

MATHEMATEG

Mathemateg Bur **Uned P3**

Dr H Thomas

SAFON UG/UWCH

Cyhoeddwyd gan Uned Iaith Genedlaethol Cymru,
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru,
245 Rhodfa'r Gorllewin,
Caerdydd
CF5 2YX

Mae Uned Iaith Genedlaethol Cymru
yn rhan o WJEC CBAC Cyf.,
cwmni a gyfyngir gan warant
ac a reolir gan awdurdodau unedol Cymru.

Mathemateg Safon UG/Uwch CBAC
Mathemateg Bur
Uned P3

Cyhoeddwyd dan nawdd Cynllun Cyhoeddiadau
Cyd-bwyllgor Addysg Cymru

Cyhoeddwyd gyntaf 2002

Argraffwyd gan gwmni HSW Print,
Cwm Clydach, Tonypandy, Rhondda CF40 2XX

ISBN: 1 86085 535 0

RHAGYMDRODD

Hwn yw'r olaf o dri llyfr a fydd rhyngddynt yn ymdrin â'r rhan fwyaf o'r dulliau mathemategol sydd eu hangen ar ymgeiswyr ar gyfer cyrsiau Safon Uwch modylol mewn mathemateg, ni waeth beth fo'r Bwrdd Arholi. Yn benodol, mae'r testun wedi ei seilio ar fanyleb P3 Cyd-bwyllgor Addysg Cymru a gyflwynwyd yn 2001.

Mae gan yr awdur flynyddoedd o brofiad fel arholwr ac mae ar hyn o bryd yn Brif Arholwr ar gyfer modylau P1-P3.

CYNNWYS

	Tudalen
Pennod 1 Ehangiad Binomaidd ar gyfer indecsau cymarebol	
1.1 Ehangladau binomaidd ar gyfer indecsau integrol positif: golwg arall	1
1.2 Ehangladau binomaidd ar gyfer indecsau cymarebol	2
Pennod 2 Cyflwyniad i Ffwythiannau Cymarebol, Ffracsiynau Rhannol	
2.1 Ffwythiannau cymarebol	9
2.2 Ffracsiynau rhannol	10
Pennod 3 Trigonometreg I: Rhagor o Ffwythiannau ac Unfathiannau	
3.1 Y ffwythiannau trigonometrig cilyddol	18
3.2 Dau unfathiant trigonometrig arall	22
3.3 Ffwythiannau trigonometrig gwrthdro	25
Pennod 4 Trigonometreg II: Onglau Cyfansawdd ac Onglau Dwbl	
4.1 Onglau cyfansawdd	30
4.2 Fformiwlâu ar gyfer onglau dwbl	35
4.3 Y ffurf harmonig $a \cos \theta + b \sin \theta$	39
Pennod 5 Rhagor am Ddifferu	
5.1 Differu ffwythiannau gwrthdro	42
5.2 Differu ffwythiannau ymhlyg	49
5.3 Differu ffwythiannau sydd wedi eu diffinio'n bamedrig	51
Pennod 6 Rhagor o Geometreg Gyfesurynnol	
6.1 Hafaliadau tangiad a normal i gromlin	57
Pennod 7 Integru I	
7.1 Ffuriau safonol	67
7.2 Golwg cyntaf ar integru trwy amnewid	68
7.3 Golwg eto ar integru trwy amnewid	74

Pennod 8 Integru II

8.1	Integru trwy ddefnyddio ffracsiynau rhannol	80
8.2	Integru fesul rhan	84
8.3	Integrynnau pendant	88
8.4	Cyfeintiau solidau cylchdro	92

Pennod 9 Hafaliadau differol

9.1	Cyfraddau newid	97
9.2	Hafaliadau differol	98

Pennod 10 Cyflwyniad i fectorau

10.1	Fectorau a sgalarau	108
10.2	Adio a thynnu fectorau a rheolau ar gyfer eu trin	111
10.3	Fectorau safle	117
10.4	Fectorau dau-ddimensiwn a thri-dimensiwn	122
10.5	Cydrannau Cartesaidd fectorau	128

Pennod 11 Rhagor am Fectorau

11.1	Yr hafaliad fector ar gyfer llinell syth	132
11.2	Lluoswm sgalar dau fector	139

Papurau Adolygu	148
------------------------	-----

Atebion	160
----------------	-----

Pennod 1

Hafaliadau Binomaidd ar gyfer Indecsau Cymarebol

Cyflwyniad

Yn y bennod hon, mae'r gwaith yn P2 ar ehangtadau binomaidd ar gyfer indecsau integrol positif yn cael ei estyn i ymdrin ag achosion lle mae'r indecs yn rhif cymarebol.

1.1 Ehangtadau binomaidd ar gyfer indecsau integrol positif: golwg arall

Gwelsom yn P2 fod

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 \\ + \cdots + \binom{n}{n}x^n \quad (1)$$

neu

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 \\ + \cdots + \binom{n}{n}x^n, \quad (2)$$

lle mae

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \quad (3)$$

neu'n gywerth,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1.2.3.4.\cdots(r-1)r}. \quad (4)$$

Enghraifft 1.1

Darganfyddwch $\binom{7}{4}$ gan ddefnyddio ffurf (4) uchod.

$$\binom{7}{4} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} \quad (\text{pedwar ffactor ar y top a'r gwaelod}) \\ = 35.$$

Enghraifft 1.2

Ehangwch $(a+x)^6$, gan ddefnyddio'r fformiwlâu uchod i ehangu'r cyfernodau.

Yna, o (1) a (4):

$$\begin{aligned}
 (a+x)^6 &= a^6 + \frac{6}{1}a^5x + \frac{6(6-1)}{1.2}a^4x^2 + \frac{6(6-1)(6-2)}{1.2.3}a^3x^3 \\
 &\quad + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{1.2.3.4}a^2x^4 \\
 &\quad + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{1.2.3.4.5}ax^5 \\
 &\quad + \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}{1.2.3.4.5.6}a^6 \\
 &= a^6 + 6a^5x + \frac{6.5}{1.2}a^4x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}a^3x^3 \\
 &\quad + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}a^2x^4 + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}ax^5 \\
 &\quad + \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}x^6 \\
 &= a^6 + 6a^5 + 15a^4x^2 + 20a^3x^3 + 15a^2x^4 + 6ax^5 + x^6.
 \end{aligned}$$

Mae'r dull hwn o enrhifo'r cyfernodau yn ymddangos yn llafurus iawn; wedi'r cyfan, gallem fod wedi eu cael trwy ddefnyddio'r botwm ${}^nC_r$ ar gyfrifiannell. Ond credwn y bydd y dull hir yn ddefnyddiol yn yr adran nesaf.

I grynhoi,

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{1.2} \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^4 + \dots \quad (5)
 \end{aligned}$$

Nid ydym yn ystyried $(a+x)^n$ ar yr adeg hon.

1.2 Ehangiadau binomaidd ar gyfer indecsau cymarebol

Gadewch i ni ystyried (5) gyda'r indecs $n = -1$.

(a) Yn yr achos hwn mae ochr dde (5) yn dod yn

$$\begin{aligned}
 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-1-1)}{1.2}x^2 \\
 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{1.2.3.4}x^4 \\
 + \dots
 \end{aligned}$$

neu, ar ôl symleiddio,

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$$

Ymarfer 1.1

Darganfyddwch gyfernodau x^5 ac x^6 .

Gan ddefnyddio fformiwla (5) gydag $n = -1$, $r = 5$ ac $n = -1$, $r = 6$, darganfyddwn fod cyfernod x^5 yn -1 a chyfernod x^6 yn 1 .

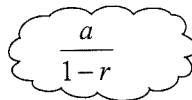
Nid yw'r gyfres

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + \dots$$

byth yn terfynu; y cyfernodau yw 1 (ar gyfer eil-bwerau) a -1 (ar gyfer od-bwerau).

Mewn gwirionedd, cyfres geometrig anfeidraidd yw'r gyfres gyda'r gymhareb gyffredin $r = -x$ a'r term cyntaf yn 1 y mae ei swm yn

$$\frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x},$$


$$\frac{a}{1-r}$$

cyhyd ag y bo $|x| < 1$.

- (b) Nodwn hefyd fod ochr chwith (5) yn dod yn $(1+x)^{-1}$ pan fo $n = -1$.

Gan gyfuno (a) a (b), diddwythwn fod

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + \dots,$$

y canlyniad a ddiddwythir o (5) pan fo $n = -1$.

Ymddengys fod yr ehangiad binomaidd ar gyfer $(1+x)^n$ yn ddilys pan fo $n = -1$, cyhyd ag y bo $|x| < 1$. Mewn gwirionedd, mae'r ehangiad binomaidd ar gyfer $(1+x)^n$ yn ddilys pan yw n yn unrhyw rif cymarebol, beth bynnag fo gwerth n , cyhyd ag y bo $|x| < 1$.

Crynodeb

Dylid nodi:

- (a) pan fo n yn gyfanrif positif mae helaethiad $(1+x)^n$ yn terfynu (dyma'r achos a ystyrir yn **P2**);
- (b) pan fo n yn rhif cymarebol (h.y. yn y ffurf $\frac{p}{q}$, lle mae p a q yn gyfanrifau), ond nid yn gyfanrif positif, mae gan ehangiad $(1+x)^n$ nifer anfeidraidd o dermau; ac
- (c) bod yr ehangiad yn ddilys pan fo $|x| < 1$.

Enghraifft 1.3

Darganfyddwch bedwar term cyntaf yr ehangiaidau binomaidd ar gyfer

- (a) $(1+x)^{\frac{1}{2}}$
- (b) $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$
- (c) $(1-x)^{-2}$
- (d) $(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$

a nodwch ar gyfer pa werthoedd o x y mae'r ehangiaidau yn ddilys.

- (a) Ar gyfer $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, mae'r ehangiad binomaidd yn ddilys os yw $|x| < 1$.

Os rhoddwn $n = \frac{1}{2}$ yn (5), cawn

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}x^2 \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots, \\ &\text{ar gyfer } |x| < 1.\end{aligned}$$

- (b) Yma mae $n = -\frac{3}{2}$ ac mae'r ehangiad yn ddilys eto ar gyfer $|x| < 1$.

Felly mae (5) yn dod yn

$$\begin{aligned}(1+x)^{-\frac{3}{2}} &= 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)x + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{1.2}x^2 \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}-2\right)}{1.2.3}x^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \dots\end{aligned}$$

- (c) Yma mae $n = -2$ ond mae gennym $1-x$ yn lle $1+x$. Ysgrifennwn $n = -2$ a rhoddwn $-x$ yn lle x yn (5). Cyn ehangu nodwn fod yr ehangiad yn ddilys ar gyfer $|-x| < 1$, h.y. ar gyfer $|x| < 1$.

$$\begin{aligned}\text{Felly mae } (1-x)^{-2} &= 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{1.2}(-x)^2 \\ &\quad + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{1.2.3}(-x)^3 + \dots \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots\end{aligned}$$

- (d) Yma mae $n = -\frac{1}{2}$ a rhoddwn $2x$ yn lle x yn yr ehangiad (5).

Mae'r ehangiad yn ddilys ar gyfer $|2x| < 1$, h.y. ar gyfer $|x| < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Felly mae } (1+2x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(2x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}(2x)^2 \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}(2x)^3 \\ &\quad + \dots \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Dylid nodi bod (5) yn ymwneud ag $(1+x)^n$ ac nid $(a+x)^n$ ($a \neq 1$). I ehangu $(a+x)^n$ ysgrifennwn $(a+x)^n$ fel $a^n \left(1 + \frac{x}{a}\right)^n$ yn gyntaf ac yna defnyddiwn (5), gan newid x am $\frac{x}{a}$.

Enghraifft 1.4

Darganfyddwch ehangiad $(2+x)^{-3}$ cyn belled â'r term yn x^3 . Nodwch yr amrediad o x y mae'r ehangiad yn ddilys ar ei gyfer.

$$\begin{aligned} \text{Nawr mae } (2+x)^{-3} &= 2^{-3} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-3} \\ &= \frac{1}{8} \left[1 + (-3)\frac{x}{2} + \frac{(-3)(-3-1)}{1.2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{1.2.3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{2} - \frac{5x^3}{4} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{8} - \frac{3x}{16} + \frac{3x^2}{16} - \frac{5x^3}{32} + \dots \end{aligned}$$

Mae'r ehangiad yn ddilys pan yw ehangiad $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-3}$ yn ddilys, h.y. pan yw

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \text{ neu pan yw } |x| < 2.$$

Weithiau mae'n bosibl mynegi ffwythiant cyfansawdd trwy fynegi'r ffwythiant yn gyntaf yn nhermau ffwythiannau haws eu trin. Yn y fath achosion, rhaid bod yn ofalus wrth fynegi amrediad dilysrwydd yr ehangiad o'r ffwythiant cyfansawdd.

Enghraifft 1.5

Ehangwch $\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}$ fel cyfres o bwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 . Nodwch amrediad dilysrwydd yr changiad.

$$\text{Nawr mae} \quad \sqrt{\frac{1+2x}{1-x}} = (1+2x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nawr mae} \quad (1+2x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)(2x) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}(2x)^2 + \dots \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ac mae} \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}(-x)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Felly mae} \quad \sqrt{\frac{1+2x}{1-x}} &= (1+2x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \dots\right) \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots\right) \\ &= 1 + \left(\frac{x}{2} + x\right) + \left(\frac{3x^2}{8} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots \end{aligned}$$

Yr amrediad dilysrwydd ar gyfer $(1+2x)^{\frac{1}{2}}$ yw

$$|2x| < 1 \quad \text{neu} \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

Yr amrediad dilysrwydd ar gyfer $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ yw

$$|x| < 1.$$

Yna rhaid i'r amrediad dilysrwydd ar gyfer $\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}$ fodloni'r ddau ofyniad

uchod ac felly mae'r amrediad yn $|x| < \frac{1}{2}$.

Enghraifft 1.6

Ysgrifennwch ehangiad $\left(1 + \frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ fel cyfres o bwerau esgynnol o x hyd at, ac yn

cynnwys, y term yn x^2 . Nodwch amrediad dilysrwydd yr ehangiad.

Defnyddiwch yr ehangiad i ddangos bod

$$\sqrt[3]{7} \approx \frac{551}{228}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nawr } \left(1 + \frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{8}\right) + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\left(\frac{x}{8}\right)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{24} - \frac{x^2}{576} + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{os yw } \left|\frac{x}{8}\right| < 1, \text{ h.y. } |x| < 8.$$

Nawr gadewch i ni ysgrifennu $x = -1$ yn (1), gan nodi bod y gwerth hwn o x o fewn yr amrediad dilysrwydd ar gyfer yr ehangiad. Yna mae

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \dots$$

$$\approx \frac{551}{576}$$

$$\therefore \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{551}{576}$$

$$\text{fel bod } \sqrt[3]{7} \approx 8^{\frac{1}{3}} \times \frac{551}{576} = 2 \times \frac{551}{576} = \frac{551}{288}.$$

Ymarferion 1.2

1. Darganfyddwch y pedwar term cyntaf yn ehangiad binomaidd pob un o'r canlynol, a nodwch yr amrediad o werthoedd x y mae pob un yn ddilys ar ei gyfer.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & (1-4x)^{\frac{1}{3}} & \text{(b)} \quad (1+2x)^{-2} \quad \text{(c)} \quad \frac{1}{1-3x} \\ \text{(d)} & (3+x)^{\frac{1}{2}} & \text{(e)} \quad (2+x)^{-2} \quad \text{(f)} \quad (9-4x)^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

2. Darganfyddwch ehangiadau'r canlynol, hyd at y term yn x^2 , a nodwch yr amrediad o werthoedd x y mae pob un yn ddilys ar ei gyfer.

$$\text{(a)} \quad (1-x)\sqrt{1+x} \quad \text{(b)} \quad \frac{2+x}{\sqrt{1+3x}} \quad \text{(c)} \quad \frac{\sqrt{1+2x}}{(1-x)^4}$$

$$\text{(d)} \quad \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$$

3. Darganfyddwch y pedwar term cyntaf yn ehangiad $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ mewn pwerau disgynnol o x .
4. Ehangwch $\sqrt{\frac{1+3x}{1-x}}$ fel cyfres o bwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 . Trwy amnewid $x = \frac{1}{10}$ yn yr ehangiad, darganfyddwch frasamcan ar gyfer $\sqrt{13}$, gan roi eich ateb yn gywir i ddau le degol.
5. Ehangwch $\frac{1-2x}{\sqrt{1+2x}}$ mewn pwerau esgynnol o x cyn belled â'r term yn x^2 . Mae gan yr hafaliad

$$\frac{1-2x}{\sqrt{1+2x}} = 1 - \frac{29x}{10}$$

wreiddyn bach positif (ymhlith eraill). Defnyddiwch eich ehangiad i ddarganfod gwerth bras ar gyfer y gwreiddyn.

6. Pan ehangir $(1+ax)^n$ mewn pwerau esgynnol o x , tri therm cyntaf yr ehangiad yw $1 - 2x + 7x^2$. Darganfyddwch werthoedd a ac n .
7. Darganfyddwch ehangiad binomaidd addas i ddarganfod $\sqrt{0.99}$ yn gywir i bedwar lle degol.
8. Ysgrifennwch ehangiad $\left(1 + \frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ fel cyfres o bwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 . Nodwch yr amrediad o werthoedd x y mae'r ehangiad yn ddilys ar ei gyfer.

Defnyddiwch eich ehangiad i ddangos bod

$$\sqrt{8} \approx \frac{611}{216}.$$

Pennod 2

Cyflwyniad i Ffwythiannau Cymarebol, Ffracsiynau Rhannol

Yn y bennod hon byddwn yn ystyried ffwythiannau y mae eu henwaduron a'u rhifiaduron yn bolynomialau. Mewn rhai achosion, gallwn fynegi'r fath ffwythiannau mewn ffordd symlach.

2.1 Ffwythiannau cymarebol

Mae ffwythiant cymarebol x yn ffwythiant yn y ffurf $\frac{P}{Q}$, lle mae $P(x)$ a $Q(x)$ yn bolynomialau yn x .

Enghraifft 2.1

Mae

$$(a) \quad \frac{2x+5}{3x^2+2x+1} \quad (b) \quad \frac{2x^3-3x^2+x+2}{x^2+2x+5} \quad (c) \quad \frac{x^7-x^5+1}{x^7+x^6+4x+5}$$

yn ffwythiannau cymarebol, ond nid yw

$$(d) \quad \frac{\sin x + x + 3}{4x^2 + 2x + 1} \quad (e) \quad \frac{x^3 + 2x^2 - x + 4}{e^x + 3x + 2}$$

yn ffwythiannau cymarebol.

Mae gwahaniaeth pwysig rhwng y ffwythiannau cymarebol (a), (b) ac (c) yn Enghraifft 2.1.

Yn (a) mae gradd y rhifiadur (1) yn llai na gradd yr enwadur (2).

Yn (b) mae gradd y rhifiadur (3) yn fwy na gradd yr enwadur (2).

Yn (c) mae graddau'r rhifiadur a'r enwadur yn gyfartal (7).

Yn y bennod hon byddwn yn ymdrin yn bennaf â ffwythiannau cymarebol o fath (a), lle mae gradd y rhifiadur yn llai na gradd yr enwadur. Gall problemau'n ymwneud â ffwythiannau cymarebol o fathau (b) ac (c) bob amser gael eu trawsnewid yn broblemau'n ymwneud â ffwythiannau cymarebol o fath (a), trwy rannu.

Enghraifft 2.2

Ar gyfer $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 5}{x^2 - 4x + 3}$, mae gradd y rhifiadur yn fwy na gradd yr enwadur.

Rhannwn hyn fel a ganlyn.

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 3 \overline{) x^3 + 3x^2 + 2x - 5} \\ \underline{x^3 - 4x^2 + 3x} \\ 7x^2 - x - 5 \\ \underline{7x^2 - 28x + 21} \\ 27x - 26 \end{array}$$

Terfynwn y rhaniad pan fo gradd y gweddill (1) yn llai na gradd yr enwadur (2).

$$\text{Yna mae } \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 5}{x^2 - 4x + 3} = x + 7 + \frac{27x - 26}{x^2 - 4x + 3}.$$

Mae'r ffwythiant cymarebol ar yr ochr dde bellach o fath (a). Dywedir bod ffwythiannau cymarebol o fath (a) yn ffracsiynau bondrwm. Dywedir bod mathau eraill o ffwythiannau cymarebol yn ffracsiynau pendrwm.

Yn Enghraifft 2.2 mynegwyd ffracsiwn pendrwm fel polynomial ynghyd â ffracsiwn bondrwm. Rhoddwn sylw i'r broses hon yn yr ymarferion sy'n dilyn.

Ymarferion 2.1

Mynegwch, trwy rannu, bob un o'r ffracsiynau pendrwm canlynol fel polynomial (neu gysonyn) a ffracsiwn bondrwm.

1. (a) $\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ (b) $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2}$
- (c) $\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - x - 2}$ (d) $\frac{12x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 7}{4x^3 - 3x + 2}$

Yn yr adran nesaf dangoswn y gall ffracsiynau pendrwm weithiau gael eu mynegi'n symlach yn nhermau ffracsiynau eraill.

2.2 Ffracsiynau rhannol

Gadewch i ni ddechrau ein hymdriniaeth o ffracsiynau rhannol trwy ystyried sut i gyfuno ffracsiynau sy'n cynnwys enwaduron polynomial.

Enghraifft 2.3

Mynegwch $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{2x-5}$ fel un ffracsiwn.

Adiwn y ffracsiynau yn yr un ffordd ag yr adiwn ffracsiynau rhif.

$$\begin{aligned}\frac{3}{x+2} + \frac{4}{2x-5} &\equiv \frac{3(2x-5) + 4(x+2)}{(x+2)(2x-5)} \\ &\equiv \frac{6x-15+4x+8}{(x+2)(2x-5)} = \frac{10x-7}{(x+2)(2x-5)}.\end{aligned}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{9} = \frac{2 \times 9 + 5 \times 7}{7 \times 9} = \frac{18+35}{63} = \frac{53}{63}$$

Cofiwch gyda llaw nad oes angen llusio'r ffactorau isaf oni ofynnir i chi wneud hyn.

Gall fod yn ddefnyddiol ysgrifennu ffracsiwn bondrwm cymhleth yn nhermau ffracsiynau symlach neu ffracsiynau rhannol. Felly, yn yr achos uchod, ysgrifennwn

$$\frac{10x-7}{(x+2)(2x-5)} \equiv \frac{3}{x+2} + \frac{4}{2x-5}.$$

Mae'r arwydd $\equiv$ yn dynodi bod y berthynas yn unfathiant sy'n wir ar gyfer holl werthoedd x .

Enghraifft 2.4

Ysgrifennwch $\frac{2x+1}{x^2-x-6}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.

Nodwch yn gyntaf fod modd ffactorio'r enwadur x^2-x-6 i roi $(x+2)(x-3)$.

Gadewch i ni ysgrifennu $\frac{2x+1}{x^2-x-6} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$,

lle mae gwerth y cysonion A a B i'w darganfod.

Fe ddaw'n glir pam y dewiswyd y ffracsiynau hyn.

Yn gyntaf, cawn wared â'r ffracsiynau drwy luosi popeth yn (1) ag x^2-x-6 neu $(x+2)(x-3)$.

Felly mae $2x+1 \equiv A(x-3) + B(x+2)$. (2)

Dyma unfathiant sy'n wir ar gyfer holl werthoedd x .

Nodwch fod $\frac{A}{x+2}$ yn mynd yn $\frac{A}{x+2}(x+2)(x-3)$ ac yn yr un modd gyda $\frac{B}{x-3}$.

Dewch i ni amnewid gwerthoedd arbennig ar gyfer x er mwyn darganfod gwerthoedd ar gyfer A a B .

Pa werthoedd a ddefnyddiwn am x ?

Gadewch i ni roi cynnig ar $x = -2$ ac $x = 3$ yn hafaliad (2).

$$x = -2$$

Felly mae (2) yn $2(-2) + 1 = A(-2-3) + B(-2+2)$.

$$\therefore -3 = -5A$$

$$\text{ac } A = \frac{3}{5}.$$

Wrth ddewis $x = -2$, mae'n diddymu B ac felly yn ein galluogi i ddarganfod gwerth A .

$$x=3$$

Felly mae (2) yn $2(3) + 1 = A(3 - 3) + B(3 + 2)$

$$\therefore 7 = 5B \text{ fel bod } B = \frac{7}{5}.$$

Yna mae amnewid am A a B yn (1) yn rhoi

$$\frac{2x+1}{x^2-x-6} \equiv \frac{3}{5(x+2)} + \frac{7}{5(x-3)}.$$

Yn enghraifft 2.4, roedd y ffactorau $x + 2$, $x - 3$ yn bolynomialau llinol, h.y. gradd x gan y naill a'r llall. Yn hafaliad (1) roedd gradd y cysonion A a B yn radd yn llai na'r enwadur. Mae hyn yn amlygu rheol gyffredinol am ffracsiynau rhannol: mewn ffracsiynau rhannol mae gradd y rhifiadur (y top) un yn llai na gradd yr enwadur (y gwaelod).

Mae ffordd gyflymach o gyfrifo'r cysonion A a B yn Enghraifft 2.4, lle roedd yr enwadur yn lluoswm ffactorau llinol. Gelwir y dull byrrach yn 'rheol orchuddio'.

Dychwelwn at Enghraifft 2.4

$$\text{O wybod bod } \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3},$$

Gallwn ddarganfod A a B fel a ganlyn.

I ddarganfod A , sy'n ymwneud â'r ffactor $(x + 2)$ yn yr enwadur:

$$(a) \quad \text{Gorchuddiwn y ffactor } (x + 2) \text{ yn y ffracsiwn gwreiddiol } \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)}.$$

$$(b) \quad \text{Amnewidiwn werth } x \text{ a roddir gan } x + 2 = 0, \text{ h.y. } x = -2, \text{ yn yr hyn sy'n aros heb ei orchuddio, h.y. yn } \frac{2x+1}{(x-3)}. \text{ Y canlyniad yw gwerth } A.$$

$$\text{Felly mae } A = \frac{2(-2)+1}{-2-3} = \frac{-4+1}{-5} = -\frac{3}{5} = \frac{3}{5}, \text{ fel o'r blaen.}$$

Yn yr un modd, i ddarganfod B gorchuddiwn $x - 3$ ac amnewidiwn $x = 3$ (o $x - 3 = 0$) yn yr hyn sy'n aros heb ei orchuddio.

$$\text{Felly mae } B = \frac{2(3)+1}{(3+2)} = \frac{7}{5}, \text{ fel o'r blaen.}$$

Ymarfer 2.2

Defnyddiwch (a) y dull yn Enghraifft 2.4,

(b) y rheol orchuddio

i ddarganfod cysonion A a B yn y canlynol:

$$\frac{5-8x}{(2x+1)(2x+3)} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{2x+3}.$$

D.S. Ni ddefnyddir y rheol orchuddio ac eithrio pan fo ffactorau llinol yn yr enwadur, gydag yr un ohonynt yn cael ei ailadrodd.

Dangosir yn yr enghraifft nesaf y drefn i'w dilyn pan ailadroddir ffactor llinol.

Enghraifft 2.5

Mynegwch $\frac{3x^2 + 4x + 1}{(x-2)^2(x+2)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.

Nodwn fod $(x-2)^2$ yn ffactor llinol a ailadroddir a dyrannwn ddau gysonyn i'r ffactor hwnnw fel a ganlyn:

$$\frac{3x^2 + 4x + 1}{(x-2)^2(x+2)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} \quad (1)$$

Mae $\equiv$ yn dynodi Unfathiant.

Yn gyffredinol, mae nifer y cysonion i'w darganfod yn hafal i radd y rhifiadur gwreiddiol. Yma mae gan $(x-2)^2(x+2)$ radd 3 felly mae angen 3 chysynyn arnom.

Cewch wared â'r ffracsiynau drwy luosi ag $(x-2)^2(x+2)$.

Peidiwch ag ehangu'r termau yn y cromfachau.

$$\therefore 3x^2 + 4x + 1 = A(x-2)(x+2) + B(x+2) + C(x-2)^2. \quad (2)$$

Ceir rhai dewisiadau amlwg ar gyfer x .

$x = -2$ (diddymu A a B)

$$\therefore 3(-2)^2 + 4(-2) + 1 = A(0) + B(0) + C(-2-2)^2$$

$$12 - 8 + 1 = C(-4)^2 = 16C$$

$$C = \frac{5}{16}.$$

$x = 2$ (diddymu A ac C)

$$\therefore 3(2)^2 + 4(2) + 1 = A(0) + B(2+2) + C(0).$$

$$\therefore B = \frac{21}{4}.$$

Nid oes dewis hwylus arall o werth rhifiadol ar gyfer x . Gallwn ddewis $x = 0$ neu gallwn wneud y cyfernodau ar yr ochr chwith a'r dde yn hafal.

$x = 0$ yn (2)

$$3(0)^2 + 4(0) + 1 = A(-2)(2) + B(2) + C(-2)^2$$

$$\therefore 1 = -4A + 2B + 4C$$

$$\text{felly mae } 4A = 2B + 4C - 1$$

$$= 2(21/4) + 4(5/16) - 1$$

$$= \frac{42 + 5 - 4}{4} = \frac{43}{4}$$

$$\therefore A = \frac{43}{16}$$

Hafalu gwerthoedd x^2 yn (2)

Ochr chwith

$$3x^2 = Ax^2 + Cx^2.$$

$$\therefore A = 3 - C$$

$$= 3 - \frac{5}{16} = \frac{43}{16}.$$

Mae'n well gennym ni'r dull hwn ond, wrth gwrs, dylech ddewis y dull sydd fwyaf cyfforddus i chi.

$$\text{Felly mae } \frac{3x^2 + 4x + 1}{(x-2)^2(x+2)} \equiv \frac{43}{16(x-2)} + \frac{21}{4(x-2)^2} + \frac{5}{16(x+2)}.$$

Er hwylustod, crynhoir y gwahanol ffyrdd o ddadelfennu ffracsiynau rhannol yma.

Ffurff y ffracsiynau rhannol

$$\frac{mx + n}{(ax+b)(cx+d)} \equiv \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$$

$$\frac{kx^2 + mx + n}{(ax+b)(cx+d)^2} \equiv \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{(cx+d)^2}$$

Defnyddir ffracsiynau rhannol weithiau wrth integru ffwythiannau cymarebol, fel y dangosir ym Mhennod 8. Ond nesaf byddwn yn ystyried y defnydd o ffracsiynau rhannol mewn sefyllfaoedd eraill.

Enghraifft 2.6

(a) Mynegwch $\frac{5x^2 + 13x + 9}{(x-1)(x+2)^2}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.

(b) O wybod bod $y = \frac{5x^2 + 13x + 9}{(x-1)(x+2)^2}$, darganfyddwch werth $\frac{dy}{dx}$ pan fo $x = 2$.

(a) Gadewch i $\frac{5x^2 + 13x + 9}{(x-1)(x+2)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$

Cewch wared â'r ffracsiynau drwy luosi ag $(x-1)(x+2)^2$.

$$\therefore 5x^2 + 13x + 9 \equiv A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1).$$

Boed i $x = 1$ $\therefore 5 + 13 + 9 = A(1+2)^2 + B(0) + C(0).$

$$\therefore 27 = 9A.$$

$$\therefore A = 3.$$

Boed i $x = -2$ $5(-2)^2 + 13(-2) + 9 = A(0) + B(0) + C(-2 - 1)$

$$\therefore 3 = -3C$$

fel bod $C = -1$.

Hafalwch gyfernodau x^2

$$5 = A + B,$$

gan fod $A = 3, B = 2$.

$$\therefore \frac{5x^2 + 13x + 9}{(x-1)(x+2)^2} \equiv \frac{3}{(x-1)} + \frac{2}{(x+2)} - \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Gallwch
ysgrifennu
 $x = 0$.

- (b) I ddarganfod $\frac{dy}{dx}$, differwn y ffracsiwn rhannol sy'n cynrychioli y.

$$\begin{aligned} \text{Felly mae } \frac{dy}{dx} &= -\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{2}{(x+2)^3} \\ &= -\frac{3}{(2-1)^2} - \frac{2}{(2+2)^2} + \frac{2}{(2+2)^3} \\ &= -3 - \frac{2}{16} + \frac{2}{64} \\ &= -\frac{99}{32}. \end{aligned}$$

Pan fo
 $x = 2$

Enghraifft 2.7

- (a) Mynegwch $\frac{5+4x}{(1+2x)(1-x)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.

- (b) Ehangwch $\frac{5+4x}{(1+2x)(1-x)}$ mewn pwerau esgynnol o x
cyn belled â'r term yn x^3 .

- (a) Boed i $\frac{5+4x}{(1+2x)(1-x)} \equiv \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-x}$.

Drwy ddilyn y rheol orchuddio,

$$A = \frac{5+4(-\frac{1}{2})}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{3}{2} = 2$$

Yn yr un modd,

$$B = \frac{5+4(1)}{1+2(1)} + \frac{9}{3} = 3.$$

$$\therefore \frac{5+4x}{(1+2x)(1-x)} = \frac{2}{1+2x} + \frac{3}{1-x}.$$

$1+2x = 0,$
 $x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \text{Nawr mae } \frac{5+4x}{(1+2x)(1-x)} &= \frac{2}{1+2x} + \frac{3}{1-x} \\
 &= 2(1+2x)^{-1} + 3(1-x)^{-1} \\
 &= 2(1-2x+4x^2-8x^3+\dots) \\
 &\quad + 3(1+x+x^2+x^3+\dots) \\
 &= 2+3+x(-4+3) \\
 &\quad + x^2(8+3)+x^3(-16+3)+\dots \\
 &= 5-x+11x^2-13x^3+\dots
 \end{aligned}$$

Ymarferion 2.3

1. Mynegwch y canlynol ar ffurf ffracsiynau rhannol:

$$\text{(i)} \quad \frac{2x+3}{(x+2)(x-3)}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{x+7}{(x+3)(x+5)}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{2x-1}{x^2-4}$$

$$\text{(iv)} \quad \frac{3x-1}{(x+2)(2x-1)}$$

$$\text{(v)} \quad \frac{2}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$\text{(vi)} \quad \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$$

$$\text{(vii)} \quad \frac{5x^2+6x+7}{(x-1)(x+2)^2}$$

$$\text{(viii)} \quad \frac{3x+1}{(x+1)^2}$$

2. Darganfyddwch a , b , c lle mae

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x-1)(x+2)} = a + \frac{bx+c}{(x-1)(x+2)}$$

a mynegwch y ffracsiwn ar y dde yn nhermau ffracsiynau rhannol.

3. Mynegwch $\frac{3x^2+2x+1}{x(3x-1)^2}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.

Trwy hyn differwch $\frac{3x^2+2x+1}{x(3x-1)^2}$.

4. Ysgrifennwch $\frac{4x^2-2x+2}{(x+2)(x-3)}$ fel $a + \frac{bx+c}{(x+2)(x-3)}$, gan roi gwerthoedd a , b ac c .

Mynegwch y ffracsiwn olaf yn nhermau ffracsiynau rhannol.

Drwy hyn, neu fel arall, differwch $\frac{4x^2-2x+2}{(x+2)(x-3)}$.

5. (a) Ehangwch $\frac{1}{(1+2x)(3-x)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.
- (b) Ehangwch $\frac{1}{(1+2x)(3-x)}$ fel cyfres o bwerau esgynnol o x cyn belled â'r term yn x^2 , gan roi'r amrediad o werthoedd x y mae'r ehangiad yn ddilys ar ei gyfer.
6. Mynegwch $\frac{2+x^2}{(2-x)^2(4+x)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol. Drwy hyn, ehangwch y ffwythiant mewn cyfres o bwerau esgynnol o x cyn belled â'r term yn x^2 . Ar gyfer pa amrediad o werthoedd x y mae'r ehangiad yn ddilys?

Pennod 3

Trigonometreg I: Rhagor o Ffwythiannau ac Unfathiannau

Buom yn ystyried y ffwythiannau trigonometrig sin, cos a tan a'r unfathiant $\sin^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1$ yn **P1**. Yn y bennod hon byddwn yn edrych ar:

- (a) y ffwythiannau trigonometrig cilyddol: cosec, sec a cot (cosecant, secant, cotangiad);
- (b) dau unfathiant arall;
- (c) rhai ffwythiannau trigonometrig gwrthdro.

3.1 Y ffwythiannau trigonometrig cilyddol

Er bod y rhan fwyaf o'r waith mewn trigonometreg yn ymwneud â sin, cos a tan, mae'n ddefnyddiol gwybod am cosec, sec a cot, a'u priodweddau.

Diffiniwn y ffwythiannau cilyddol fel a ganlyn

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta},$$

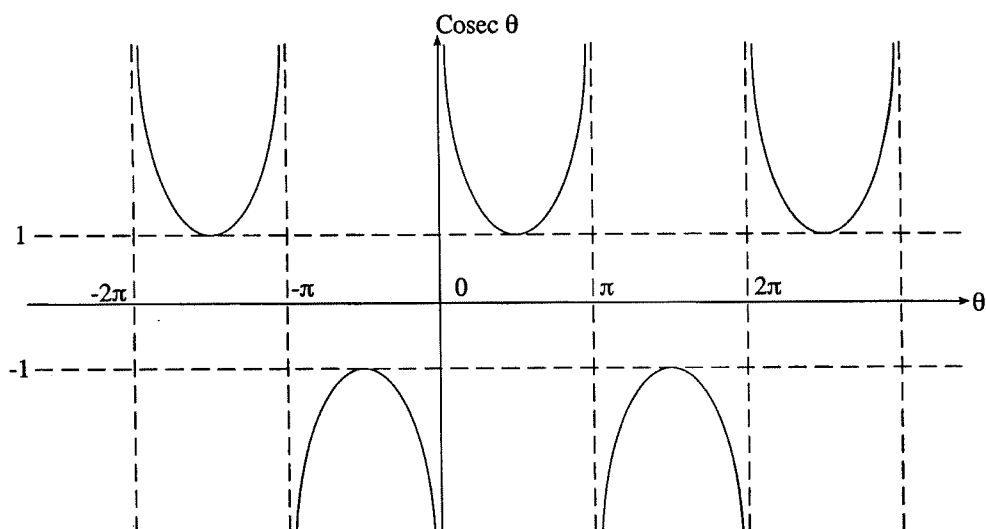
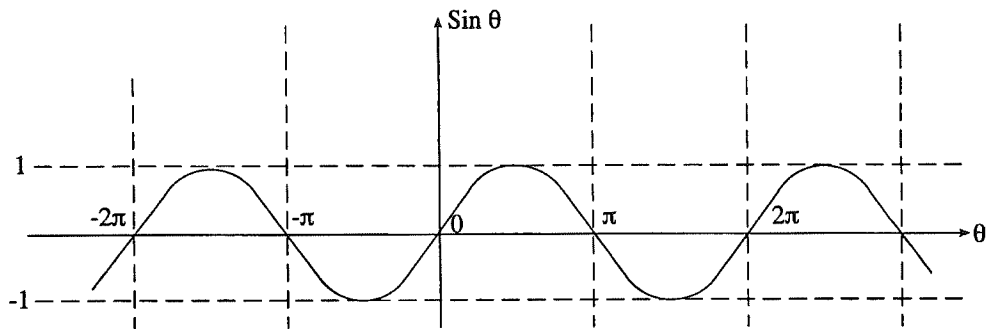
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta},$$

a
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Sylwer
mai cilydd cos,
ac nid sin, yw
cosec.

Mae'n hawdd cynhyrchu graffiau'r cilyddion ar ôl ystyried y graffiau ar gyfer $\sin$, $\cos$ a $\tan$.

$y = \sin \theta$ ac $y = \operatorname{cosec} \theta$

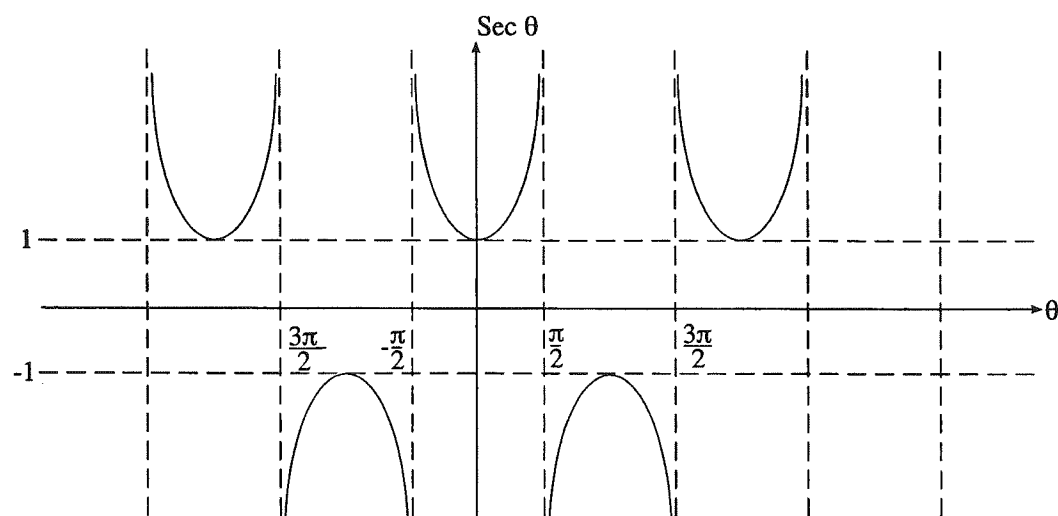
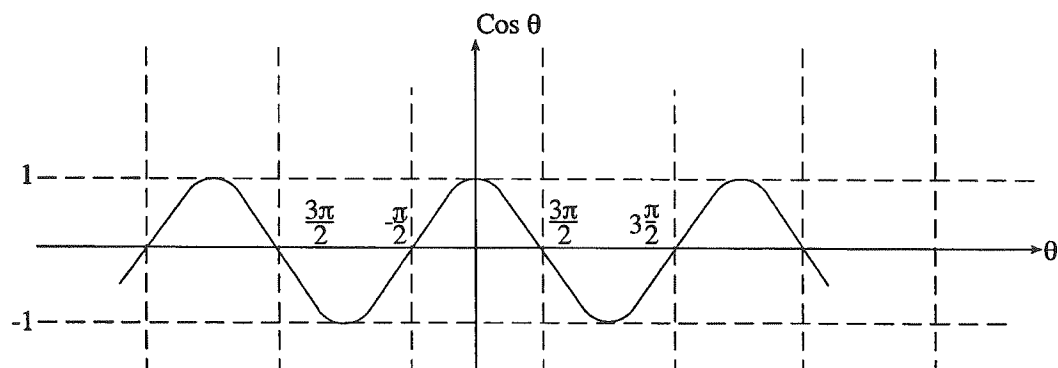


Sylwer bod $\sin \theta = 0$ pan yw $\theta = k\pi$, lle mae k yn gyfanrif. Pan fo gan θ y gwerthoedd hyn, mae $\operatorname{cosec} \theta$ heb ei ddiffinio ac mae $\operatorname{cosec} \theta \rightarrow +\infty$ neu $-\infty$ wrth i $\theta \rightarrow k\pi$.

