



Lefel A

Uned 3

Gwerslyfr

Awdur: Dr Gareth Evans

Fersiwn 1.0 | Ebrill 2025

Ar gael ar www.mathemateg.com:

- Fersiynau Microsoft Word o'r holl becynnau gwaith.
- Atebion enghreifftiol i hen bapurau arholiad.
- Atebion i'r pecynnau (ar gael, ar gais, i athrawon; gyrrwch neges o gyfeiriad e-bost ysgol at gareth@mathemateg.com).

Ar gael ar www.youtube.com/adolygumathemateg:

- Fideos adolygu llawn ar gyfer y pecynnau gwaith. Chwiliwch am y rhestr chwarae ar gyfer 'Lefel A Uned 3'.

Ar gael ar y cyfrif TikTok 'Maths Mewn Munud':

- Sesiynau adolygu byw.
- Clipiau adolygu byr.



Testun	Rhif y Dudalen
01 Rheol y Trapesiwm	5
02 Gwreiddiau Hafaliadau	21
03 Diagramau Pry Cop a Grisïau	35
04 Dull Newton-Raphson	47
05 Sec, Cosec, Cot	61
06 Mesur Onglau Mewn Radianau	75
07 Fformiwlâu Adiad Trigonometreg	93
08 Fformiwlâu Onglau Dwbl	113
09 Brasamcanion Onglau Bach	131
10 Cyfresi Rhifyddol	147
11 Cyfresi Geometrig	169
12 Mathau o Gyfresi	193
13 Ehangiad Binomial 2	203
14 Differu Pellach	223
15 Pwyntiau Ffurfdro	257
16 Hafaliadau Parametrig ac Ymhlyg	273
17 Integru Pellach 1	297
18 Integru Pellach 2	319
19 Hafaliadau Differol	349
20 Ffracsiynau Rhannol	373
21 Prawf Trwy Wrthddywediad	401
22 Cyfuno Trawsffurfiadau Graffïau	417
23 Y Ffwythiant Modwlws	433
24 Ffwythiannau Cyfansawdd	449
25 Ffwythiannau Gwrthdro	467



Uned 3, Pecyn 1

13

Rheol y

Trapesiwm

Mae'n debyg bod **Isaac Newton** yn gwybod am Reol y Trapesiwm yn y 17eg ganrif. Isaac Newton oedd un o'r pobl cyntaf i ystyried y theori o ddifferu ag integru ym Mhrifysgol Caergrawnt.



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Nid yw'n bosib integru bob ffwythiant gan ddefnyddio dulliau algebraidd. Ar gyfer y rhain, gallwn amcangyfrif yr arwynebedd sydd ei angen drwy ei hollti i mewn i nifer o drapesiymau gwahanol, a darganfod swm arwynebedd y trapesiymau hyn.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid, arwynebedd trapesiwm.
Lefel A Uned I: Integru.

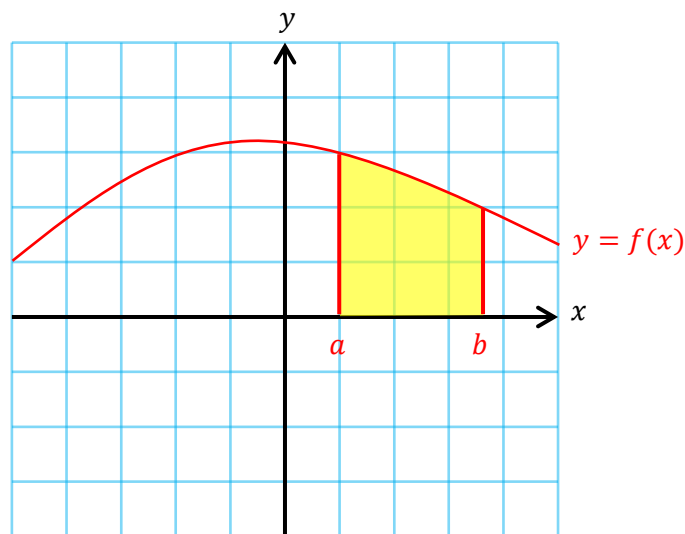
I ble mae'n arwain?

Gwaith Prifysgol: Dulliau mwy manwl gywir o amcangyfrif yr arwynebedd, megis Rheol Simpson.

Cymwysiadau: Darganfod arwynebedd neu gyfaint anarferol, e.e. faint o ddŵr mae llong yn ei ddisodli.

Theori

Ystyriwch unrhyw ffwythiant $y = f(x)$.



Theori



Enghraifft

Yr arwynebedd o dan y gromlin rhwng a ag b yw $\int_a^b f(x)dx$. Os na allwn gyfrifo hwn yn union, gallwn ddefnyddio **Rheol y Trapesiwm** er mwyn ei amcangyfrif.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}h\{(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})\}, \text{ lle mae } h = \frac{b-a}{n}.$$

n yw'r nifer o **drapesiymau**.

$n + 1$ yw'r nifer o **fesurynnau**.

h yw **uchder** bob trapesiwm (cofiwch fod bob trapesiwm ar ei ochr).

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ yw gwerth y ffwythiant ar gyfer gwerthoedd cytbell rhwng a a b .

Sialens! Ceisiwch brofi pam fod y fformiwla ar gyfer Rheol y Trapesiwm yn gweithio.

Yn y llyfryn
fformiwlâu



(C2 Haf 2005)

1. Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda chwe mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx .$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[4]

(C2 Gaeaf 2006)

1. Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda chwe mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_0^1 \frac{1}{2+x^3} dx.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i bedwar ffigur ystyrlon. [4]

(C2 Haf 2006)

1. Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4} \, dx.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[4]

(C2 Gaeaf 2008)

1. Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x^3}} dx.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[4]

(C2 Haf 2008)

1. Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda **phedwar** mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_0^{0.6} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[4]

(C2 Haf 2011)

1. Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_{1.6}^2 \frac{1}{9-x^3} dx.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[4]

(C2 Gaeaf 2012)

1. Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_1^3 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[4]

(C2 Haf 2014)

1. (a) Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_1^3 \log_{10}(3x - 1) dx.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [4]

- (b) Defnyddiwch eich ateb i ran (a) i ddiddwytho bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_1^3 \log_{10}(3x - 1)^2 dx. [1]$$

(C2 Haf 2018)

1. (a) Defnyddiwch y Rheol Trapesiwm gyda phump mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

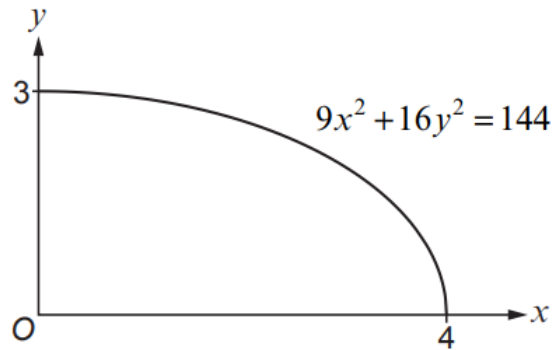
$$\int_1^4 \log_{10}(6x-1) dx.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [4]

- (b) **Defnyddiwch eich ateb i ran (a)** i ddiddwytho bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_1^4 \log_{10} \sqrt{(6x-1)} dx. [1]$$

(Uned 3 Haf 2023)

0 **9**Mae uwcholwg (*aerial view*) patio sy'n cael ei adeiladu i'w weld isod.

Mae ymyl grom (*curved edge*) y patio wedi'i disgrifio gan yr hafaliad $9x^2 + 16y^2 = 144$, lle mae x ac y wedi'u mesur mewn metrau.

I adeiladu'r patio, bydd yr arwynebedd sydd wedi'i amgáu (*enclosed*) gan y gromlin a'r echelinau cyfesurynnol yn cael ei orchuddio gan haen o concrit sydd â'r dyfnder 0.06 m.

- a) Dangoswch fod cyfaint y concrit sydd ei angen i adeiladu'r patio wedi'i roi gan $0.015 \int_0^4 \sqrt{144 - 9x^2} dx$. [3]
- b) Defnyddiwch y rheol trapesiwm gyda 6 mesuryn i amcangyfrif cyfaint y concrit sydd ei angen. [4]
- c) Nodwch a yw eich ateb yn rhan (b) yn oramcangyfrif neu'n danamcangyfrif (*an overestimate or an underestimate*) o'r cyfaint sydd ei angen. Rhowch reswm dros eich ateb. [1]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(C2 Haf 2007)

1. Defnyddiwch Reol y Trapesiwm gyda phum mesuryn i ddarganfod bras werth ar gyfer yr integryn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} \, dx ,$$

gan roi'r gwerth yn gywir i dri lle degol.

