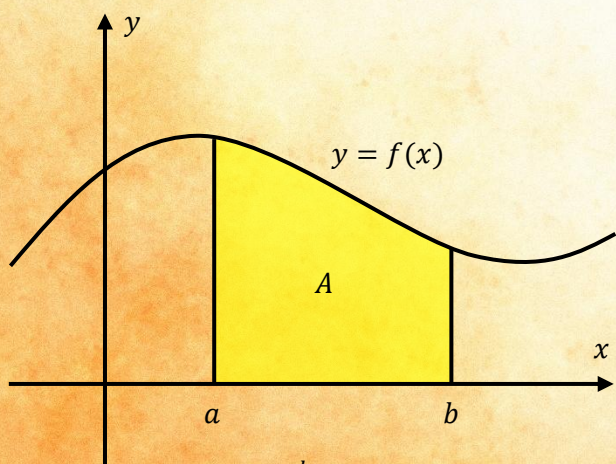




Cyflwyno

Integru



$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$A = [F(x)]_a^b$$

$$A = F(b) - F(a)$$

Enw:

## Cefndir

### Beth yw'r gwaith?

Cyflwyno'r broses o integru fel gwrthdro differu, a'i ddefnyddio i ddarganfod yr arwynebedd o dan cromlinau.

### Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

**Mathemateg Ychwanegol:** Differu.

### I ble mae'n arwain?

**Mathemateg Lefel A:** Integru pellach.

**Cymwysiadau:** Darganfod arwynebedd; cyfaint; màs; lleoliad; ffwythiant dosraniad cronus tebygolrwydd.

## Theori

### Integru Amhendant

Integru yw'r broses sy'n dadwneud y broses o ddifferu.

### Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl canlynol.



Theori

$y$	$\frac{dy}{dx}$
$5x^2 + 9x + 3$	
$5x^2 + 9x + 4$	
$5x^2 + 9x - 3$	
$5x^2 + 9x + \frac{3}{4}$	
$5x^2 + 9x + \pi$	

Wrth gwblhau'r ymarfer uchod, fe welwch y broblem fydd yn ein wybebu wrth geisio integru: tra bod differu wastad yn rhoi ateb unigryw, ni fydd yr un peth yn wir am integru. Uchod, mae pob ffwythiant  $y$  yn y golofn gyntaf yn differu i roi'r un ateb. Mae hyn yn arwain at y cwestiwn: os ydym yn integru  $10x + 9$ , beth ddylai'r ateb fod? I ddelio efo'r broblem yma, rydym yn defnyddio **cysonyn integru**. Mae gwerslyfrau gwahanol yn defnyddio llythrennau gwahanol ar gyfer y cysonyn integru: weithiau  $c$ , weithiau  $k$ , weithiau rhywbeth arall. Bydd y pecyn gwaith hwn yn defnyddio  $c$  fel y cysonyn integru.

Wrth integru  $10x + 9$ , rydym yn dweud mai'r ateb yw  $5x^2 + 9x + c$ , ble mae  $c$  yn cynrychioli unrhyw rif, gan y byddai unrhyw fynegiad o'r ffurf  $5x^2 + 9x + c$  yn differu i roi  $10x + 9$ . Y nodiant ffurfiol ar gyfer y broses hon yw

$$\int 10x + 9 dx = 5x^2 + 9x + c$$

ble mae  $dx$  yn dynodi ein bod yn integru mewn perthynas â'r newidyn  $x$ , a  $\int$  yw'r symbol ar gyfer integru.

Y rheol ar gyfer integru term o'r ffurf  $ax^n$  yw'r canlynol:

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$$

Mewn geiriau, rydym yn adio un i'r pŵer  $n$ , ac yna'n rhannu efo'r pŵer newydd  $n + 1$ .

### Enghraifft 1

Cwestiwn	Ateb
$\int 28x^3 dx$	$\frac{28x^4}{4} + c = 7x^4 + c$
$\int 35x^4 - 6x + 2 dx$	$\frac{35x^5}{5} - \frac{6x^2}{2} + 2x + c = 7x^5 - 3x^2 + 2x + c$

### Ymarfer 2

Llenwch y tabl canlynol.