Mae gwahaniaeth pwysig arall rhwng $\sin$ a cosec yn ymwneud â'u hamrediadau: amrediad $\sin$ yw $[-1, 1]$; mewn gwrthgyferbyniad, amrediad cosec yw $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, h.y. ni all fod gan cosec werthoedd yn yr amrediad $(-1, 1)$.

Mae $\sin$ a cosec yn gyfnodol gyda chyfnod o 2π .

$y = \cos \theta$ ac $y = \sec \theta$



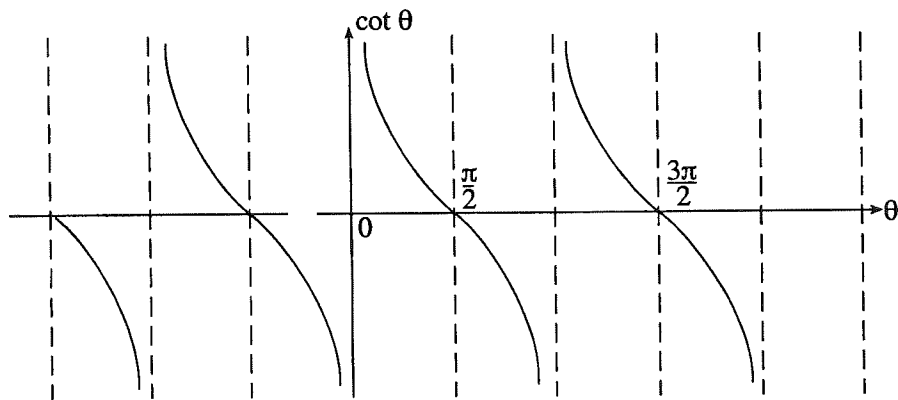
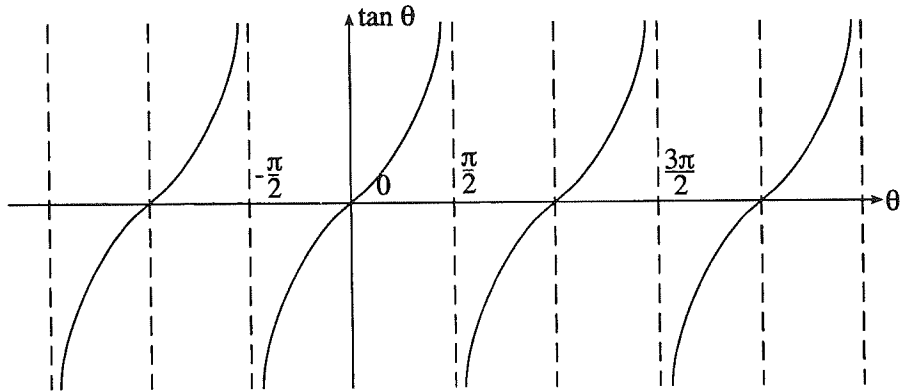
Gellir cael y graff ar gyfer $y = \sec \theta$ o'r graff ar gyfer $y = \operatorname{cosec} \theta$ uchod drwy drawsffidiad $\frac{\pi}{2}$ yn y cyfeiriad θ negatif.

Felly mae nodweddion graffiau $y = \operatorname{cosec} \theta$ ac $y = \sec \theta$ yn debyg iawn heblaw am fanylion yn ymwneud â'u safleoedd ar yr echelin θ .

Felly, mae $\sec \theta$ heb ei ddiffinio yn $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ lle mae k yn gyfanrif;
ac mae $\sec \theta \rightarrow +\infty$ neu $-\infty$ wrth i $\theta \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Fel yn achos cosec, amrediad sec yw $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ac felly ni all fod gan sec werthoedd yn yr amrediad $(-1, 1)$. Hefyd, mae sec yn gyfnodol gyda chyfnod o 2π .

$y = \tan \theta$ ac $y = \cot \theta$



Gellir gweld o'r graffiau fod tan yn doredig yn $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, lle mae k yn gyfanrif, ond bod cot yn doredig yn $\theta = k\pi$. Amrediad cot yw $(-\infty, \infty)$.

Mae'r ffwythiant cot yn gyfnodol, yr un fath â cosec a sec, ond yn wahanol i'r ffwythiannau hyn mae'r cyfnod yn π .

Fel y soniwyd yn gynharach, defnyddir y ffwythiannau sin, cos, tan amlaf mewn problemau oherwydd, er enghraifft, gall unrhyw broblem yn ymwneud â cosec gael ei thrawsnewid yn broblem yn ymwneud â sin θ drwy ysgrifennu $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$. Serch hynny, mae'r ffwythiannau cilyddol yn bwysig, yn bennaf gan eu bod yn digwydd mewn dau unfathiant trigonometrig.

3.2 Dau unfathiant trigonometrig arall

Yn **P1** dangoswyd bod $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ar gyfer unrhyw ongl θ . Gan ddechrau â'r unfathiant hwn, gallwn ddeillio dau unfathiant pellach.

Drwy rannu $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ â $\cos^2 \theta$, mae gennym

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

$$\therefore \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos \theta} \right)^2$$

neu

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta.$$

Yn yr un modd, drwy rannu $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ â $\sin^2 \theta$, cawn

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sin \theta} \right)^2$$

neu

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta.$$

Enghraifft 3.1

Darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$\sec^2 \theta = \tan \theta + 3.$$

Nawr mae $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$,

fel y dangoswyd uchod.

Felly mae $1 + \tan^2 \theta = \tan \theta + 3$

neu mae $\tan^2 \theta - \tan \theta - 2 = 0$

$\therefore (\tan \theta - 2)(\tan \theta + 1) = 0.$

$\therefore \tan \theta = 2$ neu $-1.$

Felly mae $\theta = 63.4^\circ, 243.4^\circ, 135^\circ, 315^\circ.$

Enghraifft 3.2

Darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$2 \cot^2 \theta - 4 = \operatorname{cosec} \theta.$$

Nawr mae $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$

fel bod $2(\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) - 4 = \operatorname{cosec} \theta.$

$$\therefore 2 \operatorname{cosec}^2 \theta - \operatorname{cosec} \theta - 6 = 0.$$

$$(2 \operatorname{cosec} \theta + 3)(\operatorname{cosec} \theta - 2) = 0$$

Felly mae $\operatorname{cosec} \theta = -\frac{3}{2}$ neu $2.$ (1)

Mae'n haws gweithio yn nhermau $\sin \theta.$

Gan fod $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, mae gennym o (1), $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ neu $\frac{1}{2}.$

$$\therefore \theta = 221.8^\circ, 318.2^\circ, 30^\circ, 150^\circ.$$

Enghraifft 3.3

Darganfyddwch $\int \tan^2 x dx.$

Nawr o **P2**, mae $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$, fel y gellir gwirio drwy ddifferu.

Nawr gan fod $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$,

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \tan x - x + C. \end{aligned}$$

θ oedd ein hongl
o'r blaen, ond mae'r
canlyniad yn wir am
 unrhyw ongl.

Ymarferion 3.1

Efallai y bydd angen defnyddio'r theorem ffactor mewn rhai o'r cwestiynau isod.

- Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 180° yn y canlynol:
 - $\sec^2 x + 1 = 3 \tan x$
 - $\cot^2 x - 1 = \operatorname{cosec} x$
 - $\tan^3 x + 4 = \sec^2 x + 3 \tan x.$
- Darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 360° yn y canlynol:

$$4 + \tan^2 \theta = \sec \theta (7 - \sec \theta).$$

3. Darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

(a) $\tan \theta + 2 \cot \theta = 3$
 (b) $4 \sin \theta + \operatorname{cosec} \theta = 4$
 (c) $4 \cot^2 \theta + 39 = 24 \operatorname{cosec} \theta$.

4. Darganfyddwch werthoedd θ rhwng 0° a 180° sy'n bodloni

$$11 + \tan^2 2\theta = 7 \sec 2\theta.$$

5. Darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$2 \tan^3 \theta = \sec^2 \theta + 13 \tan \theta + 5.$$

6. Dangoswch fod

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 \sec x.$$

Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

7. Integrwch $\tan^2 2x$ mewn perthynas ag x .

8. O wybod bod $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, dangoswch fod

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

Darganfyddwch (a) $\int \operatorname{cosec}^2 2x dx$

(b) $\int \cot^2 2x dx$

9. Differwch $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ mewn perthynas ag x , gan fynegi eich ateb yn nhermau $\operatorname{cosec} x$ a $\cot x$.

10. (a) Differwch $\sec x$ mewn perthynas ag x , gan roi eich ateb yn nhermau $\sec x$ a $\tan x$.

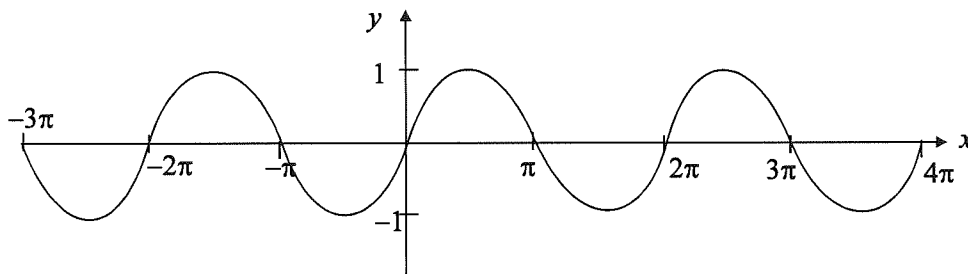
(b) Dangoswch fod $\frac{d}{dx}[\ln(\sec x + \tan x)] = \sec x$.

3.3 Ffwythiannau trigonometrig gwrthdro

Edrychwyd yn gyffredinol ar ffwythiannau gwrthdro yn **P2**. Gwelwyd bod yn rhaid i ffwythiant fod yn un-i-un er mwyn i unrhyw ffwythiant penodol fod â gwrthdro. Mae'r gofyniad un-i-un hwn yn golygu bod angen addasu'r ffwythiannau sin, cos a tan fel rheol er mwyn darganfod ffwythiannau gwrthdro.

$\sin^{-1} x$

Mae graff $y = \sin x$ ar gyfer $x \in (-\infty, \infty)$ fel a ddangosir isod gydag x wedi ei fesur mewn radianau.



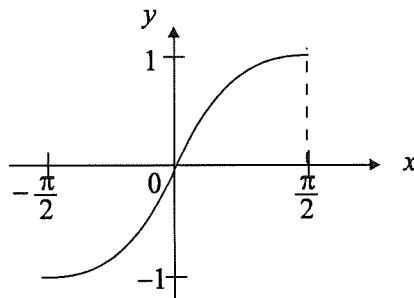
Mae'n amlwg o'r graff nad yw'r ffwythiant $\sin f(x) = \sin x$ yn un-i-un. Mewn geiriau eraill, nid oes un gwerth arbennig am x sy'n cyfateb i werth a roddir am $\sin x$.

Felly nid oes gan $f(x) = \sin x$ wrthdro.

Rydym yn cyfyngu'r parth i $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ac yn ystyried

$$f^*(x) = \sin x \quad \text{ar gyfer } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Cawn y graff canlynol ar gyfer $y = f^*(x)$.



e.e. os yw
 $\sin x = \frac{1}{2}$ yna mae
 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, ac ati

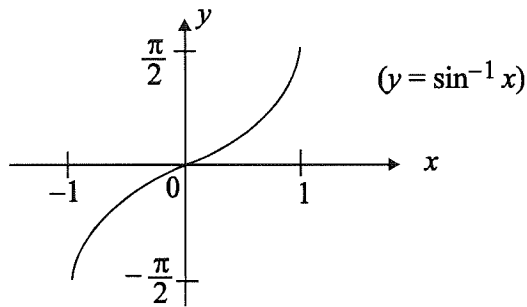
Sylwer ein bod yn
 defnyddio mesurau
 radian yn y drafodaeth
 hon ac nid graddau.

Mae'n hawdd gweld bod f^* yn un-i-un ac felly mae ganddo wrthdro. Rydym yn diffinio gwrthdro

$$f^*(x) = \sin x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

fel $f^{*-1}(x) = \sin^{-1} x \quad x \in [-1, 1].$

Dyma graff $y = \sin^{-1} x$.



Ceir y graff hwn trwy adlewyrchu $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ yn y llinell $y = x$

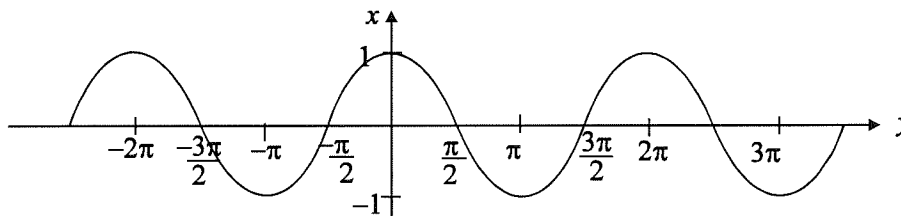
Sylwer gyda llaw fod $\sin^{-1} x$ yn ffwythiant cynyddol dros ei barth $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sy'n golygu os yw

$$y = \sin^{-1} x, \text{ bod } \frac{dy}{dx} > 0.$$

Mae'r graff yn dringo i'r dde.

$\cos^{-1} x$

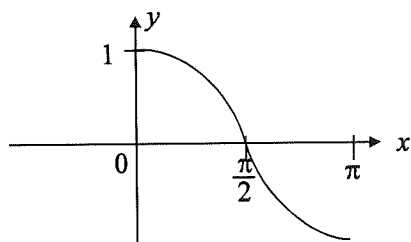
Dyma graff $y = \cos x$ ar gyfer $x \in (-\infty, \infty)$.



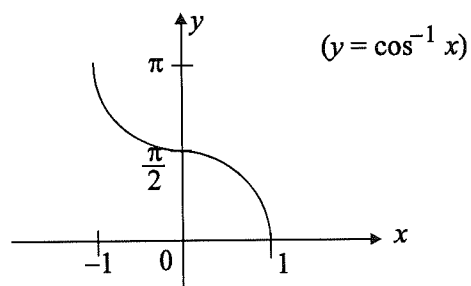
Fel yn achos $\sin x$, nid yw'r ffwythiant $f(x) = \cos x$ yn un-i-un, ond gellir llunio ffwythiant un-i-un drwy gyfyngu'r parth. Felly fe ddiffiniwn

$$f^*(x) = \cos x \text{ ar gyfer } x \in [0, \pi],$$

a dangosir ei graff isod.



Mae gan f^* ffwythiant gwrthdro sef $f^{*-1}(x) = \cos^{-1} x$ fel y dangosir isod.



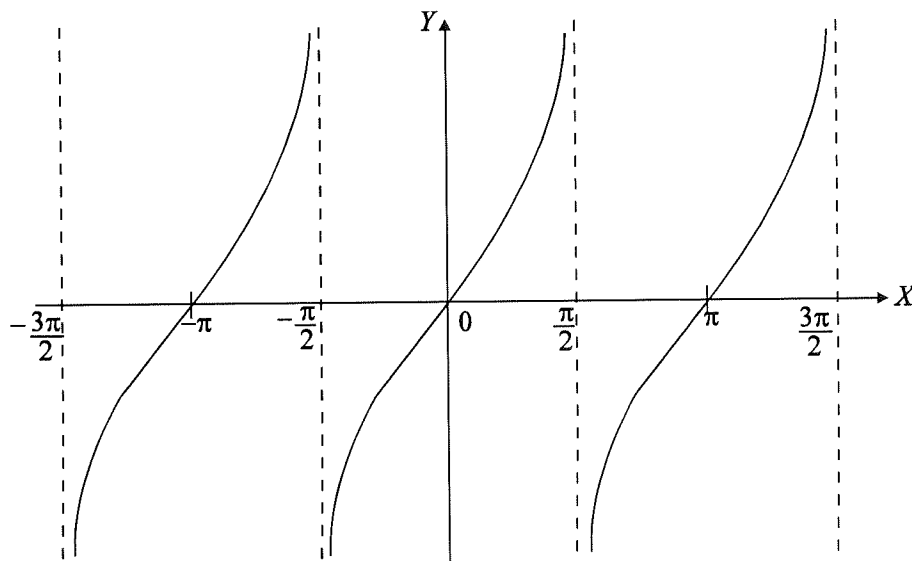
Sylwer gyda llaw fod $\cos^{-1} x$ yn ffwythiant sy'n lleihau dros ei barth $(0, \pi)$.
Mae hyn yn golygu os yw

$$y = \cos^{-1} x, \\ \text{bod } \frac{dy}{dx} < 0.$$

Mae'r graff yn
disgyn i'r dde

$\tan^{-1} x$

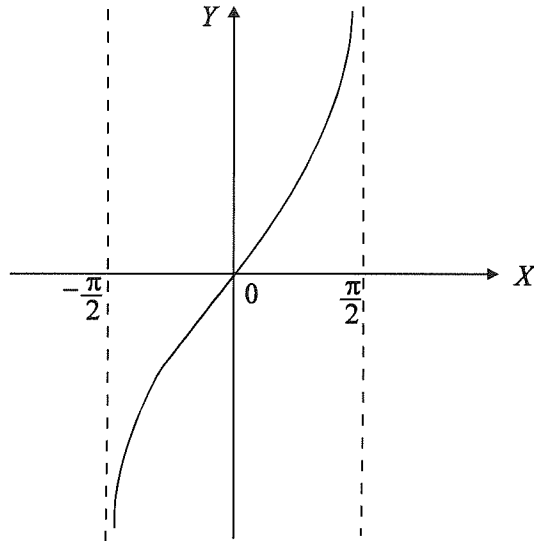
Dangosir graff $y = \tan x$ ar gyfer $x \in (-\infty, \infty)$ isod.



Fel ag o'r blaen, nid yw'r ffwythiant $f(x) = \tan x$ yn un-i-un, ond gellir llunio ffwythiant un-i-un drwy gyfyngu'r parth. Felly fe ddiffiniwn

$$f^*(x) = \tan x \text{ ar gyfer } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

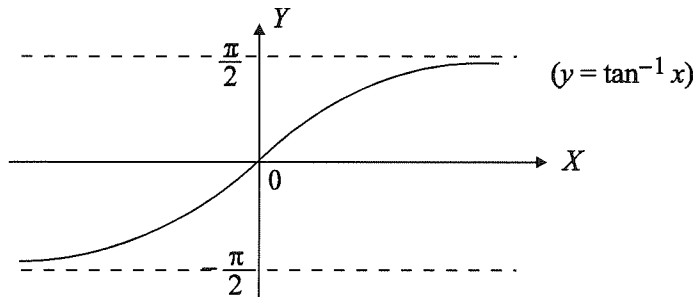
a dangosir ei graff isod.



Mae gan y ffwythiant f^* wrthdro, sef

$$f^{*-1}(x) = \tan^{-1} x \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Dangosir graff $y = \tan^{-1} x$ isod.



Byddwch yn ofalus!

Peidiwch â chymysgu $\sin^{-1} x$ gydag $\frac{1}{\sin x}$.

Yn gyffredinol,
gwahaniaethwch rhwng

$$f^{-1}(x) \text{ ac } \frac{1}{f(x)}.$$

Enghraifft 3.4

Darganfyddwch $\sin^{-1}(0.6148)$ ac $\frac{1}{\sin(0.6148)}$.

Sicrhewch fod eich cyfrifiannell yn y modd radian.

Yna mae $\sin^{-1}(0.6148) = 0.6621$,

yn gywir i bedwar lle degol, sy'n gywerth â

$$\sin(0.6621) \approx 0.6148$$

Hefyd mae $\frac{1}{\sin(0.6148)} = 1.7337$, yn gywir i bedwar lle degol.

Pwyswch y botwm
gwrthdro neu
'gyfnewid', yna'r
botwm sin.

Ymarferion 3.2

1. Darganfyddwch $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)$, $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{8}\right)$.

2. Dangoswch fod $2 \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

3. Dangoswch fod $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

4. Dangoswch fod $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin^{-1}(1) = \frac{5\pi}{6}$.

5. Dangoswch fod $2 \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)$.

Nid oes angen
cyfrifiannell ar gyfer
Cwestiynau 2, 3 a 4.

Byddwn yn edrych ar ffwythiannau trigonometrig eto ym Mhennod 5, gan ddangos yn benodol sut y cânt eu differu.

Pennod 4

Trigonometreg II: Onglau Cyfansawdd ac Onglau Dwbl

Yn y bennod hon edrychwn ar unfathiannau'n ymwneud â $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ a $\tan(A+B)$, ac ar ffurfiau arbennig yr unfathiannau hyn pan fo $A=B=x$ (dyweder).

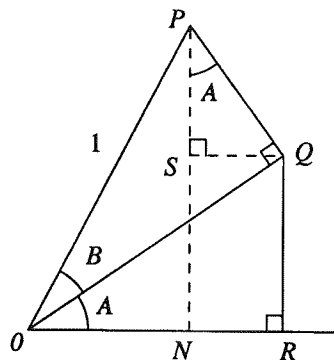
4.4 Onglau cyfansawdd

O wybod gwerthoedd A a B gellir darganfod gwerthoedd $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$ a'r ffwythiannau trigonometrig eraill trwy ddefnyddio cyfrifiannell addas. Sut mae gwerth $\sin(A+B)$, er enghraifft, yn dibynnu ar $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$? Mae'r adran hon yn ymwneud ag astudio'r dibyniad hwn.

Y fformiwla adio

Rydym am ddarganfod fformiwlâu ar gyfer $\cos(A+B)$ a $\sin(A+B)$, lle mae A a B yn onglau llym.

Peidiwch â chymryd
yn ganiataol fod
 $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$. **X**



Ni fydd gofyn
i chi gynhyrchu
hwn mewn
arholiad.

Gadewch i ni ystyried y diagram a ddangosir lle mae trionglau POQ , QOR yn drionglau ongl sgwâr. Llinellau llunio yw'r llinellau toredig ac mae $SPQ = A$.

$$\begin{aligned} \text{Felly mae } \sin(A+B) &= \frac{PN}{OP} = \frac{NS + SP}{OP} \\ &= \frac{RQ + SQ}{OP} \end{aligned}$$

$$= \frac{RQ}{OQ} \times \frac{OQ}{OP} + \frac{SP}{PQ} \times \frac{PQ}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

Ymarfer 4.1

Trwy ddechrau gyda

$$\cos(A+B) = \frac{ON}{OP}$$

ac ysgrifennu $ON = OR - NR$, dangoswch fod

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Mae'r canlyniadau uchod yn bwysig ac felly fe'u pwysleisir yma.

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

(a)

Rheolau I

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

(b)

Sylwer gyda llaw fod arwydd negatif yn Rheol I(b): mae'n demtasiwn i gymryd bod

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \mathbf{X}$$

Anghywir

Ceir canlyniadau tebyg ar gyfer $\sin(A-B)$ a $\cos(A-B)$. Gellir eu deillio o'r rhai a roddir yn Rheolau I trwy roi $-B$ yn lle B a nodi bod

$$\sin(-B) = -\sin B,$$

$$\cos(-B) = \cos B.$$

Cawn ar unwaith o Reolau I fod:

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B,$$

(a)

Rheolau II

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

(b)

Gellir cael dau unfathiant pellach trwy ddefnyddio Rheolau I.

$$\text{Nawr mae } \tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

Diffiniad o tan

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

Rheolau I

$$= \frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

Rhannu'r rhifiadur a'r enwadur â $\cos A \cos B$

$$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

$$\therefore \begin{cases} \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} & \text{(a)} \\ \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} & \text{(b) Rheolau III} \end{cases}$$

Rhowch $-B$
yn lle B a nodwch fod
 $\tan(-B) = \tan B$

Cafwyd Rheolau I – III trwy gymryd fod A a B yn onglau llym. Gofynnir i chi gymryd yn ganiataol eu bod yn wir ar gyfer holl werthoedd A a B .

Enghraifft 4.1

Darganfyddwch, heb ddefnyddio cyfrifiannell, werthoedd $\sin 75^\circ$, $\cos 165^\circ$ a $\tan 15^\circ$, gan adael eich atebion ar ffurf syrdiau.

Nawr mae $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$$

ac mae $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1.$

Felly mae $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$
 $= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \right)$
 $= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1).$

Rheolau I(a)

$$\begin{aligned} \cos 165^\circ &= \cos(120^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Rheolau I(b)

$$\begin{aligned} \tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

Rheolau III(b)

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

lluosi ag

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

Enghraifft 4.2

Os yw $\sin A = \frac{4}{5}$ a $\cos B = \frac{12}{13}$ gyda $90^\circ < A < 180^\circ$, a $0^\circ < B < 90^\circ$, darganfyddwch, heb ddefnyddio'r botymau sin, cos ar eich cyfrifiannell, werth $\sin(A+B)$.

Nawr mae $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

Rheolau I(a)

Mae angen gwerthoedd $\cos A$ a $\sin B$ arnom.

Nawr mae $\sin A = \frac{4}{5}$ a $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

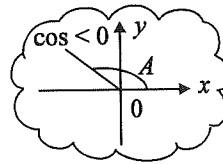
Felly mae $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$$= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

$\therefore \cos A = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}.$

Nawr mae $90^\circ < A < 180^\circ$ felly mae $\cos A < 0$.

$\therefore \cos A = -\frac{3}{5}.$

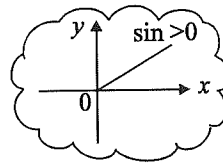


Yn yr un modd, mae $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B$

$$= 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169}$$

$$= \frac{25}{169}.$$

$\therefore \sin B = \pm \sqrt{\frac{25}{169}} = \pm \frac{5}{13}.$



Gan fod $0^\circ < B < 90^\circ$, mae $\sin B > 0$

ac $\therefore \sin B = \frac{5}{13}.$

Felly mae $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}.$$

Enghraifft 4.3

Darganfyddwch werth $\tan x$ os yw

$$2 \sin(x - 45^\circ) = \cos(x + 45^\circ).$$

Rydym yn ehangu'r ochr chwith a'r dde gan ddefnyddio Rheolau II(a) ac I(b).

$$\begin{aligned} \therefore 2(\sin x \cos 45^\circ - \cos x \sin 45^\circ) \\ = \cos x \cos 45^\circ - \sin x \sin 45^\circ. \end{aligned}$$

Nawr mae $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ac felly gellir

canslo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ trwy'r cyfan.

Trwy luosi
popeth ag $\sqrt{2}$.

$$\therefore 2 \sin x - 2 \cos x = \cos x - \sin x$$

$$\therefore 3 \sin x = 3 \cos x$$

$$\text{fel bod} \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 1.$$

Enghraifft 4.4

Darganfyddwch, heb ddefnyddio eich cyfrifiannell, werth $\frac{\tan 70^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 10^\circ}$.

O Reolau III(b), mae

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}.$$

Os yw $A = 70^\circ$, $B = 10^\circ$ cawn

$$\begin{aligned} \frac{\tan 70^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 10^\circ} &= \tan(70^\circ - 10^\circ) \\ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ymarferion 4.2

1. Symleiddiwch y canlynol heb ddefnyddio cyfrifiannell.

- (i) $\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ$
- (ii) $\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ$
- (iii) $\cos \theta \cos 3\phi - \sin \theta \sin 3\phi$
- (iv) $\sin 2A \cos A - \cos 2A \sin A$
- (v) $\cos(A + B) \cos A + \sin(A + B) \sin A$
- (vi) $\sin(A + 2B) \cos 2B - \cos(A + 2B) \sin 2B$
- (vii) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

2. Peidiwch â defnyddio'r botymau ar gyfer ffwythiannau trigonometrig na ffwythiannau trigonometrig gwrthdro ar eich cyfrifiannell i ddatrys y canlynol.
 - (i) Os yw $\sin A = \frac{3}{5}$ ac os yw A yn ongl lem, defnyddiwch Reolau I(a) i ddarganfod $\sin(A + A) = \sin 2A$ a $\cos(A + A) = \cos 2A$.
 - (ii) Os yw $\sin A = \frac{4}{5}$ a $\sin B = \frac{24}{25}$ ac os yw A a B yn onglau llym, darganfyddwch werth $\tan(A + B)$.
 - (iii) Os yw $\tan(x + 45^\circ) \tan x = 3$, darganfyddwch y gwerthoedd posibl ar gyfer $\tan x$.
 - (iv) Symleiddiwch a thrwy hynny datrysych $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 75^\circ + \frac{1}{2} \sin 75^\circ$
 - (v) Os yw $\tan x = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$ darganfyddwch werth x o wybod bod $90^\circ < x < 180^\circ$.
3. Symleiddiwch $\sin(A + B) + \sin(A - B)$. Trwy hynny darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni $\sin(x + 60^\circ) + \sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Ysgrifennwch yr ehangiad ar gyfer $\tan(\theta + \theta)$. Trwy hynny darganfyddwch fynegiad ar gyfer $\tan 2\theta$ yn nhermau $\tan \theta$.
5. Datrysych yr hafaliadau ar gyfer gwerthoedd x rhwng 0° a 360° , gan ddefnyddio eich cyfrifiannell pan fo angen.
 - (i) $2 \cos x = \sin(x + 60^\circ)$
 - (ii) $\sin(x + 45^\circ) = \sin x$
 - (iii) $\sin(x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \cos x$
 - (iv) $4 \cos(x + 10^\circ) = 3 \sin(x - 10^\circ)$.

4.2 Fformiwlâu ar gyfer onglau dwbl

Er hwylustod rhestrir isod Reolau I – III a roddwyd yn adran 4.1.

$$\begin{array}{ll}
 \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \text{ (a)} & \left. \begin{array}{l} \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \text{ (a)} \\ \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B, \text{ (b)} \end{array} \right\} \text{ Rheolau I} \\
 \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B, \text{ (b)} & \\
 \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B, \text{ (c)} & \left. \begin{array}{l} \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B, \text{ (c)} \\ \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B, \text{ (d)} \end{array} \right\} \text{ Rheolau II} \\
 \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B, \text{ (d)} & \\
 \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}, \text{ (e)} & \left. \begin{array}{l} \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}, \text{ (e)} \\ \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}, \text{ (f)} \end{array} \right\} \text{ Rheolau III} \\
 \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}, \text{ (f)} &
 \end{array}$$

Gadewch i ni ysgrifennu $A = B = x$ yn (a), (b), (e).

Yna bydd (a) yn newid yn

$$\sin 2x = (\sin x)(\cos x) + (\cos x)(\sin x) = 2 \sin x \cos x.$$

Yn yr un modd, bydd (b) a (d) yn newid yn

$$\cos 2x = (\cos x)(\cos x) - (\sin x)(\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\tan 2x = \frac{\tan x + \tan x}{1 - (\tan x)(\tan x)} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Mae mynegiadau eraill yn bosibl ar gyfer $\cos 2x$ gan fod

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Felly mae $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1.$$

Mae'r hyn a elwir yn fformiwlâu ongl ddwbl yn bwysig a cheir crynodeb ohonynt isod.

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$	(a)
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1,$	(b)
$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$	(c) Rheolau IV

Ymarfer 4.3

Ysgrifennwch $A = B = x$ yn Rheolau I - III i wirio'r gwerthoedd hysbys ar gyfer $\sin 0^\circ$, $\cos 0^\circ$ a $\tan 0^\circ$.

Enghraifft 4.5

Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$\sin 2x = \sin x.$$

Gadewch i ni amnewid am $\sin 2x$ o Reolau IV, (a).

$$\therefore 2 \sin x \cos x = \sin x.$$

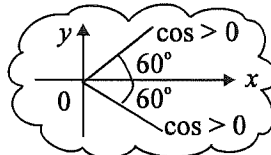
$$\therefore \sin x(2 \cos x - 1) = 0.$$

$$\text{Yna mae } \sin x = 0 \text{ neu } 2 \cos x - 1 = 0$$

$$\text{felly mae } \sin x = 0 \text{ neu } \cos x = \frac{1}{2}.$$

Felly mae $x = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 60^\circ, 300^\circ$.

Peidiwch â chanslo $\sin x$ hyd nes y byddwch wedi ystyried y posibilrwydd fod $\sin x = 0$.



Enghraifft 4.6

Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$3 \cos 2x - \cos x = 2.$$

Mae presenoldeb $\cos x$ yn awgrymu y dylid ysgrifennu $\cos 2x$ yn nhermau $\cos x$.

Felly mae $3(2 \cos^2 x - 1) - \cos x = 2.$

$$\therefore 6 \cos^2 x - \cos x - 5 = 0.$$

$$\therefore (6 \cos x + 5)(\cos x - 1) = 0.$$

$$\therefore \cos x = -\frac{5}{6} \text{ neu } 1.$$

mae $\cos x = -\frac{5}{6}$ yn rhoi $x = 146.44^\circ$ neu 213.56°

ac mae $\cos x = 1$ yn rhoi $x = 0^\circ$ neu 360° .

$\therefore$ Yr atebion yw $0^\circ, 146.44^\circ, 213.56^\circ, 360^\circ$.

Rheolau IV(b)

neu gallwch ddefnyddio'r fformiwla gwadratig

$$\cos < 0$$

$$\cos < 0$$

Enghraifft 4.7

Defnyddiwch y fformiwla ar gyfer $\cos(A + B)$ a'r fformiwlâu ongl ddwbl i ddangos bod $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$.

Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$\cos 3x = 12 \cos^2 x - 14 \cos x + 3.$$

Nawr mae $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$

Boed i $B = 2A$.

$$\therefore \cos(A + 2A) = \cos A \cos 2A - \sin A \sin 2A$$

$$= \cos A(2 \cos^2 A - 1) - \sin A(2 \sin A \cos A)$$

$$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \sin^2 A \cos A$$

$$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A(1 - \cos^2 A)$$

sy'n rhoi $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$.

Nawr gadewch i ni amnewid am $\cos 3x$ yn yr hafaliad

$$\cos 3x = 12 \cos^2 x - 14 \cos x + 3.$$

Yna $4 \cos^3 x - 3 \cos x = 12 \cos^2 x - 14 \cos x + 3.$

$$\therefore 4 \cos^3 x - 12 \cos^2 x + 11 \cos x - 3 = 0.$$

Dyma hafaliad ciwbig yn $\cos x$ ac fe ddefnyddiwn y theorem ffactorio ar ei gyfer.

Mewn gwirionedd, mae $\cos x = 1$ yn wreiddyn gan fod

$$4(1)^3 - 12(1)^2 + 11(1) - 3 = 0.$$

Gellir ffactorio ochr chwith yr hafaliad oherwydd fe wyddom fod $\cos x = 1$ yn ffactor.

Rheolau I(b)

Rheolau IV(a) (b)

Pan welwch $\sin^2$ meddyliwch am $\cos^2$!

Peidiwch â cheisio defnyddio'r fformiwla gwadratig gyda hafaliad ciwbig.

Yna mae $(\cos x - 1)(4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3) = 0$.

Mae'r ochr chwith yn ffactorio ymhellach i roi

$$(\cos x - 1)(2 \cos x - 3)(2 \cos x - 1) = 0.$$

$$\therefore \cos x = 1 \text{ neu } \frac{3}{2} \text{ neu } \frac{1}{2}.$$

Nawr mae $\cos x = \frac{3}{2}$ yn amhosibl felly mae

$$\cos x = 1 \text{ neu } \frac{1}{2}.$$

Felly mae $x = 0^\circ, 360^\circ, 60^\circ, 300^\circ$.

neu ddefnyddio'r
fformiwla i ddatrys
 $4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 = 0$

Ymarferion 4.4

- Ysgrifennwch y canlynol fel cymarebau trigonometrig syml ond peidiwch â'u datrys.

(i) $2 \sin 12^\circ \cos 12^\circ$	(ii) $\frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$
(iii) $2 \cos^2 24^\circ - 1$	(iv) $2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$
(v) $1 - 2 \sin^2 20^\circ$	(vi) $\frac{2 \tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}$
(vii) $\cos^2 16^\circ - \sin^2 16^\circ$	(viii) $2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 1$
(ix) $1 - 2 \sin^2 3\theta$	(x) $\frac{2 \tan 4x}{1 - \tan^2 4x}$

- Darganfyddwch, heb ddefnyddio cyfrifiannell, werth $\tan 2\theta$ o wybod bod $\tan \theta = -\frac{1}{2}$.
- Darganfyddwch, heb ddefnyddio'r ffwythiannau trigonometrig ar gyfrifiannell, werthoedd $\sin 2\theta$ a $\cos 2\theta$ yn yr isod (o wybod bod $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ym mhob achos).

$$(i) \cos \theta = -\frac{3}{5} \quad (ii) \sin \theta = \frac{12}{13} \quad (iii) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Profwch fod $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.
Trwy hyn, darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni:

$$(i) \sin 3x = 2 \sin x$$

$$(ii) \sin 3x = 1 - \sin^2 x - \sin x.$$

- Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni $2 \cos 2x + \sin x + 1 = 0$.

- Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$(i) 3 \tan x = \tan 2x$$

$$(ii) 4 \tan x \tan 2x = 1.$$

Mae un o gymwysiadau eraill y fformiwlâu ongl gyfansawdd a roddwyd yn 4.1 yn ymwneud â'r ffurf harmonig $a \cos \theta + b \sin \theta$, lle mae a a b yn gysonion.

4.3 Y ffurf harmonig $a \cos \theta + b \sin \theta$

Gall y ffurf harmonig $a \cos \theta + b \sin \theta$, lle mae a a b yn gysonion, gael ei mynegi yn y ffurf $R \sin(\theta \pm \alpha)$ neu $R \cos(\theta \pm \alpha)$, lle mae $R > 0$ a lle mae α yn ongl lem.

Gadewch i ni dybio bod $a > 0, b > 0$.

Yna mae $R \cos(\theta - \alpha) \equiv a \cos \theta + b \sin \theta$

yn rhoi $R[\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha] \equiv a \cos \theta + b \sin \theta$.

Os cymharwn gyfernodau $\cos \theta$ and $\sin \theta$, cawn

$$R \cos \alpha = a, \quad (1)$$

$$R \sin \alpha = b. \quad (2)$$

Mae rhannu (2) â (1) yn rhoi $\tan \alpha = \frac{b}{a}$.

Trwy sgwario (1) a (2), ac adio, cawn

$$R^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2 + b^2.$$

$$R^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{ac} \quad R = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Crynodeb

$$R \cos(\theta - \alpha) \equiv a \cos \theta + b \sin \theta,$$

$$\text{lle mae } \tan \alpha = \frac{b}{a},$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Gan fod $a > 0, b > 0$, mae α yn ongl lem.

Ymarfer 4.5

Ystyriwch $a \cos \theta - b \sin \theta$, lle mae $a > 0, b > 0$.

Dangoswch fod $a \cos \theta - b \sin \theta \equiv R \cos(\theta + \alpha)$,

$$\text{lle mae } \tan \alpha = \frac{b}{a},$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Enghraifft 4.8

Mynegwch $\cos \theta + 2 \sin \theta$ yn y ffurf $R \cos(\theta - \alpha)$.

Yna mae $R [\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha] \equiv \cos \theta + 2 \sin \theta$

fel bod $R \cos \alpha = 1$,

$$R \sin \alpha = 2.$$

Yna mae $\tan \alpha = 2$

ac mae $R = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

Yna mae $\alpha = 63.4^\circ$ ac felly mae

$\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{5} \cos (\theta - 63.4^\circ).$

Enghraifft 4.9

Mynegwch $3 \cos \theta - 4 \sin \theta$ yn ffurf $R \cos (\theta + \alpha).$

Yna mae $R [\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha] \equiv 3 \cos \theta - 4 \sin \theta$

fel bod $R \cos \theta = 3,$

$R \sin \alpha = 4.$

Yna mae $\tan \alpha = \frac{4}{3}$

ac mae $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

Yna mae $\alpha = 53.3^\circ$ ac felly mae

$3 \cos \theta - 4 \sin \theta = 5 \cos (\theta + 53.1^\circ).$

Enghraifft 4.10

Datrysych yr hafaliad

$$5 \cos \theta + 3 \sin \theta = 2$$

ar gyfer $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ.$

Nawr mae $5 \cos \theta + 3 \sin \theta = R \cos (\theta - \alpha),$

lle mae $R = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34},$

$$\tan \alpha = \frac{3}{5}.$$

$\therefore \alpha = 31.0^\circ$

Felly mae $5 \cos \theta + 3 \sin \theta = 2$

yn dod yn $\sqrt{34} \cos (\theta - 31^\circ) = 2$

$\therefore \cos (\theta - 31^\circ) = \frac{2}{\sqrt{34}}$

$\therefore \theta - 31^\circ = 69.9, 290.1$

$\therefore \theta = 100.9^\circ, 321.1^\circ.$

Enghraifft 4.11

Darganfyddwch werthoedd mwyaf a lleiaf

(a) $2 \cos \theta + \sin \theta.$

(b) $\frac{1}{2 \cos \theta + \sin \theta + 3}.$

(a) Nawr mae $2 \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{5} \cos (\theta - 26.6^\circ)$.

gwiriwch

Nawr mae $-1 \leq \cos (\theta - 26.6^\circ) \leq 1$

gwir am bob cosin

felly gwerth mwyaf $2 \cos \theta + \sin \theta$ yw $\sqrt{5}$ a'i werth lleiaf yw $-\sqrt{5}$.