[4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

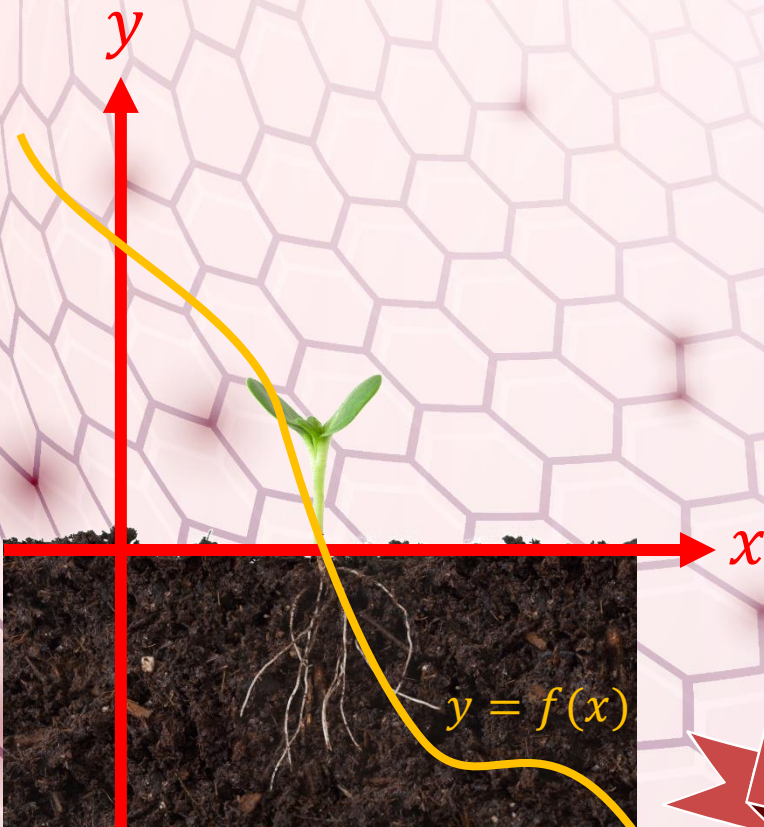


Uned 3, Pecyn 2

13

Gwreiddiau

Hafaliadau



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Nid yw'n bosib datrys bob hafaliad gan ddefnyddio dulliau algebraidd. Ar gyfer y rhain, gallwn ail-drefnu'r hafaliad i gael perthynas gylchol sydd, weithiau, yn gallu darganfod gwreiddiau trwy amnewid.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid, talgrynnu, newid testun.
Lefel A Uned 1: Braslunio cromliniau.

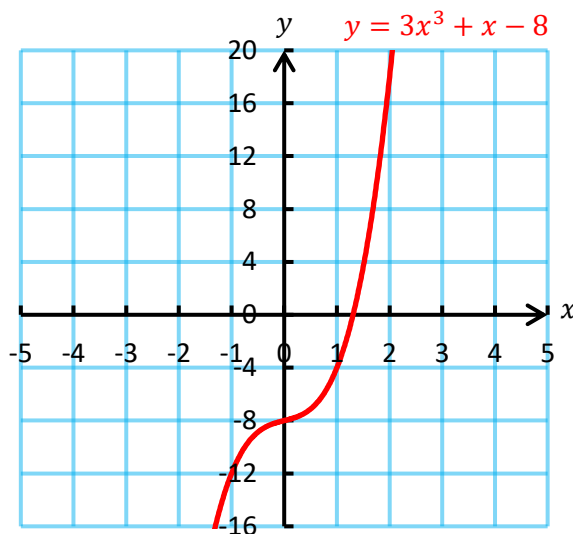
I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3: Diagramau pry cop a grisiau; dull Newton-Raphson o ddatrys hafaliadau.

Cymwysiadau: Datrys problemau mewn cyd-destun sy'n golygu nad oes modd cael datrysiad dadansoddol o hafaliad.

Theori

Ystyriwch unrhyw ffwythiant $y = f(x)$, er enghraifft $y = 3x^3 + x - 8$.



Theori



Enghraifft

Gwreiddiau'r hafaliad yw ble mae'r gromlin yn torri'r echelin- x , sef ble mae $f(x) = 0$. Ar gyfer yr enghraifft uchod, gwelwn fod un gwreiddyn yn bodoli, rhwng 1 a 2. Os na allwn ddatrys yr hafaliad gan ddefnyddio dulliau algebraidd, yna gallwn geisio ffurfio **perthynas gylchol** er mwyn datrys yr hafaliad. I wneud hyn, rhaid yn gyntaf ail-drefnu'r hafaliad $f(x) = 0$ i wneud x yn destun i'r hafaliad.

Enghraifft: $y = 3x^3 + x - 8$.

Ymgais 1: $3x^3 + x - 8 = 0$
 $x = 8 - 3x^3$

Ymgais 2: $3x^3 + x - 8 = 0$
 $3x^3 = 8 - x$
 $x^3 = \frac{8-x}{3}$
 $x = \sqrt[3]{\frac{8-x}{3}}$

Mae'r berthynas gylchol yn cael ei ffurfio o'r hafaliad:

$$x_{n+1} = 8 - 3x_n^3$$

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{8-x_n}{3}}$$

Gwelwn o'r graff ar y dudalen flaenorol bod gwreiddyn yr hafaliad $y = 3x^3 + x - 8$ yn agos at $x = 1$. Felly, gallwn ddewis cychwyn yn $x_0 = 1$ a defnyddio'r berthynas gylchol i geisio darganfod y gwreiddyn.

$$x_1 = 8 - 3 \times x_0^3$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -367$$

$$x_3 = 148292597$$

$$x_4 = -9.783171512 \times 10^{24}$$

$$x_5 = 2.809055093 \times 10^{75}$$

$$x_6 = \text{MATH ERROR}$$

Dargyfeirio, dim yn gallu ffeindio gwreiddyn.

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{8-x_0}{3}}$$

$$x_1 = 1.326352403$$

$$x_2 = 1.305411212$$

$$x_3 = 1.3067752$$

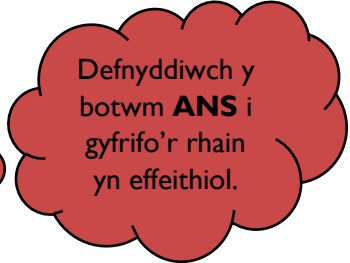
$$x_4 = 1.306686444$$

$$x_5 = 1.30669222$$

$$x_6 = 1.306691844$$

ac yn y blaen...

Cydyfeirio at 1.306691867.



Defnyddiwch y botwm **ANS** i gyfrifo'r rhain yn effeithiol.

Ymarfer

(C3 Gaeaf 2006)

Dangoswch fod i'r hafaliad $4x^3 + 10x - 1 = 0$ wreiddyn α rhwng 0 ac 1.

Gellir defnyddio'r berthynas gylchol $x_{n+1} = \frac{1-4x_n^3}{10}$ gydag $x_0 = 0.1$ i ddarganfod α . Cyfrifwch a chofnodwch

werthoedd x_1, x_2, x_3 . Ysgrifennwch werth x_3 yn gywir i chwe lle degol a dangoswch mai hwn yw gwerth α yn gywir i chwe lle degol. [7]



(C3 Haf 2006)

4. (b) Dangoswch fod i'r hafaliad

$$e^{2a} - a - 10 = 0$$

wreiddyn α rhwng 1 a 2.

Gellir defnyddio'r berthynas gylchol

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(a_n + 10)$$

gydag $a_0 = 1.2$, i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd a_1, a_2, a_3, a_4 .

Ysgrifennwch werth a_4 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bum lle degol. [7]

(C3 Haf 2007)

3. (b) Dangoswch fod i'r hafaliad

$$t^3 + 4t - 2 = 0$$

wreiddyn α rhwng 0 ac 1.

Gellir defnyddio'r berthynas gylchol

$$t_{n+1} = \frac{2 - t_n^3}{4}$$

gyda $t_0 = 0.5$ i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd t_1, t_2, t_3, t_4 . Ysgrifennwch werth t_4 yn gywir i bedwar lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bedwar lle degol. [7]

(C3 Haf 2010)

4. Dangoswch fod i'r hafaliad

$$4x^3 - 2x - 5 = 0$$

wreiddyn α rhwng 1 a 2.

Mae'n bosibl defnyddio'r berthynas gylchol

$$x_{n+1} = \left(\frac{2x_n + 5}{4} \right)^{\frac{1}{3}},$$

gydag $x_0 = 1.2$, i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4 . Ysgrifennwch werth x_4 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bum lle degol. [7]

(C3 Gaeaf 2012)

3. (b) Dangoswch fod i'r hafaliad

$$2t^4 - 4t - 7 = 0$$

wreiddyn α rhwng 1 a 2.

Mae'n bosibl defnyddio'r berthynas gylchol

$$t_{n+1} = \left(\frac{4t_n + 7}{2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

gyda $t_0 = 1.6$ i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd t_1, t_2, t_3, t_4 . Ysgrifennwch werth t_4 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bum lle degol. [7]

(C3 Gaeaf 2011)

4. **Gallwch dybio** bod i'r hafaliad $6x^4 + 7x - 3 = 0$ wreiddyn α rhwng 0 ac 1.
Mae'n bosibl defnyddio'r berthynas gylchol

$$x_{n+1} = \frac{3 - 6x_n^4}{7}$$

gydag $x_0 = 0.4$ i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4 .
Ysgrifennwch werth x_4 yn gywir i bedwar lle degol a dangoswch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bedwar lle degol. [5]

(C3 Haf 2013)

8. Gallwch dybio bod i'r hafaliad

$$x^2 + e^x - 3 = 0$$

wreiddyn α rhwng -2 a -1 .

