iv) $\frac{3}{x}e^{3\ln x}$ sy'n hafal i $3x^2$.

3. $\frac{3}{x}, \frac{4}{x}, \frac{7}{x}$ **6.** x

Ymarferion 7.9

(i) $\frac{1}{x}+e^x$ (ii) $\frac{2x}{x^2+1}+2x$ (iii) $3e^{3x}+4x^3$ (iv) $\frac{2x+1}{x^2+x}+3e^{3x-7}$

(v) $\frac{e^x+1}{e^x+x}$ (vi) $\frac{2xe^{x^2}+1}{e^{x^2}+x}$ (vii) $\frac{6x}{3x^2+2}+2(x-5)$ (viii) $\frac{e^x-\frac{1}{x^2}}{e^x+\frac{1}{x}+2}$

(ix) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (x) $e^{3\ln x+x^2}\left(\frac{3}{x}+2x\right)\left(\text{or } x^3e^{x^2}\left(\frac{3}{x}+2x\right)\right)$

(xi) $4(e^x-x+2)^3(e^x-1)$

Ymarferion 7.10

(i) $\frac{2}{(x+1)^2}$ (ii) $\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ (iii) $\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$ (iv) $\frac{-30}{(5+3x)^2}$

(v) $\frac{-1}{(x+1)^2}$ (vi) $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ (vii) $\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}$

(viii) $\frac{2(x^2+2x-3)}{(x^2+3)^2}=\frac{2(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}$ (ix) $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

Ymarferion 7.11

1. (i) $3x^2-6x+1-\frac{1}{x^2}$ (ii) $1+\ln x$ (iii) $\frac{8x^3}{(x^4+1)^2}$ (iv) $30x(x^2+1)^{14}$

(v) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ (vi) $-4e^{-4x}$ (vii) $(\ln x)^2+2\ln x$ (viii) $\frac{-1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

(ix) $e^x(1+\ln(e^x+1))$ (x) $\frac{e^{-x}-e^x}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$ (xi) $1-2x$

(xii) $(1-x)^9(1-11x)$ (xiii) $1-\frac{1}{x^2}$ (xiv) $1+\ln x+\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

(xv) $\frac{x^2(1-2\ln x)+1}{x(x^2+1)^2}$

2. $\frac{1}{2}$ **4.** $3e^2$ **5.** $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ macsimwm ; $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ minimwm

6. (1, 0) macsimwm; (3, 4) minimwm

7. (0, 0) minimwm; (2, $4e^{-2}$) macsimwm

9. (i) $2^x \ln 2$ (ii) $3^x(1 + x \ln 3)$ (iii) $\dfrac{5^x(x\ln 5 - 1)}{x^2}$

(iv) $3^x\left[\dfrac{3}{3x+1} + \ln 3 \ln(3x+1)\right]$ (v) $3^x e^x(1 + \ln 3)$

Pennod 8
Ymarferion 8.2

(i) $3 \cos x$ (ii) $-3 \sin 3x$ (iii) $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ (iv) $\dfrac{1}{4}\sec^2\left(\dfrac{x}{4}\right)$

(v) $\dfrac{3}{4}\sec\left(\dfrac{3x}{4}\right)\tan\left(\dfrac{3x}{4}\right)$ (vi) $-2 \operatorname{cosec} 2x \cot 2x$

(vii) $3(\cos 3x - \sin 3x)$ (viii) $\sec x(\tan x + \sec x)$

(ix) $-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ (x) $\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\cos x - x^{\frac{1}{3}}\sin x$

(xi) $2x(1 - x)\sin x + (x^2 + 4x + 1)\cos x$

(xii) $-\dfrac{6}{x^4} + x(5\cos x - \sec^2 x) + 5\sin x - \tan x$

(xiii) $-6x\cos^2(x^2)\sin(x^2)$ (xiv) $\dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

(xv) $2x(\cos 2x - x\sin 2x)$ (xvi) $\sqrt{\sin x} + \dfrac{x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

(xvii) 0 (xviii) $\dfrac{-(2x+3)\sin x - 2\cos x}{(2x+3)^2}$ (xix) $\dfrac{e^{3x}(3\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$

(xx) $\dfrac{-4x\sin 2x - \cos 2x}{2x^{\frac{3}{2}}}$ (xxi) $\dfrac{1 + \cos^2 x}{2\cos^{\frac{3}{2}} x}$ (xxii) $-\tan x$

(xxiii) $-\operatorname{cosec} x$ (xxiv) $\dfrac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 + \sin^2 x}}$