(b)
$$\frac{1}{2 \cos \theta + \sin \theta + 3} = \frac{1}{\sqrt{5} \cos (\theta - 26.6^\circ) + 3}$$

Ceir y gwerth mwyaf pan yw'r enwadur yn werth lleiaf a'r gwerth lleiaf pan yw'r enwadur yn werth mwyaf.

$\therefore$ Felly'r gwerth mwyaf yw $\frac{1}{3 - \sqrt{5}}$ a'r gwerth lleiaf yw $\frac{1}{3 + \sqrt{5}}$.

Ymarferion 4.6

- Darganfyddwch werth R a'r ongl lem α ym mhob un o'r unfathiannau isod.
 - $5 \cos \theta + 12 \sin \theta \equiv R \cos (\theta - \alpha)$
 - $\cos \theta - 3 \sin \theta = R \cos (\theta + \alpha)$
 - $\cos \theta + \sin \theta = R \sin (\theta + \alpha)$
 - $3 \sin \theta - 4 \cos \theta = R \sin (\theta - \alpha)$
- Darganfyddwch werthoedd mwyaf a lleiaf y canlynol.

(a) $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta$	(b) $4 \cos \theta - 3 \sin \theta$
(c) $\cos \theta + 3 \sin \theta$	(d) $\frac{1}{3 + \cos \theta + \sin \theta}$
(e) $\frac{1}{7 + 2 \cos \theta - \sqrt{5} \sin \theta}$	(f) $(4 \cos \theta + 3 \sin \theta)^2$
- Datrysych bob un o'r hafaliadau canlynol ar gyfer $0^\circ \leq \theta \leq 360$, gan roi eich atebion yn gywir i un lle degol.

(a) $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 1$	(b) $4 \cos \theta - 3 \sin \theta = 2$
(c) $5 \cos \theta + 12 \sin \theta = 7$	(d) $4 \cos \theta - 7 \sin \theta = 3$
(e) $2 \cos \theta + 5 \sin \theta = 4$	(f) $4 \cos 2\theta - 9 \sin 2\theta = 6$
- Mynegwch $2 \cos^2 \theta + 6 \sin \theta \cos \theta$ yn y ffurf $A + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta$.
Trwy hyn darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 180° sy'n bodloni
 $2 \cos^2 \theta + 6 \sin \theta \cos \theta = 2$.
- Dangoswch fod
 $-2 \leq 6 \cos^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta \leq 8$.

Pennod 5

Rhagor am Ddifferu

Rydym eisoes wedi astudio differu yn **P1** a **P2**. Yn y bennod hon edrychwn ar dair agwedd bellach ar ddifferu: differu ffwythiannau gwrthdro, ffwythiannau ymhlyg a ffwythiannau a ddifinnir yn baramedrig.

5.1 Differu ffwythiannau gwrthdro

Cofiw'n sut y caiff differu ei fynegi mewn nodiant delta (**P1**).

Pan fo $y = f(x)$,

boed i δx , δy fod yn gynyddiadau bach cyfatebol yn x ac y , yn ôl eu trefn.

Dywedwn fod $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}$

neu, yn yr un modd, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta x / \delta y} \right)$.

Nawr fe fydd $\delta y \rightarrow 0$ wrth i $\delta x \rightarrow 0$ ac mae

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\delta y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta x / \delta y} \right) \\ &= \frac{1}{\lim_{\delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\delta x}{\delta y} \right)} \\ &= \frac{1}{dx/dy}. \end{aligned}$$

$\therefore$

neu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{dx/dy} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{dy/dx}. \end{aligned}$$

Rheol I

Mae Rheol I yn gymorth i ni wrth ddifferu ffwythiannau gwrthdro.

Enghraifft 5.1

Nawr os yw $y = e^x$ yn ôl y diffiniad

yna mae $x = \ln y$.

Nawr mae $\frac{dy}{dx} = e^x$

fel bod $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad (\text{Rheol I})$
 $= \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$

Felly $\frac{d}{dy}(\ln y) = \frac{1}{y}$

neu $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$

Mae'n gyfleus
i ni fynegi'r rheol ddifferu
yn nhermau x .

Enghraifft 5.2

Gan ddefnyddio $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ a Rheol I,

dangoswch fod $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}.$

Boed i $y = x^3$ fel bod $x = y^{\frac{1}{3}}.$

Nawr mae $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

ac mae $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}.$

$x = y^{\frac{1}{3}}$

Felly mae $\frac{d}{dy}\left(y^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$

neu, wrth newid llythyren,

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}.$$

Ymarferion 5.1

1. Gan ddefnyddio Rheol I a deilliad x^5 , diddwythwch ddeilliad $x^{\frac{1}{5}}.$
2. Gan ddefnyddio Rheol I a deilliad $x^2 + 1$ ($x > 0$), diddwythwch ddeilliad $(x-1)^{\frac{1}{2}}$ ($x > 1$).
3. Gan ddefnyddio Rheol I a deilliad $(x^2 + 1)^2$ ($x > 0$), diddwythwch ddeilliad $(x^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{2}}$

Gellir differu'r ffwythiannau trigonometrig gwrthdro trwy ddefnyddio Rheol I.

Enghraifft 5.3

Differu $\sin^{-1} x$

Nawr os yw $y = \sin^{-1} x$,

mae $\sin y = x$.

Yna mae $\frac{dx}{dy} = \cos y$

fel bod $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
 $= \frac{1}{\cos y}$
 $= \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 y}}$
 $= \frac{1}{\pm \sqrt{1 - x^2}},$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

gan fod $\sin y = x$.

Sut ydym ni'n penderfynu pa arwydd i'w ddewis?

Wrth drafod $\sin^{-1} x$ ym **Mhennod 3** nodwyd bod $\frac{dy}{dx} > 0$ yn y parth $[-1, 1]$, felly dewiswn yr arwydd +.

Felly $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$ Rheol II

Enghraifft 5.4

Differu $\cos^{-1} x$

Fel o'r blaen, os yw

$y = \cos^{-1} x$,

mae $\cos y = x$.

Felly mae $\frac{dx}{dy} = -\sin y$

fel bod $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
 $= -\frac{1}{\sin y}$
 $= -\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 y}}$

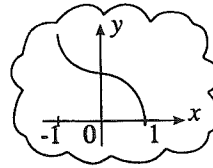
$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$= \mp \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

gan fod $\cos y = x$.

Fel a nodwyd yn gynharach, mae

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) < 0 \text{ dros y parth } [-1, 1]$$



fel bod $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Rheol III

Gofynnir i chi ddifferu $\tan^{-1} x$ yn yr ymarfer nesaf.

Ymarfer 5.2

Cwblhewch y canlynol trwy lenwi'r bylchau.

Os yw $y = \tan^{-1} x$,

$$\boxed{} = \boxed{}.$$

Felly $\frac{dx}{dy} = \boxed{}$

fel bod $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$= \frac{1}{\boxed{}}.$$

$$= \frac{1}{\boxed{}}.$$

$$= \frac{1}{1+x^2},$$

Mae $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$
ar gyfer unrhyw ongl y ,
adran 3.2

gan fod $\tan y = x$.

Cofiwch fod amwysedd ynghylch yr arwydd mewn perthynas â $\sin^{-1} x$ a $\cos^{-1} x$, ond nid oes unrhyw amwysedd yma.

Felly $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ Rheol IV

Gellir defnyddio rheolau II, III, IV ynghyd â'r rheolau differu eraill i ddifferu ffwythiannau mwy cymhleth.

Enghraifft 5.5

Differwch y canlynol mewn perthynas ag x .

(i) $\cos^{-1}(4x)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\tan^{-1}(\sqrt{x-1})$ (iv) $(1+x^2)\tan^{-1} x$

(i) Boed i $y = \cos^{-1}(4x) = \cos^{-1} u$,
lle mae $u = 4x$.

Nawr mae $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times 4$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}.$$

rheol
ffwythiant ffwythiant

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$u = 4x, \quad \frac{du}{dx} = 4.$$

(ii) Boed i $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1}(u)$,

lle mae $u = \frac{1}{x}$.

Nawr mae $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

(iii) Boed i $y = \tan^{-1}(u)$,

lle mae $u = \sqrt{x-1}$.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{1+u^2} \times \frac{d}{dx}(\sqrt{x-1}) \\ &= \frac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2} \times \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(1) \\ &= \frac{1}{1+x-1} \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

I ddifferu $\sqrt{x-1}$
gallem ysgrifennu
 $y = u^{\frac{1}{2}}$ lle mae
 $u = x-1$.

(iv) Boed i $y = (x^2 + 1) \tan^{-1} x$.

Yn ôl y rheol lluoswm gydag $u = x^2 + 1$, $v = \tan^{-1} x$,

$$\begin{aligned}\text{mae } \frac{dy}{dx} &= (\tan^{-1} x)(2x) + (x^2 + 1)\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) \\ &= 2x \tan^{-1} x + 1.\end{aligned}$$

$$v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

Gellir mireinio differiadau ffwythiannau megis (i), (ii), (iii) yn Enghraifft 5.5 os addaswn Reolau II, III, IV.

Er enghraifft, gadewch i ni ddifferu $\sin^{-1}(g(x))$, lle mae g yn cynrychioli ffwythiant.

Felly, os yw $y = \sin^{-1} u$, lle mae $u = g(x)$, mae

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \times g'(x)\end{aligned}$$

felly

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(g(x))) = \frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}} \times g'(x).$$

Rheol V

Yn yr un modd,

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}(g(x))) = -\frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}} \times g'(x).$$

Rheol VI

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}(g(x))) = \frac{1}{1+(g(x))^2} \times g'(x).$$

Rheol VII

Enghraifft 5.6

Defnyddiwch Reolau V, VI, VII i ddifferu'r canlynol mewn perthynas ag x .

(i) $\sin^{-1}(1-x)$ (ii) $\cos^{-1}(\sqrt{1-x})$ (iii) $\tan^{-1}(\cot x)$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1}(1-x)) &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \times \frac{d}{dx}(1-x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \times (-1) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}. \end{aligned}$$

Rheol V
 $g(x) = 1-x$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{d}{dx}(\cos^{-1}(\sqrt{1-x})) &= -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} \times \frac{d}{dx}(\sqrt{1-x}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)}} \times \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned}$$

Rheol VI
 $g(x) = \sqrt{1-x}$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(\cot x)) &= \left(\frac{1}{1+\cot^2 x} \right) \times \frac{d}{dx}(\cot x) \\ &= \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} \times -\operatorname{cosec}^2 x \\ &= -1, \end{aligned}$$

Rheol VII,
 $g(x) = \cot x$

(sy'n awgrymu gyda llaw fod $\tan^{-1}(\cot x) = -x + \text{cysynyn}$).

Yn yr ymarferion nesaf, gallwch ddefnyddio amnewidiadau neu, yn yr un modd, Reolau V, VI ac VIII.

Ymarferion 5.3

1. Differwch y canlynol mewn perthynas ag x , o wybod fod a yn gysonyn.

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ (iv) $\sin^{-1}(x^2)$

(v) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (vi) $x^2 \sin^{-1}(1-x)$ (vii) $\sin^{-1}(\sqrt{x})$ (viii) $\sin^{-1}(\cos x)$

(ix) $\sqrt{1-x^2} \cos^{-1} x$ (x) $\sqrt{\tan^{-1} x}$ (xi) $\sqrt{1-x^2} - \sin^{-1} x$

(xii) $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ (xiii) $\frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}$ (xiv) $(\sin^{-1} x)^2$ (xv) $\frac{1}{\tan^{-1} x}$

5.2 Differu ffwythiannau ymhlyg

Hyd yma, ysgrifennwyd y newidyn y yn nhermau x .

Mewn achosion o'r fath, dywedwn fod y yn ffwythiant echblyg o x .

er enghraifft,

$$y = \sin^{-1} x,$$

$$y = x^2 + 2x + 3$$

Ar y llaw arall, gallai hafaliad gysylltu y ac x fel nad yw'n bosibl neu'n hawdd ysgrifennu y yn nhermau x . Yna dywedir fod y yn ffwythiant **ymhlyg** o x . Er enghraifft, mae

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 14 = 0$$

$$\text{ac} \quad y^3 + xy + x^2 \sin y = 1$$

yn mynegi y yn ymhlyg yn nhermau x .

Er mwyn gwneud cynnydd wrth ddifferu ffwythiannau ymhlyg rhaid i ni ddifferu termau fel y^2 , xy^3 , $x^2 \sin y$ mewn perthynas ag x . Fe ddefnyddiwn y rheol ffwythiant ffwythiant ynghyd â rheolau eraill pan fo angen.

$$\begin{aligned} \text{Felly, mae} \quad \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dy}(y^2) \frac{dy}{dx} \\ &= 2y \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Rheol ffwythiant
ffwythiant

$$\begin{aligned} \text{Eto,} \quad \frac{d}{dx}(\cos y) &= \frac{d}{dy}(\cos y) \frac{dy}{dx} \\ &= -\sin y \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hefyd,} \quad \frac{d}{dx}(xy^3) &= y^3 \frac{d}{dx}(x) + x \frac{d}{dx}(y^3) \\ &= y^3 + x \frac{d}{dy}(y^3) \frac{dy}{dx} \\ &= y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Rheol lluoswm gydag
 $u = x, v = y^3$

$$\begin{aligned} \text{Yn olaf,} \quad \frac{d}{dx}(x^2 \sin y) &= \sin y \frac{d}{dx}(x^2) + x^2 \frac{d}{dy}(\sin y) \frac{dy}{dx} \\ &= 2x \sin y + x^2 \cos y \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Gellir crynhoi'r enghreifftiau uchod yn y rheolau canlynol.

$$\frac{d}{dx}[g(y)] = g'(y) \frac{dy}{dx},$$

Rheol VIII

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(y)] = g(y)f'(x) + f(x)g'(y) \frac{dy}{dx}.$$

Rheol IX

Enghraifft 5.7

Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o wybod bod
 $x^2 + 3x^2y^3 - 4y^2 - x = 0$.

Differwch mewn perthynas ag x .

$$2x + \frac{d}{dx}(3x^2y^3) - \frac{d}{dx}(4y^2) - 1 = 0.$$

$$\therefore 2x + 6xy^3 + 3x^2 \frac{d}{dx}(y^3) - 8y \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\text{felly } 2x + 6xy^3 + 9x^2y^2 \frac{dy}{dx} - 8y \frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

O gasglu'r termau yn $\frac{dy}{dx}$, fe gawn

$$(9x^2y^2 - 8y) \frac{dy}{dx} = 1 - 2x - 6xy^3$$

$$\text{felly } \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x - 6xy^3}{9x^2y^2 - 8y^3}.$$

Gellir darganfod hafaliadau tangiadau a normalau cromliniau'n hawdd pan fo'r cromliniau wedi eu mynegi ar ffurf hafaliadau, lle mae y yn dibynnu'n ymhlwg ar x .

Enghraifft 5.8

Darganfyddwch oledau'r tangiad a'r normal yn y pwynt (2, 3) o'r gromlin

$$xy^3 + y^2 - xy + x = 59.$$

Mae $\frac{dy}{dx}$ yn cynrychioli goled y tangiad ar unrhyw bwynt.

Differwch yr hafaliad mewn perthynas ag x .

$$y^3 + x \frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(y^2) - y - x \frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

$$\therefore y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - y - x \frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

$$\therefore (3xy^2 + 2y - x) \frac{dy}{dx} = y - y^3 - 1$$

$$\text{fel bod } \frac{dy}{dx} = \frac{y - y^3 - 1}{3xy^2 + 2y - x}.$$

$$\text{Yn y pwynt (2, 3), mae } \frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3^3 - 1}{3(2)(3)^2 + 2(3) - 2} = -\frac{25}{58}.$$

Goledd y normal yw

$$-\frac{1}{\text{goledd y tangiad}} = -\frac{1}{-\frac{25}{58}} = \frac{58}{25}.$$

Nodyn o Rybudd

Weithiau, rydym wedi sylwi bod myfyrwyr yn cyflwyno'r gwaith yn anghywir, fel a ganlyn.

O wybod bod $x^2 + y^2 + 3x^3y^2 - 1 = 0$, mae

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 9x^2y^2 + 6x^3y \frac{dy}{dx} = 0.$$

✗ ANGHYWIR

Y ffurf gywir yw

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} + 9x^2y^2 + 6x^3y \frac{dy}{dx} = 0.$$

✓ CYWIR

Ymarferion 5.4

- Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn y canlynol, gan fynegi eich ateb yn nhermau x ac y .
 - $x^2 + y^2 = 5$
 - $y^4 = 8x$
 - $x + 2y^2 = 4$
 - $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$
 - $x^2 + y^2 + 3xy = 2$
 - $x^3 + y^3 - 8 = 0$
 - $xy + y^3 - 2 = 0$
 - $y \cos x + y^2 = 0$
 - $x^2y^3 = 8$
 - $xy(x + y) = 4$
 - $x^2 + y^2 - 2xy + 3y - 2x + 5 = 0$
- Darganfyddwch oledau'r tangiad a'r normal ar gyfer y gromlin $3y^2 + 2x^2 = 14$ yn y pwynt $(1, 2)$.
- Darganfyddwch oled y tangiad i'r gromlin $x^3 + y^3 + 4x^2 + 3xy = 2x - 1$ yn y pwynt $(1, -1)$.
- Darganfyddwch oledau'r tangiad a'r normal i'r gromlin $x + y + x \cos y = 2 + \frac{\pi}{2}$ yn y pwynt $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

5.3 Differu ffwythiannau sydd wedi eu diffinio'n baramedrig

Yn aml, mae'n ddefnyddiol i ni fynegi x ac y yn nhermau trydydd newidyn a elwir yn baramedr, er enghraifft

$$x = t^3 + t, \quad y = 2t^2 + \sin t.$$

Yna os rhoddir gwerthoedd i t , gellir darganfod gwerthoedd cyfatebol ar gyfer x ac y a gellir eu plotio ar graff. Byddwn yn trafod yn fyr sut y caiff ffwythiannau o'r fath eu cynrychioli ar graff yn y bennod nesaf.

Ein diddordeb pennaf ar hyn o bryd yw sut i ddifferu ffwythiannau sydd wedi eu diffinio'n baramedrig.

Tybiwch fod $x = f(t)$, $y = g(t)$.

Boed i δt , δx , δy fod yn gynyddiadau bychain cyfatebol yn t , x ac y , yn ôl eu trefn.

Felly mae
$$\frac{\delta y}{\delta x} = \left(\frac{\delta y}{\delta t} \right) / \left(\frac{\delta x}{\delta t} \right).$$

Nawr wrth i $\delta t \rightarrow 0$, mae δx a $\delta y \rightarrow 0$.

Yna o gymryd bod
$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx},$$
$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt},$$
$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy}{dt}$$

ac mai terfan cyniferydd yw cyniferydd y terfannau, cawn fod

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

Rydym yn cymryd
y canlyniad hwn yn
ganiataol.

Felly, gellir differu y mewn perthynas ag x trwy ddifferu x ac y yn unigol, unwaith, mewn perthynas â'r paramedr t .

Enghraifft 5.9

O wybod bod $x = t^3 + t$, $y = 2t^2 + \sin t$,

darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau t .

Nawr mae $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 1$, $\frac{dy}{dt} = 4t + \cos t$

fel bod
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{4t + \cos t}{3t^2 + 1}.$$

Gellir diffinio goledau tangiadau a normalau unrhyw gromlin yn hawdd pan fo'r gromlin wedi ei mynegi'n baramedrig.

Enghraifft 5.10

O wybod bod $x = at$, $y = 2at^2$, lle mae a yn gysonyn, darganfyddwch oledau'r tangiad a'r normal i'r gromlin, yn y pwynt a ddisgrifir gan t .

Nawr mae $x = at$, $y = 2at^2$

felly
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right)$$
$$= \frac{4at}{a} = 4t.$$

Peidiwch â cheisio
diddymu t er mwyn
cael $2x^2 = ay$

Goledd y normal yw $-\frac{1}{4t}$.

Ymarferion 5.5

- Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn yr achosion canlynol, lle mae a ac c yn gysonion.
 - $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$
 - $x = ct, y = \frac{c}{t}$
 - $x = 2t^3, y = t^2$
 - $x = \sec t, y = \tan t$
 - $x = at^2, y = 2at$
 - $x = 3t + t^3, y = 3 - t^{\frac{5}{2}}$
 - $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$
 - $x = \frac{t}{1-t}, y = \frac{t^2}{1-t} \quad (t \neq 1)$
 - $x = (t+1)^2, y = t^2 - 1$
- Ar gyfer pa werthoedd o t y mae gan y cromliniau canlynol (sydd wedi eu mynegi'n baramedrig) bwyntiau sefydlog?
 - $x = t^2 + 1, y = t^3 - 3t$
 - $x = 2t + 5 \sin t, y = 2 + 5t + 5 \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$
 - $x = t^2 + t, y = te^{-t}$
- Darganfyddwch oledau'r tangiadau a'r normalau ar bwyntiau cyffredinol ar y cromliniau canlynol.
 - $x = t, y = \frac{1}{t+1}$
 - $x = t^3, y = t^4$
 - $x = \cos^2 t, y = 2 + \sin t$
 - $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$

Mae'n bosibl darganfod deilliadau uwch pan fo ffwythiannau wedi eu mynegi'n baramedrig. Yma, rydym am drafod deilliadau o radd dau'n unig.

Nawr fe wyddwn fod

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right).$$

pan fo'r paramedr yn t , wrth gwrs.

Gadewch i ni grynhoi hyn.

I ddifferu y mewn perthynas ag x , rydym yn differu y mewn perthynas â t ac yn rhannu â $\frac{dx}{dt}$.

Yna amnewidiwn $\frac{dy}{dx}$ am y yn y blychau.

Byddwch yn sylweddoli'n fuan pam ein bod yn defnyddio blychau.

Yna, i ddifferu $\frac{dy}{dx}$ mewn perthynas ag x , rydym yn differu $\frac{dy}{dx}$ mewn perthynas â t ac yn rhannu â $\frac{dx}{dt}$.

Felly

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right).$$

Enghraifft 5.11

Darganfyddwch $\frac{d^2y}{dx^2}$ o wybod bod $x = t^3$, $y = t^4$.

Nawr mae $\frac{dy}{dt} = 4t^3$, $\frac{dx}{dt} = 3t^2$

ac mae $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right)$
 $= \frac{4t^3}{3t^2} = \frac{4t}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{4t}{3} \right) / 3t^2 \\ &= \frac{4}{9t^2}. \end{aligned}$$

Enghraifft 5.12

Darganfyddwch a dosbarthwch y pwyntiau sefydlog ar y gromlin a fynegir yn baramedrig fel $x = 3t + t^3$, $y = 3t - t^3$.

Mae arnom angen $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Nawr mae $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right)$
 $= \frac{3 - 3t^2}{3 + 3t^2}$
 $= \frac{3(1 - t^2)}{3(1 + t^2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

Hefyd, mae $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) / \left(\frac{dx}{dt} \right)$
 $= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)}{3 + 3t^2}$;

drwy amnewid am $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{dx}{dt}$.

Nawr mae $\frac{d}{dt} \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) = \frac{(1 + t^2)(-2t) - (1 - t^2)(2t)}{(1 + t^2)^2}$

$$\frac{vdu - udy}{v^2}$$

rheol y cyniferydd

$$= \frac{-2t - 2t^3 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)^2}$$

$$= -\frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

Yna $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{dt} \bigg/ \left(\frac{dx}{dt}\right)$

$$= -\frac{4t}{(1+t^2)^2 \cdot (3+3t^2)}$$

felly $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{3} \frac{t}{(1+t^2)^3}.$

Ar gyfer pwynt sefydlog,

mae $\frac{dy}{dx} = 0$

fel bod $\frac{1-t^2}{1+t^2} = 0.$

$\therefore 1-t^2 = 0$

fel bod $t^2 = 1$

a $t = \pm 1.$

Os yw $\frac{a}{b} = 0$,
yna mae $a = 0$.

Pan fo $t = 1$, mae

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{3} \frac{1}{(1+1^2)^3} = -\frac{4}{24} = -\frac{1}{6} < 0,$$

sy'n cyfateb i bwynt macsimwm.

Pan fo $t = 1$, mae $x = 3(1) + (1)^3 = 4,$
 $y = 3(1) - (1)^3 = 2.$

Ceir pwynt macsimwm yn $(4, 2).$

Pan fo $t = -1$, mae

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{3} \frac{(-1)}{(1+(-1)^2)^3} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} > 0,$$

sy'n cyfateb i bwynt minimwm.

Pan fo $t = -1$, mae $x = 3(-1) + (-1)^3 = -4$
 $y = 3(-1) - (-1)^3 = -2.$

Ceir pwynt minimwm yn $(-4, -2).$

Ymarferion 5.6

1. Mae'r hafaliad paramedrig $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ yn cynrychioli cromlin.
Dangoswch fod $\frac{dy}{dx} = -\tan t$ a darganfyddwch werth $\frac{d^2y}{dx^2}$ pan fo $t = \frac{\pi}{6}$.
2. Os yw $x = \frac{2t+1}{t}$ ac $y = \frac{1+t}{1+2t}$ dangoswch fod $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2}{(1+2t)^2}$
a darganfyddwch werth $\frac{d^2y}{dx^2}$ pan fo $y = 0$.
3. Darganfyddwch $\frac{d^2y}{dx^2}$ pan fo $x = 1 + 2 \cos t$, $y = 1 + 3 \sin t$.
4. Os yw $x = \tan t$, $y = \sin t$ ar gyfer $0 \leq t < 2\pi$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$
a dangoswch fod $\frac{d^2y}{dx^2} = -3 \cos^4 t \sin t$.
5. O wybod bod y gromlin C wedi ei mynegi'n baramedrig gan
 $x = \frac{t^2}{2} + 3t$, $y = t^2 - 2t$, darganfyddwch werth $\frac{dy}{dx}$
a dangoswch fod $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{(t+3)^3}$.
Dangoswch mai dim ond un pwynt sefydlog sydd gan C ac mai minimwm yw hwnnw.
6. Darganfyddwch a dosbarthwch y pwyntiau sefydlog ar y gromlin a fynegir yn baramedrig gan
$$x = t - \sin t,$$
$$y = t + 2 \cos t,$$
ar gyfer $0 \leq t \leq 2\pi$.

Pennod 6

Rhagor o Geometreg Gyfesurynnol

Ym **Mhennod 5** buom yn ystyried agweddau gwahanol ar ddifferu a dangoswyd eto mor bwysig ydyw ar gyfer darganfod goledau tangiadau a normalau. Yn y bennod hon rhoddwn y sylw pennaf i broblemau'n ymwneud â thangiadau a normalau.

6.1 Hafaliadau tangiad a normal i gromlin

Rydym am ddechrau trwy ystyried enghraifft.

Enghraifft 6.1

Darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau i'r gromlin $y^2 = 16x$ ym mhwyntiau $(16, 16)$ ac $(1, -4)$. Dangoswch fod y tangiadau'n berpendicwlar a darganfyddwch gyfesurynnau eu croestorfan.

Gallwch gyfrifo goledd y tangiad trwy ystyried gwerth $\frac{dy}{dx}$. Felly rydym yn differu

$$y^2 = 16x$$

mewn perthynas ag x , gan gofio o adran 5.2 fod

$$\frac{d}{dx}(g(y)) = g'(y) \frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = 16$$

$$\text{fel bod} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{16}{2y} = \frac{8}{y}.$$

$$\text{Pan fo } y = 16, \text{ mae} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Felly hafaliad y tangiad yn $(16, 16)$ yw

$$y - 16 = \frac{1}{2}(x - 16)$$

$$\text{fel bod} \quad 2y - x - 16 = 0. \quad (1)$$

Yma mae $g(y) = y^2$.

Nid ydym
yn argymhell amnewid
 $y = \pm\sqrt{16x}$.

Pan fo $y = -4$, mae $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{-4} = -2$.

Hafaliad y tangiad yn $(1, -4)$ yw

$$y - (-4) = -2(x - 1)$$

sy'n rhoi $y + 2x + 2 = 0$. (2)

Goledd y ddau dangiad yw $\frac{1}{2}$ a -2 ac oherwydd bod $\frac{1}{2} \times -2 = -1$ mae'r tangiadau'n berpendicwlar.

Er mwyn dod o hyd i'r croestorfan, rydym yn datrys hafaliadau (1) a (2).

$$2y - x - 16 = 0, \quad (1)$$

$$y + 2x + 2 = 0. \quad (2)$$

Yna mae $(1) \times 2 + (2)$ yn rhoi

$$5y - 30 = 0$$

fel bod $y = 6$.

Wrth amnewid am y yn (1) cawn

$$2 \times 6 - x - 16 = 0$$

fel bod $x = -4$.

Y croestorfan felly yw $(-4, 6)$.

Nodwch nad ysgrifennwyd $y^2 = 16x$ fel $y = \pm 4\sqrt{x}$, er mwyn osgoi'r amwysedd gyda'r arwydd.

Enghraifft 6.2

Darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau i'r gromlin

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

yn y pwyntiau $\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ a $\left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Darganfyddwch gyfesurynnau croestorfan y tangiadau a dangoswch fod y pwynt hwn yn gorwedd ar y gromlin

$$4x^2 + 9y^2 = 72.$$

Gallwn ddod o hyd i $\frac{dy}{dx}$ trwy ddifferu

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

mewn perthynas ag x .

$$8x + \frac{d}{dx}(9y^2) = 0.$$

Yna $8x + \frac{d}{dy}(9y^2) \frac{dy}{dx} = 0$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{8x}{18y} = -\frac{4x}{9y}.$$

Gwiriwch yn (2).
 $6 + 2(-4) + 2 = 0$,
 yn ôl y gofyn.

Pan fo $x = \frac{12}{5}, y = \frac{6}{5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4 \times \frac{12}{5}}{9 \times \frac{6}{5}} = -\frac{8}{9}.$$

Hafaliad y tangiad yw

$$y - \frac{6}{5} = -\frac{8}{9} \left(x - \frac{12}{5} \right)$$

fel bod $9y - \frac{54}{5} = -8x + \frac{96}{5}.$

$\therefore 9y + 8x - \frac{150}{5} = 0$

neu $9y + 8x - 30 = 0. \quad (1)$

Pan fo $x = \frac{-9}{5}, y = \frac{8}{5}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y} = -\frac{4\left(-\frac{9}{5}\right)}{9\left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Hafaliad y tangiad yw

$$y - \frac{8}{5} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{9}{5} \right).$$

fel bod $2y - \frac{16}{5} = x + \frac{9}{5}.$

$\therefore 2y - x - \frac{25}{5} = 0$

fel bod $2y - x - 5 = 0. \quad (2)$

Er mwyn dod o hyd i'r croestorfan rydym yn datrys (1) a (2),

$$9y + 8x - 30 = 0 \quad (1)$$

$$2y - x - 5 = 0. \quad (2)$$

Mae (1) + 8 × (2) yn rhoi

$$9y + 16y - 30 - 40 = 0.$$

$\therefore 25y = 70$

fel bod $y = \frac{14}{5}.$

Mae amnewid am y yn (2) yn rhoi

$$\frac{28}{5} - x - 5 = 0$$

fel bod $x = \frac{3}{5}.$

Felly $\left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$ yw'r croestorfan.

Ar gyfer y pwynt hwn, mae

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 &= 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 9\left(\frac{14}{5}\right)^2 \\ &= \frac{1}{25}[4 \times 9 + 9 \times 196] \\ &= \frac{1}{25} \times 1800 = 72. \end{aligned}$$

Er ei bod yn ddefnyddiol cynrychioli cromliniau yn y dull cyfesurynnol Cartesaidd, gellir cael trafferthion wrth ei ddefnyddio i ddarganfod hafaliad tangiad ar bwynt cyffredinol ar gromlin.

Enghraifft 6.3

Darganfyddwch hafaliad y tangiad i'r gromlin $4x^2 + 16y^2 = 1$ yn y pwynt (x_1, y_1) .

Nawr trwy ddifferu

$$\begin{aligned} 4x^2 + 16y^2 &= 1 \\ \text{cawn} \quad 8x + 32y \frac{dy}{dx} &= 0. \\ \therefore \quad \frac{dy}{dx} &= -\frac{8x}{32y} = -\frac{x}{4y}. \end{aligned}$$

Yn (x_1, y_1) ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{4y_1}.$$

Hafaliad y tangiad yw

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{4y_1}(x - x_1)$$

sy'n rhoi $4y_1y - 4y_1^2 = -x_1x + x_1^2$.

$$\therefore 4y_1y + x_1x = 4y_1^2 + x_1^2. \quad (1)$$

Gellir symleiddio hafaliad (1) trwy luosi â 4.

$$\therefore 16y_1y + 4x_1x = 16y_1^2 + 4x_1^2$$

$$\text{ac felly} \quad 16y_1y + 4x_1x = 1$$

yw hafaliad y tangiad.

Mae'r ffurf hon ar hafaliad yn gryno ac felly'n ddeniadol. Er hynny, mae gan yr hafaliad hwn un anfantais yn y ffordd y mae wedi ei ysgrifennu: mae'r berthynas rhwng x_1 ac y_1 wedi ei chuddio. Cofiw'n mai'r berthynas hon yw $4x_1^2 + 16y_1^2 = 1$ a gallwn ysgrifennu

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{1 - 16y_1^2}{4} \\ \text{er mwyn cael} \quad x_1 &= \frac{\pm\sqrt{1 - 16y_1^2}}{2}. \end{aligned}$$

Mae (x_1, y_1) yn gorwedd ar y gromlin.

Hafaliad y tangiad felly yw $16y_1y \pm 2\sqrt{1-16y_1^2}x = 1$, ffurf lai deniadol ar yr hafaliad.

Mae'n ddymunol fod y berthynas rhwng cyfesurynnau pwynt sy'n gorwedd ar y gromlin yn amlwg tra ydym yn gweithio trwy broblem.

Mae cynrychiolaeth baramedrig yn ddefnyddiol yn hyn o beth.

Cofiwn fod cyfesurynnau pwynt ar gromlin yn cael eu hysgrifennu yn nhermau paramedr yn y gynrychiolaeth hon.

Gweler
Pennod 5

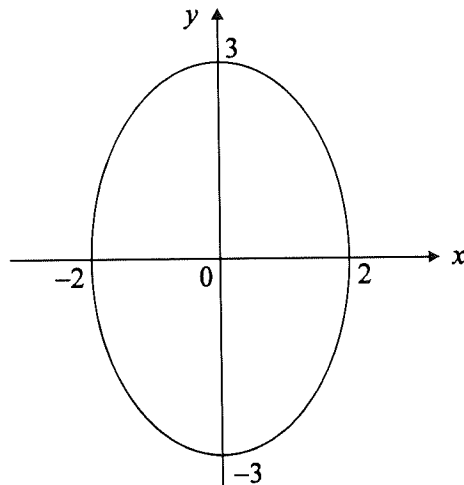
Enghraifft 6.4

O wybod bod $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$ gallwn blotio'r pwyntiau (x, y) ar gyfer gwerthoedd amrywiol o t . Yn gyntaf, gadewch i ni greu tabl o werthoedd ar gyfer x ac y .

t	$x = 2 \cos t$	$y = 3 \sin t$
0	2	0
45°	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$
90°	0	3
135°	$-\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$
180°	-2	0
225°	$-\sqrt{2}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{2}$
270°	0	-3
315°	$\sqrt{2}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{2}$
360°	2	0

Rydym wedi
cyfyngu gwerthoedd t ,
er hwylustod.

Caiff gwerthoedd
eu hailadrodd pan fo t
yn fwy na 360°.



Dyma'r gromlin wedi ei phlotio, lle gofynnir i chi gymryd yn ganiataol fod y siâp cyflawn fel yr un a ddangosir.

Mae enghraifft 6.4 yn dangos, o gael cromlin wedi ei chynrychioli'n baramedrig, ei bod yn bosibl plotio'r gromlin trwy gymryd gwerthoedd o'r paramedr. Mewn egwyddor, gellir darganfod hafaliad Cartesaidd y gromlin trwy ddiddymu'r paramedr.

Enghraifft 6.5

Darganfyddwch hafaliad Cartesaidd y cromliniau a ddisgrifir gan yr hafaliadau canlynol.

- (a) $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$
 (b) $x = 1 - \cos t, y = t + \sin t$.

- (a) $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$.

Gellir diddymu'r paramedr trwy nodi fod

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Mae amnewid am $\cos t$ a $\sin t$ yn rhoi

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{neu } 9x^2 + 4y^2 = 36.$$

Lluoswch
â 36

- (b) $x = 1 - \cos t, y = t + \sin t$.

Nid yw diddymu t mor amlwg ag yr oedd yn (a). Trwy ddefnyddio'r hafaliad x cawn

$$x = 1 - \cos t$$

$$\text{fel bod } \cos t = 1 - x.$$

$$\therefore t = \cos^{-1}(1 - x)$$

$$\begin{aligned} \text{hefyd } \sin t &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} \\ &= \pm \sqrt{1 - (1 - x)^2} \\ &= \pm \sqrt{2x - x^2}. \end{aligned}$$

Yna mae defnyddio'r hafaliad y yn rhoi

$$y = \cos^{-1}(1 - x) \pm \sqrt{2x - x^2},$$

sydd ddim yn hafaliad deniadol.

Fel y gwelwyd yn enghraifft 6.5, gellir cael hafaliad Cartesaidd o'r hafaliadau paramedrig yn hawdd weithiau, ac yn anodd dro arall, ac efallai na fydd hafaliad fel yr un yn (b) yn datgelu nodweddion perthynas. Gan gofio hyn, rydym yn

eich cynghori, pan fo gennych gynrychiolaeth bamedrig, y dylech ddefnyddio'r gynrychiolaeth honno yn hytrach na cheisio darganfod yr hafaliad Cartesaidd, os nad oes gofyn i chi ddod o hyd i hwnnw.

Cyn ystyried yr enghraifft nesaf gadewch i ni gofio, o Bennod 5, os yw

$x = x(t)$, $y(t)$ yna mae

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt}.$$

Enghraifft 6.6

P yw'r pwynt $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ ar y gromlin $xy = c^2$. Mae'r tangiad yn P yn cyfarfod â'r echelin x yn A a'r echelin y yn B . Dangoswch fod arwynebedd triongl AOB yn annibynnol ar t .

Nawr mae $x = ct$, $y = \frac{c}{t}$

a $\frac{dx}{dt} = c$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{c}{t^2}$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = -\frac{c}{t^2} \bigg/ c = -\frac{1}{t^2}.$

Rydym yn eich atgoffa:
arhoswch gyda'r gynrychiolaeth
bamedrig.

Felly hafaliad y tangiad yn $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ yw

$$y - \frac{c}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - ct)$$

sy'n rhoi $t^2y + x - 2ct = 0$.

Ar gyfer y pwynt A , mae $y = 0$ ac mae

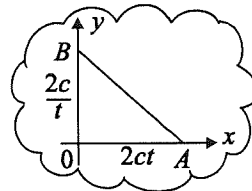
$$0 + x - 2ct = 0.$$

$\therefore x = 2ct.$

Ar gyfer y pwynt B , mae $x = 0$ ac mae

$$t^2y + 0 - 2ct = 0.$$

$\therefore y = \frac{2c}{t}.$



Arwynebedd triongl AOB yw

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}AO \times OB &= \frac{1}{2} \times 2ct \times \frac{2c}{t} \\ &= 2c^2, \quad \text{nad yw yn cynnwys } t. \end{aligned}$$

Enghraifft 6.7

P yw'r pwynt $(2 \cos t, \sin t)$ ar y gromlin $x^2 + 4y^2 = 4$. Mae'r normal i'r gromlin yn P yn cyfarfod â'r echelin x yn A a'r echelin y yn B .

- (a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a B , a chymryd fod $\sin t \neq 0$, $\cos t \neq 0$.
 (b) Dangoswch fod C , canolbwynt AB , yn bwynt ar y gromlin $16x^2 + 4y^2 = 9$.

(a) Goledd y tangiad yw $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$
 a goled y normal yw

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{dx}{dt} / \frac{dy}{dt}.$$

Goledd y tangiad
 $\times$ goled y normal = -1 ,
 yr amod ar gyfer llinellau
 perpendicwlar.

Nawr mae $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ fel bod goled y normal yn hafal i

$$\frac{-(-2 \sin t)}{\cos t} = \frac{2 \sin t}{\cos t}.$$

Hafaliad y normal yw

$$y - \sin t = \frac{2 \sin t}{\cos t} (x - 2 \cos t).$$

$$\therefore (\cos t)y - \sin t \cos t = (2 \sin t)x - 4 \sin t \cos t$$

$$\text{fel bod } (\cos t)y - (2 \sin t)x + 3 \sin t \cos t = 0.$$

A Pan fo $y = 0$, mae

$$0 - (2 \sin t)x + 3 \sin t \cos t = 0$$

$$\text{fel bod } x = \frac{3}{2} \cos t,$$

$$\text{gan gymryd bod } \sin t \neq 0.$$

B Pan fo $x = 0$, mae

$$(\cos t)y - 0 + 3 \sin t \cos t = 0$$

$$\text{fel bod } y = -3 \sin t,$$

$$\text{gan gymryd bod } \cos t \neq 0.$$

- (b) Cyfesurynnau canolbwynt AB , sef C , yw

$$\left(\frac{1}{2} \left(0 + \frac{3}{2} \cos t \right), \frac{1}{2} (0 - 3 \sin t) \right)$$

$$\text{h.y. } \left(\frac{3}{4} \cos t, -\frac{3}{2} \sin t \right).$$

$$\text{Felly ar gyfer } C, \text{ mae } x = \frac{3}{4} \cos t, \quad y = -\frac{3}{2} \sin t$$

$$\text{fel bod } \cos t = \frac{4x}{3}, \quad \sin t = -\frac{2y}{3}.$$

Yna mae $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

yn rhoi $\left(\frac{4x}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2y}{3}\right)^2 = 1.$

$\therefore \frac{16x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1$

fel bod $16x^2 + 4y^2 = 9.$

Enghraifft 6.8

Darganfyddwch hafaliad y normal ym mhwynt $P(ap^2, 2ap)$ ar y gromlin $y^2 = 4ax$.