Mae'n bosibl defnyddio'r berthynas gylchol

$$x_{n+1} = -(3 - e^{x_n})^{\frac{1}{2}}$$

gydag $x_0 = -1.5$ i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4 .
Ysgrifennwch werth x_4 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn
gywir i bum lle degol. [5]

(C3 Gaeaf 2009)

4. (a) Trwy fraslunio graffiau $y = x^3$ ac $y = 4 - x$, darganfyddwch nifer gwreiddiau real yr hafaliad $x^3 + x - 4 = 0$. [3]

(b) **Gallwch dybio** bod i'r hafaliad $x^3 + x - 4 = 0$ wreiddyn α rhwng 1 a 2. Mae'n bosibl defnyddio'r berthynas gylchol

$$x_{n+1} = (4 - x_n)^{\frac{1}{3}}$$

gydag $x_0 = 1.4$ i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4 . Ysgrifennwch werth x_4 yn gywir i bedwar lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bedwar lle degol. [5]

(C3 Haf 2005)

2. (a) Brasluniwch graffiau $y = x^4$ ac $y = 1 - 3x$. Diddwythwch nifer gwreiddiau real yr hafaliad

$$x^4 + 3x - 1 = 0. \quad [3]$$

- (b) Dangoswch fod i'r hafaliad

$$x^4 + 3x - 1 = 0$$

wreiddyn α rhwng 0 ac 1.

Gellir defnyddio'r berthynas gylchol

$$x_{n+1} = \frac{1 - x_n^4}{3}$$

gydag $x_0 = 0.3$, i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4 . Ysgrifennwch werth x_4 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bum lle degol. [7]

(C3 Gaeaf 2013)

4. (a) Ar yr un diagram, brasluniwch graffiau $y = \ln x$ ac $y = 11 - 2x$.
Diddwythwch nifer gwreiddiau'r hafaliad

$$\ln x + 2x - 11 = 0. \quad [3]$$

- (b) **Gallwch dybio** bod i'r hafaliad

$$\ln x + 2x - 11 = 0$$

wreiddyn α rhwng 4 a 5.

Mae'n bosibl defnyddio'r berthynas gylchol

$$x_{n+1} = \frac{11 - \ln x_n}{2},$$

gydag $x_0 = 4.7$, i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4 .
Ysgrifennwch werth x_4 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn gywir i bum lle degol. [5]

(C3 Haf 2017)

4. Mae tanc mawr sydd ar ffurf ciwboid yn cael ei ddefnyddio i storio dŵr. Mae lled y tanc wedi'i ddynodi gan x m. Mae hyd y tanc 4 m **yn fwy** na'r lled, ac mae uchder y tanc 2 m **yn llai** na'r lled. Cyfaint y tanc yw 150m^3 .

(a) (i) Dangoswch fod $x^3 + 2x^2 - 8x - 150 = 0$.

(ii) Dangoswch fod $5 < x < 6$.

[4]

- (b) Mae'n bosibl defnyddio'r berthynas gylchol

$$x_{n+1} = (150 + 8x_n - 2x_n^2)^{\frac{1}{3}},$$

gydag $x_0 = 6$, i ddarganfod gwerth x . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4 . Ysgrifennwch werth x_4 yn gywir i ddau le degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth x yn gywir i ddau le degol. [5]



(C3 Haf 2012)

4. Dangoswch fod i'r hafaliad

$$\cos x - 5x + 2 = 0$$

wreiddyn α rhwng 0 a $\frac{\pi}{4}$.

Mae'n bosibl defnyddio'r berthynas gylchol

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}(2 + \cos x_n)$$

gydag $x_0 = 0.6$ i ddarganfod α . Darganfyddwch a chofnodwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4 .
Ysgrifennwch werth x_4 yn gywir i bum lle degol a phrofwch mai'r gwerth hwn yw gwerth α yn
gywir i bum lle degol. [7]



Uned 3, Pecyn 3

13

Diagramau

Pry Cop a Grisïau



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Yn y pecyn diwethaf, gwelsom berthnasau cylchol o'r ffurf $x_{n+1} = g(x_n)$. Mae diagramau pry cop a diagramau grisiau yn **darlunio** beth sy'n cymryd lle wrth ddefnyddio perthnasau cylchol o'r math yma i ddarganfod gwreiddiau hafaliadau.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

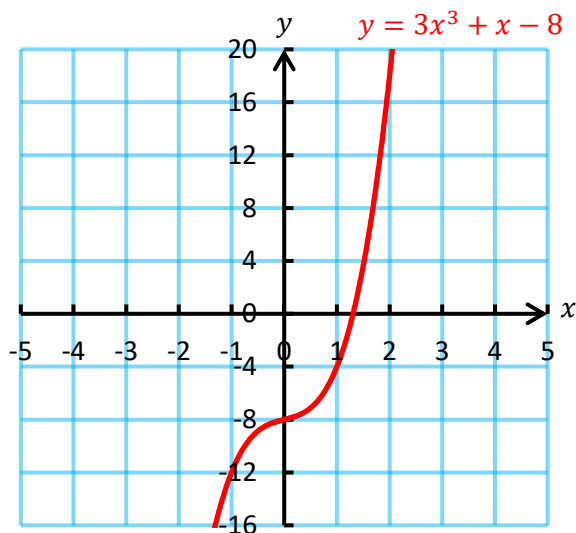
Gwaith TGAU: Amnewid, talgrynnu, newid testun.
Lefel A Uned 1: Braslunio cromliniau.
Lefel A Uned 3: Gwreiddiau hafaliadau (pecyn 2).

I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3: Dull Newton-Raphson o ddatrys hafaliadau.
Cymwysiadau: Datrys problemau mewn cyd-destun sy'n golygu nad oes modd cael datrysiad dadansoddol o hafaliad.

Theori

Ystyriwch unrhyw ffwythiant $y = f(x)$, er enghraifft $y = 3x^3 + x - 8$.



Theori ac Enghraifft

Gwreiddiau'r hafaliad yw ble mae'r gromlin yn torri'r echelin- x , sef ble mae $f(x) = 0$. Ar gyfer yr enghraifft uchod, gwelwn fod un gwreiddyn yn bodoli, rhwng 1 a 2. Yn y pecyn gynt, gwelsom fod hi'n bosib ceisio datrys $f(x) = 0$ trwy ail-drefnu'r hafaliad i'r ffurf $x = g(x)$, ac yna ffurfio **perthynas gylchol** o'r ffurf $x_{n+1} = g(x_n)$.

Enghraifft: $y = 3x^3 + x - 8$.

Ymgais 1:

$$3x^3 + x - 8 = 0$$

$$x = 8 - 3x^3$$

$$x_{n+1} = 8 - 3x_n^3$$

Ymgais 2:

$$3x^3 + x - 8 = 0$$

$$3x^3 = 8 - x$$

$$x^3 = \frac{8-x}{3}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{8-x}{3}}$$

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{8-x_n}{3}}$$

Gwelwn o'r graff ar y dudalen flaenorol bod gwreiddyn yr hafaliad $y = 3x^3 + x - 8$ yn agos at $x = 1$. Felly, gallwn ddewis cychwyn yn $x_0 = 1$ a defnyddio'r berthynas gylchol i geisio darganfod y gwreiddyn.

$$x_1 = 8 - 3 \times x_0^3$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -367$$

$$x_3 = 148292597$$

$$x_4 = -9.783171512 \times 10^{24}$$

$$x_5 = 2.809055093 \times 10^{75}$$

$$x_6 = \text{MATH ERROR}$$

Dargyfeirio, dim yn gallu ffeindio gwreiddyn.

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{8-x_0}{3}}$$

$$x_1 = 1.326352403$$

$$x_2 = 1.305411212$$

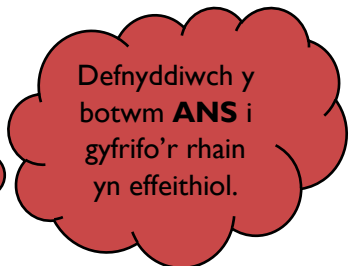
$$x_3 = 1.3067752$$

$$x_4 = 1.306686444$$

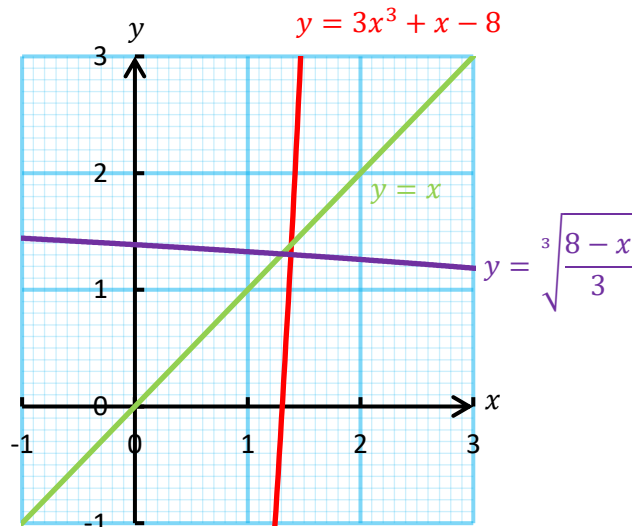
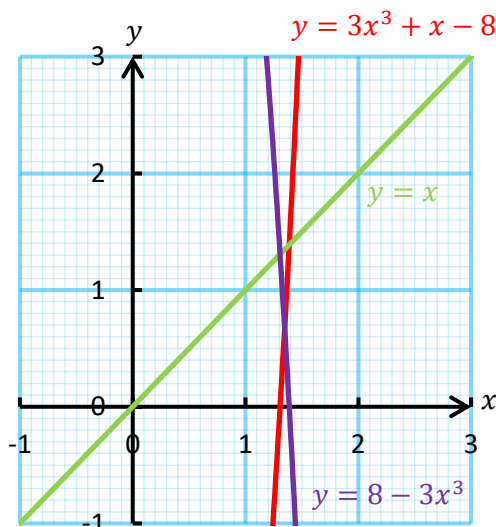
$$x_5 = 1.30669222$$

$$x_6 = 1.306691844 \quad \text{ac yn y blaen...}$$

Cydyfeirio at 1.306691867.