Ymarferion 8.3

1. (i) Gwerth minimwm $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{7\pi}{12} \approx -2.70$

Gwerth macsimwm $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{11\pi}{12} = -2.01$

(ii) Gwerth minimwm -2, gwerth macsimwm 2

(iii) Gwerth minimwm ≈ -127.6, gwerth macsimwm ≈ 5.51

(iv) Gwerth minimwm $-\dfrac{3}{4}\sqrt{3} \approx -1.299$, gwerth macsimwm ≈ 1.299

(v) Gwerth minimwm 3, gwerth macsimwm 11

2. $13^{\frac{3}{2}}$ neu 46.87 yn fras **4.** $\pm 54.7°$ yn fras

5. Gwerth macsimwm 1, gwerth minimwm $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$

Pennod 9
Ymarferion 9.1

(i) $\frac{x^7}{7}$ (ii) $\frac{3}{4}x^{4/3}$ (iii) $-\frac{4}{3x^3}$ (iv) $\frac{2}{3}x^{3/2}$

(v) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}$ (vi) $\frac{y^5}{5}+2y-\frac{1}{3y^3}$

Ymarferion 9.2

1. (i) $\frac{(x+1)^3}{3}$ (ii) $\frac{(2x-1)^4}{8}$ (iii) $\frac{(3x+7)^5}{15}$ (iv) $\frac{-(7x-6)^{-5}}{35}$

(v) $\frac{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{9}$ (vi) $\frac{2(9x-8)^{\frac{1}{2}}}{9}$ (vii) $\frac{-1}{(2x+3)^{\frac{1}{2}}}$

(viii) $2\sqrt{1+x}$ (ix) $-\frac{(3-2x)^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{(3-2x)^{\frac{3}{2}}}{3}$ (x) $\frac{(lx+m)^{s+1}}{(s+1)l}$

2. (i) a (iii).

Ymarferion 9.3

(i) $2\ln|x|$ (ii) $\frac{1}{3}\ln|x|$ (iii) $\ln|x+1|$ (iv) $\frac{1}{9}\ln|9x+7|$

(v) $-\ln|1-x|$ (vi) $-\ln|3-x|+\frac{1}{2}\ln|3+2x|$

Ymarferion 9.4

1. (i) $\frac{1}{2}e^{2x+1}$ (ii) $-e^{-x+3}$ (iii) $-\frac{e^{-2x}}{2}$ (iv) $-\frac{e^{5-3x}}{3}$ (v) $-\frac{e^{-4x}}{4}$

(vi) $\frac{e^{3x}}{3}-\frac{e^{-3x}}{3}$ (vii) $\frac{2}{5}e^{\frac{5x}{2}}$ (viii) $\frac{2}{5}e^{5x}+3e^{-2x}$

2. (i), (ii), (iii), (vi)

Ymarferion 9.5

1. (i) $-\cos(x+2)$ (ii) $\frac{1}{5}\sin 5x$ (iii) $\frac{1}{5}\cos(9-5x)$

(iv) $\frac{1}{4}\sin(4x-7)+\frac{3}{2}\cos(2x+5)$ (v) $\frac{2}{7}\sin(7x+1)-\frac{5}{3}\cos 3x$

2. (i), (vi).

Ymarferion 9.6

(i) $-\frac{1}{x}$ (ii) $\ln|x|$ (iii) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}$ (iv) $\frac{x^2}{2}+3x$ (v) $\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}$

(vi) $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{4}$ (vii) $\frac{1}{10}\ln|10x-9|$ (viii) e^{x+3} (ix) $-\frac{e^{5-9x}}{9}$

(x) $\frac{(3x+2)^{11}}{33}$ (xi) $\frac{-1}{4(2x+9)^2}$ (xii) $2x+6\ln|x|-\frac{3}{2x^2}$

(xiii) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \ln|x|$ (xiv) $\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 3\ln|x| - \frac{1}{2x^2}$ (xv) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

(xvi) $\frac{(a+bt)^3}{3b}$ (xvii) $-\sqrt{3-2y}$ (xviii) $y^2 - \frac{5y^4}{4}$

(xix) $\ln|2+3y|$ (xx) $-\frac{1}{x} + \frac{4}{3x^3}$ (xxi) $-\frac{2}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{3+5t}$

(xxii) $\frac{1}{2(13-5w)^2}$ (xxiii) $-\frac{1}{5}\cos 5x$ (xiv) $-\frac{3}{2}\cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right)$

(xxv) $\frac{4}{3}\sin 3y + \frac{6}{7}\cos(7y+5)$ (xxvi) $\frac{7}{2}\cos(3-2x) - 2\sin(10-x)$

Ymarferion 9.7

1. $\frac{3}{28}$ **2.** 2 **3.** 8.45, yn gywir i ddau le degol

4. (a) 2.75 (b) 4.93, y ddau'n gywir i ddau le degol

5. e – 1

Ymarferion 9.8

Rhoddir yr atebion yn gywir i dri lle degol.