Mae'r normal yn P yn cyfarfod â'r gromlin eto ym mhwynt $Q(aq^2, 2aq)$.

Dangoswch fod

$$2q + pq^2 - 2p - p^3 = 0.$$

O wybod bod $q = -3$, darganfyddwch werth p .

Nawr mae $x = ap^2$, $y = 2ap$ fel bod goled y tangiad yn

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \bigg/ \frac{dx}{dp} = \frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}.$$

Felly, goled y normal yw $-p$.

Hafaliad y normal yw

$$y - 2ap = -p(x - ap^2)$$

sy'n rhoi $y + px - 2ap - ap^3 = 0. \quad (1)$

Mae'r normal yn torri trwy'r gromlin ym mhwynt $Q(aq^2, 2aq)$.

Trwy amnewid am $x = aq^2$, $y = 2aq$ yn (1) cawn

$$2aq + apq^2 - 2ap - ap^3 = 0$$

sy'n mynd yn $2q + pq^2 - 2p - p^3 = 0, \quad (2)$

trwy ganslo a trwyddo.

Pan fo $q = -3$, aiff hafaliad (2) yn

$$-6 + 9p - 2p - p^3 = 0$$

neu $p^3 - 7p + 6 = 0. \quad (3)$

Yn ôl y theorem ffactorio, mae $p - 1$ yn ffactor.

Felly mae (3) yn symleiddio i

$$(p - 1)(p^2 + p - 6) = 0$$

$\therefore (p - 1)(p - 2)(p + 3) = 0.$

Mae'r gwreiddyn $p = -3$ yn cyfateb i'r pwynt Q , fel bod $p = 1$ neu 2 .

Pan fo $p = 1$,
mae $p^3 - 7p + 6$
 $= 1^3 - 7 + 6 = 0$

Ymarferion 6.1

1. Dangoswch mai hafaliad y normal ym mhwynt $(2, 3)$ ar y gromlin $xy = 6$ yw $3y - 2x - 5 = 0$. Hefyd, dewch o hyd i gyfesurynnau'r pwynt lle mae'r normal yn cyfarfod â'r gromlin eto.
2. Dangoswch mai hafaliad y tangiad i'r gromlin $xy^2 = 1$ ym mhwynt $P\left(t^2, \frac{1}{t}\right)$ yw $2t^3y + x - 3t^2 = 0$.
Mae'r tangiad yn cyfarfod â'r echelin x yn Q . Dangoswch fod canolbwynt PQ yn gorwedd ar y gromlin $2xy^2 = 1$.
3. Mae $P(ap^2, 2ap)$, $Q(aq^2, 2aq)$, $R(ar^2, 2ar)$ yn dri phwynt ar y gromlin $y^2 = 4ax$. Mae'r tangiad yn P yn baralel i'r cord QR .
(a) Dangoswch fod $q + r = 2p$.
(b) Dangoswch fod y llinell sy'n cysylltu P â chanolbwynt QR yn baralel i'r echelin x .
4. Darganfyddwch hafaliad y tangiad yn y pwynt $P(5 \cos t, 3 \sin t)$ ar y gromlin $9x^2 + 25y^2 = 225$.
Dangoswch fod hafaliad y normal yn P yn $(3 \cos t)y - (5 \sin t)x + 16 \sin t \cos t = 0$.
Mae'r tangiad yn P yn croestorri'r echelin y yn R ac mae'r normal yn P yn croestorri'r echelin y yn S . O wybod mai O yw'r tardd, dangoswch fod $OR \cdot OS = 16$.
5. Darganfyddwch hafaliad y normal yn y pwynt $P(ap^2, 2ap)$ ar y gromlin $y^2 = 4ax$. O wybod bod y normal hwn yn mynd trwy'r pwynt $(4a, 4a)$ dangoswch fod $p^3 - 2p - 4 = 0$.
Dangoswch mai dim ond un gwerth sy'n bodloni'r hafaliad hwn a nodwch y gwerth hwnnw.
6. $P(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ yw'r pwynt ar y gromlin C a gynrychiolir gan $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
(a) Dangoswch fod hafaliad y tangiad i C yn P yn $y \cos t + x \sin t = a \sin t \cos t$.
(b) Mae'r tangiad yn P yn cyfarfod â'r echelin x yn R a'r echelin y yn S .
Darganfyddwch y gwerth magsimwm ar gyfer arwynebedd triongl ORS , gydag O yn dardd.

Pennod 7

Integru I

Rydym eisoes wedi edrych ar integru yn **P1** a **P2**, lle cyflwynwyd nifer o ffurfiau safonol. Yn y bennod hon, cyflwynir rhai technegau a fydd yn ein galluogi i integru ffwythiannau sy'n fwy cymhleth na'r ffurf safonol.

7.1 Ffurffau safonol

Mae'r canlyniadau a gawsom o ddifferu ffwythiannau trigonometrig gwrthdro ym **Mhennod 5** yn ein galluogi i estyn y rhestr o ffurfiau safonol a roddwyd yn **P1** a **P2**. Rhestrir y ffurfiau safonau hyn isod er hwylustod. Ni chynhwysir y cysonion integriad.

$\underline{g(x)}$	$\underline{\int g(x)dx}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} (n \neq -1)$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\cot x$
$\operatorname{cosec} x \cot x$	$-\operatorname{cosec} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\cos^{-1} x$
e^x	$\tan^{-1} x$
$\frac{1}{x}$	e^x
	$\ln x $

Mae differu'r golofn dde yn rhoi'r golofn chwith.

Cysonyn yw'r gwahaniaeth rhwng $\sin^{-1} x$ a $-\cos^{-1} x$.

Yn **P2** defnyddiwyd rhai o'r ffurfiau safonol i integru ffwythiannau yn y ffurf $f(ax + b)$, lle mae a a b yn gysonion.

Enghraifft 7.1

Ni chynhwysir y cysonion integriad yn y canlynol.

$$(a) \quad \int \cos(2x + 5) dx = \frac{1}{2} \sin(2x + 5)$$

$$(b) \quad \int \sin(2 - 4x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2 - 4x)$$

$$(c) \quad \int e^{5x-7} dx = \frac{1}{5} e^{5x-7}$$

$$(d) \quad \int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \ln |3x+2|$$

Nodwyd yn **P2** nad yw'r canlyniadau uchod yn ddilys oni bai bod y mynegiad mewnol yn y ffurf $ax + b$. Felly

$$\int \cos(3x^2 + 2x + 7) dx \neq \frac{\sin(3x^2 + 2x + 7)}{6x + 2}.$$

Y mathau o ganlyniadau a roddir yn (a)-(d) uchod yw'r man cychwyn ar gyfer golwg pellach ar integru.

7.2 Golwg cyntaf ar integru trwy amnewid

Mae'n amlwg fod integru ffwythiannau'n llwyddiannus yn golygu adnabod y ffwythiannau fel rhai sydd mewn ffurf safonol, neu ffurf sy'n agos at fod yn safonol. Felly, i ddarganfod

$$\int 7(3x - 2)^4 dx$$

rydym yn sylweddoli bod $(3x - 2)^4$ yn cynnwys y mynegiad llinol $3x - 2$.

Yna o **P2**, gallwn ysgrifennu

$$\begin{aligned} \int 7(3x - 2)^4 dx &= \frac{7(3x - 2)^5}{5 \times 3} + k \\ &= \frac{7(3x - 2)^5}{15} + k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int c(ax + b)^n dx \\ &= \frac{c(ax + b)^{n+1}}{n+1}, \\ &\text{Rheol IV} \end{aligned}$$

Unwaith eto, i ddarganfod

$$\int 2 \cos(5x + 7) dx$$

rydym yn sylweddoli bod $\cos(5x + 7)$ yn cynnwys y mynegiad llinol $5x + 7$, ac felly mae

$$\int 2 \cos(5x + 7) dx = \frac{2 \sin(5x + 7)}{5} + k.$$

I ddatblygu ein syniadau ymhellach, gadewch i ni ailystyried y ddau integryn uchod trwy wneud defnydd o amnewidiad neu wahanol newidyn.

Enghraifft 7.2

Darganfyddwch $\int 7(3x - 2)^4 dx$. (1)

Gadewch i $u = 3x - 2$. (2)

Differwch (2) mewn perthynas ag x .

$$\therefore \frac{du}{dx} = 3.$$

Gellir trin $\frac{du}{dx}$ fel ffracsiwn

fel bod modd ysgrifennu $\frac{du}{dx} = 3$

fel $du = 3 dx$

sy'n rhoi $dx = \frac{1}{3} du$. (3)

Amnewidiwch am $3x - 2$ o (2) a dx o (3), i (1).

Yna mae $\int 7(3x - 2)^4 dx$ yn mynd yn

$$\begin{aligned} \int 7u^4 \frac{1}{3} du &= \frac{7}{3} \int u^4 du \\ &= \frac{7}{3} \int u^4 du \\ &= \frac{7}{3} \cdot \frac{u^5}{5} + \text{cysonyn} \\ &= \frac{7}{15} (3x - 2)^5 + \text{cysonyn}, \end{aligned}$$

Mae integru
nawr mewn perthynas
ag u .

$u = 3x - 2$, o (2)

sef yr ateb a gafwyd ynghynt.

Enghraifft 7.3

Darganfyddwch $\int 2 \cos(5x + 7) dx$. (1)

Gadewch i $u = 5x + 7$ (2)

fel bod $\frac{du}{dx} = 5$

neu $du = 5 dx$.

$\therefore dx = \frac{1}{5} du$. (3)

Mae amnewid o (2) a (3) i (1) yn rhoi

$$\begin{aligned} \int 2 \cos(5x + 7) dx &= \int 2 \cos u \frac{1}{5} du \\ &= \frac{2}{5} \int \cos u du \\ &= \frac{2}{5} \sin u + \text{cysonyn}. \\ &= \frac{2}{5} \sin(5x + 7) + \text{cysonyn}. \end{aligned}$$

Ymarferion 7.1

Defnyddiwch amnewidiad yn y ffurf $u = ax + b$, lle mae a a b yn gysonion, i ddarganfod yr integrynnau canlynol.

- (a) $\int (2x+1)^2 dx$ (b) $\int \frac{1}{(3x+5)^2} dx$ (c) $\int \sin(9x+1) dx$
 (d) $\int \sec^2(2x+9) dx$ (e) $\int \operatorname{cosec}(3x+1) \cot(3x+1) dx$
 (f) $\int \sqrt{3x-7} dx$ (g) $\int \frac{dx}{2x+1}$ (h) $\int \frac{1}{\sqrt{9x+2}} dx$

Roedd yr integriadau yn Enghreifftiau 7.2, 7.3 ac Ymarferion 7.1 yn perthyn yn agos i ddifferu ffwythiant ffwythiant.

Cofiwn fod

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

a gellir ystyried bod y ddau integryn yn Enghreifftiau 7.2, 7.3, sef

(a) $\int 7(3x-2)^4 dx$

(b) $\int 2 \cos(5x+7) dx$,

yn y ffurf

$$\int f'(g(x))g'(x) dx,$$

ar wahân i rai ffactorau cyson nad ydynt yn amharu ar strwythur cyffredinol yr integrynnau.

Felly, gadewch i ni droi yn awr at integrynnau mwy cyffredinol sydd yn y ffurf

$$\int f'(g(x))g'(x) dx,$$

lle nad yw $g(x)$ o reidrwydd yn fynegiad llinol yn x .

Os gadawn i $u = g(x)$

yna mae $\frac{du}{dx} = g'(x)$

ac mae $du = g'(x) dx$.

Yna mae amnewid am $g(x)$ a $g'(x) dx$ yn $\int f'(g(x))g'(x) dx$,

yn rhoi $\int f'(u) du = f(u) + \text{cysonyn}$

$$= f(g(x)) + \text{cysonyn}.$$

Mae hwn yn ganlyniad pwysig ac felly mae'n cael ei arddangos yma.

Rheol Amnewid

Os cewch integryn yn y ffurf

$$\int f'(g(x))g'(x) dx,$$

ysgrifennwch $u = g(x)$

$$du = g'(x) dx.$$

(A)

Yn (a) $f'(x) = x^4$

$g(x) = 3x - 2.$

Yn (b) $f'(x) = \cos x,$

$g(x) = 5x + 7.$

e.e.

$$\int \cos(x^3 + x)(3x^2 + 1) dx$$

Cyn i ni roi cynnig ar rai enghreifftiau, gadewch i ni nodi ffurf yr integryn

$$f'(g(x))g'(x)$$

yn (A).

Ceir y term $g'(x)$ trwy ddifferu rhan fewnol $f'(g(x))$.

Enghraifft 7.4

Darganfyddwch $\int (3x^2 + 1) \cos(x^3 + x + 1) dx$.

h.y.

$$g(x) = x^3 + x + 1$$

Nawr mae $\cos(x^3 + x + 1)$ yn ffwythiant cyfansawdd ac mae

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x + 1) = 3x^2 + 1 \text{ hefyd yn bresennol yn yr integryn.}$$

Boed i $u = (x^3 + x + 1)$

fel bod $\frac{du}{dx} = 3x^2 + 1$

neu $du = (3x^2 + 1) dx$.

Yna mae $\int (3x^2 + 1) \cos(x^3 + x + 1) dx$

$$= \int \cos u du = \sin u + k$$

$$= \sin(x^3 + x + 1) + k.$$

Mae'r ddau hyn yn rhoi du .

Enghraifft 7.5

Defnyddiwch amnewidiad i ddarganfod

$$\int 4x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$$

$$g(x) = x^4 + 1$$

Boed i $u = x^4 + 1$

fel bod $du = 4x^3 dx$.

Mae'r integryn yn mynd yn

$$\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + k$$

$$= \frac{2}{3} (x^4 + 1)^{\frac{3}{2}} + k.$$

Enghraifft 7.6

Defnyddiwch amnewidiad i ddarganfod

$$\int (x^2 + 1) \sec^2(x^3 + 3x + 1) dx$$

Yma nodwn fod y term mewnol

$$g(x) = x^3 + 3x + 1$$

fel bod $g'(x) = 3x^2 + 3.$

Er nad yw $f'(x)$ yn bresennol yn yr integryn nodwn fod $x^2 + 1 = \frac{1}{3}g'(x).$

Boed i $u = x^3 + 3x + 1$

$\therefore \frac{du}{dx} = 3x^2 + 3$

fel bod $du = (3x^2 + 3) dx$
 $= 3(x^2 + 1) dx.$

Yna mae $(x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} du.$

Mae'r integryn yn mynd yn

$$\begin{aligned} \int \sec^2 u \frac{1}{3} du &= \frac{1}{3} \int \sec^2 u du \\ &= \frac{1}{3} \tan u + k \\ &= \frac{1}{3} \tan (x^3 + 3x + 1) + k. \end{aligned}$$

Enghraifft 7.7

Darganfyddwch $\int x^4 e^{x^5+1} dx.$

Yma nodwn ein bod bron â chael x^4 wrth ddifferu $x^5 + 1$,
 ar wahân i gysonyn sydd ar goll.

$$g(x) = x^5 + 1$$

Boed i $u = x^5 + 1$

fel bod $\frac{du}{dx} = 5x^4$

a $x^4 dx = \frac{1}{5} du.$

Mae'r integryn yn mynd yn

$$\begin{aligned} \int e^u \frac{1}{5} du &= \frac{1}{5} \int e^u du \\ &= \frac{1}{5} e^u + k \\ &= \frac{1}{5} e^{x^5+1} + k. \end{aligned}$$

Enghraifft 7.8

Darganfyddwch $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$.

Yma nodwn ein bod yn cael $2x$ trwy ddifferu $x^2 + 4$, sy'n hafal i $2 \times$ rhan uchaf y ffracsiwn.

Boed i $u = x^2 + 4$

fel bod $\frac{du}{dx} = 2x$

sy'n rhoi $x dx = \frac{1}{2} du$.

Mae'r integryn yn mynd yn

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u} \frac{1}{2} du &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + \text{cysonyn} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4| + \text{cysonyn}. \end{aligned}$$

Mae enghreifftiau 7.5 a 7.8 yn cynrychioli sefyllfaoedd arbennig lle mae'r integrynnau ar ffurf

cysonyn $\times \int (g(x))^n g'(x) dx$,

cysonyn $\times \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$.

$$\begin{aligned} &\int 4x^3 (x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\int \frac{x}{x^2 + 4} dx \end{aligned}$$

Gwelwn yr achosion hyn yn aml ac efallai y bydd o ddefnydd i chi feddwl amdanynt fel ffurfiau safonol. Yna trwy ddefnyddio'r amnewidiad $u = g(x)$ cawn

$$\int (g(x))^n g'(x) dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + k, \quad (\text{B})$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + k. \quad (\text{C})$$

Ymarferion 7.2

Mae'r integrynnau canlynol ar ffurf cysonyn $\times \int f(g(x)) g'(x) dx$. Defnyddiwch amnewidiadau neu, os yw'n briodol, ffurfiau safonol (B) ac (C) i ddarganfod yr integrynnau canlynol.

(a) $\int x^2(x^3 + 1)^4 dx$

(b) $\int \frac{x^3}{x^4 + 2} dx$

(c) $\int \frac{x}{(x^2 + 3)^2} dx$

- (d) $\int x^2 \sec^2(x^3 + 1) dx$ (e) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx$ (f) $\int (2x+1) \sin(x^2 + x + 5) dx$
 (g) $\int e^x(1 + e^x)^3 dx$ (h) $\int \sqrt{1 - \sin x} \cos x dx$ (i) $\int \sqrt{x^2 + 4x + 1}(x+2) dx$
 (j) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{2}}} dx$ (k) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx$ (l) $\int (\sin(2x) + 4)^3 \cos(2x) dx$
 (m) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ (n) $\int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx$ (o) $\int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx$
 (p) $\int \tan^2 x \sec^2 x dx$ (q) $\int \sin^3 x \cos x dx$ (r) $\int \operatorname{cosec}^2 x \cot x dx$

Gwahanwch un o'r termau cosec.

7.3 Golwg eto ar integru trwy amnewid

Yn yr adran flaenorol gwelwyd pa mor ddefnyddiol oedd yr amnewidiad $u = g(x)$ pan oedd yr integryn yn ei hanfod yn y ffurf $\int f'(g(x)) g'(x) dx$.

Yn yr adran hon byddwn yn sôn am sefyllfaoedd eraill lle mae amnewidiadau yn ddefnyddiol.

Enghraifft 7.9

Trwy ysgrifennu $u = 5 - 3x$, integrwch $x(5 - 3x)^{20}$ mewn perthynas ag x .

Rhaid i ni ddarganfod $\int x(5 - 3x)^{20} dx$. (1)

Boed i $u = 5 - 3x$. (2)

Yna mae $\frac{du}{dx} = -3$

fel bod $dx = -\frac{1}{3} du$. (3)

Trwy astudio'r integryn yn (1) gwelwn fod rhaid i ni amnewid am x , $(5 - 3x)^{20}$ a dx . Bydd y ddau amnewidiad olaf yn defnyddio (2) a (3). Ar gyfer x nodwn fod

$u = 5 - 3x$
 fel bod $x = \frac{5-u}{3}$. (4)

Trwy amnewid o (2), (3), (4) i (1) cawn

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{5-u}{3} \right) u^{20} \cdot -\frac{1}{3} du &= -\frac{1}{9} \int (5-u) u^{20} du \\ &= -\frac{1}{9} \int (u^{21} - 5u^{20}) du \\ &= \frac{u^{22}}{9 \times 22} - \frac{5u^{21}}{9 \times 21} + k \\ &= \frac{(5-3x)^{22}}{198} - \frac{5(5-3x)^{21}}{189} + k. \end{aligned}$$

Cofiwch fod yn rhaid i'r integryn terfynol gynnwys u yn unig.

Enghraifft 7.10

Darganfyddwch $\int \frac{2-3x}{\sqrt{1+x}} dx$ trwy ysgrifennu $u = \sqrt{1+x}$.

Nawr mae $u = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ (1)

yn rhoi $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

$\therefore dx = 2\sqrt{1+x} du$. (2)

Nawr rhaid i ni gael gwared ag unrhyw beth sy'n ymwneud ag x o'r integryn.

Beth am y term $2-3x$?

Nawr mae $u = \sqrt{1+x}$

fel bod $u^2 = 1+x$

ac mae $x = u^2 - 1$.

Yna mae $2-3x = 2-3(u^2-1)$

fel bod $2-3x = 5-3u^2$. (3)

Trwy amnewid o (2), (3) i'r integryn cawn

$$\begin{aligned} \int \frac{5-3u^2}{\sqrt{1+x}} 2\sqrt{1+x} dx &= \int 2(5-3u^2) du \\ &= 2 \int 5-3u^2 du \\ &= 2(5u - u^3) + k \\ &= 10u - 2u^3 + k \\ &= 10\sqrt{1+x} - 2(1+x)^{\frac{3}{2}} + k. \end{aligned}$$

Unwaith eto: cofiwch sicrhau mai dim ond termau u sydd yn yr integryn terfynol.

Enghraifft 7.11

Nawr gwyddom fod

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + k$$

neu $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + k$.

(a) Trwy ysgrifennu $x = au$, darganfyddwch

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} \quad (\text{mae } a \text{ yn gysonyn}).$$

(b) Trwy ysgrifennu $u = 2x$, darganfyddwch

$$\int \frac{dx}{1+4x^2}.$$

(a) $x = au$ (1)

fel bod $\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$

neu $dx = a du$ (2)

Amnewidiwch o (1) a (2) i $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

Mae'r integryn yn mynd yn

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 + a^2 u^2} a \, du &= a \int \frac{1}{a^2(1+u^2)} \, du \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{a} \tan^{-1} u + k \\ &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + k. \end{aligned}$$

Yma eto, dim ond termau u sydd yn yr integryn.

$$\begin{aligned} x &= au, \\ u &= \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

(b) $u = 2x$ (1)

fel bod $\frac{du}{dx} = 2$

neu $dx = \frac{1}{2} du$. (2)

Amnewidiwch o (1) a (2) i $\int \frac{dx}{1+4x^2}$.

Mae'r integryn yn mynd yn

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{2} du &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} (u) + k \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} (2x) + k. \end{aligned}$$

$$u = 2x$$

Yn aml, gellir cael gwared ag ail israddau mewn integrynnau trwy ddefnyddio amnewidiadau trigonometrig. Hanfod trawsffurfiadau o'r fath yw bod

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1,$$

$$1 + \tan^2 u = \sec^2 u,$$

ar gyfer unrhyw werth o u .

Enghraifft 7.12

Defnyddiwch yr amnewidiad $x = 3 \sin u$

i ddarganfod $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Nawr mae $x = 3 \sin u$

fel bod $\frac{dx}{du} = 3 \cos u$.

Gellid datrys hwn hefyd trwy ddefnyddio $x = 3u$ a defnyddio $\int \frac{dx}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + \text{cysonyn}.$

$$\therefore dx = 3 \cos u \, du. \quad (1)$$

$$x = 3 \sin u$$

$$\begin{aligned} \text{Hefyd } \sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-9\sin^2 u} \\ &= \sqrt{9(1-\sin^2 u)} \\ &= \sqrt{9\cos^2 u}. \end{aligned}$$

Pan welwch $\sin^2 u$,
meddylwch am $\cos^2 u$.

$$\therefore \sqrt{9-x^2} = 3 \cos u \quad (2)$$

Mae'r integryn yn
ymwneud ag u yn unig.

Trwy amnewid o (1) a (2) i'r integryn cawn

$$\begin{aligned} \int \frac{3 \cos u}{3 \cos u} du &= \int du \\ &= \int 1 \, du \\ &= u + k \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + k. \end{aligned}$$

Mae'r 1 wedi
ei gynnwys er mwyn gwneud
pethau'n gliriach.

$$\begin{aligned} x &= 3 \sin u \\ \therefore \sin u &= \frac{x}{3} \\ \therefore u &= \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right). \end{aligned}$$

Nodwch fod yr amnewidiad trigonometrig wedi ein galluogi i gael gwared â'r ail isradd yn yr integryn.

Enghraifft 7.13

Defnyddiwch yr amnewidiad $x = 5 \sin u$ i ddarganfod $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Nawr mae } x &= 5 \sin u \\ \text{fel bod } \frac{dx}{du} &= 5 \cos u \\ \text{a } dx &= 5 \cos u \, du. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Hefyd } \sqrt{25-x^2} &= \sqrt{25-25\sin^2 u} \\ &= \sqrt{25(1-\sin^2 u)} \\ &= \sqrt{25\cos^2 u}. \\ \therefore \sqrt{25-x^2} &= 5 \cos u. \end{aligned} \quad (2)$$

Trwy amnewid o (1) a (2) i'r integryn cawn

$$\begin{aligned} \int \frac{(5 \sin u)^2}{5 \cos u} 5 \cos u \, du &= \int 25 \sin^2 u \, du \\ &= 25 \int \sin^2 u \, du. \end{aligned}$$

Mae angen defnyddio fformiwla ongl ddwbl gyda'r integryn $\int \sin^2 x \, dx$.

$$\begin{aligned} \text{Nawr mae } \cos 2u &= 1 - 2 \sin^2 u \\ \text{fel bod } \sin^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{2}. \end{aligned}$$

Gweler Adran 4.2

$$\therefore 25 \int \sin^2 u \, du = 25 \int \frac{1 - \cos 2u}{2} du$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{25}{2} \int (1 - \cos 2u) \, du \\
 &= \frac{25}{2} \left(\int 1 \, du - \int \cos 2u \, du \right) \\
 &= \frac{25u}{2} - \frac{25}{2} \cdot \frac{\sin 2u}{2} + k \\
 &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{5} \right) - \frac{25}{2} \cdot \frac{2 \sin u \cos u}{2} + k \\
 &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{5} \right) - \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + k. \\
 &= \frac{25}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{5} \right) - \frac{25}{2} \cdot \frac{x}{5} \cdot \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5} + k
 \end{aligned}$$

$x = 5 \sin u$
 $u = \sin^{-1} \left(\frac{x}{5} \right)$
 $\sqrt{25 - x^2} = 5 \cos u$
 $\therefore \cos u = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5}$

Ymarferion 7.3

1. Defnyddiwch yr amnewidiadau i ddarganfod yr integrynnau amhendant canlynol.

Nodwch fod

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + k$$

- (a) $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2} \, dx \quad (u = x^3 + 1)$ (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad (x = 2u)$
- (c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad (u = 1 - x^2)$ (d) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad (x = \sin u)$
- (e) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} \, dx \quad (u = 2x + 1)$ (f) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+2 \sin x}} \, dx \quad (u = 1 + 2 \sin x)$
- (g) $\int \frac{dx}{4+x^2} \quad (x = 2 \tan u)$ (h) $\int \frac{x(x^2-2)}{x^2+4} \, dx \quad (u = x^2 + 4)$
- (i) $\int x\sqrt{x^2+1} \, dx \quad (u = x^2 + 1)$ (j) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \quad (u = 2x)$
- (k) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx \quad (u = e^x)$
- (l) $\int \tan x \, dx \quad \left(\text{mae } u = \cos x \text{ a nodwch fod } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \right)$
- (m) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx \quad (u = x^2 + 1)$ (n) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx \quad (x = \tan u)$
- (o) $\int \sin^4 x \cos x \, dx \quad (u = \sin x)$ (p) $\int \sqrt{25-x^2} \, dx \quad (x = 5 \sin u)$

2. Darganfyddwch yr integrynnau canlynol trwy wneud defnydd o amnewidiadau addas.

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ (dau amnewidiad posibl) (b) $\int \sqrt{9-x^2} dx$

(c) $\int \sqrt{1+\sin x} \cos x dx$ (d) $\int \frac{dx}{9+x^2}$

(e) $\int \frac{dx}{1+9x^2}$ (f) $\int \cos^5 x \sin x dx$

(g) $\int \sec^2 x \tan x dx$ (h) $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} dx$ (dau amnewidiad posibl).

3. Defnyddiwch yr amnewidiadau i ddarganfod yr integrynnau canlynol.

(a) $\int \frac{5x}{\sqrt{x-2}} dx$ ($u = \sqrt{x-2}$)

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ ($u = x^2$)

(c) $\int x(x-1)^6 dx$ ($u = x-1$)

(d) $\int (x-1)(x+2)^5 dx$ ($u = x+2$)

(e) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ($x = \sin u$)

(f) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$ ($x = 2 \sin u$)

Pennod 8

Integru II

Yn y bennod hon byddwn yn cyflwyno rhai technegau ychwanegol ar gyfer darganfod integrynnau amhendant a byddwn hefyd yn ailystyried integrynnau pendant fel y rhai a gyflwynwyd yn P1.

8.1 Integru trwy ddefnyddio ffracsiynau rhannol

Cyflwynwyd ffracsiynau rhannol yn Adran 2.2. Pan ddefnyddiwyd ffracsiynau rhannol i ddarganfod integrynnau, gwelwyd bod dau integryn safonol yn ymddangos yn aml. Am y rheswm hwn, rydym am ystyried y mathau hyn o integrynnau ymhellach.

Enghraifft 8.1

Darganfyddwch yr integrynnau canlynol.

$$(a) \int \frac{4}{3+5x} dx \quad (b) \int \frac{6}{(2x+3)^2} dx$$

Bydd yn ddefnyddiol os gallwch ddarganfod yr integrynnau uchod yn gyflym. Am y rheswm hwn, rydym wedi gwneud crynodeb o rai o'r canlyniadau cyffredinol (mae'r cysonyn integru wedi ei adael allan er hwylustod).

$$\left[\begin{array}{l} \int \frac{cdx}{ax+b} = \frac{c}{a} \ln|ax+b|. \\ \int \frac{c}{(ax+b)^2} dx = -\frac{c}{a(ax+b)}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (A) \\ (B) \end{array}$$

amnewid $u = ax + b$

Rydym yn eich cyngori i ddysgu'r canlyniadau uchod yn drwyadl.

Gan ddychwelyd at yr integrynnau yn (a) a (b), trwy ddefnyddio'r fformiwla cawn:

$$(a) \int \frac{4}{3+5x} dx = \frac{4}{5} \ln|3+5x|$$

$$(b) \int \frac{6}{(2x+3)^2} dx = \frac{-6}{2(2x+3)} = \frac{-3}{(2x+3)}$$

Unwaith eto, nid ydym yn cynnwys y cysonyn integru.

Ymarferion 8.1

Darganfyddwch yr integrynnau canlynol cyn gynted â phosibl.

$$(a) \int \frac{1}{3-2x} dx \quad (b) \int \frac{6}{(4x-7)^2} dx \quad (c) \int \left[\frac{2}{3x+2} + \frac{5}{(3x+2)^2} \right] dx$$

Rydym yn awr yn barod i ddefnyddio ffracsiynau rhannol i ddarganfod integrynnau pendant. Rydym yn eich cyngori i gyfeirio at Adran 2.2 i'ch atgoffa eich hun o'r gwahanol fathau o ffracsiynau.

Enghraifft 8.2

Defnyddiwch ffracsiynau rhannol i ddarganfod yr integryn amhendiant

$$\int \frac{4x-1}{(x-2)(2x+3)} dx.$$

Rydym am rannu'r integrand yn ffracsiynau rhannol fel yr awgrymwyd.

$$\text{Boed i } \frac{4x-1}{(x-2)(2x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+3}, \quad (1)$$

Dau ffactor llinol yn yr enwadur.

lle mae A a B yn gysonion.

Cewch wared â'r ffracsiynau yn (1) trwy luosi popeth gyda $(x-2)(2x+3)$.

$$\therefore 4x-1 \equiv A(2x+3) + B(x-2). \quad (2)$$

Boed i $x=2$ yn (2).

$$\therefore 4(2)-1 = A(2(2)+3) + B(0)$$

$$\text{fel bod } 7 = 7A$$

$$\therefore A = 1.$$

Boed i $x = -\frac{3}{2}$ yn (2).

$$\therefore 4\left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = A(0) + B\left(-\frac{3}{2} - 2\right)$$

$$\text{fel bod } -7 = B\left(-\frac{7}{2}\right).$$

$$\therefore B = 2.$$

Mae dewis gwerthoedd addas ar gyfer x yn diddymu un o'r cyfernodau.

Trwy ddefnyddio'r ffracsiynau rhannol yn yr integrand, cawn

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{1}{x-2} + \frac{2}{2x+3} \right] dx &= \ln|x-2| + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+3| + k \\ &= \ln|(x-2)(2x+3)| + k, \end{aligned}$$

trwy gyfuno logarithmau.

Integrwch derm wrth derm a defnyddiwch ganlyniad (A) ddwywaith.

Enghraifft 8.3

Defnyddiwch ffracsiynau rhannol i ddarganfod

$$\int \frac{7x^2 + 2}{(x-1)(x+2)^2} dx.$$

Boed i $\frac{7x^2 + 2}{(x-1)(x+2)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2},$ (1)

Un ffactor llinol,
un ffactor llinol wedi ei
ailadrodd.

Ile mae A , B ac C yn gysonion.

Cewch wared â'r ffracsiynau trwy luosi popeth yn (1) ag $(x-1)(x+2)^2$.

$$\therefore 7x^2 + 2 \equiv A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1). \quad (2)$$

Boed i $x = 1$ yn (2).

$$\therefore 7(1)^2 + 2 = A(1+2)^2 + B(0) + C(0)$$

$$\text{fel bod} \quad 9 = 9A.$$

$$\therefore A = 1.$$

Boed i $x = -2$ yn (2).

$$\therefore 7(-2)^2 + 2 = A(0) + B(0) + C(-2-1)$$

$$\text{fel bod} \quad 30 = -3C$$

$$\therefore C = -10.$$

Nid oes gwerth amlwg arall o x i'w amnewid.

Boed i $x = 0$ yn (2).

$$\therefore 7(0)^2 + 2 = A(2)^2 + B(-1)(2) + C(-1)$$

$$\text{fel bod} \quad 2 = 4A - 2B - C$$

$$= 4(1) - 2B - (-10)$$

$$= 14 - 2B.$$

$$\therefore 2B = 14 - 2 = 12$$

$$\text{fel bod} \quad B = 6.$$

$$\begin{matrix} A = 1 \\ C = -10 \end{matrix}$$

Trwy ddefnyddio'r ffracsiynau rhannol yn yr integryn, cawn

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{6}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2} \right] dx &= \ln|x-1| + 6 \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + k \\ &= \ln(|x-1||x+2|^6) + \frac{10}{x+2} + k, \end{aligned}$$

trwy gyfuno'r logarithmau.

Crynodeb

Gellir crynhoi'r gwaith yn enghreifftiau 8.2 ac 8.3 fel a ganlyn. Mae'r llythrennau bach $a, b, c, d, e, f, l, m, n, p, q, r, s, t$ yn cynrychioli cysonion a roddir, mae'r priflythrennau A, B, C, D, E ac F yn dynodi cysonion i'w darganfod, ac mae k yn gysonyn integru mympwyol.

Achos I

$$\begin{aligned} & \int \frac{lx+m}{(ax+b)(cx+d)} dx \\ &= \int \frac{A}{ax+b} dx + \int \frac{B}{cx+d} dx \\ &= \frac{A}{a} \ln|ax+b| + \frac{B}{c} \ln|cx+d| + k. \end{aligned}$$

Achos II

$$\begin{aligned} & \int \frac{nx^2+px+q}{(ax+b)(cx+d)^2} dx \\ &= \int \frac{C}{ax+b} dx + \int \frac{D}{cx+d} dx + \int \frac{E}{(cx+d)^2} dx \\ &= \frac{C}{a} \ln|ax+b| + \frac{D}{c} \ln|cx+d| - \frac{E}{c(cx+d)} + k. \end{aligned}$$

Ymarferion 8.2

1. Dangoswch fod

$$\int \frac{3x+4}{(x-2)(x+3)} dx = \ln|(x-2)^2(x+3)| + k.$$

2. Dangoswch fod

$$\int \frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)} dx = \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{1}{x+1} + k.$$

3. Integrwch y canlynol mewn perthynas ag x .

(a) $\frac{x+1}{3x^2-x-2}$

(b) $\frac{5x+2}{x^2-4x+4}$

(c) $\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$

A oes angen
ffracsiynau rhannol
yma?

(d) $\frac{1}{4x^2-9}$

(e) $\frac{1}{16-x^2}$

(f) $\frac{18-x}{12x^2-7x-12}$

(g) $\frac{1+5x+x^2}{x(x+1)^2}$

(h) $\frac{x+1}{(x-1)^2}$

(i) $\int \frac{1}{4x-x^2} dx$

4. Darganfyddwch $\int \frac{x}{1-x^2} dx$ trwy

- (a) ffracsiynau rhannol (b) amnewid $u = 1 - x^2$.

8.2 Integru fesul rhan

Gwelsom ym Mhennod 7 ei bod yn bosibl integru lluosymiau ffwythiannau o dan rai amgylchiadau. Felly, er enghraifft, mae

$$\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}(\sin x^2) + k.$$

$u = x^2$ yw'r amnewidiad.

Er hynny, nid yw amnewid yn ddefnyddiol pan geisiwn ddarganfod

$$\int x \cos x dx$$

a rhaid meddwl am ffordd wahanol o ddatrys y broblem.

Y dull a ddefnyddiwn yw'r hyn a elwir yn integru fesul rhan ac mae'n perthyn yn agos i'r dull o ddifferu lluoswm.

Nawr mae $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$

Gweler P2

Trwy integru, cawn

$$\int \frac{d}{dx}(uv) dx = \int v \frac{du}{dx} dx + \int u \frac{dv}{dx} dx$$

fel bod $uv = \int v \frac{du}{dx} dx + \int u \frac{dv}{dx} dx$

Mae integru a differu yn canslo ei gilydd.

$$\therefore \int v \frac{du}{dx} dx = uv - \int u \frac{dv}{dx} dx. \quad (1)$$

Gelwir canlyniad (1) yn integru fesul rhan neu'r fformiwla rhannau.

Hanfod y dull integru fesul rhan yw ein bod yn amnewid integryn $\left(\int v \frac{du}{dx} dx \right)$

am integryn sy'n haws i'w ddarganfod $\left(\int u \frac{dv}{dx} dx \right).$

Enghraifft 8.4

Darganfyddwch $\int x \cos x dx$.

Nawr mae'r integryn yn lluoswm o ddau derm, sef x a $\cos x$.

Y fformiwla rhannau yw

$$\int v \frac{du}{dx} dx = uv - \int u \frac{dv}{dx} dx. \quad (1)$$

Boed i $v = x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x$

fel bod $\frac{dv}{dx} = 1, \quad u = \sin x,$

Peidiwch â phoeni am y dewis arall sy'n bosibl: $v = \cos x, \quad \frac{du}{dx} = x$ ar hyn o bryd. Fe drafodwn hyn yn nes ymlaen.

gan anwybyddu'r cysonyn integru pan fyddwn yn darganfod u o $\frac{du}{dx}$ trwy

integru.

Mae amnewid am $u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ yn (1) yn rhoi

$$\begin{array}{ccccccc} \int x \cos x \, dx & = & (\sin x)x - \int \sin x \cdot 1 \, dx \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v & \frac{du}{dx} & u & v \\ & & = x \sin x - (-\cos x) + k = x \sin x + \cos x + k. \end{array}$$

Felly, rhoddwyd integryn haws, sef $\int \sin x \, dx$, yn lle $\int x \cos x \, dx$ mewn gwirionedd.

Weithiau, fe ddefnyddir y fformiwla integru fesul rhan fwy nag unwaith mewn cwestiwn.

Enghraifft 8.5

Darganfyddwch $\int x^2 e^x \, dx$.

Y fformiwla rhannau yw

$$\int v \frac{du}{dx} \, dx = uv - \int u \frac{dv}{dx} \, dx. \quad (1)$$

Boed i $v = x^2, \frac{du}{dx} = e^x$

fel bod $\frac{dv}{dx} = 2x, u = e^x$.

Yna mae'r fformiwla rhannau (1) yn rhoi

$$\int x^2 e^x \, dx = (e^x)x^2 - \int e^x \cdot 2x \, dx$$

fel bod $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx. \quad (2)$

Nawr nid oes modd integru $\int x e^x \, dx$ yn syth oherwydd presenoldeb y term yn x .

Gadewch i ni ddefnyddio'r dull o integru fesul rhan i ddatrys $\int x e^x \, dx$.

Boed i $v = x, \frac{du}{dx} = e^x$

fel bod $\frac{dv}{dx} = 1, u = e^x$.

$$\begin{array}{l} \int v \frac{du}{dx} \, dx \\ = uv - \int u \frac{dv}{dx} \, dx \end{array}$$

Yna mae $\int x e^x \, dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 \, dx$
 $= e^x x - \int e^x \, dx$

fel bod $\int x e^x \, dx = e^x x - e^x + k.$

Trwy amnewid o (2) a (3) i (1) cawn

$$\begin{array}{l} \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(e^x x - e^x) + k \\ = (x^2 - 2x + 2)e^x + k. \end{array}$$

Roedd yr integrynnau yn 8.5 ac 8.6 yn cynnwys pŵer o x (x ac x^2 , yn ôl eu trefn) a dewiswyd y pwerau hynny o x fel v . Roedd y dewis ar gyfer v yn addas gan ei bod yn hawdd darganfod u o $\frac{du}{dx}$ yn y ddau achos. Gellir crynhoi'r ddwy enghraifft hyn yn y rheol ganlynol ar gyfer dewis v a $\frac{du}{dx}$.

$$\frac{du}{dx} = \cos x, u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x, u = e^x$$

Pan fyddwch yn defnyddio integru fesul rhan, os yw un o'r ffwythiannau'n cynnwys polynomial yn x a bod modd integru'r ffwythiant arall yn hawdd, gadewch i

$$v = \text{polynomial yn } x,$$

$$\frac{du}{dx} = \text{rhan arall yr integrand.}$$

Rheol I

Neu,

Pan nad oes modd integru'r rhan arall yn hawdd, dewiswn

$$\frac{du}{dx} = \text{polynomial yn } x,$$

a $v = \text{rhan arall yr integrand.}$

Rheol II

Enghraifft 8.6

Darganfyddwch $\int x^2 \ln x \, dx$.