I ddarlunio beth sy'n digwydd uchod, gallwn blotio $y = f(x)$, $y = x$ ag $y = g(x)$ ar yr un diagram.



Ym mhob achos, gwelwn fod gwreiddyn $y = 3x^3 + x - 8$ yn hafal i'r gwerth ar gyfer x ble mae'r llinell $y = x$ yn croestorri'r gromlin $y = g(x)$. Mae hyn yn gwirio bod datrys $f(x) = 0$ yr un peth â datrys $x = g(x)$.

Gallwn ddefnyddio'r rhifau sy'n dod o'r berthynas gylchol $x_{n+1} = g(x_n)$ i ffurfio naill ai **diagram pry cop** neu **ddiagram grisiau**.

Diagram pry cop

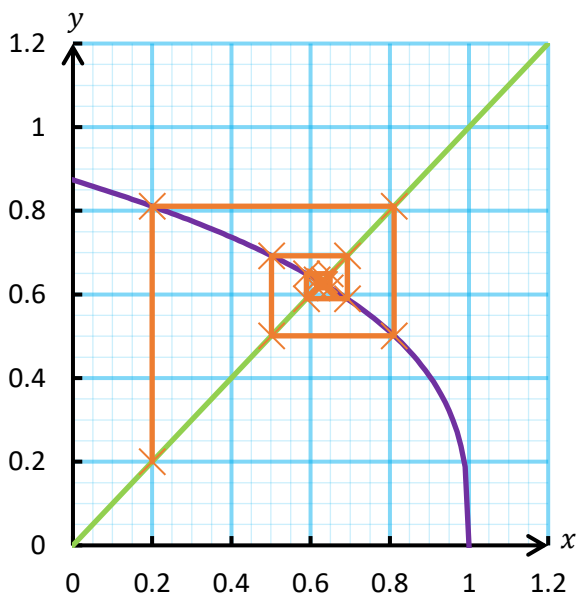
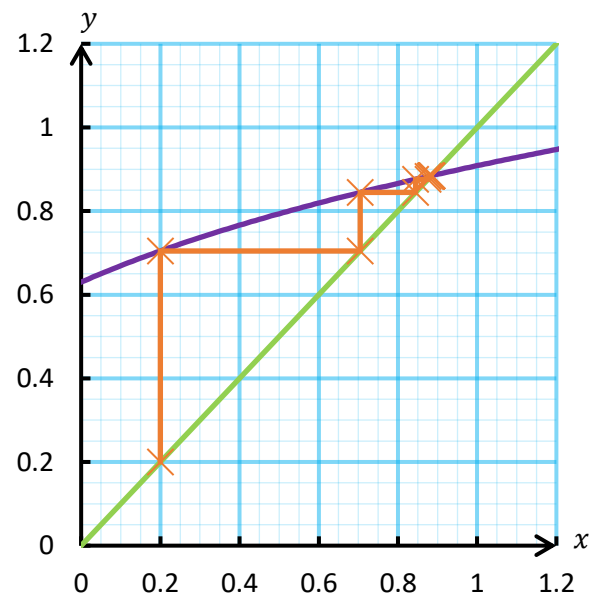


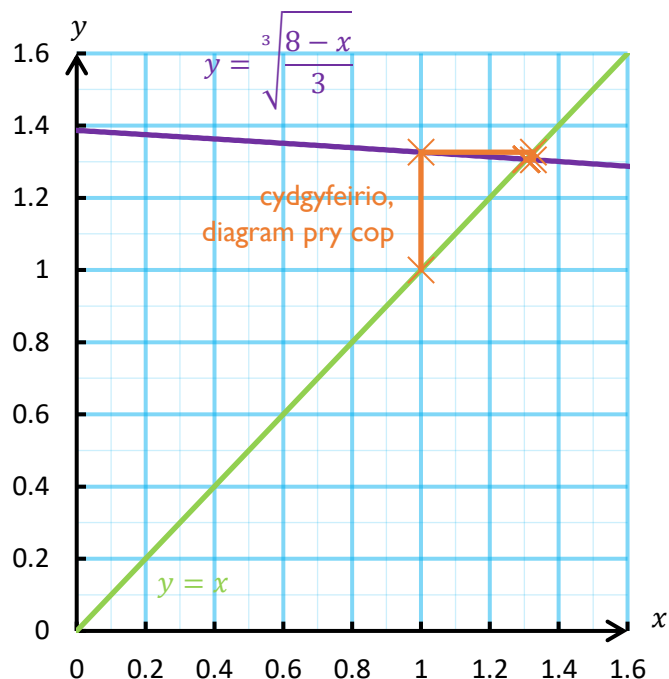
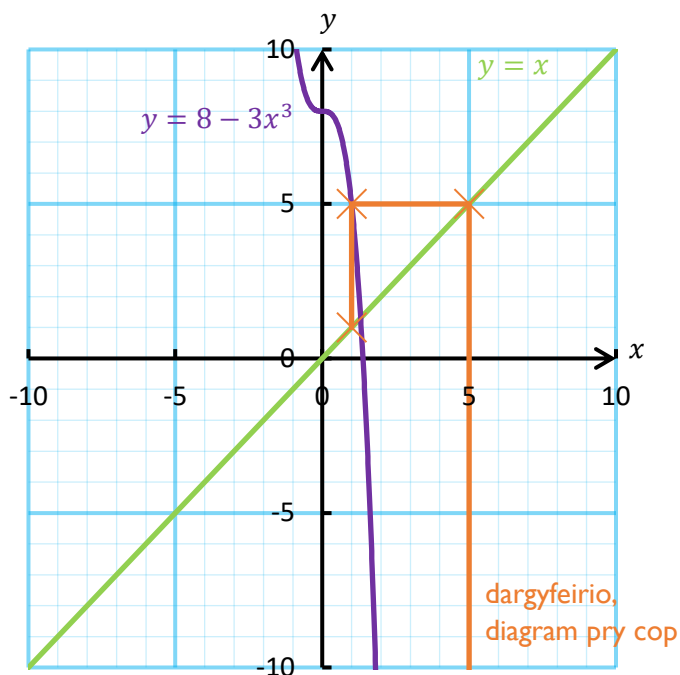
Diagram grisiau



Mae angen plotio llinellau i fynd o (x_0, x_0) i (x_0, x_1) i (x_1, x_1) i (x_1, x_2) i (x_2, x_2) i (x_2, x_3) i ...

Mae'r llinellau yma'n naill ai'n **cydgyfeirio** i wreiddyn $y = f(x)$ neu'n **dargyfeirio**.

Ar gyfer yr enghraifft ar y dudalen flaenorol, dyma beth sy'n digwydd.