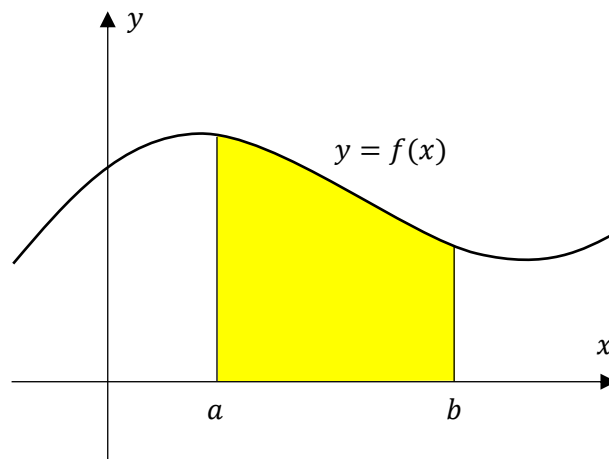
Cwestiwn	Ateb
$\int 15x^2 dx$	
$\int 24x^3 dx$	
$\int 10x dx$	
$\int 4 dx$	
$\int 8x^{-3} dx$	
$\int 9x^2 + 6x + 3 dx$	
$\int 10x^4 - 4x^3 dx$	
$\int 2 + x^{-2} dx$	
$\int 0 dx$	
$\int 3 - 16x^{-5} dx$	
$\int 4x^2 dx$	
$\int x^2 + x^4 + x^6 dx$	
$\int 5x^3 - 2x + 9 dx$	
$\int 6x^2 + 10 - 2x^{-2} dx$	
$\int \frac{2}{3}x^2 dx$	
$\int 2(4 + x) dx$	
$\int x(2x - 3) dx$	
$\int 20x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 4x + 7 dx$	

## Integru Pendant

Mae'n bosib defnyddio integru i ddarganfod yr arwynebedd rhwng cromlin a'r echelin- $x$ .

Gadewch i ni ystyried cromlin gyffredinol o'r ffurf  $y = f(x)$ . Mae'r **arwynebedd melyn** ar y dde wedi'i ffinio gan y gromlin, yr echelin- $x$  a'r llinellau  $x = a$ ,  $x = b$ . Er mwyn darganfod maint yr arwynebedd, rydym yn integru rhwng  $a$  a  $b$  gan ddefnyddio'r nodiant

$$\int_a^b f(x) dx$$



Rydym yn dweud mai  $a$  yw'r **terfan isaf** a  $b$  yw'r **terfan uchaf**.

Mae **Theorem Sylfaenol Calcwlws** yn dweud wrthym sut i gyfrifo'r integryn uchod:

Os yw  $\int f(x) dx = F(x) + c$ , yna

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x) + c]_a^b \\ &= [F(b) + c] - [F(a) + c] \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



Theori

Sylwch bod y cysonion integru yn canslo allan, felly gallwn ysgrifennu

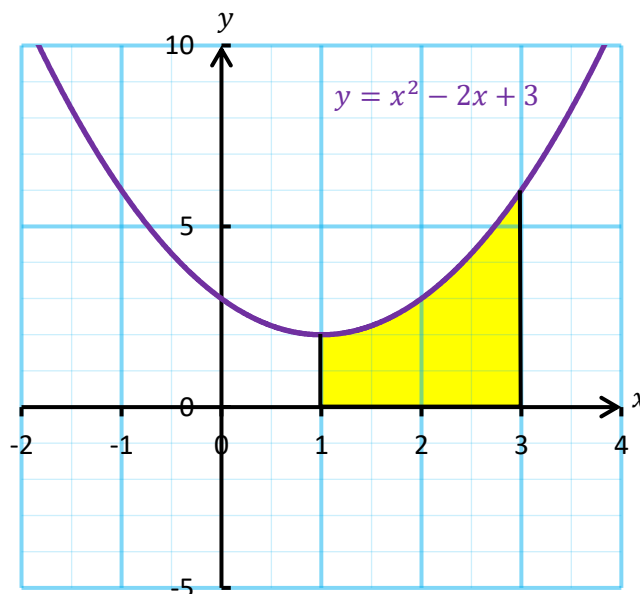
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

## Enghraifft 2

Darganfyddwch yr arwynebedd o dan y gromlin  $y = x^2 - 2x + 3$  rhwng  $x = 1$  ac  $x = 3$ .

Ateb: Rydym angen darganfod gwerth

$$\begin{aligned} &\int_1^3 x^2 - 2x + 3 dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_1^3 \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= \left[ \frac{3^3}{3} - 3^2 + 3 \times 3 \right] - \left[ \frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \times 1 \right] \\ &= [9 - 9 + 9] - \left[ \frac{1}{3} - 1 + 3 \right] \\ &= 9 - \frac{7}{3} \\ &= \frac{20}{3} \text{ uned sgwâr} \end{aligned}$$

















**Prawf Pop: Cyflwyno Integru**

(1) Darganfyddwch  $\int 21x^6 - 3x^2 - x^{-2} + 6 dx$ .

[5]

/15

(2) Gan ddangos eich holl waith cyfrifo, enrhifwch  $\int_2^5 6x^2 + 4x dx$ .

[5]

(3) Mae'r diagram yn dangos y gromlin  $y = 6x - x^2$ .

Gan ddangos eich holl waith cyfrifo, cyfrifwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i ffinio gan y gromlin  $y = 6x - x^2$  a'r echelin- $x$ .

[5]