Yma nid yw'n hawdd integru $\ln x$, felly rhaid defnyddio Rheol II.

Boed i $v = \ln x$, $\frac{du}{dx} = x^2$,

fel bod $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$, $u = \frac{x^3}{3}$.

Yna mae $\int v \frac{du}{dx} dx = uv - \int u \frac{dv}{dx} dx$

$$\begin{aligned} \text{yn rhoi } \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + k. \end{aligned}$$

Cofiw'n fod $x^0 = 1$ fel bod modd defnyddio Rheol II pan nad yw'n amlwg fod pŵer o x yn bresennol.

Enghraifft 8.7

Darganfyddwch $\int \tan^{-1} x \, dx$.

$$x^0 = 1$$

Nawr mae $\int \tan^{-1} x \, dx = \int 1 \cdot \tan^{-1} x \, dx$.

Cawn ddefnyddio Rheol II gan nad yw'n hawdd integru $\tan^{-1} x$.

Dyna beth
yw'r cwestiwn!

Boed i $v = \tan^{-1} x$, $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$,

fel bod $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, $u = x$.

Yna mae $\int v \frac{du}{dx} dx = uv - \int u \frac{dv}{dx} dx$

yn rhoi $\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$
 $= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + k.$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|$$

Ymarferion 8.3

1. Defnyddiwch integru fesul rhan i ddarganfod yr integrynnau amhendant isod.

- (a) $\int x \sin x \, dx$ (b) $\int x^2 \cos x \, dx$ (c) $\int (x+1)e^x \, dx$
 (d) $\int x^3 \ln 2x \, dx$ (e) $\int x^2 e^{-x} \, dx$ (f) $\int \sin^{-1} x \, dx$
 (g) $\int \ln x \, dx$ (h) $\int x \cos 2x \, dx$ (i) $\int (\pi - x) \sin 3x \, dx$

2. Trwy ddefnyddio amnewidiad, dangoswch fod

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2},$$

gan anwybyddu'r cysonyn integru.

Defnyddiwch integru fesul rhan i ddarganfod

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin^{-1} x \, dx.$$

3. Defnyddiwch integru fesul rhan i ddangos bod

$$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1}[\ln(x+1) - 2] + k \text{ a chymryd bod } x > -1.$$

4. Defnyddiwch integru fesul rhan i ddangos bod

$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} \ln x - \ln(x+1) + k, \text{ a chymryd bod } x > 0.$$

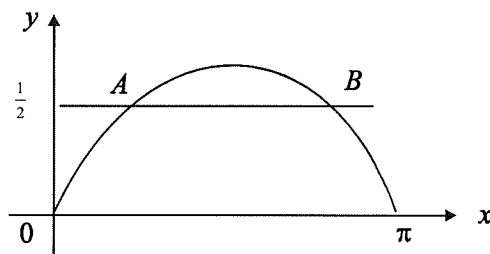
8.3 Integrynnau pendant

Ystyriwn nifer o enghreifftiau. Cofiw'n fod

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Enghraifft 8.8

Brasluniwch y gromlin $y = \sin x$ a'r llinell $y = \frac{1}{2}$ rhwng $x = 0$ ac $x = \pi$. Ar gyfer y gwerthoedd hyn o x , cyfrifwch yr arwynebedd uwchben y llinell ac o dan y gromlin.



Rydym â diddordeb yn y rhan sydd wedi ei thywyllu.

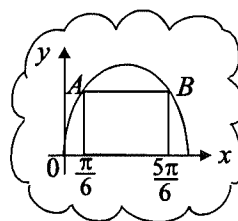
Mae'r gromlin a'r llinell yn croestorri ym mhwyntiau A a B , ac mae cyfesurynnau x y pwyntiau hyn yn bodloni

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad (\text{gan wneud gwerthoedd } y \text{ yn hafal})$$

felly mae
$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}.$$

Rhan a dywyllwyd = arwynebedd o dan y gromlin rhwng pwyntiau A, B
– arwynebedd y petryal a dywyllwyd

$$\begin{aligned} &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin x \, dx - \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= [-\cos x]_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$



Enghraifft 8.9

Darganfyddwch $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx$

Defnyddiwch integru fesul rhan gyda

$$\begin{aligned} v &= x, & \frac{du}{dx} &= \cos 2x \\ \frac{dv}{dx} &= 1, & u &= \frac{\sin 2x}{2} \end{aligned}$$

Rheol 1

$$\begin{aligned} &\int v \frac{du}{dx} \, dx \\ &= uv - \int u \frac{dv}{dx} \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Yna mae } \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx &= \left[\left(\frac{\sin 2x}{2} \right) x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2} \, dx \\
 &= \left[\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{\pi}{4} \sin \pi + \frac{\cos \pi}{4} - 0 - \frac{\cos 0}{4} \\
 &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Fel y gwelsom ynghynt, weithiau cyfrifir integrynnau trwy amnewid am newidyn newydd. Weithiau, mae'n drafferthus ailysgrifennu'r canlyniad yn nhermau'r newidyn gwreiddiol (gweler enghraifft 7.13). Pan fyddwn yn darganfod integrynnau pendant gallwn osgoi'r broses o ailosod y newidyn gwreiddiol trwy newid y terfannau fel eu bod yn cyfateb i'r newidyn newydd.

Enghraifft 8.10

Cyfrifwch $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \, dx$.

Rydym am ddefnyddio'r amnewidiad $u = x^2 + 16$

fel bod $\frac{du}{dx} = 2x$

a $dx = \frac{1}{2x} du$.

Rydym hefyd am drawsffurfio'r terfannau.

Pan fo $x = 0$, mae $u = x^2 + 16 = 0^2 + 16 = 16$,

$x = 3$, $u = 3^2 + 16 = 9 + 16 = 25$.

Yna bydd yr integryn yn

$$\begin{aligned}
 \int_{16}^{25} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2x} &= \frac{1}{2} \int_{16}^{25} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{16}^{25} u^{-\frac{1}{2}} \, du \\
 &= \left[u^{\frac{1}{2}} \right]_{16}^{25} \\
 &= 25^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{2}} = 5 - 4 = 1.
 \end{aligned}$$

Nodwch y terfannau 'newydd'. Peidiwch â defnyddio 'hen' derfannau gyda'r newidyn newydd.

Enghraifft 8.11

Cyfrifwch $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$ trwy ddefnyddio'r amnewidiad $x = 2 \sin u$.

Nawr mae $x = 2 \sin u$

fel bod $\frac{dx}{du} = 2 \cos u$

neu $dx = 2 \cos u \, du$.

Hefyd $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2 \sin u)^2}$
 $= \sqrt{4-4 \sin^2 u}$
 $= \sqrt{4(1-\sin^2 u)}$
 $= \sqrt{4 \cos^2 u}.$

$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

$\therefore \sqrt{4-x^2} = 2 \cos u.$

Rydym hefyd am drawsffurfio'r terfannau.

Mae $x = 0$ yn rhoi $0 = 2 \sin u$

fel bod $u = \sin^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) = 0.$

$x = 2 \sin u$

Mae $x = 2$ yn rhoi $2 = 2 \sin u$

fel bod $\sin u = 1,$

$u = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}.$

Yna bydd yr integryn yn

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} 2 \cos u \cdot 2 \cos u \, du &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2u}{2} \, du \end{aligned}$$

Amnewidiwch
am dx , $\sqrt{4-x^2}$
a'r terfannau.

$\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$
 $\frac{\cos 2u + 1}{2} = \cos^2 u$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2u \, du$$

$$= 2 \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 - \frac{\sin 0}{2} \right]$$

$$= \pi.$$

Enghraifft 8.12

Cyfrifwch $\int_0^2 \frac{x(x^2 + 2)}{x^2 + 4} dx$, trwy ddefnyddio'r amnewidiad $u = x^2 + 4$.

Nawr mae $u = x^2 + 4$

fel bod $\frac{du}{dx} = 2x$

a $dx = \frac{1}{2x} du$.

Nodwn fod modd ysgrifennu $x^2 + 2$ yn nhermau u fel a ganlyn:

$$x^2 + 2 = x^2 + 4 - 2 = u - 2.$$

Rydym hefyd am drawsffurfio'r terfannau.

Pan fo $x = 0$, mae $u = x^2 + 4 = 0^2 + 4 = 4$,

$$x = 2, \quad u = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8.$$

Yna bydd yr integryn yn

$$\begin{aligned} \int_4^8 \frac{x(u-2)}{u} \cdot \frac{1}{2x} du &= \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{u-2}{u} du \\ &= \frac{1}{2} [u - 2 \ln u]_4^8 \\ &= \frac{1}{2} [8 - 2 \ln 8 - 4 + 2 \ln 4] \\ &= \frac{1}{2} \left[4 + \ln \frac{4^2}{8^2} \right] = \frac{1}{2} \left[4 + \ln \frac{16}{64} \right] \\ &= 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{2} \ln 4 \\ &= 2 - \ln 2. \end{aligned}$$

Rhaid i'r integryn terfynol gynnwys u yn unig.

Ymarferion 8.4

1. Cyfrifwch yr integrynnau canlynol.

(a) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9-2x}}$

(b) $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$

(c) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$

(d) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{25-4x^2}} dx$

(e) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$

(f) $\int_0^2 \frac{x+1}{(x+2)^2} dx$ $\{u=x+2\}$

(g) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

$x = 4 \sin u$
neu $x = 4u$

(h) $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x dx$

(i) $\int_0^5 \frac{dx}{x^2 + 25}$

$x = 5 \tan u$
neu $x = 5u$

(j) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$

(k) $\int_1^2 x^4 \ln x dx$

(l) $\int_0^1 xe^{-2x} dx$

2. Cyfrifwch yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = \cos x$, yr echelin x a'r llinellau $x = 0$ ac $x = \frac{\pi}{2}$.
3. Cyfrifwch yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = \cos^{-1} x$, yr echelin x a'r llinellau $x = 0$ ac $x = 1$.
4. Cyfrifwch yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = \tan x$, yr echelin x a'r llinellau $x = 0$ ac $x = \frac{\pi}{4}$.
5. Cyfrifwch yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = x \sin x$, yr echelin x a'r llinellau $x = 0$ ac $x = \frac{\pi}{2}$.
6. Brasluniwch y llinell $y = \frac{1}{2}$ a'r gromlin $y = \sin 2x$ rhwng $x = 0$ ac $x = \frac{\pi}{4}$.
Cyfrifwch yr arwynebedd yn eich braslun rhwng y llinell $y = \frac{1}{2}$, y gromlin $y = \sin 2x$, a'r llinell $x = \frac{\pi}{4}$.

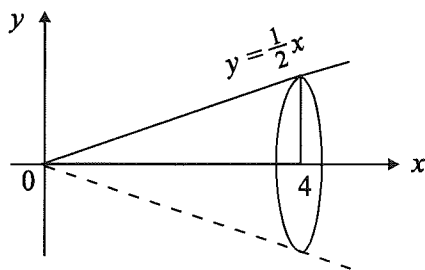
8.4 Cyfeintiau solidau cylchdro

Gellir defnyddio integrynnau pendant i gyfrifo cyfeintiau arwynebeddau cylchdro. Dangosir y dull hwn trwy wneud enghraifft.

Enghraifft 8.13

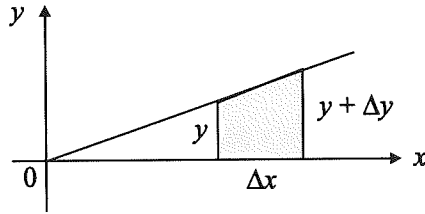
Cyfrifwch gyfaint y solid a geir trwy gylchdroi o gwmpas yr echelin x yr arwynebedd o dan $y = \frac{1}{2}x$, o $x = 0$ i $x = 4$.

Mae'r arwynebedd dan sylw wedi ei dywyllu yn y diagram. Gwelwn fod cylchdroi'r rhan dywyll yn creu côn.



Gofynnir i ni ddarganfod cyfaint y côn hwn.

Dangosir elfen nodweddiadol o arwynebedd o dan $y = \frac{1}{2}x$ isod.



Mae cylchdroi'r arwynebedd hwn o gwmpas yr echelin x yn creu elfen nodweddiadol o gyfaint. Yn fras, yr hyn yw'r elfen gyfeintiol hon yw silindr o drwch Δx , gyda radiws un o'r wynebaw cylchol yn y , a radiws y llall yn $y + \Delta y$. Felly mae'r cyfaint a geir yn gorwedd rhwng un silindr a chanddo gyfaint o $\pi y^2 \Delta x$ a silindr a chanddo gyfaint o $\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$.

Mae maint yr elfen a dywyllwyd wedi'i dangos yn fwy nag ydyw mewn gwirionedd.

Mae swm cyfeintiau'r silindrau llai (neu fwy) yn frasmcan o'r cyfaint sydd ei angen. Trwy wneud Δx yn ddigon bach, gallwn sicrhau bod y swm hwn yn mynd mor agos ag y dymunwn at gyfaint y solid cylchdro.

Felly mae'r cyfaint sydd ei angen $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \pi y^2 \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$.

Y derfan hon yw $\int_{x=0}^4 \pi y^2 dx$.

Yn gyffredinol, y cyfaint cylchdro rhwng $x = a$, $x = b$ yw $\int_a^b \pi y^2 dx$.

Yn yr achos hwn, mae $y = \frac{1}{2}x$, fel y'i rhoddir gan hafaliad y llinell.

Felly'r cyfaint sydd ei angen yw

$$\begin{aligned} \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x \right)^2 dx &= \frac{\pi}{4} \int_0^4 x^2 dx \\ &= \left[\frac{\pi x^3}{12} \right]_0^4 \\ &= \frac{\pi \cdot 4^3}{12} - 0 \\ &= \frac{16\pi}{3} \text{ uned.} \end{aligned}$$

Enghraifft 8.14

Cyfrifwch gyfaint y solid a geir trwy gylchdroi o gwmpas yr echelin x

- (a) yr arwynebedd o dan $y = x^2$ o $x = 1$ i $x = 2$,
 (b) yr arwynebedd o dan $y = \tan x$ o $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{4}$.

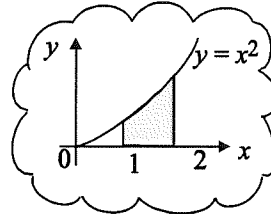
Y fformiwla y dylid ei defnyddio yn y ddau achos yw

$$\text{Cyfaint} = \int_a^b \pi y^2 dx$$

lle mae $y = f(x)$.

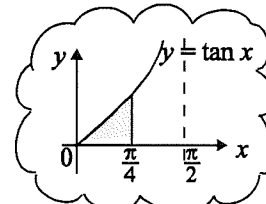
(a) Y cyfaint yw

$$\begin{aligned} \pi \int_1^2 y^2 dx &= \int_{x=1}^{x=2} (x^2)^2 dx = \pi \int_{x=1}^{x=2} x^4 dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_1^2 \\ &= \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right] = \frac{31\pi}{5}. \end{aligned}$$



(b) Y cyfaint yw

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\pi/4} y^2 dx &= \pi \int_0^{\pi/4} (\tan x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} \sec^2 x - 1 dx \\ &= \pi [\tan x - x]_0^{\pi/4} \\ &= \pi \left[\tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - 0 + 0 \right] \\ &= \pi \left[1 - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{4} (4 - \pi). \end{aligned}$$

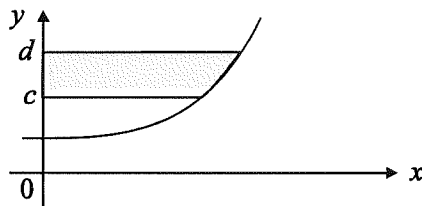


Pan welwch $\tan^2$
meddylwch am
 $\sec^2 x$ gan fod
 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

Gellir defnyddio fformiwla debyg os yw'r arwynebeddau'n cylchdroi o gwmpas yr echelin y . Yn yr achos hwn, mae'r

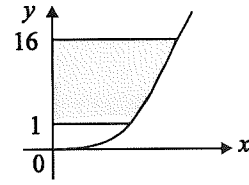
rhan sydd wedi ei thywyllu yn creu cyfaint o $\pi \int_c^d x^2 dy$.

Mae x ac y wedi
cyfnwio eu rôl.



Enghraifft 8.15

Cyfrifwch gyfaint y solid a geir trwy gylchdroi o gwmpas yr echelin x yr arwynebedd yn y pedrant cyntaf, sydd rhwng $y = x^4$, $y = 1$, $y = 16$ a'r echelin y .



Y cyfaint yw

$$\begin{aligned} \pi \int_1^{16} x^2 dy &= \pi \int_1^{16} \sqrt{y} dy \\ &= \pi \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_1^{16} \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[16^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{2\pi}{3} [4^3 - 1] = \frac{2\pi}{3} [64 - 1] \\ &= 42\pi. \end{aligned}$$

$y = x^4,$
 $x^2 = \sqrt{y}$

Ymarferion 8.5

- Cyfrifwch gyfeintiau'r solidau a geir trwy gylchdroi pob un o'r arwynebeddau a geir o fewn y cromliniau a'r llinellau canlynol, o gwmpas yr echelin x :
 - $x + 2y - 4 = 0$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$;
 - $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;
 - $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$;
 - $y = x(x - 2)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
 - $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.
- Cyfrifwch gyfeintiau'r solidau a geir trwy gylchdroi pob un o'r arwynebeddau a geir o fewn y cromliniau a'r llinellau canlynol, o gwmpas yr echelin y :
 - $y = x - 2$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$;
 - $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$;
 - $y = x^2 + 5$, $x = 0$, $y = 9$;
 - $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 2$.
- Mae'r arwynebedd a geir rhwng y gromlin $y = \cos x + \sin x$, yr echelin x a'r llinellau $x = 0$ ac $x = \frac{\pi}{2}$ yn cylchdroi o gwmpas yr echelin x . Cyfrifwch y cyfaint dan sylw.

4. Ffurfir cwpan trwy gylchdroi'r rhan honno o'r gromlin $y = x^2 - 4$ sy'n gorwedd rhwng $(2, 0)$ a $(3, 5)$ a'r echelin y . Cyfrifwch y cyfaint dan sylw.
5. Mae'r arwynebedd a geir rhwng y llinell $y = \frac{rx}{h}$, yr echelin x , a'r llinellau $x = 0$, $x = h$ yn cylchdroi o gwmpas yr echelin x . Cyfrifwch gyfaint y côn dan sylw.
6. $x^2 + y^2 = r^2$ yw hafaliad cylch sydd â'i ganol yn y tardd a'i radiws yn r . Brasluniwch y cylch yn y pedrant cyntaf ($x \geq 0$, $y \geq 0$) a thywyllwch yr arwynebedd a geir rhwng y gromlin ac echelinau x ac y . Cyfrifwch y cyfaint a geir pan gaiff yr arwynebedd ei gylchdroi o gwmpas yr echelin x . Cyfrifwch gyfaint sffêr sydd â radiws r .

Pennod 9

Hafaliadau Differol

Defnyddir mathemateg mewn amryw o feysydd er mwyn datblygu theorïau: cemeg, economeg, peirianeg, ffiseg, cymdeithaseg, er enghraifft. Pan ddefnyddir mathemateg mewn sefyllfa o'r fath, dywedwn fod y sefyllfa honno 'wedi ei modelu'n fathemategol' neu ein bod wedi creu 'model mathemategol' o'r sefyllfa.

Gallai model mathemategol gynnwys cyfradd newid mewn maint.

9.1 Cyfraddau newid

Dyma enghreifftiau o gyfraddau newid mewn gwahanol feysydd.

Cyflymder a Chyflymiad

Os $v(t)$ yw cyflymder gwrthrych ar amser t , ei gyflymiad yw cyfradd y newid mewn cyflymder gydag amser t ac felly fe'i dynodir gan $\frac{dv}{dt}$.

Cyfraddau Newid Ffwythiannau

Os yw $y = f(x)$, yna $\frac{dy}{dx}$ yw cyfradd newid y mewn perthynas ag x a chaiff ei ddehongli fel goled (neu raddiant) y gromlin $y = f(x)$ ar ryw bwynt.

Model Malthus o Dwf Poblogaeth

Fe ddatblygodd yr economegydd Thomas Malthus fodel yn ymwneud â chyfradd newid poblogaeth ddynol.

Os $N(t)$ yw maint y boblogaeth ar amser t yna $\frac{dN}{dt}$ neu $N'(t)$ yw cyfradd newid $N(t)$.

Cymerir yma
y gall $N(t)$ gymryd unrhyw
werthoedd an-negatif. Yn
ymarferol dim ond gwerthoedd
cyfanrifol an-negatif y gall $N(t)$
eu cymryd.

Lledaenu Gwybodaeth

Yma fe ystyrir sut y caiff hanesion a negeseuon eu lledaenu mewn cymdeithas.

Os $P(t)$ yw cyfran y boblogaeth sydd wedi derbyn y neges, yna mae gennym ddiddordeb yn y gyfradd newid $\frac{dP}{dt}$ neu $P'(t)$.

Defnydd Ymbelydrol yn Dadfeilio

Mae wraniwm pur yn dadfeilio'n araf iawn i sylwedd arall oherwydd bod gronynnau alffa yn cael eu rhyddhau.

Felly bydd swm yr wraniwm a geir mewn talp o sylwedd yn lleihau. Os $m(t)$ yw swm yr wraniwm yna $\frac{dm}{dt}$ yw

cyfradd newid swm yr wraniwm.

Mae $\frac{dm}{dt} < 0$
gan fod $m(t)$ yn
lleihau gydag
amser.

Cyfraddau Newid ym myd Economeg

Yna aml, gelwir cyfraddau newid ffwythiannau ym myd Economeg yn 'werth ffiniol' y ffwythiant. Er enghraifft, os $C(x)$ yw'r gost o gynhyrchu x eitem, gelwir y gyfradd newid $\frac{dC}{dx}$ neu $C'(x)$ yn 'gost ffiniol'. Caiff $C'(x)$ ei ddehongli fel brasamcan o'r gost o gynhyrchu eitem ychwanegol pan fo x eitem eisoes wedi eu cynhyrchu.

9.2 Hafaliadau differol

Hafaliadau sy'n cynnwys deilliadau neu gyfraddau newid ffwythiannau yw hafaliadau differol. Dyma rai enghreifftiau nodweddiadol:

$$\frac{dv}{dt} = 3t^2 + 4t + 6, \quad (i) \quad (\text{mecaneg})$$

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P(1 - P), \quad (ii) \quad (\text{lledaenu sibrydion})$$

$$a \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + 3 \frac{dQ}{dt} + 2Q = 2 \sin t. \quad (iii) \quad \text{gwefr drydanol } Q(t) \text{ ar gyddwysydd}$$

Yn hafaliadau (i), (ii) y deilliad uchaf oedd y cyntaf $\left(\frac{dx}{dt} \text{ neu } \frac{dP}{dt}\right)$. Yn hafaliad

(iii) y deilliad uchaf oedd yr ail $\left(\frac{d^2 Q}{dt^2}\right)$. Gelwir hafaliadau (i) a (ii) yn

hafaliadau differol trefn un, a gelwir hafaliad (iii) yn hafaliad differol trefn dau.

Rydym am gyfyngu ein hunain i hafaliadau trefn un.

Ceir dau fath o hafaliadau differol trefn un, sef

(a) integru'n uniongyrchol,

(b) newidynnau sy'n gwahanu.

Fe ddatblygir y syniadau hyn trwy ystyried rhai enghreifftiau.

(a) Integru'n uniongyrchol

Mae'r hafaliadau hyn ar ffurf $\frac{dx}{dt} = f(t)$.

Gellir cael newidynnau eraill ar wahân i x a t

e.e. $\frac{dC}{dy} = f(y)$.

Enghraifft 9.1

Graddiant cromlin yn y pwynt (x, y) yw $4x^3 + \frac{2}{x}$.

Darganfyddwch y yn nhermau x .

Nawr y graddiant yw $\frac{dy}{dx}$ fel bod

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + \frac{2}{x}.$$

I ddarganfod y mae angen mynegiad arnom a fydd, o'i ddifferu mewn perthynas ag x , yn rhoi $4x^3 + \frac{2}{x}$.

Yna gellir ailysgrifennu $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + \frac{2}{x}$

fel

$$y = \int \left(4x^3 + \frac{2}{x} \right) dx$$

gan roi

$$y = x^4 + 2 \ln |x| + k,$$

lle mae k yn gysonyn.

(1)

Dywedwn mai (1) yw ateb cyffredinol yr hafaliad differol ('cyffredinol' gan ei fod yn cynnwys cysonyn mympwyol k).

Mae dau bwynt yn codi o Enghraifft 9.1. Mae'r pwynt cyntaf yn ymwneud â'r dull cyffredinol, sef

$$\text{os yw } \frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\text{yna mae } y = \int f(x) dx,$$

neu fynegiadau cywerth yn

ymwneud â newidynnau eraill.

(I)

Yr ail bwynt yw hyn: yn ystod yr integriad a ddangosir yn (I) mae cysonyn integru mympwyol anhysbys k (dyweder) yn ymddangos.

I bennu gwerth i k , mae angen gwybodaeth ychwanegol arnom.

Enghraifft 9.2

Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $y(x)$ o wybod bod

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x} - 1$$

a bod $y = 3$ pan fo $x = 0$.

Gan gymhwyso (I) at

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x} - 1,$$

$$\text{cawn } y = \int (2e^{-x} - 1) dx$$

$$\text{fel bod } y = -2e^{-x} - x + k. \quad (1)$$

Mae amnewid $x = 0, y = 3$ yn (1) yn pennu gwerth k .

$$\therefore 3 = -2e^{-0} - 0 + k$$

$$\therefore k = 3 + 2e^0 = 5.$$

Mae amnewid y gwerth hwn ar gyfer k yn (1) yn rhoi $y = -2e^{-x} - x + 5$.

Enghraifft 9.3

Cost cynhyrchu x eitem yw $c(x)$ ceiniog. A bwrw bod y gost ffiniol

$\frac{dc}{dx}$ yn $\frac{3000}{(x+100)^2}$ a bod $c = 50$ pan fo $x = 0$ (cost sefydlog), darganfyddwch

fynegiad ar gyfer $c(x)$. Faint mae'n ei gostio i gynhyrchu 100 eitem?

$$\text{Yn awr } \frac{dc}{dx} = \frac{3000}{(x+100)^2}$$

$$\text{fel bod } c = \int \frac{3000}{(x+100)^2} dx$$

$$\therefore c = \frac{-3000}{x+100} + k, \quad (1)$$

Ile mae k yn gysonyn.

Mae amnewid $x = 0, c = 50$ yn (1) yn rhoi

$$50 = \frac{-3000}{100} + k$$

$$\therefore k = 80.$$

Mae amnewid gwerth k yn (1) yn rhoi

$$c = \frac{-3000}{x+100} + 80.$$

Cost cynhyrchu 100 eitem yw

$$c = \frac{-3000}{100+100} + 80 = 65 \text{ ceiniog.}$$

Ymarferion 9.1

1. Nodwch a yw'r hafaliadau differol canlynol yn integru'n uniongyrchol ai peidio. Darganfyddwch atebion cyffredinol yr hafaliadau hynny sy'n integru'n uniongyrchol.

$$(a) \frac{dy}{dx} = 1 + x \quad (b) \frac{dy}{dx} = xy \quad (c) \frac{dx}{dt} = t \sin t$$

$$(d) \frac{dx}{dt} = x \sin x \quad (e) \frac{dx}{dt} = x \sin t.$$

2. Darganfyddwch ateb

$$\frac{dx}{dt} = 4 \cos 2t,$$

o wybod bod $x = 1$ pan fo $t = 0$.

3. $x \ln x$ yw graddiant cromlin yn y pwynt (x, y) . O wybod bod $y = 2$ pan fo $x = 1$, darganfyddwch y yn nhermau x .

4. Y gost o gynhyrchu x eitem yw $c(x)$ ceiniog. Gan gymryd bod y gost ffiniol $\frac{dc}{dx}$ yn $3x^2 - 12x + 15$ ceiniog a bod $c = 50$ pan fo $x = 0$ (costau sefydlog), darganfyddwch fynegiad ar gyfer $c(x)$. Faint yw costio cynhyrchu 100 eitem?

5. Darganfyddwch hafaliadau'r cromliniau canlynol:

- (a) Cromlin yn mynd trwy'r pwynt $(0, -2)$ a $e^x \frac{dy}{dx} = 1$.
- (b) Cromlin yn mynd trwy'r pwynt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a $\frac{dy}{dx} = \sin x - x$.
- (c) Cromlin yn mynd trwy'r pwynt $(\pi, 1)$ ac mae ei graddiant yn y pwynt (x, y) yn $x \cos x$.

(b) Newidynnau sy'n gwahanu

Yma rydym am ystyried hafaliadau o'r ffurf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

neu yn yr un modd, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$,

lle mae $f(x)$, $g(y)$ yn dibynnu ar x ac y yn unig, yn ôl eu trefn. Hanfod hafaliadau o'r fath yw bod modd gwahanu'r newidynnau x ac y , sy'n egluro'r enw newidynnau sy'n gwahanu.

Dyma enghreifftiau o hafaliadau o'r fath:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos y}, \quad y \frac{dy}{dx} = x + 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1}.$$

Gallai hafaliadau eraill gynnwys newidynnau eraill, wrth gwrs.

$g(y) = 1$. Mae modd integru'r hafaliad hwn yn uniongyrchol hefyd.

Cyn datrys hafaliadau fel y rhain, rydym am sefydlu canlyniad y bydd ei angen yn yr ateb.

Canlyniad rhagarweiniol

Gadewch i ni dybio bod y yn dibynnu ar x ac rydym yn differu sin y mewn perthynas ag x .

Felly
$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dy}(\sin y) \frac{dy}{dx}$$

rheol ffwythiant o ffwythiant

Fel bod
$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

Gadewch i ni integru (1) mewn perthynas ag x .

$$\therefore \int \frac{d}{dx}(\sin y) dx = \int \cos y \frac{dy}{dx} dx$$

Mae integru'n gwrthdroi differu.

$$\therefore \sin y = \int \cos y \frac{dy}{dx} dx.$$

Gan wrthdroi'r canlyniad hwn, ysgrifennwn

$$\int \cos y \frac{dy}{dx} dx = \sin y.$$

Nid oes cysonyn integru yma.

Gan fod
$$\int \cos y dy = \sin y,$$

gwelwn fod
$$\int \cos y \frac{dy}{dx} dx = \int \cos y dy.$$

Mewn gwirionedd, mae $\frac{dy}{dx} dx$ wedi ei ysgrifennu fel dy .

Yn fwy cyffredinol,

$$\int g(y) \frac{dy}{dx} dx = \int g(y) dy. \quad (II)$$

Bydd canlyniad (II) yn ein galluogi i ddatrys hafaliadau sydd yn y ffurf lle mae'r newidynnau'n gwahanu.

Felly mae
$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

yn rhoi
$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Integrwch y ddwy ochr mewn perthynas ag x .

$$\therefore \int g(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx.$$

Gan ddefnyddio canlyniad (II), cawn

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx. \quad (III)$$

Mewn geiriau, mae canlyniad (III) yn datgan y dylid:

(i) gwahanu x ac y , a

(ii) integru'r mynegiadau a geir mewn perthynas ag x ac y .

Enghraifft 9.4

Datrysych yr hafaliad differol

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

o wybod bod $y = 2$ pan fo $x = 1$.

Gan ddefnyddio canlyniad (III), cawn

$$\int y \, dy = \int x \, dx$$

$$\text{fel bod} \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + K, \quad (1)$$

lle mae K yn gysonyn integru mympwyol.

[Gyda llaw: nodwch mai dim ond un cysonyn integru sy'n angenrheidiol er ein bod wedi gwneud dau integriad, oherwydd bod

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\text{yn rhoi} \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_2 - C_1$$

a gellir ystyried $C_2 - C_1$ fel cysonyn unigol K .]

Rydym yn lluosio popeth yn (1) â 2 er mwyn cael gwared â'r ffractsiynau

$$\therefore y^2 = x^2 + K_1. \quad (2)$$

Nawr mae (2) yn cynnwys cysonyn anhysbys.

Trwy amnewid $x = 1, y = 2$ yn (2) cawn

$$2^2 = 1^2 + K_1$$

$$\text{fel bod} \quad K_1 = 2^2 - 1^2 = 3.$$

Trwy amnewid y gwerth hwn am K_1 yn (2), cawn

$$y^2 = x^2 + 3,$$

sef y berthynas angenrheidiol rhwng x ac y .

Mae modd gwahanu'r newidynnau,
 $f(x) = x, g(y) = y$.

Beth bynnag yw ffurf hafaliad
differol trefn un, mae'r ateb bob tro'n
cynnwys un cysonyn mympwyol.

$K_1 = 2K$.
Nid yw lluosio o'r fath yn
angenrheidiol ond
mae'n hwylus.

Enghraifft 9.5

Datrysych $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x}$, o wybod bod $y = 1$ pan fo $x = 0$.

Mae canlyniad (III) yn rhoi

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int \frac{1}{1+x} \, dx.$$

$$\therefore \ln |y| = \ln |1+x| + K$$

$$= \ln |1+x| + \ln A$$

$$\text{fel bod} \quad \ln |y| = \ln (A |1+x|),$$

trwy gyfuno logarithmau.

Ysgrifennwch
 $K = \ln A$
er hwylustod.

Yna mae
neu

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln A |1+x|}$$

$$y = A |1+x|. \quad (1)$$

Nodweddion
logarithmau

Rydym yn cymryd bod $y > 0$ ac $x + 1 > 0$ fel bod modd ysgrifennu (1) fel

$$y = A(x + 1). \quad (1)$$

Gan fod $y = 1$ pan fo $x = 0$, mae

$$1 = A(0 + 1).$$

sy'n rhoi $A = 1$.

Trwy amnewid y gwerth hwn am A yn (1), cawn

$$y = (x + 1).$$

Gwelir hafaliadau differol lle mae'r newidynnau'n gwahanu mewn amryw o feysydd.

Enghraifft 9.6

Mae'r swm o wraniwm $m(t)$ a geir mewn talp o sylwedd ar amser t yn lleihau gydag amser. Tybir bod cyfradd lleihau $m(t)$ ar amser t mewn cyfrannedd â gwerth $m(t)$.

Ysgrifennwch hafaliad differol ar gyfer $m(t)$.

Pan fo $t = 0$, mae $m(t) = m_0$. Os yw gwerth $m(t)$ yn haneru dros gyfnod o amser T , darganfyddwch fynegiad ar gyfer $m(t)$ yn nhermau m_0 a t .

Nawr mae $m(t)$ yn lleihau gydag amser ac mae cyfradd y lleihad ar amser t mewn cyfrannedd ag $m(t)$.

$$\therefore \frac{dm}{dt} = -km, \quad (k > 0)$$

lle mae k yn gysonyn cyfrannedd anhysbys.

Trwy wahanu'r newidynnau, cawn

$$\int \frac{dm}{m} = \int -k dt.$$

$$\therefore \ln m(t) = -kt + C,$$

lle mae C yn gysonyn.

Yna mae
fel bod

$$e^{\ln m(t)} = e^{-kt + C}$$

$$m(t) = e^{-kt} \cdot e^C.$$

$$\therefore m(t) = Ae^{-kt}. \quad (1)$$

Ni ddefnyddir
y modwlws yn $\ln |m|$
gan fod $m > 0$.

$$e^C = A$$

Dyma'r ateb cyffredinol. Gallwn ddarganfod y cysonyn A oherwydd bod $m = m_0$ pan fo $t = 0$.

Trwy amnewid y gwerthoedd hyn yn (1) cawn

$$m_0 = Ae^0$$

fel bod $A = m_0$.

Trwy amnewid y gwerth hwn am A yn (1), cawn

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \quad (2)$$

Hyd yma nid ydym wedi rhoi gwerth i'r cysonyn cyfrannedd k . Mae gennym ychydig o wybodaeth ychwanegol, ac fe'i defnyddiwn fel a ganlyn.

Nawr mae $m = \frac{1}{2}m_0$ pan fo $t = T$.

Trwy amnewid am y gwerthoedd hyn yn (2) cawn

$$\frac{1}{2}m_0 = m_0 e^{-kT}$$

fel bod $e^{-kT} = \frac{1}{2}$.

Cymerwch logiau $\therefore -kT = \ln \frac{1}{2}$

neu $kT = \ln 2$.

$\therefore k = \frac{\ln 2}{T}$.

Trwy amnewid am k yn (2) cawn

$$\begin{aligned} m(t) &= m_0 e^{-\frac{(\ln 2)t}{T}} \\ &= m_0 \left(e^{\ln 2} \right)^{-\frac{t}{T}} = m_0 2^{-\frac{t}{T}} \\ \therefore m(t) &= m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}. \end{aligned}$$

Lluosi indecsau.
Sylwch mor ddefnyddiol
yw $e^{\ln a} = a$.

Enghraifft 9.7

Boed i $P(t)$ fod y gyfran o'r boblogaeth sydd wedi ei heintio ag afiechyd ar amser t . Tybir mai $rP(1 - P)$ yw cyfradd newid $P(t)$, lle mae r yn gysonyn. Ysgrifennwch hafaliad differol a fodlonir gan P a darganfyddwch ateb cyffredinol yr hafaliad hwn.

Darganfyddwch $P(t)$ yn nhermau r a t os yw $P = 0.01$ pan fo $t = 0$.

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - P).$$

Felly mae $\int \frac{dP}{P(1 - P)} = \int r dt. \quad (1)$

Math lle mae modd
gwahanu'r newidynnau.

Er mwyn darganfod yr integryn ar yr ochr chwith yn (1) rydym yn defnyddio ffractsiynau rhannol.

Boed i $\frac{1}{P(1 - P)} \equiv \frac{A}{P} + \frac{B}{1 - P}$.

dau ffactor llinol
yn yr enwadur

$$\therefore 1 \equiv A(1-P) + BP.$$

Boed i $P=0$, $\therefore 1 = A(1-0) + B0$

fel bod $A = 1.$

Boed i $P=1$, $\therefore 1 = A(0) + B$

fel bod $B = 1.$

$$\therefore \frac{1}{P(1-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P}. \quad (2)$$

Yna gan ddefnyddio (2) yn (1), cawn

$$\int \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{1-P} \right] dP = rt + K.$$

$$\therefore \ln |P| - \ln |1-P| = rt + K.$$

$$\therefore \ln \left| \frac{P}{1-P} \right| = rt + K.$$

$$\therefore e^{\ln \left| \frac{P}{1-P} \right|} = e^{rt+K} = e^{rt} \cdot e^K = Ae^{rt}.$$

$$\therefore \left| \frac{P}{1-P} \right| = Ae^{rt}. \quad (3)$$

$$A = e^K$$

Nawr mae $0 \leq P \leq 1$ fel bod

$$\left| \frac{P}{1-P} \right| = \frac{P}{1-P}.$$

Yna mae (3) yn newid yn

$$\frac{P}{1-P} = Ae^{rt}$$

$$\therefore P = A(1-P)e^{rt}$$

$$\text{a} \quad P(t) = \frac{Ae^{rt}}{1 + Ae^{rt}} = \frac{A}{e^{-rt} + A}. \quad (4)$$

Dyma'r ateb cyffredinol.

$$\left[\text{Nodwn wrth fynd heibio fod } \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{A}{0+A} = 1. \right]$$

Nawr mae $P=0.01$ pan fo $t=0$.

Trwy amnewid y gwerthoedd hyn yn (4) cawn

$$0.01 = \frac{A}{e^0 + A} = \frac{A}{A+1}.$$

$$\therefore 0.01A + 0.01 = A$$

$$\text{fel bod} \quad A = \frac{0.01}{1-0.01} = \frac{0.01}{0.99} = \frac{1}{99}.$$

Trwy amnewid y gwerth hwn am A yn (4) cawn

$$P(t) = \frac{\frac{1}{99}}{e^{-rt} + \frac{1}{99}} = \frac{1}{99e^{-rt} + 1}.$$

Ymarferion 9.2

1. Darganfyddwch ateb cyffredinol

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^2.$$

2. Darganfyddwch y o wybod bod

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3y$$

a bod $y = 0$ pan fo $x = 0$.

3. Darganfyddwch ateb cyffredinol

$$\sec x \frac{dy}{dx} + \sec y = 0.$$

4. Darganfyddwch ateb cyffredinol

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2yx^2}{y^2 + 1}.$$

Peidiwch â cheisio ysgrifennu'r
ateb yn y ffurf $y = f(x)$.

5. Uchder tanc yw 9 metr ac mae'n llawn o ddŵr. Pan fo $t = 0$ mae'r dŵr yn dechrau gollwng trwy dwll yng ngwaelod y tanc. Os $x(t)$ metr yw dyfnder y dŵr ar amser t eiliad ac o wybod bod

$$100 \frac{dx}{dt} = -\sqrt{x},$$

cyfrifwch yr amser sy'n mynd heibio (mewn munudau) cyn bod y tanc yn wag.

6. Mewn adwaith cemegol, caiff y berthynas rhwng y swm $x(t)$ o un sylwedd ar amser t a'r gyfradd newid $x(t)$ ei chynrychioli gan yr hafaliad differol

$$\frac{dx}{dt} = k(4 - x)(8 - x),$$

lle mae k yn gysonyn. Os yw $x = 0$ pan fo $t = 0$, mynegwch t yn nhermau x a k .

Darganfyddwch werth k os yw'n hysbys bod $x = 3.6$ pan fo $t = 2$.

7. Mae cromlin yn mynd trwy'r pwynt $(1, 4)$ a'i goled yn y pwynt (x, y) yw $\frac{y}{3+x}$

(lle mae $x > 0$). Darganfyddwch hafaliad y gromlin ar gyfer $x > 0$.