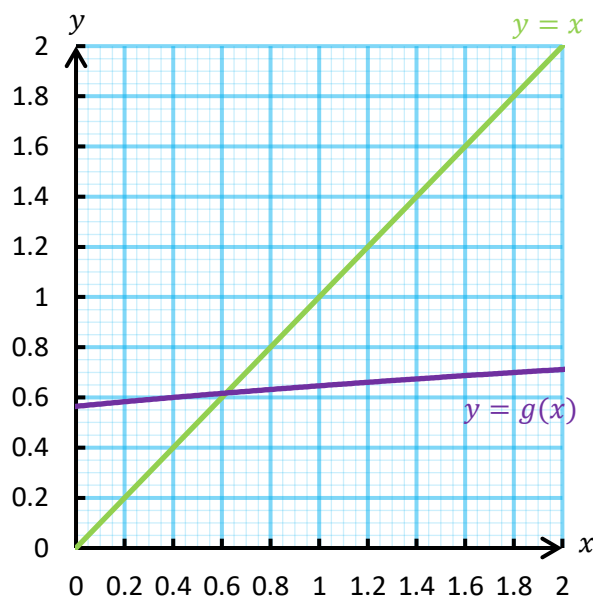
Ymarferion

Ymarfer 1

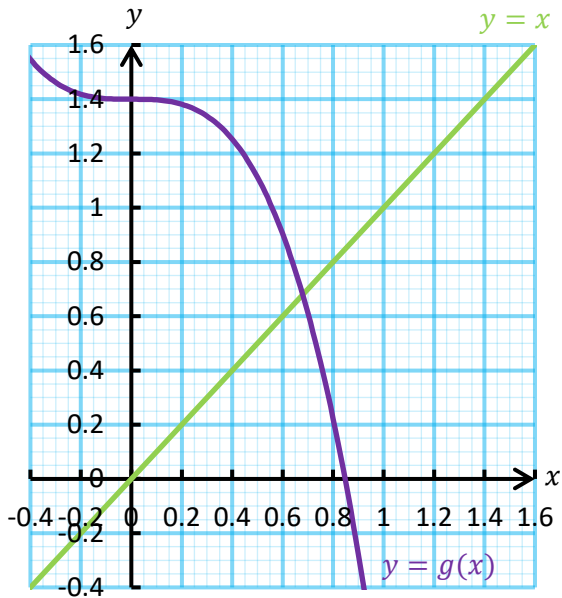
Mae'r graffiau isod yn dangos llinell $y = x$ a ffwythiant $y = g(x)$. Trwy gychwyn yn y gwerth a nodir ar gyfer x_0 , ychwanegwch linellau i'r graff i ffurfio naill ai diagram pry cop neu ddiagram grisiau. Nodwch o dan bob graff os yw'r llinellau'n **cydgyfeirio** i wreiddyn $x = g(x)$ neu'n **dargyfeirio**.

(a) $x_0 = 0.2$

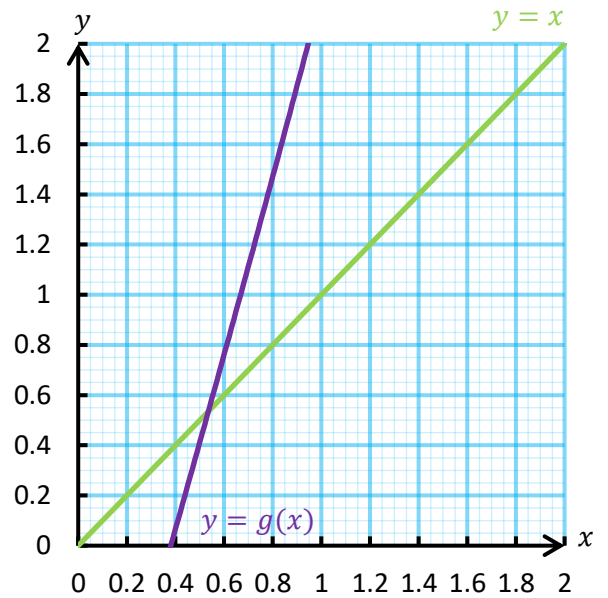
(b) $x_0 = 1.6$



(c) $x_0 = 0.6$

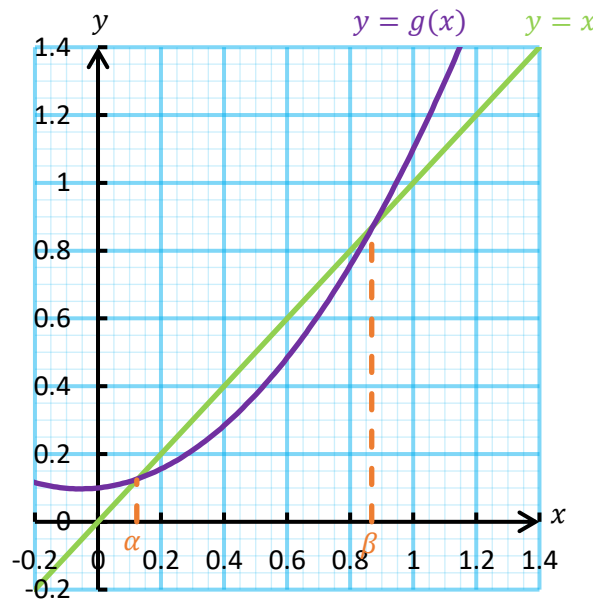


(ch) $x_0 = 0.6$



Ymarfer 2

Mae'r graff isod yn dangos braslun o'r hafaliad $y = g(x)$ a'r llinell $y = x$. Mae'r hafaliad $x = g(x)$ efo gwreiddiau $x = \alpha$ ac $x = \beta$ fel sy'n cael eu dangos ar y graff.



Mae perthynas gylchol o'r ffurf $x_{n+1} = g(x_n)$ yn cael ei ddefnyddio i geisio darganfod gwreiddiau o'r hafaliad $x = g(x)$. Disgrifiwch beth sy'n digwydd i'r iteriad mewn achos ble mae'r gwerth cychwynol x_0

(a) rhwng 0 ag α

(b) rhwng α a β

(c) yn fwy na β

Ymarfer 3

Mae Siwan yn dymuno datrys yr hafaliad ciwbig $y = 2x^3 + 2x - 3$.

(a) (i) Ail-drefnwch yr hafaliad $2x^3 + 2x - 3 = 0$ i'r ffurf $x = g(x)$, gan wneud yr x cyntaf (yr un **coch**) yn destun i'r hafaliad.

(ii) Ail-drefnwch yr hafaliad $2x^3 + 2x - 3 = 0$ i'r ffurf $x = g(x)$, gan wneud yr ail x (yr un **gwyrdd**) yn destun i'r hafaliad.

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Ffurfiwch berthynas gylchol $x_{n+1} = g(x_n)$ o'r hafaliadau o ran (a) y cwestiwn.

(i)

(ii)

(c) Gan gychwyn yn $x_0 = 0.5$, darganfyddwch werthoedd x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ym mhob achos.

(i) $x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

$x_4 =$

$x_5 =$

(ii) $x_1 =$

$x_2 =$

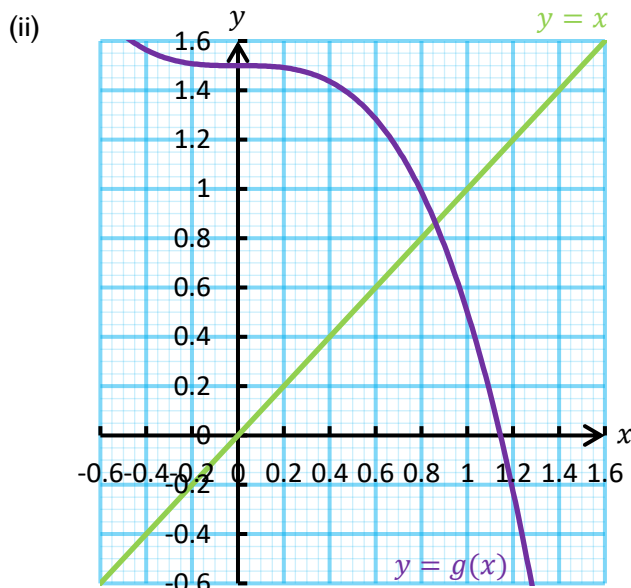
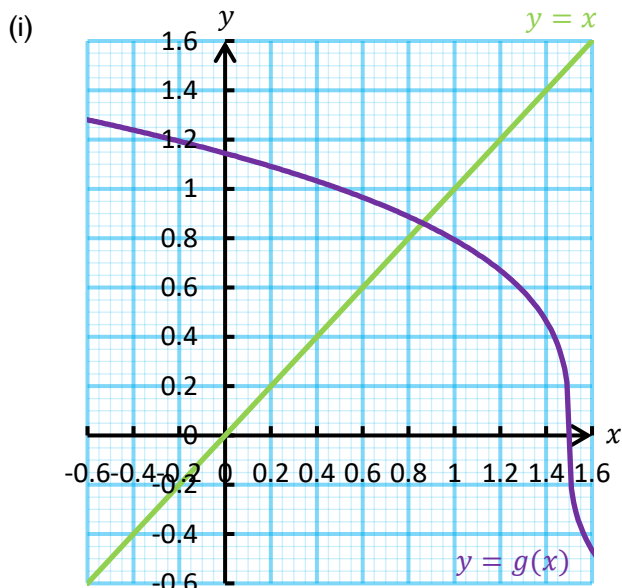
$x_3 =$

$x_4 =$

$x_5 =$

(ch) Pa un o'r dilyniannau uchod sy'n cydgyfeirio, a pha un sy'n dargyfeirio?

(d) Defnyddiwch y diagramau isod i lunio diagram pry cop ar gyfer bob iteriad.



(dd) Ar gyfer yr iteriad sy'n cydgyfeirio, ysgrifennwch werth x_5 yn gywir i un lle degol. Profwch mai hwn yw gwerth gwreiddyn hafaliad gwreiddiol Siwan yn gywir i un lle degol.

.....