1. 0.202 **2.** 1.019 **3.** 0.524, 3.143 **4.** 2.133 **5.** 3.373

Pennod 10

Ymarferion 10.1

1. (i) 1.314 (ii) 4.92 (iii) –5.61 (vi) 3.61
(v) 5.16 (vi) 1 (vii) 1

2. (i) $\ln a = x$ (ii) $\log_{10} b = y$ (iii) $\log_d c = z$
(iv) $\log_{10} 1 = 0$ (v) $\ln(7.389056) = 2$ (yn fras)
(vi) $\log_{10} 204.1738 = 2.31$ (yn fras)

Ymarferion 10.2

(i) $\frac{1}{x+1}$ (ii) $\frac{2x}{x^2+1}$ (iii) $\frac{1}{x}$ (iv) $\frac{2}{x}$

Ymarferion 10.3

1. (i) -4 ln$x$ (ii) $\ln x + \frac{3}{2}\ln y$ (iii) $4\ln x + \frac{3}{2}\ln y$ (iv) $\frac{1}{3}\ln x$

(v) $\frac{2}{3}\ln x + 4\ln y - 3\ln z$ (vi) $1 + \ln a$ (vii) $-2 - 2\ln b$

(viii) $\frac{1}{2}\log_{10} x - \frac{1}{2}\log_{10} y$ (ix) $2\log_{10} x + \frac{3}{2}\log_{10} y - \frac{1}{2}\log_{10} 2$

(x) $\log_{10} x + \frac{1}{2}\log_{10} y - \frac{1}{3}\log_{10} z$

2. (i) (c) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d)
(v) (b) (vi) (d)

3. (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{e+1}{e}$ (iii) e

4. $y=\sqrt{5}x^{-\frac{1}{2}}$ **5.** $y=\dfrac{(x+1)^2(x^2+1)\,e^{2}}{x^3}$

6. (i) $\dfrac{2}{x}$ (ii) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$ (iii) $\dfrac{2}{2x+1}+\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{3}{3x-5}$

(iv) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{2x+5}$ (v) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{12}{3x-12}-\dfrac{4}{2x+1}$

Pennod 11
Ymarferion 11.1

1. $-2,\ 2,\ 3$ **2.** $1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ **3.** 6

4. $-5,\ \dfrac{1}{2},\ 3$ **5.** -2

Ymarferion 11.2
1. 1.8 **2.** 3.7 **3.** –0.2

Ymarferion 11.3
1. – 0.414 **2.** 1.3247 **3.** 1.0837
4. 0.567 **5.** 1.166 **6.** 3.1038

Ymarferion 11.4

1. $\dfrac{\ln 7}{\ln 3}$ **2.** $-\dfrac{\ln 3}{2\ln 3-\ln 2}=-\dfrac{\ln 3}{\ln\left(\dfrac{9}{2}\right)}$

3. $\dfrac{\ln 12}{\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)}$ **4.** $\dfrac{\ln 6}{\ln 2}$ **5.** $\dfrac{\ln 3}{\ln 5}, \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

6. $3, \dfrac{3}{2}, -2;\ \dfrac{\ln 3}{\ln 5}, \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}{\ln 5}$ **7.** 4.505, 1.370

Pennod 12
Ymarferion 12.2
Gellir defnyddio nifer o wrthenghreifftiau eraill yn ogystal â'r awgrymiadau canlynol:

1. $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ **2.** $x=1, y=2$ **3.** $x=2, y=-3$

4. $x^2-2x+1=0$ **5.** mae gan $f(x)=x^4$ finimwm pan fo $x=0$

6. $p=2, n=3$

(xiii) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \ln|x|$ (xiv) $\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 3\ln|x| - \frac{1}{2x^2}$ (xv) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

(xvi) $\frac{(a+bt)^3}{3b}$ (xvii) $-\sqrt{3-2y}$ (xviii) $y^2 - \frac{5y^4}{4}$

(xix) $\ln|2+3y|$ (xx) $-\frac{1}{x} + \frac{4}{3x^3}$ (xxi) $-\frac{2}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{3+5t}$