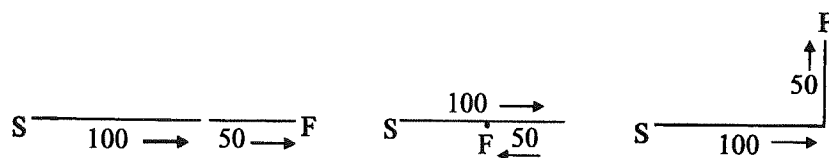
Pennod 10

Cyflwyniad i Fectorau

Yn y bennod hon a'r bennod nesaf byddwn yn rhoi sylw i fesurau y mae angen eu disgrifio trwy ddynodi eu maint a'u cyfeiriad.

10.1 Fectorau a sgalarau

Gadewch i ni ystyried y sefyllfa ganlynol: rwy'n cerdded 100 metr, yn stopio, yna'n cerdded 50 metr arall. Pa mor bell ydw i o'r man cychwyn? Os meddylwch am hyn am ychydig fe ddewch chi i'r casgliad ei bod hi'n amhosibl rhoi ateb manwl i'r cwestiwn. Y cyfan y gallwch ei ddweud yw bod yr ateb rhwng 50 a 150 metr. Mae'r diagram yn dangos rhai o'r sefyllfaoedd posibl a allai godi; S yw'r man cychwyn, F yw'r man gorffen.



Felly nid yw'r cwestiwn fel ag y mae yn ddigon manwl: mae angen mwy o wybodaeth am y cyfeiriadau rydw i'n cerdded iddynt. Mewn geiriau eraill, er mwyn disgrifio fy nadleoliad terfynol SF, rhaid dynodi cyfeiriadau a meintiau y ddwy ran o'm taith.

Fectorau yw'r enw a roddwn ar fesurau y mae eu diffiniad cyflawn yn cynnwys maint a chyfeiriad.

Defnyddir teip trwm i'w cynrychioli mewn testun printiedig. Er enghraifft, byddai fy fector o S i F yn cael ei ddynodi fel **SF**. Wrth ysgrifennu fectorau dylech eu tanlinellu: SF.

Enghreifftiau eraill o fectorau yw cyflymder, cyflymiad a grym (mae chwaraewyr rygbi yn gwybod y gwahaniaeth rhwng cael eu gwithio ymlaen ac yn ôl yn y sgrym, er enghraifft).

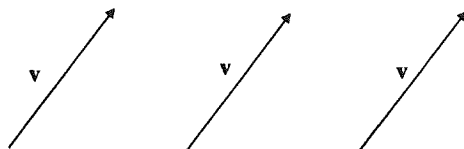
↑ mae 30 metr/eiliad
yn wahanol i
↓ 30 metr/eiliad

Sgalarau yw'r enw a roddwn ar fesurau y mae eu diffiniad cyflawn yn cynnwys maint yn unig. Enghreifftiau o sgalarau yw arwynebedd, cyfaint a buanedd.

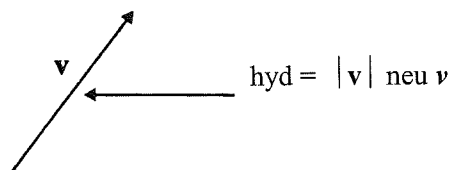
Er mwyn ymdrin â fectorau mae angen diffiniadau ychwanegol arnom a rhai rheolau ar gyfer eu trin.

Diffiniadau

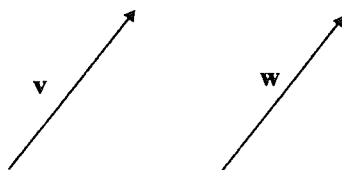
1. Defnyddiwn saeth, hynny yw, llinell syth â phen saeth arni, i gynrychioli fector. Rhoddir cynffon y fector ar ryw fan cychwyn ac mae'r cyfeiriad a ddewisir ar gyfer y saeth yr un fath â chyfeiriad y fector. Gan nad yw'r diffiniad hwn yn cynnwys safle (dim ond maint a chyfeiriad), gallwn dynnu nifer anfeidraidd o linellau i gynrychioli'r fector $\mathbf{v}$, y dangosir tair ohonynt.



2. Yr enw a roddir ar faint fector $\mathbf{v}$ yw ei fodwlws a dyma hyd y llinell sy'n cynrychioli'r fector. Fe'i cynrychiolir gan $|\mathbf{v}|$ neu v .



3. Mae'n dilyn o Ddiffiniad 1 bod dau fector yn hafal os oes ganddynt yr un maint a chyfeiriad.



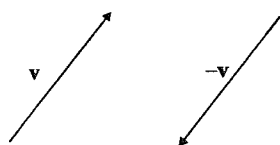
Yna
gan fod
ac mae cyfeiriad $\mathbf{v}$ yr un fath â chyfeiriad $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

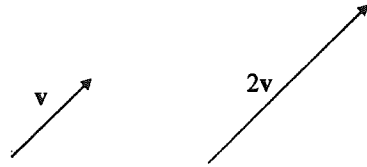
$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$$

$$\text{neu } v = w$$

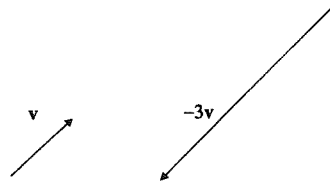
4. Mae fector sydd â'r un modwlws â $\mathbf{v}$ ond sy'n mynd i'r cyfeiriad dirgroes yn cael ei ddynodi gan $-\mathbf{v}$.



5. Mae'r fector $k\mathbf{v}$, lle mae k yn rhif positif real, yn fector sy'n baralel i $\mathbf{v}$ o faint $k|\mathbf{v}|$ neu $k v$. Felly mae $2\mathbf{v}$ yn baralel i $\mathbf{v}$ ond ei faint yw $2|\mathbf{v}|$ neu $2v$.



6. Mae'r fector $-lv$ (l real a phositif) yn fector o faint $l |v|$ gyda chyfeiriad sy'n groes i gyfeiriad v . Felly mae gan $-3v$ faint o $3 |v|$ a chyfeiriad sy'n groes i gyfeiriad v .



7. O gael dau rif k ac l a fector a , mae

$$k(la) = (kl)a = l(ka)$$

Yn arbennig, mae $3(2a) = 6a = 2(3a)$,

$$-4(5a) = -20a = 5(-4a).$$

Nid oes rhaid i'r
fector fod yn v .

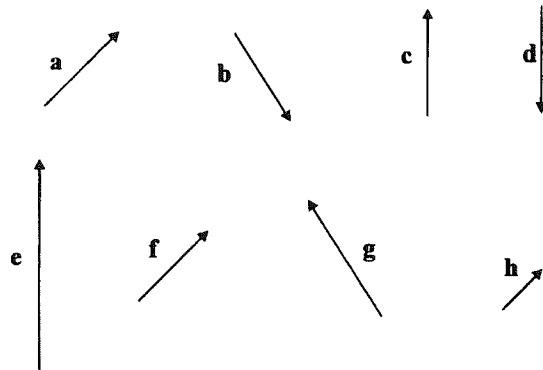
8. Pan gaiff b ei luosi â 0 (sero) cawn fector o faint sero a dim cyfeiriad. Ysgrifennwn y fector sero hwn fel

$$0v = 0.$$

Mae'r fector sero yn cael ei luniadu fel $\bullet$.

Ymarferion 10.1

Edrychwch ar y gosodiadau isod am y fectorau a ddangosir a dewiswch yr ateb cywir.



Dewis

Ydyw

Nac ydyw

(i) A yw $a = b$?

(ii) $a = 0$?

(iii) $b = g$?

(iv) $b = -g$?

(v) $b = -lg$ lle mae $0 < l < 1$?

(vi) $c = -d$?

(vii) $|a| = |e|$?

(viii) $e = 3f$

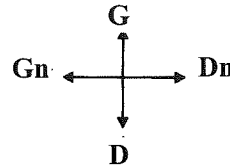
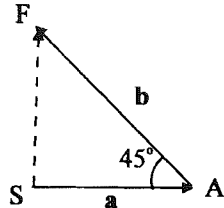
(ix) $h = \frac{1}{2}a$?

10.2 Adio a thynnu fectorau a rheolau ar gyfer eu trin

Er mwyn deall sut y gellir cyfuno fectorau rhaid i ni yn gyntaf ystyried sut y cyfunir dadleoliadau.

pellteroedd gyda
chyfeiriad yw
dadleoliadau

Gadewch i ni dybio fy mod i'n cerdded 30 metr i'r dwyrain ac yna 40 metr i'r gogledd-orllewin, gan gychwyn yn S a gorffen yn F, a mynd trwy bwynt A fel y dangosir.



Mae gan y ddau ddadleoliad **SA** ac **AF** faint a chyfeiriad a gellir ystyried eu bod, dyweder, yn fectorau **a** a **b**. Os cynrychiolwn y fectorau fel y dangosir gwelwn fod dadleoliad **SA** neu **a** wedi'i ddilyn gan ddadleoliad **AF** neu **b** yn rhoi dadleoliad **SF**.

Yna gallwn ystyried bod y fectorau (dadleoliad) **a** a **b** yn cael eu hadio, ac os yw

$$\mathbf{SF} = \mathbf{c} \text{ yna mae}$$

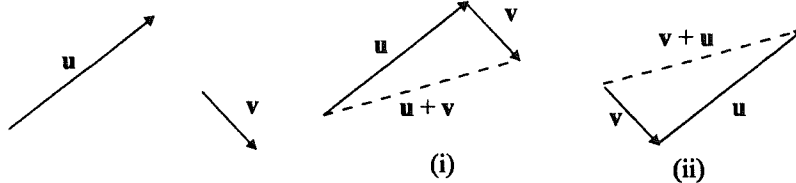
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Mae'r adiad hwn
yn wahanol i'r + rhifyddol
arferol wrth gwrs.

Mae cyfuno dadleoliadau fel hyn yn enghraifft o'r ddeddf adio fectorau drionglog gyffredinol.

Y Ddeddf Adio Fectorau Drionglog

Tybiwch fod gennym ddau fector **u** a **v**. Caiff y fectorau eu hadio trwy roi man cychwyn un fector (**v** dyweder) ger pen saeth y fector arall (**u**) a chwblhau'r triongl gyda'r llinell ddotiog fel y dangosir. Gan fod y fector **u** yn cael ei luniadu'n gyntaf (rhowch gynnig arni) mae'r cyfuniad o fectorau'n rhoi **u + v**.



Os lluniadwn **v** yn gyntaf ac yna rhoi man cychwyn **u** ger pen saeth **v** cawn **v + u** fel y dangosir yn (ii).

Mae'n amlwg o (i) a (ii) bod

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

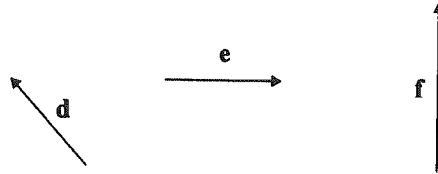
felly nid yw trefn cyfuno (neu 'adio') y fectorau yn bwysig.

D.S. Gellid defnyddio dull arall o adio fectorau, sef y ddeddf adio baralelogram, ond ni fyddwn yn ymdrin â'r dull hwn yma.

Enghraifft 10.1

Defnyddiwch y ddeddf adio drionglog yn y canlynol.

- (i) Adiwcch y ddau fector **d** ac **e**.

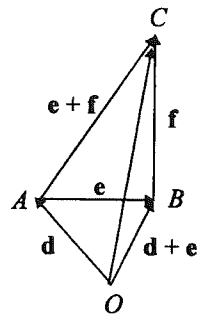


- (ii) Dangoswch fod $(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f} = \mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f})$.

- (i)



- (ii)



Symudwyd y
saethau i'w gwneud
hi'n haws i luniadu'r
diagram.

Nawr mae $(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f}$ yn golygu adio **d** ac **e** yn gyntaf, ac yna adio **f** at y canlyniad. Hefyd mae $\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f})$ yn golygu adio **e** ac **f** yn gyntaf, ac adio'r canlyniad hwn at **d**.

Yn y diagram,

mae $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$

ac mae $\mathbf{OB} + \mathbf{BC} = \mathbf{OC}$.

Hefyd mae $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$

ac mae $\mathbf{OA} + \mathbf{AC} = \mathbf{OC}$.

Gwelwn fod $(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f}$ a hefyd $\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f})$ yn hafal i **OC**, felly deawn i'r casgliad fod

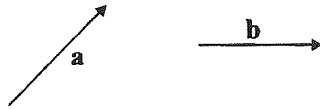
$$(\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f} = \mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f})$$

a bod y ddau swm hwn yn hafal i

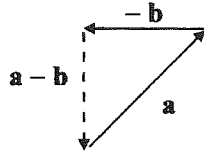
$$\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}.$$

Tynnu Fectorau

Cofiw'n fod $-b$ yn fector sy'n hafal i b o ran maint ond sy'n mynd i'r cyfeiriad dirgroes.



Diffiniwn $a - b$ fel $a + (-b)$. Yna i ddarganfod $a - b$ rydym yn cildroi cyfeiriad b ac yn darganfod $a + (-b)$ fel y dangosir.



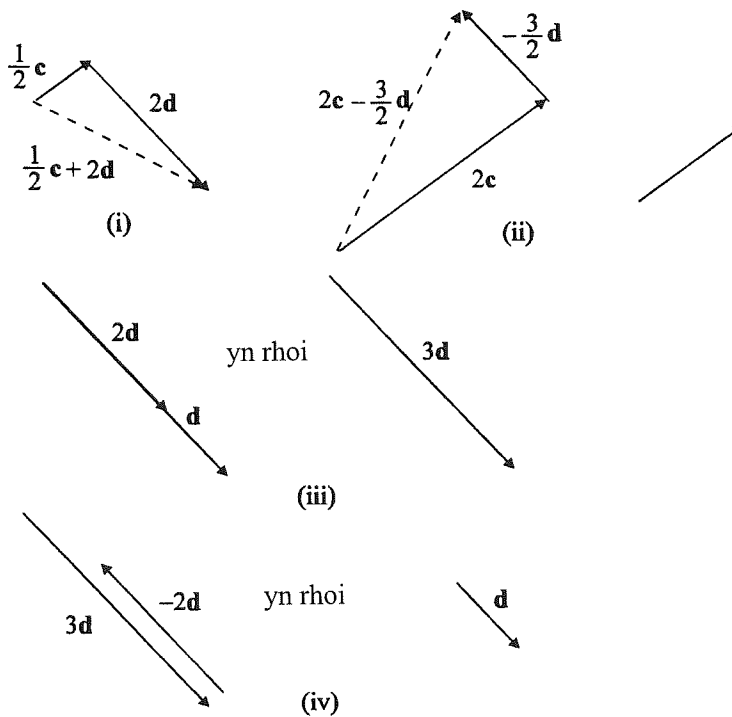
Enghraifft 10.2

O gael y fectorau c a d fel y dangosir,



darganfyddwch

- (i) $\frac{1}{2}c + 2d$ (ii) $2c - \frac{3}{2}d$ (iii) $2d + d$ (iv) $3d - 2d$



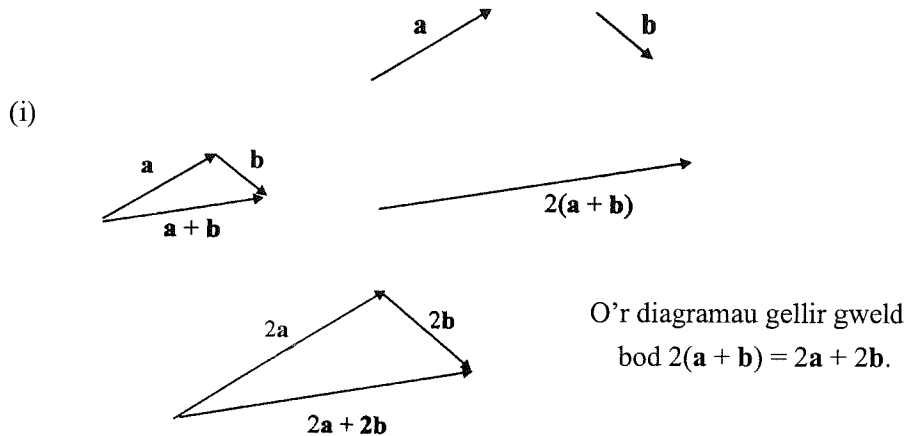
Mae rhannau (iii) a (iv) yn dangos y canlyniad hwn: os yw m ac n yn unrhyw rifau real ac os yw v yn fector yna mae

$$mv + nv = (m + n)v$$

Yn (iii) mae $m = 2$, $n = 1$,
yn (iv) mae $m = 3$, $n = -2$
ac mae $v = d$.

Enghraifft 10.3

Dangoswch fod (i) $2(a + b) = 2a + 2b$, lle mae a a b fel y dangosir.



Mae Enghraifft 10.3 yn dangos y canlyniad cyffredinol hwn: os yw m ac n yn unrhyw rifau real, ac os yw a a b yn unrhyw fectorau, yna mae

$$m(a + b) = ma + mb.$$

Mae'r deddfau adio a thynnu a'r rheolau trin a roddir uchod yn ein galluogi i symleiddio mynegiadau a datrys hafaliadau'n cynnwys fectorau, fel mewn algebra cyffredin.

Enghraifft 10.4

(i) Symleiddiwch $4(a + b) + 6(b + c) - 3(a - b + c)$.

(ii) Darganfyddwch y fector x o wybod bod

$$2a + 6b + 9x = 8a - 4x - b.$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad 4(a + b) + 6(b + c) - 3(a - b + c) &= 4a + 4b + 6b + 6c - 3a + 3b - 3c \\ &= a + 13b + 3c. \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad 2a + 6b + 9x = 8a - 4x - b.$$

Defnyddiwch reolau cyfarwydd algebra.

$$\therefore 9x + 4x = 8a - b - 2a - 6b$$

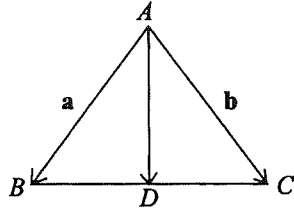
$$\text{fel bod} \quad 13x = 6a - 7b$$

$$\text{ac mae} \quad x = \frac{1}{13}(6a - 7b).$$

Byddwn yn cloi'r adran hon trwy gymhwyso fectorau at sefyllfaoedd geometregol.

Enghraifft 10.5

Mae'r fectorau $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ a $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ yn ffurfio dwy ochr y triongl ABC . D yw canolbwynt y llinell BC . Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $\overrightarrow{DA}$ yn nhermau $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.



Nawr mae

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DB} - \mathbf{a}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$$

o'r ddeddf drionglog

Hefyd mae

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

felly $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

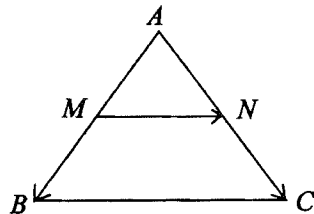
Yna mae

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a} \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\end{aligned}$$

Enghraifft 10.6

Mae'r fectorau $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ a $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ yn ffurfio dwy ochr y triongl ABC . M yw canolbwynt AB ac N yw canolbwynt AC . Darganfyddwch fynegiadau ar gyfer $\overrightarrow{MN}$ a $\overrightarrow{BC}$.

Diddwythwch fod MN yn baralel i BC a darganfyddwch y gymhareb $\frac{MN}{BC}$.



Nawr mae

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ &= \mathbf{b} - \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Hefyd mae

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).\end{aligned}$$

$$\text{Canolbwyntiau yw } M, N$$

Felly mae $MN = \frac{1}{2}BC$ fel bod MN yn baralel i BC
 ac mae $MN = \frac{1}{2}BC$
 neu mae $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

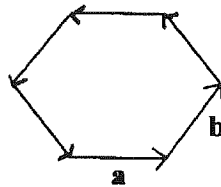
Ymarferion 10.2

- Trwy ystyried y diagram ar gyfer adio dau fector, esboniwch pam mae

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

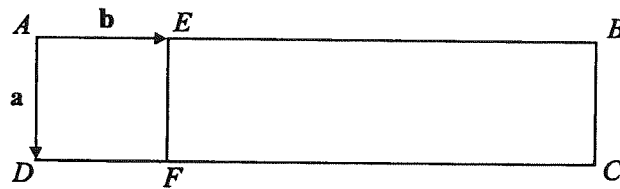
Beth yw'r berthynas rhwng $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ pan geir hafaidd?

- Fectorau a benderfynir gan ddwy ochr gyfagos hecsagon rheolaidd yw $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.



Darganfyddwch y fectorau a benderfynir gan ochrau eraill yr hecsagon.

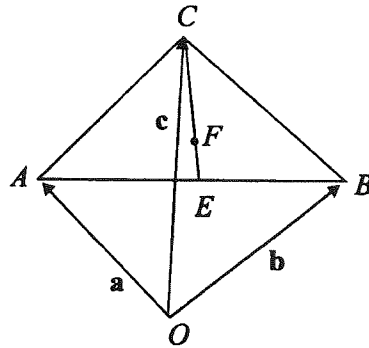
-



Yn y petryal $ABCD$ mae $AEFD$ yn sgwâr ac mae $EB = 3AE$. Os yw $\mathbf{AD} = \mathbf{a}$ ac os yw $\mathbf{AE} = \mathbf{b}$, darganfyddwch $\mathbf{EB}$, $\mathbf{EC}$, $\mathbf{DB}$, $\mathbf{AC}$ ac $\mathbf{FB}$ yn nhermau $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

- Mae pedwar pwynt O , A , B ac C yn peri bod $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$, $\mathbf{OC}$ yn $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ yn ôl eu trefn.

E yw canolbwynt AB ac F yw canolbwynt ar EC fel bod $\mathbf{EF}$ yn $\frac{1}{3}\mathbf{EC}$.



Darganfyddwch fynegiadau ar gyfer y fectorau $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AE}$ ac $\mathbf{EF}$.

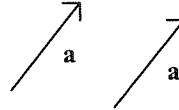
5. O, A, B, C a D yw pum pwynt fel bod $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{OC} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ ac $\mathbf{OD} = 4\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Darganfyddwch $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{AD}$ yn nhermau $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.
6. Datrysych yr hafaliadau canlynol ar gyfer y fector $\mathbf{x}$.

(i) $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{x} = 4\mathbf{b} - \mathbf{a} + 3\mathbf{x}$

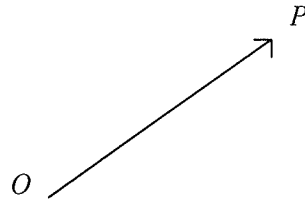
(ii) $\mathbf{x} + 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = -\frac{1}{3}\mathbf{x} + \mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b}$

10.3 Fectorau safle

Hyd yma, nid yw'r diffiniad o fector wedi ystyried ei safle: mae fectorau sydd â'r un modwlws a chyfeiriad yn gywerth, beth bynnag yw eu safleoedd.



Ambell waith, mae'n briodol i ddefnyddio diffiniad mwy lleoledig a nodi man cychwyn fector. Yn arbennig, mae fector safle pwynt P , o'i gymharu â thardd, yn cynrychioli'r llinell o O i P o ran maint a chyfeiriad. Felly mae gan $\mathbf{OP}$ ddiffiniad unigryw ac ni all gael ei gynrychioli gan unrhyw linell arall sy'n baralel i OP ac sydd o'r un hyd.

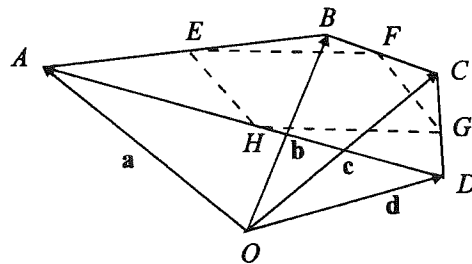


Gellir cymhwyso'r rheolau trin arferol at fectorau safle.

Enghraifft 10.7

Mae gan bwyntiau A, B, C a D fectorau safle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ a $\mathbf{d}$ o'u cymharu â thardd O . Y pwyntiau E, F, G ac H yw canolbwyntiau AB, BC, CD ac AD , yn ôl eu trefn.

- (a) Darganfyddwch fectorau safle $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ ac $\mathbf{H}$.
- (b) Darganfyddwch fectorau $\mathbf{EH}$ ac $\mathbf{FG}$ a diddwythwch fod $EFGH$ yn baralelogram.



- (a) Fector safle E yw $\mathbf{OE}$ (heb ei ddangos)
ac mae

$$\mathbf{OE} = \mathbf{OA} + \mathbf{AE}$$

fel bod
$$\mathbf{OE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{AB} \quad (1)$$

Nawr mae
$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$$

fel bod
$$\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Trwy amnewid am $\mathbf{AB}$ yn (1), cawn

$$\mathbf{OE} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Nodwn wrth fynd heibio mai $\frac{1}{2}$ yw fector safle canolbwynt AB (fector safle A + fector safle B); enghraifft arbennig o ganlyniad mwy cyffredinol yw hon.

Yn yr un modd, mae

$$\mathbf{OF} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \mathbf{OG} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d})$$

ac mae
$$\mathbf{OH} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{d}).$$

- (b)

$$\mathbf{EH} = \mathbf{OH} - \mathbf{OE}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{d}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{b}).$$

Hefyd mae
$$\mathbf{FG} = \mathbf{OG} - \mathbf{OF}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) - \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{b})$$

Yna mae
$$\mathbf{EH} = \mathbf{FG}$$

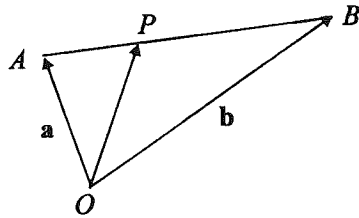
fel bod EH yn baralel i FG

ac mae
$$EH = FG.$$

Felly, mae $EFGH$ yn baralelogram oherwydd bod ganddo bâr o ochrau sy'n baralel ac o'r un hyd.

Yn Enghraifft 10.7, darganfuom fectorau safle canolbwyntiau gwahanol linellau. Mae yn aml yn ddefnyddiol cael mynegiad ar gyfer fector safle pwynt ar linell sy'n uno dau bwynt y mae eu fectorau safle yn hysbys.

I ddarganfod, mewn cymhareb benodol, y pwynt sy'n rhannu llinell sy'n uno dau bwynt.



Gadewch i ni dybio bod gan y pwyntiau A a B fectorau safle $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a bod P yn bwynt sy'n rhannu AB fel bod $AP : PB = \lambda : \mu$. Yna mae fector safle P yn cael ei gynrychioli gan

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP}$$

fel bod $\mathbf{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{AP}$ (1)

Nawr mae $\frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{\mu}$

fel bod $\frac{AP}{AB} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

ac $\therefore AP = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} AB$. (2)

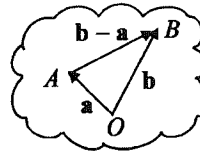
Os nad ydych yn deall sut y ceir (2), darllenwch y canlynol.

Mae $\frac{AP}{PB} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ yn rhoi $AP = \frac{\lambda}{\mu} PB$

Yna mae
$$\begin{aligned} \frac{AP}{AB} &= \frac{AP}{AP + PB} = \frac{\lambda}{\mu} PB \bigg/ \frac{\lambda}{\mu} PB + PB \\ &= \frac{\lambda}{\mu} PB \bigg/ \frac{\lambda PB + \mu PB}{\mu} \\ &= \frac{\lambda}{\mu} PB \bigg/ \frac{PB}{\mu} (\lambda + \mu) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

Gall (2) gael ei ysgrifennu yn nhermau fectorau fel

$$\mathbf{AP} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \mathbf{AB} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

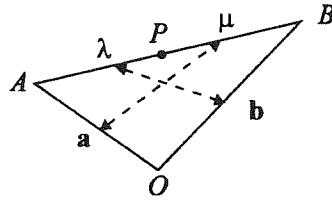


Yna mae amnewid am $\mathbf{AP}$ yn (1) yn rhoi

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} &= \mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{(\lambda + \mu)\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\lambda + \mu} \\ &= \frac{\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

Nodiadau

1. Nodwch batrwm y canlyniad ac felly datblygwch y gallu i ysgrifennu'r canlyniad ar unwaith.



$$\mathbf{OP} = \frac{\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{a}}{\lambda + \mu}$$

2. Mae'n bosibl eich bod wedi sylwi bod cael y canlyniad hwn yn dasg yn eithaf llafurus. Fe'ch cynghorir i ddarllen y prawf eto a dysgu ffurf gryno arno. Yn arbennig, dylech ysgrifennu

$$\mathbf{AP} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \mathbf{AB}$$

ar unwaith.

Enghraifft 10.8

Mae gan y pwyntiau A , B , C a D fectorau safle $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ac $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ o'u cymharu â thardd O .

- (a) Darganfyddwch fector safle y pwynt E ar y llinell AD fel bod

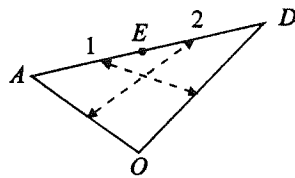
$$AE : ED = 1 : 2.$$

- (b) Darganfyddwch fector safle y pwynt F ar AB fel bod

$$AF : FB = 1 : 2.$$

- (c) Dangoswch fod EF yn baralel i DB .

- (a)



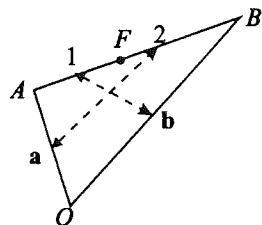
Gan ddefnyddio'r canlyniad a gafwyd ynghynt

$$\begin{aligned} \mathbf{OE} &= \frac{1(\mathbf{OD}) + 2(\mathbf{OA})}{1 + 2} \\ &= \frac{1(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) + 2(\mathbf{a})}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \\ \mu &= 2 \end{aligned}$$

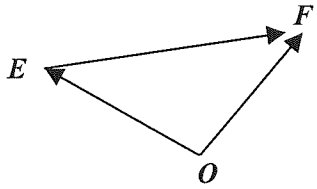
fel bod fector safle E yn $\frac{1}{3}(3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})$.

- (b)



$$\begin{aligned} \mathbf{OF} &= \frac{1(\mathbf{b}) + 2\mathbf{a}}{1 + 2} \\ &= \frac{1}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b}). \end{aligned}$$

(c)



$$\begin{aligned}\mathbf{EF} &= \mathbf{OF} - \mathbf{OE} \\ &= \frac{1}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \frac{1}{3}(3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b} - 3\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{3}(\mathbf{c} - \mathbf{a})\end{aligned}$$

Yn yr un modd, mae

$$\begin{aligned}\mathbf{DB} &= \mathbf{OB} - \mathbf{OD} \\ &= \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ &= \mathbf{c} - \mathbf{a}\end{aligned}$$

Felly mae $\mathbf{EF} = \frac{1}{3}\mathbf{BD}$

fel bod EF yn baralel i DB .

Ymarferion 10.3

- Mae A , B , C a D yn bwyntiau gyda fectorau safle $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a $2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$ yn ôl eu trefn.

(a) Darganfyddwch fector safle canolbwynt BD .

(b) Darganfyddwch fector safle pwynt E ar AD fel bod

$$AE : ED = 3 : 2.$$

(c) Darganfyddwch fector safle y pwynt E ar AB a gynhyrchir fel bod

$$AE = 3AB.$$

- Mae gan A , B ac C fectorau safle $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ o'u cymharu â thardd O . Canolbwyntiau OA , OB , CA ac CB yw D , E , F ac G , yn ôl eu trefn. Dangoswch, trwy ddarganfod eu fectorau safle, fod canolbwyntiau DG ac EF yn cyd-daro, h.y. mai yr un pwynt ydynt.

- Mae gan fertigau A , B , C a D paralelogram $ABCD$ fectorau safle $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ a $\mathbf{d}$, yn ôl eu trefn. Dangoswch fod

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

Mae'r pwyntiau E , F yn gorwedd ar AC ac AB , yn ôl eu trefn, lle mae

$$AE : EC = 1 : 3 \text{ ac } AF : FB = 1 : 2.$$

(a) Darganfyddwch fectorau safle E ac F .

(b) Dangoswch fod D , E ac F yn gorwedd ar linell syth.

4. Mae gan fertigau A , B ac C triongl fectorau safle $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ yn ôl eu trefn. Mae'r pwynt D yn gorwedd ar BC fel bod

$$CD : DB = 2 : 1.$$

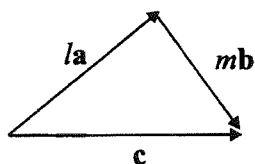
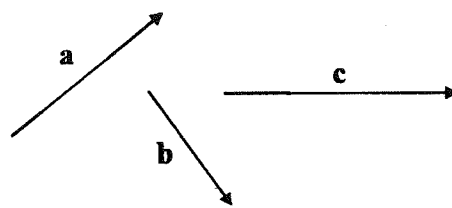
- (a) Darganfyddwch fector safle D .
 (b) Dangoswch fod y pwynt E sydd â fector safle

$$\frac{1}{7}\mathbf{a} + \frac{4}{7}\mathbf{b} + \frac{2}{7}\mathbf{c}$$

yn gorwedd ar AD a darganfyddwch $AE : ED$.

10.4 Fectorau dau-ddimensiwn a thri-ddimensiwn

Ystyriwn y ddau fector amharalel $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a ddangosir isod (nid ydynt yn lleoledig o anghenraid). Gall unrhyw fector $\mathbf{c}$, fel yr un a ddangosir, sy'n gorwedd yn y plân sy'n cynnwys $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ gael ei gynrychioli fel swm lluosrifau llinol $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.



$\mathbf{c} = l\mathbf{a} + m\mathbf{b}$,
lle mae l ac m yn rhifau real.

Dylai ychydig o ystyriaeth ac arbrofi eich argyhoeddi y gellir mynegi $\mathbf{c}$ yn nhermau $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ mewn un ffordd yn unig.

Gall unrhyw fector ym mhlân fectorau amharalel $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ gael ei gynrychioli'n unigryw fel swm lluosrifau sgalar $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

Enghraifft 10.9

Tybiwch fod $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn fectorau amharalel a bod $4\mathbf{a} + l\mathbf{b} = m\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, (1)

lle mae l ac m yn rhifau real.

Mae ochrau chwith a de (1) yn gynrychioliad o fector yn nhermau $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Gan fod y cynrychioliad yn unigryw, rhaid bod cyfernodau $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ ar y chwith a'r dde yn hafal.

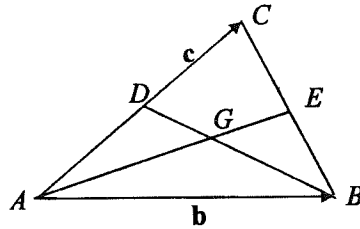
$$\therefore \quad \begin{aligned} 4 &= m, \\ l &= -2. \end{aligned}$$

Mae'r ffaith fod y cynrychioliad o fector yn nhermau fectorau amharalel yn unigryw yn ddefnyddiol iawn wrth ateb problemau.

Bu'r drafodaeth hon yn weddol fanwl. Ar ôl i chi ddeall, gellir ei byrhau.

Enghraifft 10.10

Mae pwyntiau D ac E yn ganolbwyntiau ochrau AC a BC triongl ABC , yn ôl eu trefn. Mae'r llinellau AE a BD yn croestorri ym mhwynt G . Trwy gymryd fectorau $\mathbf{AB} = \mathbf{b}$ ac $\mathbf{AC} = \mathbf{c}$, dangoswch fod $DG = \frac{1}{3}DB$ a bod $EG = \frac{1}{3}EA$.

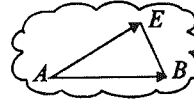


Cymerwn y fectorau $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ fel yr awgrymwyd. Ein strategaeth yw darganfod dau fynegiad ar gyfer fector safle G (o'i gymharu ag A).

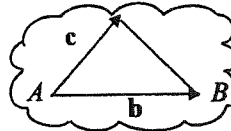
Yn gyntaf, gadewch i ni ystyried G fel pwynt ar AE . Os yw $AG : AE = \lambda : 1$, mae fector safle G o'i gymharu ag A yn

$$\begin{aligned} \mathbf{AG} &= \lambda \mathbf{AE} \\ &= \lambda(\mathbf{AB} + \mathbf{BE}) \\ &= \lambda \mathbf{b} + \lambda \mathbf{BE} \\ &= \lambda \mathbf{b} + \lambda \frac{1}{2} \mathbf{BC} \\ &= \lambda \mathbf{b} + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$\text{fel bod} \quad \mathbf{AG} = \frac{\lambda}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (1)$$



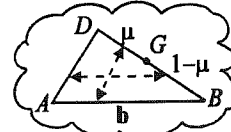
E yw canolbwynt BC



Yn ail, gadewch i ni ystyried G fel pwynt ar BD a gadewch i $DG : GB = \mu : 1 - \mu$. Yna mae fector safle G (ar BD) yn

$$\begin{aligned} \frac{\mu \mathbf{AB} + (1 - \mu) \mathbf{AD}}{\mu + 1 - \mu} &= \mu \mathbf{AB} + (1 - \mu) \mathbf{AD} \\ &= \mu \mathbf{b} + (1 - \mu) \frac{1}{2} \mathbf{AC} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathbf{AG} = \mu \mathbf{b} + \frac{1}{2}(1 - \mu) \mathbf{c} \quad (2)$$



D yw canolbwynt AC

Trwy wneud y ddau fynegiad ar gyfer **AG** yn (1) a (2) yn hafal, cawn

$$\frac{\lambda}{2}\mathbf{b} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{c} = \mu\mathbf{b} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2}\right)\mathbf{c}.$$

Gan fod **b** ac **c** yn fectorau amharalel,

$$(b) \quad \frac{\lambda}{2} = \mu, \quad (3)$$

$$(c) \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2}. \quad (4)$$

Mae'r ddadl a roddwyd
yn Enghraifft 10.9
wedi cael ei byrhau.

Datrysych (3) a (4) ar gyfer λ a μ . Gan hafalu $\frac{\lambda}{2}$ o (3) a (4), cawn

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{2}.$$

$$\therefore \frac{3\mu}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Yna o (3),} \quad \lambda = \frac{2}{3}.$$

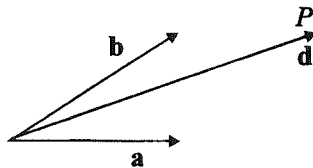
$$\text{Felly mae } DG : DB = \mu : 1 = \frac{1}{3} : 1 = 1 : 3$$

$$\therefore DG = \frac{1}{3} DB$$

$$\text{ac mae } EG : AE = 1 - \lambda : 1 = 1 - \frac{2}{3} : 1 = \frac{1}{3} : 1 \text{ neu } 1 : 3$$

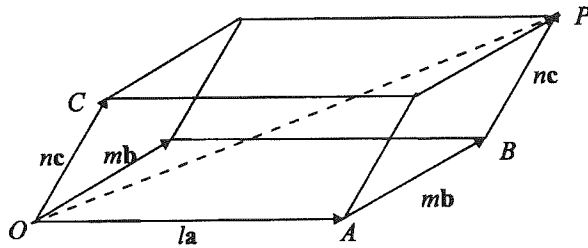
$$\therefore EG = \frac{1}{3} EA.$$

Os oes gennym fector **d** nad yw'n gorwedd ym mhlân y fectorau **a** a **b**, ni ellir ei gynrychioli fel swm o luosrifau **a** a **b**.



Nid yw **d** wedi
ei gynnwys yn y plân sy'n
cynnwys **a** a **b** fel bod
 $\mathbf{d} \neq \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.

A siarad yn fras, os ydym wedi ein cyfyngu i symudiadau ar hyd cyfeiriadau **a** a **b** byddwn wedi ein cyfyngu i'r plân sy'n cynnwys **a** a **b**. I symud allan o'r plân hwn mae angen symudiad arnom sy'n baralel i fector **c** (dyweder) sydd heb ei gynnwys ym mhlân **a** a **b**.



$$\mathbf{OP} = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$$

Mae'n gyfleus ystyried y fectorau fel fectorau dadleoliad, fel y dangosir. Yna gellir cyflawni'r dadleoliad trwy wneud

- (i) symudiad ar hyd $\mathbf{OA}$ ($l\mathbf{a}$),
- (ii) symudiad ar hyd $\mathbf{AB}$ ($m\mathbf{b}$),
- a (iii) symudiad ar hyd $\mathbf{BP}$ ($n\mathbf{c}$).

Yna mae $\mathbf{OP} = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$.

Gofynnwn i chi dderbyn bod y cynrychioliad hwn yn unigryw.

Gall unrhyw fector $\mathbf{d}$ gael ei gynrychioli'n unigryw yn nhermau tri fector amharalel, anghymhlan (*non-coplanar*) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ fel

$$\mathbf{d} = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c},$$

lle mae l , m , n yn rhifau real.

Mae anghymhlan yn golygu nad ydynt yn gorwedd yn yr un plân!

Mae'r ffaith bod y cynrychioliad yn unigryw yn bwysig.

Enghraifft 10.11

Os oes gennym dri fector amharalel, anghymhlan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ ac os yw

$$3\mathbf{a} + p\mathbf{b} + 4\mathbf{c} = q\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + r\mathbf{c},$$

yna, ar sail dadleuon tebyg i'r rheiny yn Enghraifft 10.9, mae

$$q = 3,$$

$$p = 3,$$

$$r = 4.$$

Enghraifft 10.12

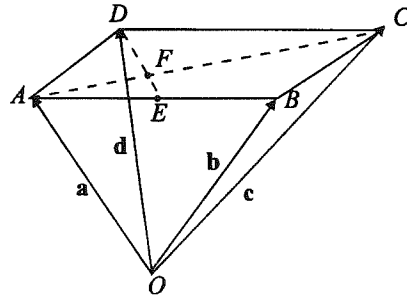
Mae gan y pwyntiau A , B , C , D fectorau safle $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, lle mae $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ yn fectorau amharalel, anghymhlan. O wybod bod $ABCD$ yn baralelogram, dangoswch fod

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

E yw canolbwynt AB ac mae'r llinell DE yn croestorri AC yn F .

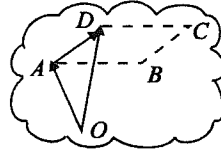
Dangoswch fod $AF : AC = 1 : 3$

a bod $DF : DE = 2 : 3$.