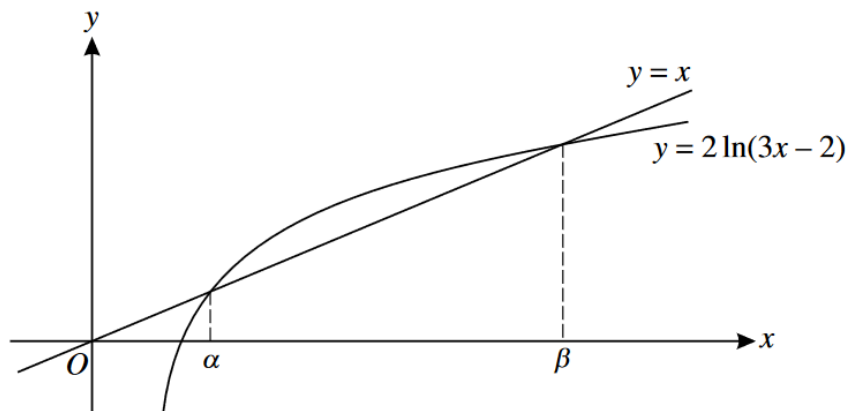
.....

.....

Ψ 5 Uchaf

(OCR Further Pure Mathematics 2 [4726] Haf 2010)

7



The line $y = x$ and the curve $y = 2 \ln(3x - 2)$ meet where $x = \alpha$ and $x = \beta$, as shown in the diagram.

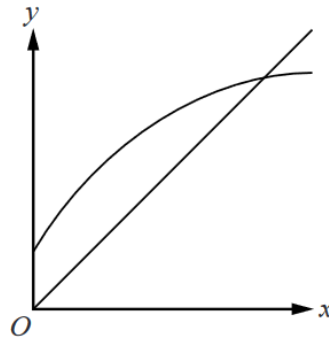
- (i) Use the iteration $x_{n+1} = 2 \ln(3x_n - 2)$, with initial value $x_1 = 5.25$, to find the value of β correct to 2 decimal places. Show all your working. [2]

- (ii) With the help of a 'staircase' diagram, explain why this iteration will not converge to α , whatever value of x_1 (other than α) is used. [3]

(OCR Further Pure Mathematics 2 [4726] Haf 2012)

4 It is given that the equation $x^4 - 2x - 1 = 0$ has only one positive root, α , and $1.3 < \alpha < 1.5$.

(i)



The diagram shows a sketch of $y = x$ and $y = \sqrt[4]{2x+1}$ for $x \geq 0$. Use the iteration $x_{n+1} = \sqrt[4]{2x_n + 1}$ with $x_1 = 1.35$ to find x_2 and x_3 , correct to 4 decimal places. On the copy of the diagram show how the iteration converges to α . [3]

(ii) For the same equation, the iteration $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^4 - 1)$ with $x_1 = 1.35$ gives $x_2 = 1.1608$ and $x_3 = 0.4077$, correct to 4 decimal places. Draw a sketch of $y = x$ and $y = \frac{1}{2}(x^4 - 1)$ for $x \geq 0$, and show how this iteration does not converge to α . [2]

(OCR Further Pure Mathematics 2 [4726/01] Haf 2017)

8 It is required to solve the equation $f(x) = \ln(4x - 1) - x = 0$.

(i) Show that the equation has two roots, α and β , such that $0.5 < \alpha < 1$ and $1 < \beta < 2$. [1]

(ii) Use the iterative formula $x_{r+1} = \ln(4x_r - 1)$ with $x_0 = 1.8$ to find x_1 , x_2 and x_3 , correct to 5 decimal places. Write down the value of β to as many decimal places as these values justify. [3]

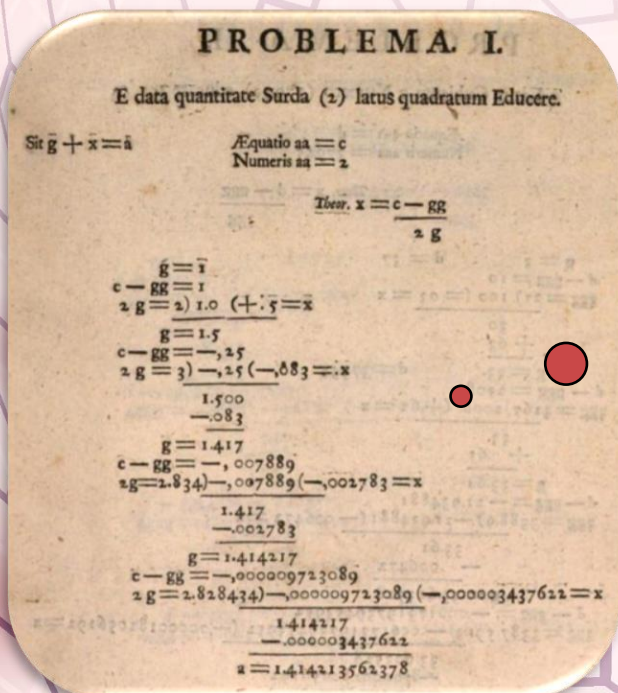
(iii) Derive the iterative formula $x_{r+1} = \frac{(e^{x_r} + 1)}{4}$ and use it to find α correct to 4 decimal places. [4]

(iv) Show that the iterative formula in part (ii) will not find the value of α . Determine whether the iterative formula in part (iii) will find the value of β . [3]



Dull

Newton-Raphson



Cyhoeddodd **Joseph Raphson** y llyfr "Analysis Aequationum Universalis" yn y flwyddyn 1690. Yma adeiladodd ar waith blaenorol **Isaac Newton** ar ddatrys hafaliadau.

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

O gael hafaliad $y = f(x)$, mae'r dull Newton-Raphson yn defnyddio **tangiadau** i geisio darganfod gwreiddiau'r hafaliad.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid, talgrynnu.
Lefel A Uned I: Braslunio cromliniau, differu.

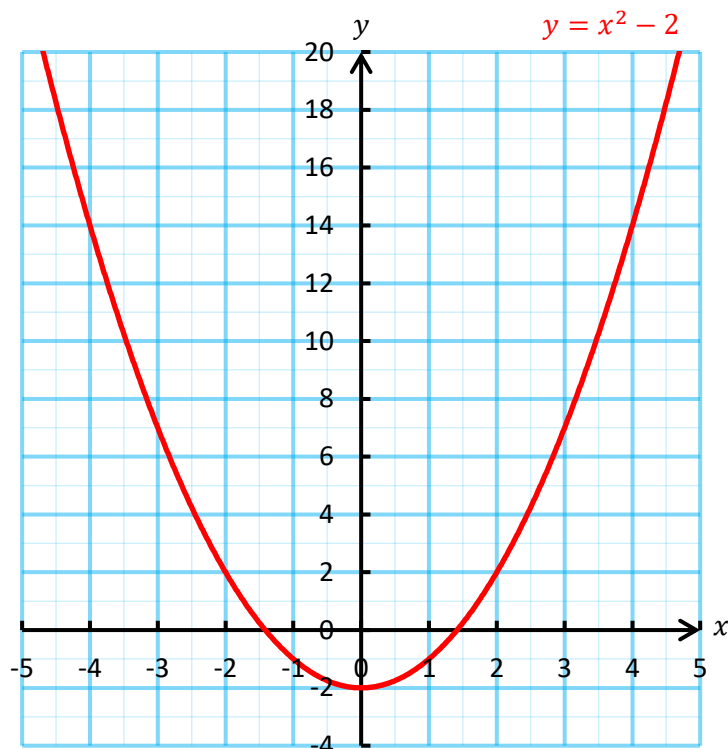
I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau:

- Datrys problemau mewn cyd-destun sy'n golygu nad oes modd cael datrysiad dadansoddol o hafaliad.
- Darganfod pwyntiau arhosol.
- Darganfod cilydd rhif heb orfod rhannu.

Theori

Ystyriwch unrhyw ffwythiant $y = f(x)$, er enghraifft $y = x^2 - 2$.



Theori ac
Enghraifft



Blog

Gwreiddiau'r hafaliad yw ble mae'r gromlin yn torri'r echelin- x , sef ble mae $f(x) = 0$. Ar gyfer yr enghraifft uchod, gwelwn fod dau wreiddyn yn bodoli: un negatiff rhwng -2 a -1 ; ag un positif rhwng 1 a 2 . Mae'r dull Newton-Raphson yn defnyddio **tangiadau** i geisio darganfod gwreiddyn hafaliad:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Mae'r fformiwla yma yn y llyfryn fformiwlaû.

Nodwch fod $f'(x_n)$ yn cynrychioli'r ffwythiant a geir trwy **ddifferu** $f(x_n)$.

Enghraifft: $y = x^2 - 2$.