(xxii) $\frac{1}{2(13-5w)^2}$ (xxiii) $-\frac{1}{5}\cos 5x$ (xiv) $-\frac{3}{2}\cos\left(2y - \frac{\pi}{4}\right)$

(xxv) $\frac{4}{3}\sin 3y + \frac{6}{7}\cos(7y+5)$ (xxvi) $\frac{7}{2}\cos(3-2x) - 2\sin(10-x)$

Ymarferion 9.7

1. $\frac{3}{28}$ **2.** 2 **3.** 8.45, yn gywir i ddau le degol

4. (a) 2.75 (b) 4.93, y ddau'n gywir i ddau le degol

5. e – 1

Ymarferion 9.8

Rhoddir yr atebion yn gywir i dri lle degol.

1. 0.202 **2.** 1.019 **3.** 0.524, 3.143 **4.** 2.133 **5.** 3.373

Pennod 10

Ymarferion 10.1

1. (i) 1.314 (ii) 4.92 (iii) –5.61 (vi) 3.61
(v) 5.16 (vi) 1 (vii) 1

2. (i) $\ln a = x$ (ii) $\log_{10} b = y$ (iii) $\log_d c = z$
(iv) $\log_{10} 1 = 0$ (v) $\ln(7.389056) = 2$ (yn fras)
(vi) $\log_{10} 204.1738 = 2.31$ (yn fras)

Ymarferion 10.2

(i) $\frac{1}{x+1}$ (ii) $\frac{2x}{x^2+1}$ (iii) $\frac{1}{x}$ (iv) $\frac{2}{x}$

Ymarferion 10.3

1. (i) $-4\ln x$ (ii) $\ln x + \frac{3}{2}\ln y$ (iii) $4\ln x + \frac{3}{2}\ln y$ (iv) $\frac{1}{3}\ln x$

(v) $\frac{2}{3}\ln x + 4\ln y - 3\ln z$ (vi) $1 + \ln a$ (vii) $-2 - 2\ln b$

(viii) $\frac{1}{2}\log_{10} x - \frac{1}{2}\log_{10} y$ (ix) $2\log_{10} x + \frac{3}{2}\log_{10} y - \frac{1}{2}\log_{10} 2$

(x) $\log_{10} x + \frac{1}{2}\log_{10} y - \frac{1}{3}\log_{10} z$

2. (i) (c) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d)
(v) (b) (vi) (d)

3. (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{e+1}{e}$ (iii) e

4. $y = \sqrt{5}x^{-\frac{1}{2}}$ **5.** $y = \dfrac{(x+1)^2(x^2+1)\, e^{2}}{x^3}$

6. (i) $\dfrac{2}{x}$ (ii) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2}$ (iii) $\dfrac{2}{2x+1} + \dfrac{4}{x+2} - \dfrac{3}{3x-5}$

(iv) $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{4}{2x+5}$ (v) $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{12}{3x-12} - \dfrac{4}{2x+1}$

Pennod 11
Ymarferion 11.1

1. $-2,\ 2,\ 3$ **2.** $1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ **3.** 6

4. $-5,\ \dfrac{1}{2},\ 3$ **5.** -2

Ymarferion 11.2

1. 1.8 **2.** 3.7 **3.** -0.2

Ymarferion 11.3

1. -0.414 **2.** 1.3247 **3.** 1.0837
4. 0.567 **5.** 1.166 **6.** 3.1038

Ymarferion 11.4

1. $\dfrac{\ln 7}{\ln 3}$ **2.** $-\dfrac{\ln 3}{2\ln 3 - \ln 2} = -\dfrac{\ln 3}{\ln\left(\frac{9}{2}\right)}$

3. $\dfrac{\ln 12}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$ **4.** $\dfrac{\ln 6}{\ln 2}$ **5.** $\dfrac{\ln 3}{\ln 5}, \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

6. $3,\ \dfrac{3}{2}, -2;$ $\dfrac{\ln 3}{\ln 5}, \dfrac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln 5}$ **7.** 4.505, 1.370

Pennod 12
Ymarferion 12.2

Gellir defnyddio nifer o wrthenghreifftiau eraill yn ogystal â'r awgrymiadau canlynol:

1. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ **2.** $x = 1, y = 2$ **3.** $x = 2, y = -3$

4. $x^2 - 2x + 1 = 0$ **5.** mae gan $f(x) = x^4$ finimwm pan fo $x = 0$

6. $p = 2, n = 3$

MYNEGAI