Mae fector safle D yn cael ei gynrychioli gan

$$\begin{aligned}\mathbf{OD} &= \mathbf{OA} + \mathbf{AD} \\ &= \mathbf{OA} + \mathbf{BC} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{OC} - \mathbf{OB} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}.\end{aligned}$$



Y strategaeth ar gyfer gweddill y cwestiwn hwn yw darganfod dau fynegiad ar gyfer $\mathbf{OF}$ a'u hafalu.

Boed i $AF : AC = \lambda : 1,$
 $DF : DE = \mu : 1.$

Y problem yw
darganfod λ a μ .

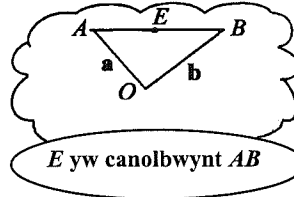
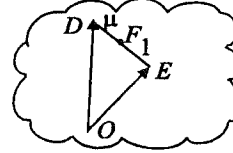
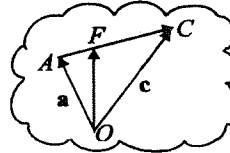
Gan fod F yn gorwedd ar AC ,

$$\begin{aligned}\mathbf{OF} &= \mathbf{OA} + \mathbf{AF} \\ &= \mathbf{OA} + \lambda \mathbf{AC} \\ &= \mathbf{a} + \lambda (\mathbf{c} - \mathbf{a})\end{aligned}$$

fel bod $\mathbf{OF} = (1 - \lambda) \mathbf{a} + \lambda \mathbf{c} \quad (1)$

Yn yr un modd, gan fod F yn gorwedd ar DE ,

$$\begin{aligned}\mathbf{OF} &= \mathbf{OD} + \mathbf{DF} \\ &= \mathbf{d} + \mu \mathbf{DE} \\ &= \mathbf{d} + \mu (\mathbf{OE} - \mathbf{OD}) \\ &= \mathbf{d} + \mu \mathbf{OE} - \mu \mathbf{OD} \\ &= \mathbf{d} (1 - \mu) + \mu \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b})(1 - \mu) + \frac{\mu}{2} \mathbf{a} + \frac{\mu}{2} \mathbf{b}\end{aligned}$$



fel bod $\mathbf{OF} = \mathbf{a} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \left(\frac{3\mu}{2} - 1\right) \mathbf{b} + (1 - \mu) \mathbf{c} \quad (2)$

Gwnewch y mynegiadau yn (1) a (2) yn hafal ar gyfer $\mathbf{OF}$.

$\therefore (1 - \lambda) \mathbf{a} + \lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) + \left(\frac{3\mu}{2} - 1\right) \mathbf{b} + (1 - \mu) \mathbf{c} \quad (3)$

Gan fod **a**, **b** ac **c** yn fectorau amharalel, anghymhlan:

$$1 - \lambda = 1 - \frac{\mu}{2}, \quad (4) \quad (a)$$

$$0 = \frac{3\mu}{2} - 1, \quad (5) \quad (b)$$

$$\lambda = 1 - \mu. \quad (6) \quad (c)$$

mae (5) yn rhoi $\mu = \frac{2}{3}$ ac mae $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$ yn bodloni (4) a (6).

$$\text{Yna mae } AF : AC = \lambda : 1 = \frac{1}{3} : 1$$

$$\text{ac mae } DF : DE = \mu : 1 = \frac{2}{3} : 1$$

$$\text{neu mae } AF : AC = 1 : 3 \quad \text{ac mae } DF : DE = 2 : 3.$$

Ymarferion 10.4

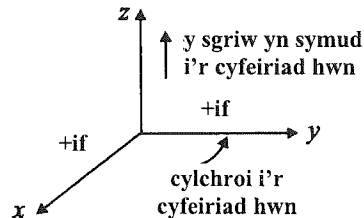
1. Mae gan bedwar pwynt A, B, C, D fectorau safle **a**, **b**, **c**, **a + b - c** o'u cymharu â thardd, yn ôl eu trefn. Mae'r llinellau AB ac CD yn croestorri yn E . Gallwch gymryd mai fectorau amharalel, anghymhlan yw **a**, **b**, **c**.
 - (i) O wybod bod $AE : AB = \lambda : 1$ a bod $CE : CD = \mu : 1$, ysgrifennwch ddau fynegiad ar gyfer **OE**.
 - (ii) Darganfyddwch **OE**.
2. Yn y paralelogram $ABCD$ mae gan y pwyntiau A, B, C, D fectorau safle **a**, **b**, **c**, **a + c - b**, yn ôl eu trefn, lle mae **a**, **b**, **c** yn fectorau amharalel, anghymhlan. M yw canolbwynt BC ac N yw canolbwynt CD . Mae'r llinellau AM a BN yn croestorri yn y pwynt P . O wybod bod $AP : AM = \lambda : 1$ a bod $BP : BN = \mu : 1$, darganfyddwch
 - (a) dau fynegiad ar gyfer fector safle P ,
 - (b) fector safle P .
3. Mae gan y pwyntiau A, B, C a D fectorau safle **a**, **b**, **c** a $2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$, yn ôl eu trefn, lle mae **a**, **b** ac **c** yn fectorau amharalel, anghymhlan. Mae'r llinellau AC a BD yn croestorri yn P . Dangoswch fod gan P fector safle

$$\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{c}.$$
4. Mae gan y pwyntiau A, B ac C fectorau safle **a**, **b** a $-2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ o'u cymharu â thardd O , lle mae **a** a **b** yn fectorau amharalel. L yw canolbwynt OA . Darganfyddwch fector safle y pwynt lle mae BL yn croestorri AC .

10.5 Cydrannau Cartesaidd fectorau

Yn Adran 10.4, dangoswyd y gallai unrhyw fector gael ei gynrychioli yn nhermau tri fector amharalel, anghymhlan **a**, **b** ac **c**. Gellir symleiddio cyfrifiadau trwy wneud dewis arbennig o fectorau **a**, **b** ac **c**.

Gadewch i ni gyflwyno ffrâm gyfeirio Cartesaidd dri-dimensiwn sy'n cynnwys pwynt sefydlog *O*, y tardd a thair echelin gydberpendicwlar *Ox*, *Oy* ac *Oz*.



Mae'r trefniant o echelinau ar gyfer set law-dde o echelinau fel a ganlyn: os yw'r sgriw yn symud ar hyd yr echelin *z* bositif, mae'r bawd yn cylchdroi o'r echelin *x* bositif i'r echelin *y* bositif.

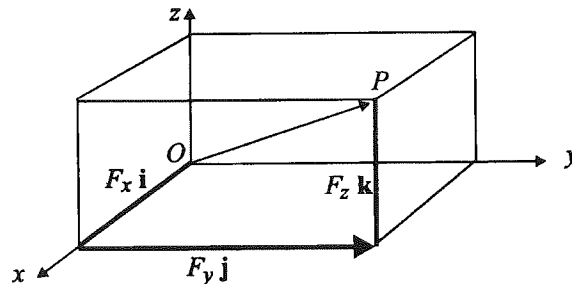
Yna cymerir fectorau uned **i**, **j**, **k** yn baralel i echelinau *Ox*, *Oy* ac *Oz* yn ôl eu trefn.

Yna gall fector **F** gael ei ysgrifennu yn y ffurf

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k},$$

lle mae $F_x \mathbf{i}$, $F_y \mathbf{j}$, $F_z \mathbf{k}$ yn gydrannau'r fector sy'n baralel i'r echelinau *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Pob un
o faint 1,
wrth gwrs



Gall y fector **F** fod yn llinell *OP* lle mae gan *P* gyfesurynnau (F_x , F_y , F_z) o'u cymharu ag *O*.

Sylwer ei bod hi'n bosibl nad yw fector **F** yn lleoledig. Os felly, mae cyfeiriadau'r echelinau yn bwysig ond nid yw eu lleoliad mewn gofod yn bwysig.

Yn achos fectorau lleoledig, mae lleoliad yr echelinau yn bwysig.

Mae'r fectorau uned **i**, **j**, **k** yn amharalel ac anghymhlan; felly mae'r cynrychioliad o fector yn nhermau'r rhain yn unigryw.

Enghraifft 10.13

Os yw $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

yna mae $a = 3, b = -1, c = 4$.

Modwlws fector

Mae modwlws y fector

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

yn cael ei gynrychioli gan hyd y llinell OP, lle mae P yn bwynt (F_x, F_y, F_z) . Yna mae

$$OP = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

ac felly mae $|F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}| = OP = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Mae cymhwyso
Theorem Pythagoras
ddwywaith yn rhoi'r
canlyniad hwn.

Enghraifft 10.14

Modwlws $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ yw $\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-4)^2}$

$$= \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}.$$

Sylwer bod $-2, -4$
Wedi eu sgwario ac
yn rhoi 4 ac 16.

Gall y fformiwla ar gyfer modwlws gael ei gymhwyso i ddarganfod modwlws swm algebraidd nifer o fectorau.

Enghraifft 10.15

Os yw $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,

$\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,

darganfyddwch $|2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}|$.

Darganfyddwn yn gyntaf $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

$$\begin{aligned} \text{Yna mae } 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c} &= 2(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) - 3(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\ &= (6 - 18 + 2)\mathbf{i} + (4 + 6 + 1)\mathbf{j} + (-4 - 3 - 3)\mathbf{k} \\ &= -10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 10\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Sylwer ar y cam
cyntaf hwn.

Adiwch y
rhannau i, j, k
ar wahân.

$$\text{Yna mae } |2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}| = \sqrt{(-10)^2 + 11^2 + (-10)^2} = \sqrt{321}.$$

Os rhoddir fector mewn ffurf Gartesaidd mae'n syml darganfod fector o unrhyw faint sy'n baralel i'r fector hwnnw.

Enghraifft 10.16

Os yw fector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, darganfyddwch

- (i) fector uned sy'n baralel i $\mathbf{a}$,
- (ii) fector o faint 14 sy'n baralel i $\mathbf{a}$.

(i) Nawr mae $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

Yna mae fector uned sy'n baralel i $\mathbf{a}$ yn $k\mathbf{a}$ lle mae $k|\mathbf{a}| = 1$.

$$\therefore k = \frac{1}{|\mathbf{a}|}$$

$\therefore$ mae fector uned sy'n baralel i $\mathbf{a}$ yn

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

$$\text{neu } \frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{k}.$$

D.S. Mae'n werth
cofio bod $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
yn fector uned
sy'n baralel i $\mathbf{a}$.

- (ii) Mae fector sy'n baralel i $\mathbf{a}$, o faint 14, yn $k\mathbf{a}$ lle mae $k|\mathbf{a}| = 14$.

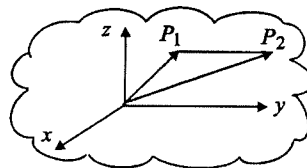
$$\therefore k = \frac{14}{|\mathbf{a}|}$$

Yna'r fector angenrheidiol yw

$$\frac{14}{|\mathbf{a}|} = \frac{14}{\sqrt{29}}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

$$\text{neu } \frac{42}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{56}{\sqrt{29}}\mathbf{j} + \frac{28}{\sqrt{29}}\mathbf{k}.$$

Gellir ystyried mai modwlws fector yw'r pellter rhwng dau bwynt mewn gofod tri-dimensiwn. Gellir ystyried bod y pwyntiau $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ym mhennau saethau dau fector safle OP_1 , OP_2 fel bod



$$\mathbf{OP}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$

$$\mathbf{OP}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

a $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{OP}_2 - \mathbf{OP}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$

Yna mae $|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$

Gellir defnyddio'r fformiwla hon ar unwaith i ddarganfod y pellter rhwng dau bwynt.

Enghraifft 10.17

Darganfyddwch y pellter rhwng y pwyntiau $(1, 2, -3)$ a $(-2, 1, -4)$

$$\begin{aligned}\text{Mae'r pellter} &= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 1)^2 + (-3 - (-4))^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}.\end{aligned}$$

Sylwch:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2, \text{ ac ati}$$

Ymarferion 10.5

1. Darganfyddwch y fectorau cydeffaith a'u meintiau yn (i) a (ii), o wybod bod

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

(i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

(ii) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

2. Darganfyddwch fectorau uned sy'n baralel i

(i) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(ii) $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

(iii) $5\mathbf{i}$.

3. O wybod bod

$$2a\mathbf{i} + 3(a + b)\mathbf{j} + 2(a - b + c)\mathbf{k} = (2 + a)\mathbf{i} + 4b\mathbf{j} + (3c - 2)\mathbf{k},$$

darganfyddwch werthoedd a , b ac c .

4. Darganfyddwch y pellterau rhwng y parau canlynol o bwyntiau:

$$(0, 1, -1), (2, -1, -2); \quad (0, -1, 1), (-3, -4, -5).$$

Pennod 11

Rhagor am Fectorau

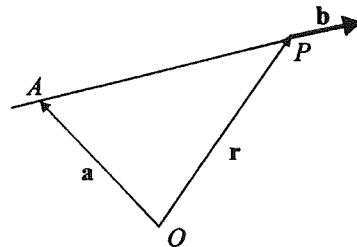
Yn rhan gyntaf y bennod hon defnyddir dulliau fector i ddarganfod hafaliadau llinellau syth. Yna ystyrir dull o gyfuno dau fector i gynhyrchu sgalar.

11.1 Yr hafaliad fector ar gyfer llinell syth

Gall llinell mewn gofod tri-dimensiwn gael ei dynodi mewn un o ddwy ffordd, sef

- (i) lle dynodir bod y llinell yn mynd trwy bwynt penodol mewn cyfeiriad penodol,
- neu (ii) lle dynodir bod y llinell yn mynd trwy ddau bwynt penodol.

(i) Llinell o gyfeiriad hysbys sy'n mynd trwy bwynt penodol



Yma mae'r llinell yn mynd trwy bwynt A sydd â fector safle $\mathbf{a}$, ac mae'n baralel i'r fector $\mathbf{b}$.

Gadewch i ni ddarganfod fector safle pwynt cyffredinol P ar y llinell.

$$\begin{aligned} \text{Nawr mae} \quad \mathbf{r} &= \mathbf{OA} + \mathbf{AP}, \\ \text{neu mae} \quad \mathbf{r} &= \mathbf{a} + \mathbf{AP}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mae'r fector $\mathbf{AP}$ yn baralel i'r fector $\mathbf{b}$ ac felly mae o'r ffurf $\lambda\mathbf{b}$, lle mae λ yn rhyw rif real. Yna gellir trawsnewid hafaliad (1) yn

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}. \quad (2)$$

Gelwir (2) yn hafaliad fector y llinell; gan fod λ yn amrywio yn (2) bydd yn rhoi gwahanol bwyntiau ar y llinell.

Gellir mynegi'r hafaliad (2) mewn ffurf Gartesaidd.

$$\begin{aligned} \text{Yna os yw} \quad \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \end{aligned}$$

Gall (2) gael ei ysgrifennu fel

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} + \lambda(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ \text{fel bod } x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (a_1 + \lambda b_1)\mathbf{i} + (a_2 + \lambda b_2)\mathbf{j} + (a_3 + \lambda b_3)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Yna trwy ystyried y termau yn $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, cawn

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda b_1, \\ y &= a_2 + \lambda b_2, \\ z &= a_3 + \lambda b_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Gelwir yr hafaliadau yn (3) yn hafaliadau paramedrig y llinell. Pan ddilëir λ o bob un o'r hafaliadau yn (3), cawn

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2} = \frac{z - a_3}{b_3}. \quad = \lambda$$

Enghraifft 11.1

Darganfyddwch ffurf fector a ffurf Gartesaidd yr hafaliad sy'n mynd trwy $(1, 2, -4)$ sy'n baralel i'r fector $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Mae gan y pwynt $(1, 2, -4)$ fector safle $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Yna hafaliad fector y llinell yw

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} + \lambda(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= (1 + 4\lambda)\mathbf{i} + (2 - 2\lambda)\mathbf{j} + (-4 + 3\lambda)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

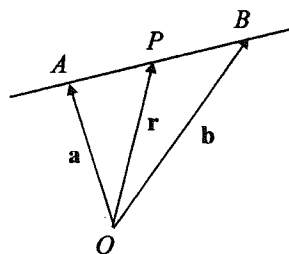
Ffurfiâu Cartesaidd hafaliadau'r llinell syth yw

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4\lambda \\ y &= 2 - 2\lambda \\ z &= -4 + 3\lambda \end{aligned}$$

neu

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z + 4}{3}.$$

(ii) Llinell sy'n mynd trwy ddau bwynt hysbys



Yma mae'r llinell yn mynd trwy bwyntiau A a B sydd â fectorau safle $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, yn ôl eu trefn. Gadewch i ni ddarganfod mynegiad ar gyfer fector safle $\mathbf{r}$ rhyw bwynt cyffredinol P ar y llinell AB .

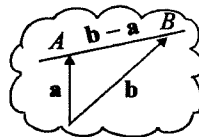
$$\begin{aligned} \text{Yna mae} \quad \mathbf{r} &= \mathbf{OA} + \mathbf{AP} \\ \text{neu mae} \quad \mathbf{r} &= \mathbf{a} + \mathbf{AP}. \end{aligned} \quad (4)$$

Nawr mae $\mathbf{AP}$ yn baralel i'r fector $\mathbf{AB}$ fel bod

$$\mathbf{AP} = \lambda \mathbf{AB},$$

lle mae λ yn rhyw rif real.

$$\begin{aligned} \text{Hefyd mae} \quad \mathbf{AB} &= \mathbf{b} - \mathbf{a} \\ \text{fel bod} \quad \mathbf{AP} &= \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (5)$$



Mae amnewid o (5) i (4) yn rhoi

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (6)$$

(6) yw hafaliad y llinell syth; cynhyrchir gwahanol bwyntiau ar y llinell gan fod λ yn amrywio. Gellir cael ffurf Gartesaidd yr hafaliad yn hawdd o (6). Yna os yw

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \end{aligned}$$

yn cael eu hamnewid i (5), mae gennym

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} + \lambda(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}).$$

Trwy ystyried y termau yn $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$ cawn

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \\ y &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2), \\ z &= a_3 + \lambda(b_3 - a_3). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Enghraifft 11.2

Darganfyddwch ffurf fector hafaliad y llinell syth sy'n mynd trwy'r pwyntiau $(1, -1, -2)$ a $(-1, 1, -3)$.

Y fectorau safle yw

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

felly ffurf fector y llinell yw

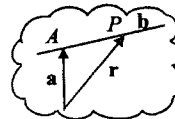
$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} + \lambda[-\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} - (\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})]$$

$$\text{neu } x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} + \lambda[-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}].$$

Mae'n ddefnyddiol edrych eto ar hafaliadau fector y llinellau syth.

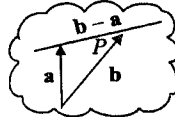
Achos (i)

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$



Achos (ii)

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$



Yn achos (i), mae cyfeiriad y llinell yn baralel i'r fector $\mathbf{b}$;

yn achos (ii) mae cyfeiriad y llinell yn baralel i'r fector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Yn achos (i) a (ii) fel ei gilydd, rhoddir cyfeiriad y llinell gan y termau yn λ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Enghraifft 11.3

(a) Darganfyddwch hafaliad y llinell sy'n baralel i'r llinell sy'n mynd trwy'r pwyntiau $A(4, -3, 11)$ a $B(2, 1, 5)$ ac sy'n mynd trwy'r pwynt $C(-1, 1, 3)$.

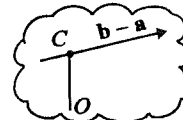
(b) Darganfyddwch fector uned sy'n baralel i'r llinell syth a ddarganfuwyd yn (a).

(a) Y fectorau safle $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yw

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

$$\text{Yna mae } \mathbf{b} - \mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$



Hafaliad y llinell syth yw

$$\mathbf{r} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} + \lambda(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}). \quad (1)$$

- (b) Mae cyfeiriad y llinell syth yn (a) yn cael ei roi gan y term yn λ , h.y. gan y fector $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$. Maint y fector hwn yw

$$\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{56}.$$

Felly, y fector uned sy'n baralel i'r llinell a roddir yw

$$\frac{1}{\sqrt{56}}(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$$

sy'n rhoi $\frac{1}{\sqrt{14}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}).$

$$\begin{aligned}\sqrt{56} &= \sqrt{4 \times 14} \\ &= 2\sqrt{14}\end{aligned}$$

Pan yw hafaliadau dwy linell yn hysbys mae'n hawdd darganfod eu croestorfan (os oes un).

Enghraifft 11.4

Os yw hafaliadau fector dwy linell yn

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \lambda(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \mu(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 18\mathbf{k}),$$

darganfyddwch eu croestorfan.

Sylwch fod
yn rhaid defnyddio
paramedrau gwahanol
 λ a μ i ddiffinio'r
llinellau.

Rhaid i fector safle y croestorfan fodloni hafaliadau'r ddwy linell. Yna trwy wneud y mynegiadau ar gyfer $\mathbf{r}$ yn hafal, mae gennym

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \lambda(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \mu(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 18\mathbf{k})$$

Yna trwy gyfateb y termau yn $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, cawn

$$1 + 2\lambda = 2 + 3\mu, \quad (1)$$

$$1 - 3\lambda = -1 + \mu \quad (2)$$

$$1 - \lambda = 2 - 18\mu \quad (3)$$

Nid oes angen
ond dau hafaliad i
ddarganfod dau werth
wrth gwrs!

Os yw'r pwyntiau yn croestorri rhaid i'r ddau baramedr λ a μ fodloni'r tri hafaliad (1), (2), (3).

O (1) a (2),

$$2\lambda - 3\mu = 1 \quad (1)$$

$$3\lambda + \mu = 2 \quad (2)$$

Gellir datrys y rhain yn y ffordd arferol i roi

$$\lambda = \frac{7}{11}, \quad \mu = \frac{1}{11}. \quad (4)$$

(1) + 3 × (2),
er enghraifft

Mae amnewid gwerthoedd λ a μ yn (4) i (3) yn dangos bod y gwerthoedd hyn yn bodloni (3):

$$\begin{array}{ccc} 1 - \lambda & = & 2 - 18\mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 - \frac{7}{11} & = & \frac{4}{11}, \quad 2 - \frac{18}{11} = \frac{4}{11}. \end{array}$$

Felly mae $\lambda = \frac{7}{11}, \mu = \frac{1}{11}$, yn bodloni (1), (2) a (3) sy'n dangos bod y llinellau'n

croestorri. Gellir darganfod fector safle y pwynt trwy naill ai amnewid

$$\lambda = \frac{7}{11} \quad \text{i} \quad \mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \lambda(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}),$$

$$\text{neu amnewid } \mu = \frac{1}{11} \quad \text{i} \quad \mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \mu(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 18\mathbf{k}).$$

$$\begin{aligned} \text{Mae'r cyntaf yn rhoi} \quad \mathbf{r} &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \frac{7}{11}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= \frac{25}{11}\mathbf{i} - \frac{10}{11}\mathbf{j} + \frac{4}{11}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Gofynnir i chi gadarnhau y ceir yr un fector safle ar ôl amnewid $\mu = \frac{1}{11}$ yn yr ail achos.

Enghraifft 11.5

Dangoswch nad yw'r llinellau a roddir gan yr hafaliadau fector

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \\ \mathbf{r} &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} + \mu(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \end{aligned}$$

yn croestorri.

Cymerwn fod y croestorfan yn bodoli, h.y. fod y llinellau'n croestorri.

Gan wneud y mynegiadau ar gyfer $\mathbf{r}$ yn hafal, cawn

$$\begin{aligned} 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} + \mu(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ \text{fel bod} \quad 2 + \lambda &= 3 + 2\mu, & (1) \\ 1 + \lambda &= -1 + 3\mu, & (2) \\ -1 + \lambda &= 1 - \mu. & (3) \end{aligned}$$

Bydd gwerthoedd λ a μ yn bodloni (1), (2), (3) os yw'r llinellau'n croestorri.

O (1) a (2), mae

$$\begin{aligned} \lambda - 2\mu &= 1, & (1) \\ \lambda - 3\mu &= -2. & (2) \end{aligned}$$

Mae tynnu (2) o (1) yn rhoi

$$\mu = 3$$

ac mae amnewid yn (1) neu (2) yn rhoi

$$\lambda = 7.$$

Mae amnewid y gwerthoedd hyn yn (3) yn arwain at

$$\begin{array}{cc} -1 + 7 & \neq & 1 - 3 \\ \text{ochr chwith} & & \text{ochr dde} \end{array}$$

Felly nid yw'r gwerthoedd a ddeilliwyd ar gyfer λ a μ yn bodloni'r trydydd hafaliad. Mewn geiriau eraill, nid oes unrhyw werthoedd λ a μ sy'n bodloni'r tri hafaliad (1), (2), (3). Deuwn i'r casgliad nad yw'r llinellau yn croestorri.

Gellir darganfod croestorfan dwy linell hyd yn oed heb ddefnyddio **i, j, k**.

Enghraifft 11.6

Darganfyddwch fector safle croestorfan y llinellau a gynrychiolir gan

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \quad \text{ac} \quad \mathbf{r} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

lle mae **a** a **b** yn fectorau amharalel.

Yn y croestorfan,

$$\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

$$\therefore \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} = (2 - \mu)\mathbf{a} + (1 + \mu)\mathbf{b}.$$

Gan fod **a** a **b** yn fectorau amharalel,

$$1 = 2 - \mu, \quad (1)$$

$$\lambda = 1 + \mu. \quad (2)$$

termau **a**,
termau **b**.

mae (1) yn rhoi $\mu = 1$ ar unwaith ac mae amnewid i (2) yn rhoi $\lambda = 2$.

Y croestorfan yw

$$\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}.$$

neu defnyddiwch
 $\mu = 1$ yn yr ail hafaliad

Enghraifft 11.7

Tri fector amharalel, anghymhlan yw **a**, **b** ac **c**. Dangoswch nad yw'r llinellau

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$$

yn croestorri.

Ceisiwn ddarganfod y croestorfan trwy wneud y fectorau safle yn hafal.

$$\therefore 2\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mu \mathbf{c} \quad (1)$$

Trwy hafalu cyfernodau'r fectorau amharalel, anghymhlan, cawn

$$2 + \lambda = 1, \quad (2)$$

$$\lambda = 2, \quad (3)$$

$$\lambda = \mu. \quad (4)$$

O (2), mae $\lambda = -1$, sy'n cael ei groesddweud gan $\lambda = 2$ o (3).

Felly ni allwn ddarganfod gwerthoedd λ a μ sy'n bodloni (2), (3), (4). Deuwn i'r casgliad nad yw'r llinellau yn croestorri.

Ymarferion 11.1

- Darganfyddwch ffurfiau fector y llinellau sy'n mynd trwy'r pwynt a roddir ac sy'n baralel i'r cyfeiriad a roddir.

(a) $(2, 1, 1)$; cyfeiriad $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$	(b) $(1, -1, 0)$; cyfeiriad $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
(c) $(0, 1, 0)$; cyfeiriad $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$	(d) $(0, 0, 0)$; cyfeiriad $3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- Darganfyddwch hafaliadau fector y llinellau sy'n mynd trwy bwyntiau A a B .

(a) $A(1, 1, -3)$	$B(2, 0, 3)$
(b) $A(1, 1, 1)$	$B(3, 1, -2)$
(c) $A(0, 0, 0)$	$B(5, -3, 1)$
(d) $A(2, 1, 0)$	$B(-2, 3, 1)$
- Dywedwch a yw'r parau canlynol o linellau yn baralel.

(a) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \lambda(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ $\mathbf{r} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mu\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}\right)$
(b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} + (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mu\left(\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$
- Darganfyddwch hafaliad fector llinell sy'n mynd trwy'r pwynt $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sy'n baralel i'r llinell syth a gynrychiolir gan $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \lambda(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$.
- Darganfyddwch a yw'r parau canlynol o linellau yn croestorri

(a) $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} + \lambda(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mu(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$
(b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ $\mathbf{r} = +\mu\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c} + \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mu(2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c})$,

lle mae $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ yn fectorau amharalel, anghymhlan.

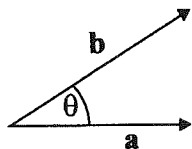
11.2 Lluoswm sgalar dau fector

Hyd yma rydym i bob pwrpas wedi diffinio dau weithrediad algebraidd, sef adio (neu dynnu) fectorau a lluosu fector â rhif real (neu sgalar).

Mae yna weithrediadau eraill yn ymwneud â fectorau sy'n bwysig mewn Mathemateg Gymhwysol. Un gweithrediad o'r fath yw'r lluoswn sgalar neu'r lluoswm dot. Byddwn yn defnyddio'r enw 'lluoswm sgalar' yma.

Lluoswm sgalar

Tybiwch fod dau fector **a** a **b** fel y dangosir, gyda θ yn ongl rhyngddynt.



Diffinnir lluoswm sgalar **a** a **b** fel

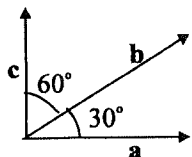
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta.$$

Pwysleisir y pwyntiau canlynol mewn perthynas â'r diffiniad hwn.

- (a) Dylid cymryd gofal i sicrhau bod y dot rhwng y fectorau **a** a **b** yn hollol eglur.
- (b) Cyfeirir at y lluoswm sgalar fel **a** dot **b**, sy'n egluro'r enw arall 'lluoswm dot'.
- (c) Sgalar yw'r lluoswm **a** . **b**. Mae'r lluoswm sgalar, fel yr awgryma'r enw, yn cyfuno dau fector i gynhyrchu sgalar.
- (d) Mae'r lluoswm sgalar yn dibynnu ar feintiau **a** a **b** ac ar gosin yr ongl rhyngddynt.

Enghraifft 11.8

Mae gan y fectorau cymhlan **a**, **b** ac **c** feintiau 3, 4, 5 yn ôl eu trefn ac maent fel y dangosir.



Darganfyddwch **a** . **b**, **b** . **c**, **c** . **a**, **a** . **a**, **b** . **b** ac **c** . **c**.

Nawr mae $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{c}| = 5$ (rhoddwyd).

Yna mae **a** . **b** = $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 30^\circ$

$$= 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 6\sqrt{3}.$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 4 \times 5 \times \frac{1}{2}.$$

$$= 10.$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{c}| |\mathbf{a}| \cos 90^\circ$$

$$= 5 \times 3 \times 0 = 0.$$

yr ongl rhwng
a a **b** yw 30°

$$\begin{aligned}\text{Nawr mae } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} &= |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos (\text{ongl rhwng } \mathbf{a} \text{ ac } \mathbf{a}) \\ &= 3 \times 3 \times \cos 0 \\ &= 9;\end{aligned}$$

yn yr un modd, mae

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{b}| |\mathbf{b}| \cos 0 \\ &= 4 \times 4 \times 1 \\ &= 16;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ac mae } \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} &= |\mathbf{c}| |\mathbf{c}| \cos 0 \\ &= 5 \times 5 \times 1 \\ &= 25.\end{aligned}$$

Enghraifft 11.9

Ceir dau fector $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ fel bod

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6 \text{ a } |\mathbf{a}| = 5, |\mathbf{b}| = 3.$$

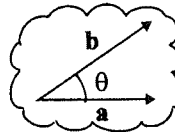
Darganfyddwch yr ongl rhwng y fectorau $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

$$\text{Nawr mae } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta.$$

$$\therefore 6 = 5 \times 3 \cos \theta$$

$$\text{fel bod } \cos \theta = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 66.4^\circ$$

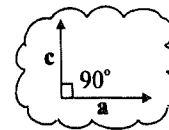


Yn Enghraifft 11.8, gwelsom fod

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$$

gan fod y fectorau $\mathbf{c}$ ac $\mathbf{a}$ yn berpendicwlar i'w gilydd ac oherwydd bod

$$\cos 90^\circ = 0.$$



Mae hyn yn egluro'r rheol ganlynol ar gyfer profi a yw dau fector yn berpendicwlar.

Prawf ar gyfer Perpendicwlaredd

Os yw $|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$ ac $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ yna mae $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ yn fectorau perpendicwlar.

Y cyfdro yw:

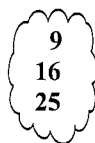
Os yw $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, yna mae $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ neu mae'r fectorau yn fectorau perpendicwlar.

Dangosodd Enghraifft 11.8 hefyd fod

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2,$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|^2,$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{c}|^2,$$



Y rheol gyffredinol yw:

Lluoswm sgalar fector gydag ef ei hun yw sgwâr maint y fector.

Enghraifft 11.10

Mae'r fectorau $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ yn naturiol berpendicwlar.

Darganfyddwch $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$.

Mae'r canlyniadau hyn yn bwysig fel fe'u dangosir yma.

Nawr mae $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1^2 = 1$,
gan fod $\mathbf{i}$ yn fector uned.

Yn yr un modd, mae

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Nawr mae $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1 \times 1 \cos 90^\circ = 0$.

Yn yr un modd, mae

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Mae nifer o briodweddau'r lluoswm sgalar yn bwysig.

Y Ddeddf Gymudol

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$



neu $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \theta.$

Nid yw'r drefn
yn bwysig.

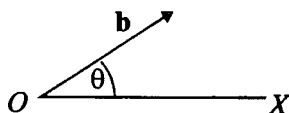
Y Ddeddf Ddosbarthol

Ar gyfer tri fector,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

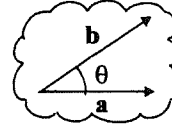
Cyn profi'r canlyniad, rydym yn diffinio tafluniad fector ar linell. Os oes ongl θ rhwng y fector $\mathbf{b}$ a chyfeiriad OX yna

$|\mathbf{b}| \cos \theta$ yw tafluniad y fector $\mathbf{b}$ ar OX .

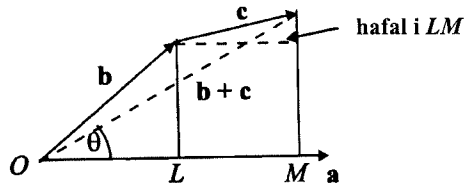


Hefyd os yw'r fector yn cael ei gyfeirio ar hyd OX, yna mae

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \\
 &= |\mathbf{a}| \times (|\mathbf{b}| \cos \theta) \\
 &= |\mathbf{a}| \times \text{tafluniad } \mathbf{b} \text{ ar } \mathbf{a} \\
 \text{neu mae } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \\
 &= |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \theta \\
 &= |\mathbf{b}| \times (|\mathbf{a}| \cos \theta) \\
 &= |\mathbf{b}| \times \text{tafluniad } \mathbf{a} \text{ ar } \mathbf{b}.
 \end{aligned}$$



Rydym yn profi $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ trwy ystyried tafluniad y gwahanol fectorau a ddangosir yn y diagram.



Nid yw'r
prawf hwn
i'w arholi.

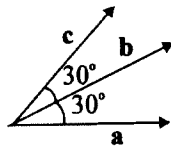
Sylwer bod $OL =$ tafluniad $\mathbf{c}$ ar $\mathbf{a}$,
 $LM =$ tafluniad $\mathbf{b}$ ar $\mathbf{a}$,
 $OM =$ tafluniad $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ar $\mathbf{a}$.

Yna mae $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \times (\text{tafluniad } \mathbf{b} + \mathbf{c} \text{ ar } \mathbf{a})$
 $= |\mathbf{a}| \times OM$
 $= |\mathbf{a}| (OL + LM)$
 $= |\mathbf{a}| (OL) + |\mathbf{a}| (LM)$
 $= |\mathbf{a}| (\text{tafluniad } \mathbf{b} \text{ ar } \mathbf{a}) + |\mathbf{a}| (\text{tafluniad } \mathbf{c} \text{ ar } \mathbf{a})$
 $= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$

Felly mae $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$

Enghraifft 11.11

Os yw fectorau cymhlan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ac $\mathbf{c}$ fel y dangosir, gyda $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{c}| = 2$, darganfyddwch $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.



Nawr mae $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
 $= 3 \times 4 \times \cos 30^\circ + 3 \times 2 \times \cos 60^\circ$
 $= 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times 2 \times \frac{1}{2}$
 $= 6\sqrt{3} + 3.$

Deddf Raddio

Gellir dangos (ond ni fyddwn yn gwneud hyn yma) fod

$$l\mathbf{a} \cdot m\mathbf{b} = lm(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

lle mae l, m yn ddau rif real.

Enghraifft 11.12

Gwerthuswch y lluosymiau sgalar canlynol.

(a) $6\mathbf{i} \cdot 3\mathbf{j}$

(b) $2\mathbf{i} \cdot -4\mathbf{i}$

(c) $a_1\mathbf{i} \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})$

(ch) $(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})$

(a) $6\mathbf{i} \cdot 3\mathbf{j} = 6 \times 3(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) = 18 \times 0 = 0.$

Deddf Raddio

(b) $2\mathbf{i} \cdot -4\mathbf{i} = 2 \times -4(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) = -8 \times 1 = -8$

(c) $a_1\mathbf{i} \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1\mathbf{i} \cdot b_1\mathbf{i} + a_1\mathbf{i} \cdot b_2\mathbf{j} = a_1b_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = a_1b_1.$

Deddf Ddosbarthol

(ch) $(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j})$

$$= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot b_1\mathbf{i} + (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot b_2\mathbf{j}$$

Deddf Ddosbarthol

$$= a_1\mathbf{i} \cdot b_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \cdot b_1\mathbf{i} + a_1\mathbf{i} \cdot b_2\mathbf{j} + a_2\mathbf{j} \cdot b_2\mathbf{j}$$

$$= a_1b_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_2b_1\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_2b_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$$

Deddfau Dosbarthol
a Chymudol

$$\text{fel bod } (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Gall y canlyniad yn 13.12(ch) gael ei gyffredinoli, sef bod

$$\begin{aligned} (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ &= \text{cyfernodau } \mathbf{i} \text{ wedi'u lluosgi} \\ &\quad + \text{cyfernodau } \mathbf{j} \text{ wedi'u lluosgi} \\ &\quad + \text{cyfernodau } \mathbf{k} \text{ wedi'u lluosgi.} \end{aligned}$$

Enghraifft 11.13

$$\begin{aligned} \text{(a) } (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}) &= 1 \times 3 + 1 \times 1 + (-1) \times (-6) \\ &= 3 + 1 + 6 = 10. \end{aligned}$$

C'nodau $\mathbf{i}$ wedi'u lluosgi
+ c'nodau $\mathbf{j}$ wedi'u lluosgi
+ c'nodau $\mathbf{k}$ wedi'u lluosgi

$$\begin{aligned} \text{(b) } (\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) &= 1 \times 2 + 1 \times (-3) + (-4) \times 0 \\ &= 2 - 3 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Nid oes unrhyw derm
yn $\mathbf{k}$ yn yr ail gromfach.

Mae'r arwydd negatif yn dangos bod y lluoswm sgalar yn negatif sy'n golygu bod $\cos \theta < 0$, h.y. yr ongl rhwng y fectorau, yn aflem.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0, |\mathbf{b}| > 0.$$

Pan fynegir fectorau yn nhermau $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ mae'n hawdd darganfod yr ongl rhwng y fectorau.

Enghraifft 11.14

Darganfyddwch yr ongl rhwng y fectorau

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Nawr mae $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$

fel bod $\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$

$$\begin{aligned} \text{Darganfyddwn } |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| &= (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \\ &= 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-3) \\ &= 1 - 1 + 3 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hefyd mae } |\mathbf{a}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}, \\ |\mathbf{b}| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}. \end{aligned}$$

$$\text{Yna mae } \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

fel bod $\theta = 72.02^\circ$

Enghraifft 11.15

Darganfyddwch yr ongl rhwng y llinellau a gynrychiolir gan yr hafaliadau fector

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \lambda(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}), \\ \mathbf{r} &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mu(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Rhoddir cyfeiriad y llinellau gan y termau yn λ a μ , h.y. gan y fectorau

$$\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Darganfyddwn yr ongl rhwng y fectorau hyn

Nawr mae $\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$.

Yna ar gyfer y ddau fector

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{|\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| |\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}|} \\ &= \frac{1 \times 1 + (-3) \times (-2) + (-2) \times (2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{1 + 6 - 4}{\sqrt{14}\sqrt{9}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

$\therefore \theta = 74.50^\circ$

Mae'r lluoswm sgalar yn ein galluogi i ddarganfod fector sy'n berpendicwlar i ddau fector a roddir.

Mae dull arall o wneud hyn, gan ddefnyddio math gwahanol o lluoswm.

Enghraifft 11.16

O wybod bod $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
darganfyddwch fector uned $\mathbf{c}$ sy'n berpendicwlar i $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

Boed i $\mathbf{c} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

lle mae x , y a z yn gysonion i'w darganfod.

Gan fod $\mathbf{c}$ yn berpendicwlar i $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$\therefore (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0$$

$$\text{fel bod } 3x + 2y - z = 0. \quad (1)$$

$$\text{Yn yr un modd, mae } \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$$

yn rhoi

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0$$

$$\text{fel bod } x - y + z = 0. \quad (2)$$

Datryswn hafaliadau (1) a (2) ar gyfer unrhyw ddau werth anhysbys yn nhermau'r trydydd gwerth. Gan adio (1) a (2), cawn

$$4x + y = 0$$

$$\text{fel bod } y = -4x$$

Amnewidiwch am y yn (2)

$$\therefore x - (-4x) + z = 0$$

$$\text{fel bod } z = -5x.$$

Yna trwy ysgrifennu y , z yn nhermau x yn y fector $\mathbf{c}$, cawn

$$\mathbf{c} = x\mathbf{i} - 4x\mathbf{j} - 5x\mathbf{k}$$

$$\text{fel bod } \mathbf{c} = x(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \quad (4)$$

Yna trwy gymryd unrhyw werth ansero o x yn (4), cawn fector sy'n berpendicwlar i $\mathbf{a}$ ac i $\mathbf{b}$. Mewn gwirionedd, mae angen y fector uned. Y fector uned yw

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} &= \frac{x(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})}{\sqrt{x^2 + (-4x)^2 + (-5x)^2}} \\ &= \frac{x(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})}{\sqrt{42x^2}} \\ &= \frac{x(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})}{x\sqrt{42}} \\ &= \frac{(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})}{\sqrt{42}}. \end{aligned}$$

Enghraifft 11.14

Darganfyddwch yr ongl rhwng y fectorau

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nawr mae } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \\ \text{fel bod } \cos \theta &= \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Darganfyddwn } |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| &= (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \\ &= 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-3) \\ &= 1 - 1 + 3 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hefyd mae } |\mathbf{a}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}, \\ |\mathbf{b}| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}. \end{aligned}$$

$$\text{Yna mae } \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\text{fel bod } \theta = 72.02^\circ$$

Enghraifft 11.15

Darganfyddwch yr ongl rhwng y llinellau a gynrychiolir gan yr hafaliadau fector

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \lambda(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}), \\ \mathbf{r} &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mu(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Rhoddir cyfeiriad y llinellau gan y termau yn λ a μ , h.y. gan y fectorau

$$\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Darganfyddwn yr ongl rhwng y fectorau hyn

$$\text{Nawr mae } \cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Yna ar gyfer y ddau fector

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{|\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| |\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}|} \\ &= \frac{1 \times 1 + (-3) \times (-2) + (-2) \times (2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{1 + 6 - 4}{\sqrt{14}\sqrt{9}} = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 74.50^\circ$$

Mae'r lluoswm sgalar yn ein galluogi i ddarganfod fector sy'n berpendicwlar i ddau fector a roddir.