Gwelwn o'r graff ar y dudalen flaenorol bod gwreiddyn yr hafaliad $y = x^2 - 2$ yn agos at $x = 2$. Felly, gallwn ddewis cychwyn yn $x_0 = 2$ a defnyddio'r berthynas gylchol i geisio darganfod y gwreiddyn.

$$f(x_n) = x_n^2 - 2$$

$$f'(x_n) = 2x_n$$

$$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \times 2}$$

$$x_1 = 1.5$$

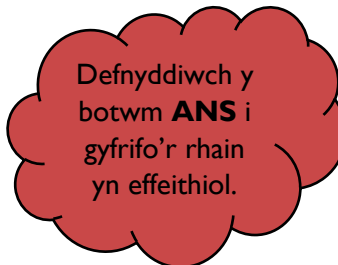
$$x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \times 1.5}$$

$$x_2 = 1.41\dot{6}$$

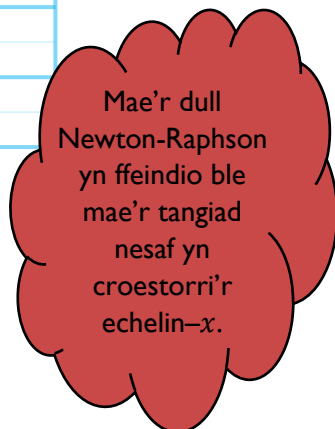
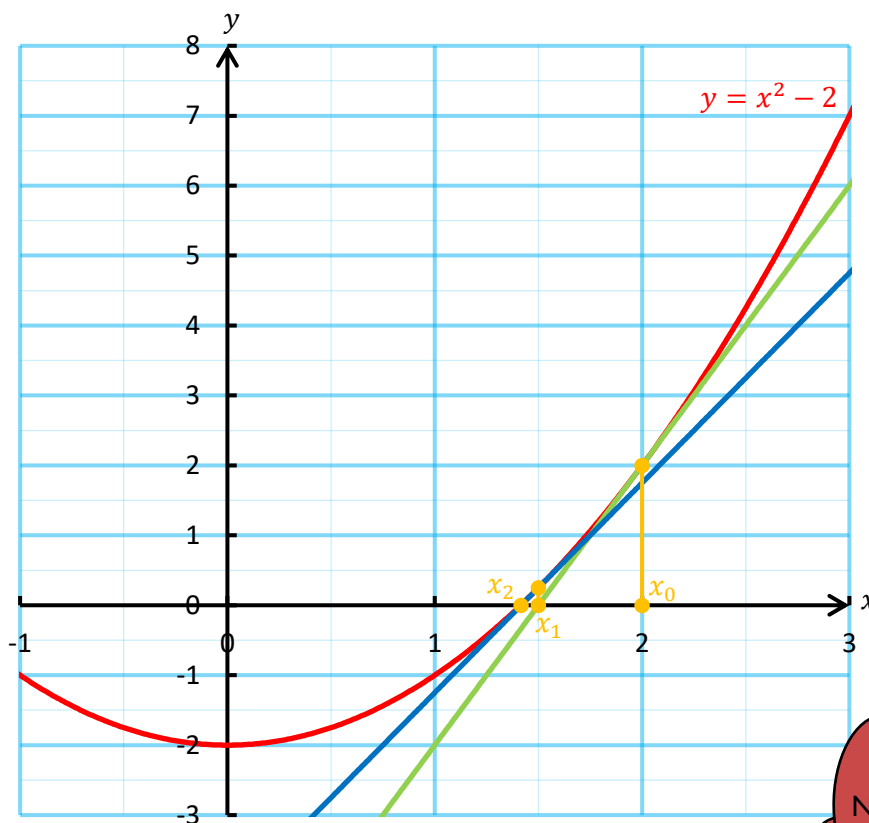
$$x_3 = 1.414215686$$

$$x_4 = 1.414213562$$

$$x_5 = 1.414213562$$



Gan ddefnyddio cyfrifiannell arferol, y gwerth mwyaf manwl gywir y mae'n bosib ei ddarganfod ar gyfer y gwreiddyn yw $x = 1.414213562$. (Byddai modd defnyddio'r dull newid arwydd i brofi mai hwn yw gwerth y gwreiddyn i naw lle degol.) I ddarlunio beth sy'n digwydd uchod, gallwn ddefnyddio'r graff isod.



- Rydym yn cychwyn yn y pwynt $(x_0, 0)$ ar yr echelin- x , sef y pwynt $(2, 0)$.
- Rydym yn llunio **tangiad** i'r gromlin ar y pwynt $(2, 2^2 - 2 = 2)$.
- Mae'r **tangiad** yn croestorri'r echelin- x yn y pwynt $(x_1, 0)$, sef $(1.5, 0)$.
- Rydym yn llunio **tangiad** i'r gromlin ar y pwynt $(1.5, 1.5^2 - 2 = 0.25)$.
- Mae'r **tangiad** yn croestorri'r echelin- x yn y pwynt $(x_2, 0)$, sef $(1.41\dot{6}, 0)$.
- Ac yn y blaen...

Mae'r dull Newton-Raphson fel arfer yn **cydgyfeirio'n** sydyn, ond gall fod yn annibynadwy os yw graddiant unrhyw dangiad yn **fach**.

Sialens! ⚠ Profwch mai $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ yw'r iteriad ar gyfer y dull Newton-Raphson gan gychwyn efo hafaliad tangiad cyffredinol yn y ffurf $y - y_1 = m(x - x_1)$.



(Uned 3 Haf 2024)

8. Mae'r ffwythiant f yn cael ei ddiffinio gan

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 1.$$

- (a) Dangoswch fod gan yr hafaliad $f(x) = 0$ wreiddyn yn y cyfwng (*interval*) $[0, 1]$. [1]

- (b) Gan ddefnyddio dull Newton-Raphson gyda $x_0 = 0.8$,

(i) ysgrifennwch werth degol x_1 yn llawn fel mae eich cyfrifiannell yn ei roi,

- (ii) darganfyddwch werth y gwreiddyn hwn yn gywir i chwech lle degol. [4]

- (c) Esboniwch pam dydy'r dull Newton-Raphson ddim yn gweithio os yw $x_0 = \frac{1}{3}$. [2]

(Uned 3 Haf 2023)

0	4
---	---

 Mae ffwythiant f gyda'r parth $(-\infty, \infty)$ wedi'i ddiffinio gan $f(x) = 6x^3 + 35x^2 - 7x - 6$.

a) Darganfyddwch nifer y gwreiddiau sydd gan yr hafaliad $f(x) = 0$ yn y cyfwng (*interval*) $[-1, 1]$. [2]

b) Defnyddiwch y dull Newton-Raphson i ddarganfod gwreiddyn sydd gan yr hafaliad $f(x) = 0$.
Gan ddechrau gydag $x_0 = 1$,

i) ysgrifennwch werth x_1 ,

ii) darganfyddwch werth y gwreiddyn yn gywir i un lle degol. [4]

c) Mae rhywun yn awgrymu byddai'n bosibl defnyddio dilyniant iterus (*iterative*) arall

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{7x_n + 6 - 6x_n^3}{35}},$$

gan ddechrau gydag $x_0 = -3$, i ddarganfod gwreiddyn sydd gan yr hafaliad $f(x) = 0$.

Esboniwch pam mae'r dull hwn yn methu (*fails*). [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Edexcel Further Pure Mathematics I [6667/01] Haf 2016)

2. $f(x) = 3x^{\frac{3}{2}} - 25x^{-\frac{1}{2}} - 125, \quad x > 0$

(a) Find $f'(x)$. (2)

The equation $f(x) = 0$ has a root α in the interval $[12, 13]$.

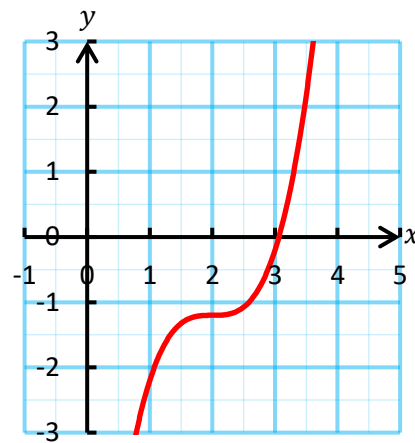
(b) Using $x_0 = 12.5$ as a first approximation to α , apply the Newton-Raphson procedure once to $f(x)$ to find a second approximation to α , giving your answer to 3 decimal places. (4)

Problemau

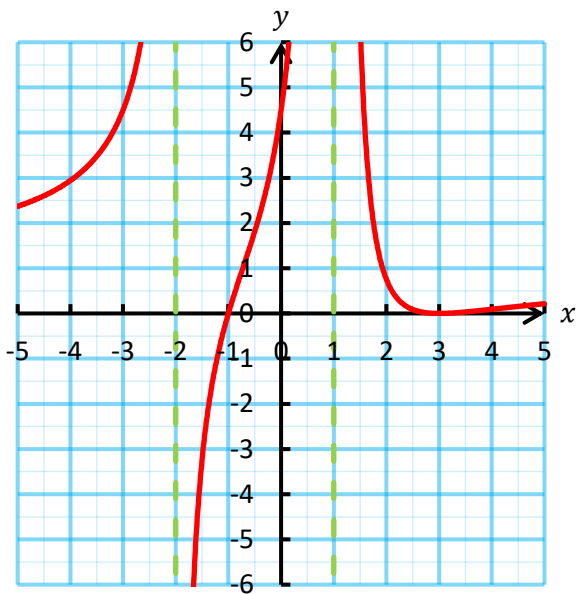
Os yw ffwythiant yn torri trwy'r echelin $-x$, yna gallwn ddangos bod gan y ffwythiant wreiddyn trwy edrych ar arwydd y ffwythiant bob ochr i'r gwreiddyn. Mae'r **newid arwydd** yn dangos bod gan y ffwythiant wreiddyn yn y cyfwng a nodwyd.