Mae dull arall
o wneud hyn, gan
ddefnyddio
math gwahanol
o lluoswm.

Enghraifft 11.16

O wybod bod $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
darganfyddwch fector uned $\mathbf{c}$ sy'n berpendicwlar i $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

Boed i $\mathbf{c} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

lle mae x, y a z yn gysonion i'w darganfod.

Gan fod $\mathbf{c}$ yn berpendicwlar i $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$\therefore (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0$$

$$\text{fel bod } 3x + 2y - z = 0. \quad (1)$$

$$\text{Yn yr un modd, mae } \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$$

yn rhoi

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0$$

$$\text{fel bod } x - y + z = 0. \quad (2)$$

Datryswn hafaliadau (1) a (2) ar gyfer unrhyw ddau werth anhysbys yn nhermau'r trydydd gwerth. Gan adio (1) a (2), cawn

$$4x + y = 0$$

$$\text{fel bod } y = -4x$$

Amnewidiwch am y yn (2)

$$\therefore x - (-4x) + z = 0$$

$$\text{fel bod } z = -5x.$$

Yna trwy ysgrifennu y, z yn nhermau x yn y fector $\mathbf{c}$, cawn

$$\mathbf{c} = x\mathbf{i} - 4x\mathbf{j} - 5x\mathbf{k}$$

$$\text{fel bod } \mathbf{c} = x(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \quad (4)$$

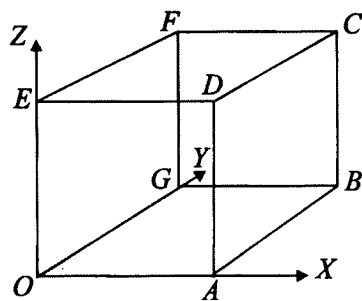
Yna trwy gymryd unrhyw werth ansero o x yn (4), cawn fector sy'n berpendicwlar i $\mathbf{a}$ ac i $\mathbf{b}$. Mewn gwirionedd, mae angen y fector uned. Y fector uned yw

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} &= \frac{x(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})}{\sqrt{x^2 + (-4x)^2 + (-5x)^2}} \\ &= \frac{x(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})}{\sqrt{42x^2}} \\ &= \frac{x(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})}{x\sqrt{42}} \\ &= \frac{(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k})}{\sqrt{42}}. \end{aligned}$$

Ymarferion 11.2

1. Darganfyddwch luoswm sgalar $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ o wybod bod $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ a bod yr ongl rhwng y fectorau yn 150° .
2. Dangoswch fod y fectorau $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ a $-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ yn berpendicwlar.
3. Darganfyddwch dafluniad y fector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ yng nghyfeiriad y fector $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
4. Darganfyddwch yr onglau rhwng y fector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ a'r echelin x , yr echelin y a'r echelin z .
Awgrym: mae $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ yn fectorau sy'n baralel i'r echelinau.
5. Darganfyddwch fector uned sy'n berpendicwlar i'r fectorau $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ a $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
6. Darganfyddwch yr onglau rhwng y parau o linellau sy'n mynd trwy'r pwyntiau a roddir.
(a) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \lambda(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$; $\mathbf{r} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mu(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$
(b) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$; $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + \mu(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k})$
7. Darganfyddwch yr onglau rhwng y parau o linellau sy'n mynd trwy'r pwyntiau a roddir.
(a) $(1, 2, 3)$, $(-2, 1, 2)$; $(-1, 2, -3)$, $(0, 2, -1)$
(b) $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$; $(1, 0, 0)$, $(-1, 1, 1)$

8.



Mae'r ffigur yn dangos ciwb ag ochrau o hyd a . Gan gymryd echelinau OX , OY , OZ fel y dangosir, a'r fectorau uned cysylltiedig $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$:

- (a) ysgrifennwch fectorau safle A , B , C , D , E ac F ,
- (b) mynegwch y fectorau BD , DF a GE yn nhermau $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$,
- (c) darganfyddwch yr onglau rhwng y llinellau DF a GE ,
- (d) darganfyddwch yr onglau rhwng BD ac OC .

Papur Adolygu 1

1. Ysgrifennwch ehangiad $(1-3x)^{-\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^3 .

Trwy hyn darganfyddwch ehangiad $\frac{1-4x}{\sqrt{1-3x}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at,

ac yn cynnwys, y term yn x^3 . Nodwch yr amrediad o werthoedd x y mae'r ehangiad yn ddilys ar ei gyfer.

2. (a) Mynegwch $\frac{x+4}{(x+1)(x-2)^2}$ yn nhermau ffractiynau rhannol.

- (b) Darganfyddwch hafaliad y normal i'r gromlin

$$y = \frac{x+4}{(x+1)(x-2)^2} \text{ ym mhwynt } (0, 1).$$

3. Darganfyddwch werthoedd x rhwng 0° a 360° yn y canlynol:

(a) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0,$

(b) $\tan^2 x - 3 \sec x = 0.$

4. Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn yr achosion canlynol.

(a) $y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}.$

(b) $x^2 + 3xy - y^2 = 3.$

5. (a) Cyfrifwch $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) dx.$

- (b) Defnyddiwch integru fesul rhan i ddarganfod

$$\int_1^2 \ln x dx.$$

- (c) Gan ddefnyddio'r amnewidiad $u^2 = 1 + \sin^2 \theta$, neu fel arall, cyfrifwch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta \sqrt{1 + \sin^2 \theta} d\theta.$$

6. Cynhesir hylif fel bod ei dymheredd $x^{\circ}\text{C}$ ar amser t eiliad yn bodloni'r hafaliad differol

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(100 - x),$$

lle mae α yn gysonyn positif.

20°C yw'r tymheredd pan fo $t = 0$.

- (a) Dangoswch fod $x = 100 - 80e^{-\alpha t}$.
 (b) O wybod bod $x = 80$ pan fo $t = 300$, darganfyddwch werth α .

7. Mae gan y pwyntiau A, B, C, D ac E fectorau safle $\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$, $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, $-\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $-2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$, a $-4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, yn ôl eu trefn. Mae'r llinellau AB a DC yn croestorri yn F .

- (a) Dangoswch mai

$$\mathbf{r} = (1 + \lambda)\mathbf{i} + (11 - 3\lambda)\mathbf{j},$$

lle mae λ yn baramedr, yw hafaliad fector y llinell AB , a darganfyddwch hafaliad fector y llinell DC .

- (b) Dangoswch mai

$$\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$$

yw fector safle F .

- (c) Darganfyddwch yr ongl rhwng FD ac EA .

Papur Adolygu 2

1. Mynegwch $\frac{1-x-x^2}{(1+2x)(1+x)^2}$ fel swm tri ffraciwn rhannol.

Trwy hyn neu fel arall, ehangwch y mynegiad hwn mewn pwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^3 .

Nodwch yr amrediad o werthoedd x y mae'r ehangiad yn ddilys ar ei gyfer.

2. (a) Trwy ysgrifennu $\cos 3x = \cos(2x + x)$ i ddechrau, dangoswch fod
 $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.
 (b) Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni
 $\cos 3x + 2 \cos x = 0$.

3. Mae'r pwynt $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ yn gorwedd ar y gromlin C a gynrychiolir gan $xy = 1$.

- (a) Dangoswch mai

$$t^2y + x - 2t = 0$$

yw hafaliad y tangiad i C ym mhwynt P .

Mae'r tangiad ym mhwynt P yn cyfarfod ag echelinau x ac y yn A a B .

Dangoswch fod arwynebedd triongl AOB yn annibynnol ar t .

- (b) Mae $S\left(s, \frac{1}{s}\right)$ yn bwynt arall ar C . Darganfyddwch gyfesurynnau U , sef croestorfan y tangiadau yn S a T .
 Os V yw canolbwynt PQ , dangoswch fod y tardd O a phwyntiau U a V yn gorwedd ar linell syth.

4. Mae'r arwynebedd o fewn y gromlin $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, y llinellau $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ a'r echelin x yn cael ei gylchdroi a amgylch yr echelin x trwy bedair ongl sgwâr. Darganfyddwch gyfaint y solid sy'n cael ei greu.

5. (a) Defnyddiwch integru fesul rhan i ddarganfod $\int x e^{-4x} dx$.
 (b) Defnyddiwch yr amnewidiad $x = \tan u$ i ddangos bod

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Mae goledd cromlin ym mhwynt (x, y) yn hafal i $2y^2x$.
- (a) Ysgrifennwch hafaliad differol a fodlonir gan y .
 - (b) O wybod bod y cromlin yn mynd trwy'r pwynt $(1, 1)$, darganfyddwch y fel ffwythiant o x .
7. Hafaliadau fector dwy linell yw
- $$\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \lambda (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$
- ac
- $$\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + a\mathbf{k} + \mu (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}),$$
- lle mae a yn gysonyn.
- (a) O wybod bod y ddwy linell yn croestorri, darganfyddwch a a chroestorfan y llinellau.
 - (b) Darganfyddwch yr ongl rhwng y llinellau, gan roi eich ateb yn gywir i'r radd agosaf.

Papur Adolygu 3

1. Ysgrifennwch a symleiddiwch yr ehangiad binomaidd $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^3 . Nodwch yr amrediad o werthoedd x y mae'r ehangiad yn ddilys ar ei gyfer. Trwy roi $x = -1$, defnyddiwch eich ehangiad i gael brasamcan ar gyfer $\sqrt{3}$, gan roi eich ateb fel cymhareb o ddau gyfanrif.

2. Defnyddiwch ffracsiynau rhannol i ddarganfod

$$\int \frac{2x^2 + 7x + 3}{(x-1)(x+1)^2} dx.$$

3. Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn y canlynol:

(a) $y = (\tan^{-1}x)^2$

(b) $y^3 = x(x + 2y)$

(c) $x = \sec t, y = \tan t + 2.$

4. Datrysych yr hafaliadau canlynol ar gyfer gwerthoedd x rhwng 0° a 360° .

(a) $6 \sin x - 2 \operatorname{cosec} x = 1.$

(b) $\sin x = 6 \sin 2x.$

5. Ailysgrifennwch $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta$ yn y ffurf $R \cos(\theta + \alpha)$, gan roi gwerthoedd R ac α .

- (a) Darganfyddwch werthoedd θ rhwng 0° a 360° sy'n bodloni $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta = 1.$

- (b) Darganfyddwch werthoedd mwyaf a lleiaf

$$\frac{3}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta + 4}$$

6. (a) Trwy ddefnyddio'r amnewidiad $x = 3 \sin \theta$, neu fel arall, cyfrifwch

$$\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

- (b) (i) O wybod bod $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, dangoswch, os yw $y = \sin^{-1}x$,

fod

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- (ii) O wybod bod

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$$

a bod $y = 1$ pan fo $x = \frac{1}{2}$, darganfyddwch y yn nhermau x .

7. Mae gan fertigau A, B y triongl OAB fectorau safle $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ mewn perthynas ag O .
 C yw canolbwynt OA a D yw canolbwynt AB .

- (a) Dangoswch mai $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$ yw fector safle M , canolbwynt CD .
- (b) Ysgrifennwch, yn nhermau a a b a λ , fector safle y pwynt sy'n rhannu BM yn y gymhareb $\lambda : 1 - \lambda$. Trwy hyn darganfyddwch fector safle croestorfan BM ac OD .

Papur Adolygu 4

1. Darganfyddwch ehangiad

$$\frac{1-2x}{\sqrt{1+2x}}$$

mewn pwerau esgynnol o x hyd at y term yn x^2 . Nodwch yr amrediad o werthoedd x y mae'r ehangiad yn ddilys ar ei gyfer.

Defnyddiwch eich ehangiad i ddarganfod gwreiddyn ansero bras yr hafaliad

$$\frac{1-2x}{\sqrt{1+2x}} = 1 - 2 \cdot 99x + x^2.$$

2. (a) Mynegwch $\frac{2x-6}{(x-1)(x+2)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.

- (b) Darganfyddwch y pwyntiau ar y gromlin

$$y = \frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}$$

lle mae'r tangiadau yn baralel i'r echelin x .

3. Datrysychwch yr hafaliadau canlynol ar gyfer gwerthoedd x rhwng 0° a 360° .

(a) $\cot^2 x = 2 \operatorname{cosec} x + 2.$

(b) $\tan 2x = 4 \tan x.$

4. Disgrifir cromlin yn nhermau'r paramedr t yn yr hafaliadau canlynol:

$$x = a \sin^2 t, \quad y = a \cos^3 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \quad \text{lle mae } a \text{ yn gysonyn positif.}$$

- (a) Darganfyddwch a symleiddiwch fynegiad ar gyfer $\frac{dy}{dt}$.

- (b) Mae'r normal i'r gromlin yn y pwynt lle mae $t = \frac{\pi}{3}$ yn torri'r echelinau x ac y ym mhwyntiau M ac N , yn ôl eu trefn. Darganfyddwch arwynebedd triongl OMN .

5. (a) O wybod bod $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ a thrwy ddarganfod $\frac{dx}{dy}$ yn gyntaf, dangoswch,

os yw $y = \ln(x+a),$

fod $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+a}.$

- (b) Darganfyddwch hafaliad y tangiad ym mhwynt (1, 2) ar gyfer y gromlin a gynrychiolir gan

$$y^4 + xy = 12 + 6x^4.$$

6. Mae'r arwynebedd o fewn y gromlin $y = \sin 2x$, y llinellau $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ a'r echelin x yn cael ei gylchdroi a amgylch yr echelin x trwy bedair ongl sgwâr. Darganfyddwch gyfaint y solid sy'n cael ei greu.
7. Mae poblogaeth yn tyfu yn y fath fodd fel y bydd cyfradd y cynnydd mewn poblogaeth, ar amser t blynedd, mewn cyfrannedd â maint, x , y boblogaeth ar yr adeg honno. Ar y dechrau, maint y boblogaeth yw 4.
- (a) Ysgrifennwch hafaliad differol sy'n disgrifio cyfradd twf x .
- (b) Dangoswch fod $x = 4e^{kt}$, lle mae k yn gysonyn positif.
- (c) Ar ôl 6 blynedd, maint y boblogaeth yw 100.
- (i) dangoswch fod $k = \frac{1}{6} \ln 25$.
- (ii) Amcangyfrifwch faint y boblogaeth ar ôl 10 mlynedd.

Papur Adolygu 5

1. (a) Mynegwch $\frac{2x+1}{(2x+3)^2}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.
 (b) Darganfyddwch $\int_{-1}^2 \frac{2x+1}{(2x+3)^2} dx$.

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 360° sy'n bodloni'r hafaliad

$$3 \cos \theta + 2 \sin \theta = 1.$$

 (b) O wybod bod $\tan 2x = -1$, dangoswch fod $\tan x = 1 \pm \sqrt{2}$.
 Diddwythwch werthoedd $\tan 67\frac{1}{2}^\circ$ a $\tan 157\frac{1}{2}^\circ$ ar ffurf syrdiau.

3. (a) Mae gan gromlin hafaliadau paramedrig $x = 3 \sec t$, $y = 5 \tan t$.
 Darganfyddwch gyfesurynnau pwynt ar y gromlin lle mae'r tangiad i'r gromlin yn baralel i'r llinell $y = 2x$.
 (b) Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn y canlynol:
 (i) $y = \sin^{-1}(3x)$
 (ii) $y^3 + xy^2 + x^4 = 3$.

4. (a) O wybod mai $\sec^2 x$ yw deilliad $\tan x$ dangoswch, os yw
 $y = \tan^{-1} x$,
 fod

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

 (b) Defnyddiwch yr amnewidiad $u = \cos x$ to gyfrifo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

 (c) Darganfyddwch $\int (2x+1)e^{-x} dx$.

5. O wybod bod

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} = 1+y$$

 a bod $y = 1$ pan fo $x = 0$, darganfyddwch y yn nhermau x .

6. O wybod bod

$$(1 + ax)^n = 1 + 6x + 6x^2 + \dots,$$

darganfyddwch werthoedd a ac n .

7. Mae gan bwynt A fector safle $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ a phwynt B fector safle $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
mewn perthynas â thardd O ,

(a) Dangoswch fod OA ac OB yn berpendicwlar.

(b) Darganfyddwch yr hafaliad fector ar gyfer y llinell AB .

(c) Dangoswch fod AB yn croestorri'r llinell a gynrychiolir gan

$$\mathbf{r} = (3 - \lambda)\mathbf{i} + (-1 + \lambda)\mathbf{j} + (2 - 3\lambda)\mathbf{k}$$

a darganfyddwch fector safle y croestorfan.

Papur Adolygu 6

1. Os yw x mor fawr fel y gellir anwybyddu $\frac{1}{x^3}$ a phwerau uwch $\frac{1}{x}$, dangoswch

fod
$$\frac{x+1}{(x+2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}.$$

2. Mynegwch $f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)(2x-1)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol.
Darganfyddwch $f'(x)$.

3. (a) Dangoswch fod $\tan \theta + \cot \theta \equiv 2 \operatorname{cosec} 2\theta$.
(b) Gan ddefnyddio'r canlyniad o (a), neu fel arall, darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 180° sy'n bodloni $\tan x + \cot x = 8$.

4. Mae $P(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ yn bwynt ar y gromlin C a gynrychiolir gan $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

- (a) Dangoswch mai

$$y + x \tan t = a \sin t$$

yw hafaliad y tangiad i C ym mhwynt P .

- (b) Mae'r tangiad yn P yn cyfarfod â'r echelinau x ac y yn A a B , yn ôl eu trefn. Darganfyddwch arwynebedd triongl AOB yn nhermau t a dangoswch fod gwerth yr arwynebedd hwn rhwng 0 a $\frac{1}{4}a^2$.

5. Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn y canlynol:

- (a) $y = \ln(\sec x + \tan x)$, gan fynegi eich ateb yn ei ffurf symlaf;
(b) $y = \cos^{-1}(x-1)$,
(c) $x^3 + \sin y + xy = 1$.

6. (a) (i) Defnyddiwch yr amnewidiad $u = 1 - x^2$ i gyfrifo

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

(ii) Cyfrifwch

$$\int_0^1 \sin^{-1} x dx$$

(b) Cyfrifwch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

7. Yn y petryal $OABC$, $OA = \mathbf{a}$ ac $OC = \mathbf{c}$. Mae R yn bwynt ar AB fel bod $AR : RB = 1 : 2$ ac mae S yn bwynt ar BC fel bod $BS : SC = 3 : 1$.

Mae AS yn cyfarfod ag OR yn P .

- (a) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer OP yn nhermau $\mathbf{a}$ ac $\mathbf{c}$, a λ lle mae

$$OP : PR = \lambda : 1 - \lambda.$$

- (b) Dangoswch fod $OP : PR = 4 : 1$.

- (c) Darganfyddwch hefyd werth y gymhareb $AP : PS$.

ATEBION

Pennod 1

Ymarfer 1.1

-1, 1

Ymarferion 1.2

1. (a) $1 - 2x - 2x^2 - 4x^3;$ $|x| < \frac{1}{4}$
- (b) $1 - 4x + 12x^2 - 32x^3;$ $|x| < \frac{1}{2}$
- (c) $1 + 3x + 9x^2 + 27x^3;$ $|x| < \frac{1}{3}$
- (d) $\sqrt{3}\left(1 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{72} + \frac{x^3}{432}\right);$ $|x| < 3$
- (e) $\frac{1}{4} - \frac{x}{4} + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^3;$ $|x| < 2$
- (f) $\frac{1}{3} + \frac{2x}{27} + \frac{2}{81}x^2 + \frac{20}{2187}x^3$ $|x| < \frac{9}{4}$
2. (a) $1 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2;$ $|x| < 1$
- (b) $2 - 2x + \frac{21}{4}x^2;$ $|x| < \frac{1}{3}$
- (c) $1 + 5x + \frac{27x^2}{2};$ $|x| < \frac{1}{2}$
- (d) $1 + 3x + 7x^2;$ $|x| < \frac{1}{2}$
3. $x + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{8x^7} + \frac{1}{16x^{11}};$ $|x| > 1$
4. $1 + 2x;$ 3.60
5. $1 - 3x + \frac{7x^2}{2};$ $\frac{1}{35} \approx 0.029$
6. $5, -\frac{2}{5}$
7. $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ gydag $x = -\frac{1}{100}, \sqrt{0.99} \approx 0.9950$
8. $1 + \frac{x}{18} - \frac{x^2}{648};$ $|x| < 9.$

Pennod 2

Ymarferion 2.1

1. (a) $\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} = 2x - 7 + \frac{13x + 9}{x^2 + 2x + 1}$
- (b) $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2} = x - 3 + \frac{6x^2 + 7}{x^3 + 3x^2 + 2}$
- (c) $\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - x - 2} = 2 + \frac{5 + 3x - 5x^2}{x^3 + x^2 - x - 2}$
- (d) $\frac{12x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 7}{4x^3 - 3x + 2} = 3x - 1 + \frac{21x^2 - 9x - 5}{4x^3 - 3x + 2}$

Ymarfer 2.2

$$A = \frac{9}{2}, \quad B = -\frac{17}{2}$$

Ymarferion 2.3

1. (i) $\frac{1}{5(x+2)} + \frac{9}{5(x-3)}$ (ii) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+5}$
- (iii) $\frac{3}{4(x-2)} + \frac{5}{4(x+2)}$ (iv) $\frac{7}{5(x+2)} + \frac{1}{5(2x-1)}$
- (v) $-\frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-2}$ (vi) $\frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$
- (vii) $\frac{6}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{15}{(x+2)^2}$ (viii) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$
2. $a = 3, b = -1, c = 7; \quad \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}$
3. $\frac{1}{x} - \frac{2}{3x-1} + \frac{6}{(3x-1)^2}; -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{(3x-1)^2} - \frac{36}{(3x-1)^3}$
4. $a = 4, b = 2, c = 26; \quad \frac{32}{5(x-3)} - \frac{22}{5(x+2)}; \quad -\frac{32}{5(x-3)^2} + \frac{22}{5(x+2)^2}$
5. (a) $\frac{2}{7(1+2x)} + \frac{1}{7(3-x)};$ (b) $\frac{1}{3} - \frac{5x}{9} + \frac{31}{27}x^2, |x| < \frac{1}{2}$
6. $-\frac{1}{2(2-x)} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{2(4+x)}; \quad \frac{1}{8} + \frac{3}{32}x + \frac{17}{128}x^2, |x| < 2.$

Pennod 3

Ymarferion 3.1

1. (a) $45^\circ, 63.4^\circ$ (b) $30^\circ, 150^\circ$ (c) $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.
2. $70.5^\circ, 289.5^\circ$
3. (a) $45^\circ, 225^\circ, 63.4^\circ, 243.4^\circ$
(b) $30^\circ, 150^\circ$.
(c) $16.6^\circ, 163.4^\circ, 23.6^\circ, 156.4^\circ$.
4. $39.2^\circ, 140.8^\circ, 30^\circ, 150^\circ$.
5. $153.4^\circ, 333.4^\circ, 116.6^\circ, 296.6^\circ, 71.6^\circ, 251.6^\circ$.
6. $30^\circ, 330^\circ$.
7. $\frac{1}{2} \tan 2x - x + C$.
8. (a) $-\frac{1}{2} \cot 2x + C$ (b) $-\frac{1}{2} \cot 2x - x + C$.
9. $-\operatorname{cosec} x \cot x$
10. $\sec x \tan x$.

Ymarferion 3.2

1. $-0.253^\circ, 1.772^\circ, -0.124^\circ$ (Mae $^\circ$ yn dynodi mesur radian)

Pennod 4

Ymarfer 4.1

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \frac{OR - NR}{OP} = \frac{OR}{OP} - \frac{NR}{OP} = \frac{OR}{OQ} \frac{OQ}{OP} - \frac{SQ}{OP} \\ &= \cos A \cos B - \frac{SQ}{PQ} \frac{PQ}{OP} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B. \end{aligned}$$

Ymarferion 4.2

1. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\cos(\theta + 3\phi)$
(iv) $\sin A$ (v) $\cos B$ (vi) $\sin A$
(vii) 1
2. (i) $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}$ (ii) $-\frac{4}{3}$ (iii) $-2 \pm \sqrt{7}$
(iv) $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 105°

3. $2 \sin A \cos B$; $45^\circ, 135^\circ$
4. $\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$
5. (i) $66.2, 246.2$ (ii) $67.5^\circ, 247.5^\circ$
 (iii) $0, 180, 360^\circ$ (iv) $50.7^\circ, 230.7^\circ$

Ymarfer 4.3

0, 1, 0.

Ymarferion 4.4

1. (i) $\sin 24^\circ$ (ii) $\tan 30^\circ$ (iii) $\cos 48^\circ$
 (iv) $\sin x$ (v) $\cos 40^\circ$ (vi) $\tan x$
 (vii) $\cos 32^\circ$ (viii) $\cos \theta$ (ix) $\cos 6\theta$
 (x) $\tan 8x$
2. $-\frac{4}{3}$
3. (i) $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}$ (ii) $-\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}$ (iii) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}$
4. (i) $0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 330^\circ, 360^\circ$
 (ii) $14.5^\circ, 90^\circ, 155.5^\circ, 270^\circ$
5. $90^\circ, 228.6^\circ, 311.4^\circ$
6. (i) $0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 330^\circ, 360^\circ$
 (ii) $18.4^\circ, 161.6^\circ, 198.4^\circ, 341.6^\circ$

Ymarferion 4.6

1. (a) $13, 67.4^\circ$ (b) $\sqrt{10}, 71.6^\circ$
 (c) $\sqrt{2}, 45^\circ$ (d) $5, 53.1^\circ$
2. (a) $2, -2$ (b) $5, -5$ (c) $\sqrt{10}, -\sqrt{10}$
 (d) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}, \frac{1}{3+\sqrt{2}}$ (e) $\frac{1}{4}, \frac{1}{10}$ (f) $25, 0$
3. (a) $0^\circ, 120^\circ, 360^\circ$ (b) $29.5^\circ, 256.7^\circ$
 (c) $10^\circ, 124.8^\circ$ (d) $7.9^\circ, 231.5^\circ$
 (e) $26.2^\circ, 110.2^\circ$ (f) $120.8, 173.2, 300.8$
4. $1 + \cos 2\theta + 3 \sin 2\theta$; $0, 71.6^\circ, 180^\circ$

Pennod 5

Ymarferion 5.1

$$1. \quad \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}} \quad 2. \quad \frac{1}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}} \quad 3. \quad \frac{1}{4x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Ymarfer 5.2

$$\boxed{\tan y} = \boxed{x} ; \quad \boxed{\sec^2 y} ; \quad \boxed{\frac{1}{\sec^2 y}} ; \quad \boxed{\frac{1}{1 + \tan^2 y}}$$

Ymarferion 5.3

$$\begin{array}{lll} 1. & (i) \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} & (ii) \quad -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (iii) \quad \frac{a}{x^2 + a^2} \\ & (iv) \quad \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} & (v) \quad -\frac{2x}{x^4 + 1} \quad (vi) \quad 2x \sin^{-1}(1-x) - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2-x}} \\ & (vii) \quad \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} & (viii) \quad -1 \quad (ix) \quad \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cos^{-1} x - 1 \\ & (x) \quad \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1} x}} & (xi) \quad \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} \\ & (xii) \quad -\frac{1}{x^2 + 1} & (xiii) \quad \frac{1 - 2x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^2} \\ & (xiv) \quad \frac{2 \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} & (xv) \quad -\frac{1}{(\tan^{-1} x)^2 (1+x^2)} \end{array}$$

Ymarferion 5.4

$$\begin{array}{lll} 1. & (i) \quad -\frac{x}{y} & (ii) \quad \frac{2}{y^3} \quad (iii) \quad -\frac{1}{4y} \\ & (iv) \quad -\sqrt{\frac{y}{x}} & (v) \quad \frac{-(2x+3y)}{3x+2y} \quad (vi) \quad -\frac{x^2}{y^2} \\ & (vii) \quad \frac{-y}{x+3y^2} & (viii) \quad \frac{y \sin x}{\cos x + 2y} \quad (ix) \quad -\frac{2y}{3x} \\ & (x) \quad \frac{-(2xy+y^2)}{x^2+2xy} & (xi) \quad \frac{2+2y-2x}{2y-2x+3} \\ 2. & -\frac{1}{3}, 3 \\ 3. & -1 \\ 4. & 1, -1 \end{array}$$

Ymarferion 5.5

1. (i) $-\cot \theta$ (ii) $-\frac{1}{t^2}$ (iii) $\frac{1}{3t}$
 (iv) $\operatorname{cosec} t$ (v) $\frac{1}{t}$ (vi) $-\frac{5t^{\frac{3}{2}}}{6(1+t^2)}$
 (vii) $-\tan t$ (viii) $2t - t^2$ (ix) $\frac{t}{t+1}$
2. (i) ± 1 (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) 1
3. (i) $-\frac{1}{(t+1)^2}; (t+1)^2$ (ii) $\frac{4t}{3}; -\frac{3}{4t}$
 (iii) $-\frac{1}{2\sin t}; 2\sin t$ (iv) $-\frac{3}{2}\cot t; \frac{2}{3}\tan t$

Ymarferion 5.6

1. $\frac{32}{27a}$ 2. -2 3. $-\frac{3}{4}\operatorname{cosec}^3 t$
4. $\cos^3 t$ 5. $\frac{2t-2}{t+3}$
6. $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ maxsimwm; $\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$ minimwm

Pennod 6

Ymarferion 6.1

1. $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{4}{3}\right)$ 2. $(5 \sin t)y + (3 \cos t)x - 15 = 0$
5. $y + px - 2ap - ap^3 = 0; 2$ 6. $\frac{1}{4}a^2$

Pennod 7

Ymarferion 7.1

Mae'r cysonyn integru yn cael ei hepgor ym mhob achos.

- (a) $\frac{(2x+1)^3}{6}$ (b) $-\frac{1}{3(3x+5)}$
- (c) $-\frac{1}{9}\cos(9x+1)$ (d) $\frac{1}{2}\tan(2x+9)$
- (e) $-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}(3x+1)$ (f) $\frac{2}{9}(3x-7)^{\frac{3}{2}}$
- (g) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|$ (h) $\frac{2}{9}\sqrt{9x+2}$

Ymarferion 7.2

Mae'r cysonyn integru yn cael ei hepgor ym mhob achos.

- | | |
|---|--|
| (a) $\frac{1}{15}(x^3 + 1)^5$ | (b) $\frac{1}{4} \ln x^4 + 2 $ |
| (c) $-\frac{1}{2(x^2 + 3)}$ | (d) $\frac{1}{3} \tan(x^3 + 1)$ |
| (e) $\frac{1}{3} \sqrt{1 + 3x^2}$ | (f) $-\cos(x^2 + x + 5)$ |
| (g) $\frac{1}{4}(1 + e^x)^4$ | (h) $-\frac{2}{3}(1 - \sin x)^{\frac{3}{2}}$ |
| (i) $\frac{1}{3}(x^2 + 4x + 1)^{\frac{3}{2}}$ | (j) $\frac{2}{3} \ln 1 + x^{\frac{3}{2}} $ |
| (k) $\ln x^2 + x - 3 $ | (l) $\frac{1}{8}(\sin(2x) + 4)^4$ |
| (m) $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ | (n) $\ln 1 - \cos x $ |
| (o) $\ln(e^x + x)$ | (p) $\frac{\tan^3 x}{3}$ |
| (q) $\frac{\sin^4 x}{4}$ | (r) $-\frac{1}{2} \cot^2 x$ |

Ymarferion 7.3

Mae'r cysonyn integru yn cael ei hepgor ym mhob achos.

1.

(a) $-\frac{1}{3(x^3 + 1)}$	(b) $\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$
(c) $-\sqrt{1 - x^2}$	(d) $-\sqrt{1 - x^2}$
(e) $\frac{1}{6}(2x + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2x + 1}$	(f) $\sqrt{1 + 2 \sin x}$
(g) $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$	(h) $\frac{1}{2}(x^2 + 4) - 3 \ln x^2 + 4 $
(i) $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$	(j) $\frac{1}{2} \sin^{-1}(2x)$
(k) $\sin^{-1}(e^x)$	(l) $-\ln \cos x $
(m) $\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1}$	(n) $\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1}$
(o) $\frac{\sin^5 x}{5}$	(p) $\frac{25}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2}$
2.

(a) $-\frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2}$	(b) $\frac{9}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2}$
(c) $\frac{2}{3}(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}$	(d) $\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

- (e) $\frac{1}{3}\tan^{-1}(3x)$ (f) $-\frac{\cos^6 x}{6}$
- (g) $\frac{\tan^2 x}{2}$ (h) $\sqrt{9+x^2}$
3. (a) $\frac{10}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+20\sqrt{x-2}$ (b) $\frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2)$
- (c) $\frac{(x-1)^8}{8}+\frac{(x-1)^7}{7}$ (d) $\frac{(x+2)^7}{7}-\frac{(x+2)^6}{2}$
- (e) $\frac{1}{2}\sin^{-1}x-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$ (f) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$

Pennod 8

Ymarferion 8.1

Mae'r cysonion integru yn cael eu hepgor.

- (a) $-\frac{1}{2}\ln|3-2x|$ (b) $-\frac{3}{2(4x-7)}$
- (c) $\frac{2}{3}\ln|3x+2|-\frac{5}{3(3x+2)}$

Ymarferion 8.2

Mae'r cysonyn integru yn cael ei hepgor ym mhob achos.

3. (a) $-\frac{1}{15}\ln|3x+2|+\frac{2}{5}\ln|x-1|$
- (b) $5\ln|x-2|-\frac{12}{x-2}$
- (c) $\ln|x-2|+\ln|x-3|$
- (d) $\frac{1}{12}\ln|2x-3|-\frac{1}{12}\ln|2x+3|$
- (e) $\frac{1}{8}\ln|4+x|-\frac{1}{8}\ln|4-x|$
- (f) $\frac{2}{3}\ln|3x-4|-\frac{3}{4}\ln|4x+3|$
- (g) $\ln|x|-\frac{3}{x+1}$
- (h) $\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}$
- (i) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|4-x|$
4. $-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|$

Ymarferion 8.3

Mae'r cysonyn integru yn cael ei hepgor ym mhob achos.

1. (a) $-x \cos x + \sin x$ (b) $(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$
- (c) xe^x (d) $\frac{x^4}{4} \ln(2x) - \frac{x^4}{16}$
- (e) $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ (f) $x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$
- (g) $x \ln x - x$ (h) $\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$
- (i) $-\frac{1}{3}(\pi - x) \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x$
2. $-\frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} x$

Ymarferion 8.4

1. (a) 2 (b) $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$ (c) $\frac{\pi}{4}$
- (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{3}$ (f) $\ln 2 - \frac{1}{4}$
- (g) $\frac{\pi}{2}$ (h) $\sqrt{3}$ (i) $\frac{\pi}{20}$
- (j) $\pi - 2$ (k) $\frac{32}{5} \ln 2 - \frac{31}{25}$ (l) $\frac{1}{4}(1 - 3e^{-2})$
2. 1 3. 1 4. $\frac{1}{2} \ln 2$
5. 1 6. $\frac{3}{\sqrt{4}} - \frac{\pi}{12}$

Ymarferion 8.5

1. (a) $\frac{16\pi}{3}$ (b) $\frac{73\pi}{15}$ (c) 8π
- (d) $\frac{16\pi}{15}$ (e) $\frac{\pi}{2}$
2. (a) $\frac{19}{3}\pi$ (b) 8π (c) 8π
- (d) $\frac{32\pi}{5}$
3. $\pi\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$ 4. $\frac{65\pi}{2}$ 5. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
6. $\frac{2}{3}\pi r^3, \frac{4}{3}\pi r^3$

Pennod 9

Ymarferion 9.1

1. Dim ond (a) ac (c) y gellir eu hintegru'n uniongyrchol.

$$(a) \quad y = x + \frac{x^2}{2} + k \quad (c) \quad x = -t \cos t + \sin t + k$$

2. $x = 2 \sin 2t + 1$

3. $y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{9}{4}$

4. $c = x^3 - 6x^2 + 15x + 50, \quad \pounds 6$

5. (a) $y = -e^{-x} - 1$ (b) $y = -\cos x - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi^2}{8}$ (c) $y = x \sin x + \cos x + 2$

Ymarferion 9.2

1. $y = \frac{-1}{x^4 + C}$

2. $y = -\frac{1}{3} \ln(4 - 3e^x)$

3. $y = \sin^{-1}(A - \sin x)$

4. $\frac{y^2}{4} + \frac{1}{2} \ln(y) = \frac{2x^3}{3} + A$

5. 10 munud

6. $t = \frac{1}{4k} \ln\left(\frac{8-x}{8-2x}\right), \frac{1}{8} \ln(5.5)$

7. $y = 3 + x$

Pennod 10

Ymarferion 10.1

- (i) Ydyw (ii) Nac ydyw (iii) Nac ydyw (iv) Nac ydyw (v) Ydyw
(vi) Ydyw (vii) Nac ydyw (viii) Nac ydyw (ix) Ydyw

Ymarferion 10.2

1. Mae swm hydoedd dwy ochr triongl yn fwy na hyd y drydedd ochr. Ceir hafaedd pan fo a a b yn baralel.
2. Rhoddir ochrau'r hecsagon gan y fectorau $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
3. $\mathbf{EB} = 3\mathbf{b}$, $\mathbf{EC} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{DB} = 4\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{AC} = 4\mathbf{b} + \mathbf{a}$, $\mathbf{FB} = 3\mathbf{b} - \mathbf{a}$.
4. $\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{AE} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $\mathbf{EF} = \frac{1}{3}\mathbf{c} - \frac{1}{6}\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b}$.
5. $\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, $\mathbf{AD} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
6. (i) $\frac{1}{5}(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$ (ii) $\frac{1}{4}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$

Ymarferion 10.3

1. (a) $\frac{1}{2}(2\mathbf{a} - \mathbf{c})$ (b) $\frac{1}{5}(8\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - 3\mathbf{c})$ (c) $3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$
2. $\frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. (a) $\frac{2\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$ (b) $6 : 1$

Ymarferion 10.4

1. (i) $(1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}, (1 - \mu)\mathbf{c} + \mu(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})$
(ii) $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$
2. (a) $(1 - \lambda)\mathbf{a} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{b} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{c}, \frac{\mu\mathbf{a}}{2} + \left(1 - \frac{3\mu}{2}\right)\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$
(b) $\frac{1}{5}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b} + \frac{2}{5}\mathbf{c}$
4. $\frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{1}{5}\mathbf{b}$

Ymarferion 10.5

1. (i) $-\mathbf{j} - \mathbf{k}; \sqrt{2}$ (ii) $11\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 10\mathbf{k}; \sqrt{270}$
2. (i) $\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{5}\mathbf{j}$ (iii) $\mathbf{i}$
3. $\mathbf{a} = 2, \mathbf{b} = 6, \mathbf{c} = -6$
4. $3; \sqrt{54}$

Pennod 11

Ymarferion 11.1

1. (a) $\mathbf{r} = (2 + \lambda)\mathbf{i} + (1 - \lambda)\mathbf{j} + (1 - \lambda)\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{r} = (1 + 3\lambda)\mathbf{i} + (-1 + 2\lambda)\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{i} + (1 + \lambda)\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$
(d) $\mathbf{r} = 3\lambda\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$
2. (a) $\mathbf{r} = (1 + \lambda)\mathbf{i} + (1 - \lambda)\mathbf{j} + (-3 + 6\lambda)\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{r} = (1 + 2\lambda)\mathbf{i} + \mathbf{j} + (1 - 3\lambda)\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{r} = 5\lambda\mathbf{i} - 3\lambda\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$
(d) $\mathbf{r} = (2 - 4\lambda)\mathbf{i} + (1 + 2\lambda)\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$
3. (a) maent yn baralel (b) nid ydynt yn baralel
4. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2\mu)\mathbf{i} + \mathbf{j}(1 - \mu) + \mathbf{k}$
5. (a) Ydynt, ar $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (b) Nac ydynt (c) Nac ydynt

Ymarferion 11.2

1. $-5\sqrt{3}$
3. $\frac{12}{\sqrt{29}}$
4. $72.5^\circ, 107.5^\circ, 25.2^\circ$
5. $\frac{1}{\sqrt{13}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$
6. (a) 56.7° (b) 116.0°
7. (a) 132.4° (b) 30°
8. (a) $\mathbf{a_i}, \mathbf{a_i} + \mathbf{a_j}, \mathbf{a_i} + \mathbf{a_j} + \mathbf{a_k}, \mathbf{a_i} + \mathbf{a_k}, \mathbf{a_j}, \mathbf{a_j} + \mathbf{a_k}$
 (b) $\mathbf{a_k} - \mathbf{a_j}, -\mathbf{a_i} + \mathbf{a_j}, -\mathbf{a_j} + \mathbf{a_k}$
 (c) 120°
 (d) 90°