Er enghraifft, ar gyfer y ffwythiant ar y dde, mae'r newid arwydd rhwng $f(2.5)$ a $f(3.5)$ yn dangos bod gwreiddyn yn bodoli yn y cyfwng $[2.5, 3.5]$.

Fodd bynnag, nid yw'r dull newid arwydd yn gweithio bob tro.



Ymarfer 1



Ystyriwch y ffwythiant sy'n cael ei ddangos ar y chwith.

(a) Mae newid arwydd rhwng $f(-3)$ a $f(-1.5)$. Pam na ellir casglu felly bod gwreiddyn yn y cyfwng $[-3, -1.5]$?

.....

.....

.....

(b) Mae'r graff yn dangos bod gan y ffwythiant wreiddyn pan fo $x = 3$. Pam na fyddai'r dull newid arwydd, yn y cyfwng $[2, 4]$, yn gallu lleoli'r gwreiddyn yma?

.....

.....

.....

(c) Ysgrifennwch gyfwng lle fyddai'r dull newid arwydd yn gallu lleoli gwreiddyn.

.....

Ymarfer 2

Ystyriwch y ffwythiant sy'n cael ei ddangos ar y dde.

(a) Beth sydd o'i le efo defnyddio'r dull newid arwydd i leoli gwreiddyn yn y cyfwng $[0, 2]$?

.....

.....

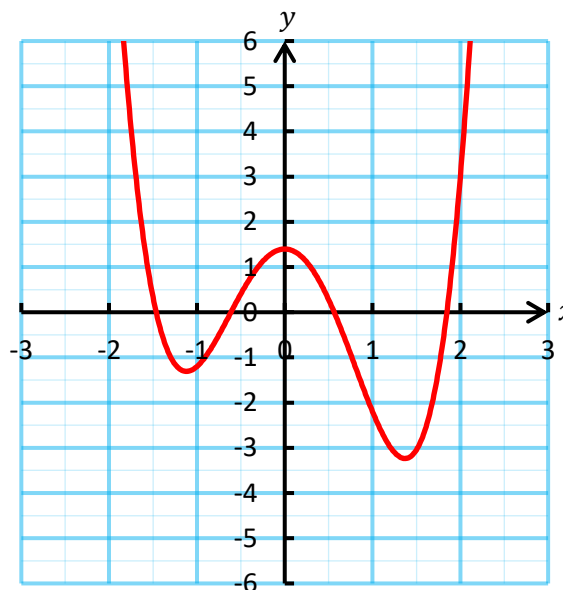
.....

(b) Beth sydd o'i le efo defnyddio'r dull newid arwydd i leoli gwreiddyn yn y cyfwng $[-1.75, 1.5]$?

.....

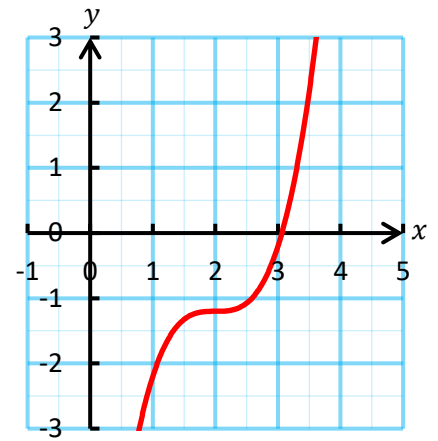
.....

.....

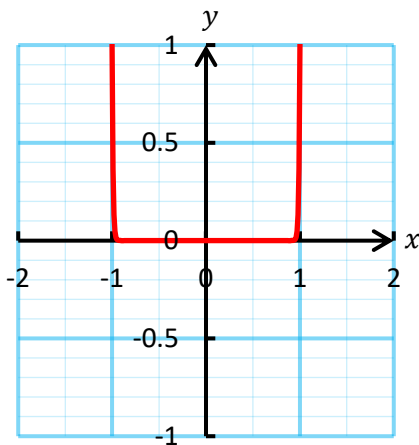


Ymarfer 3

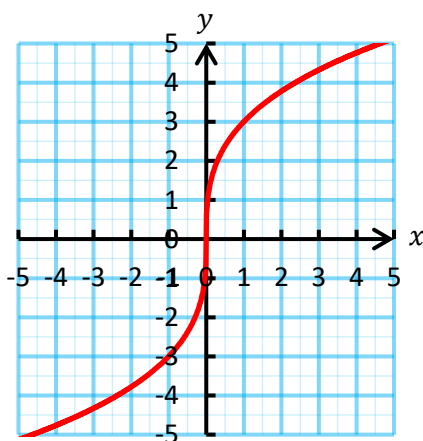
Ar gyfer y graff ar y dde, beth fyddai'r broblem efo cychwyn y dull Newton-Raphson ar $x_0 = 2$?



Ymarfer 4



(a) Mae'r graff ar y chwith yn dangos y gromlin $y = x^{100}$. Mae cefnogwr brwd dull Newton-Raphson yn penderfynu defnyddio'r dull i ddarganfod gwreiddyn $y = x^{100}$, sydd yn $(0, 0)$. Beth sy'n digwydd wrth ddefnyddio'r dull gan gychwyn efo $x_0 = 0.1$?



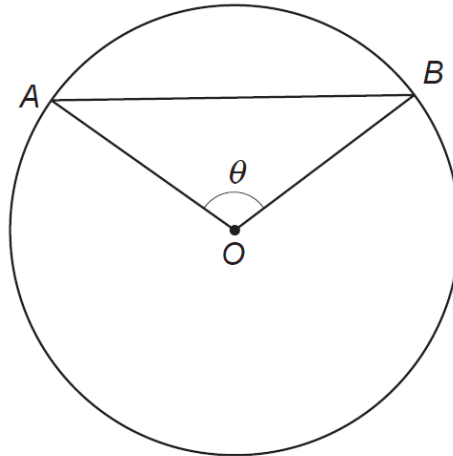
(b) Mae'r cefnogwr brwd nawr yn penderfynu defnyddio'r dull i ddarganfod gwreiddyn $y = 3x^{1/3}$, sydd eto yn $(0, 0)$. Beth sy'n digwydd wrth ddefnyddio'r dull gan gychwyn efo $x_0 = 0.1$?


 Cwestiynau Adolygu

(Uned 3 Haf 2019)

1	2
---	---

Mae cord AB yn cynnal ongl θ radian yng nghanol cylch. Mae'r cord yn rhannu'r cylch yn ddau segment, ac mae arwynebeddau'r segmentau yn ôl y gymhareb 1:2.



- a) Dangoswch fod $\sin\theta = \theta - \frac{2\pi}{3}$. [4]
- b) i) Dangoswch fod θ rhwng 2.6 a 2.7.
- ii) Gan ddechrau gyda $\theta_0 = 2.6$, defnyddiwch y Dull Newton-Raphson i ddarganfod gwerth θ yn gywir i dri lle degol. [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2018)

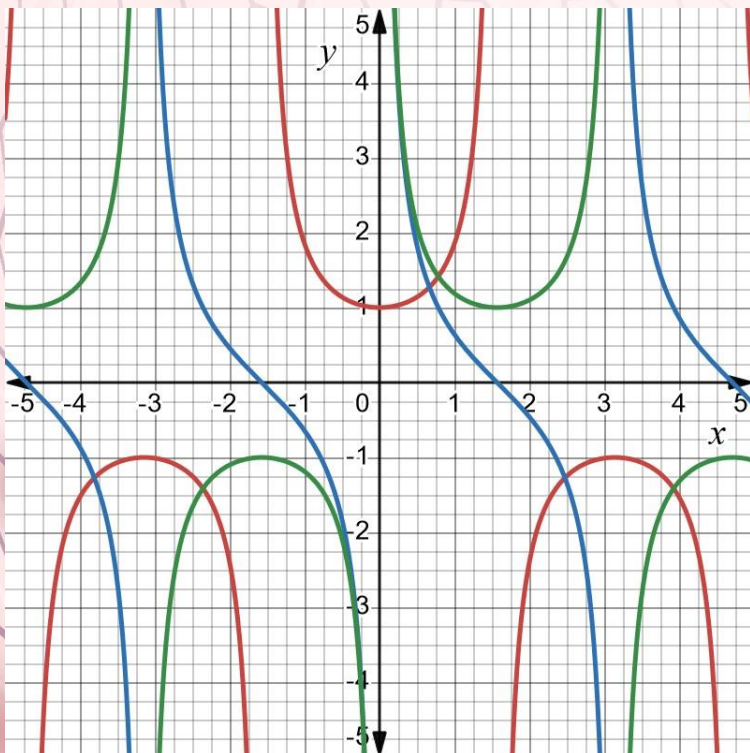
1	7
---	---

Trwy luniadu graffiau addas, dangoswch fod gan $x - 1 = \cos x$ un gwreiddyn yn unig. Gan ddechrau gydag $x_0 = 1$, defnyddiwch y dull Newton-Raphson i ddarganfod gwerth y gwreiddyn hwn yn gywir i ddau le degol. [6]



Sec, Cosec,

Cot



$$y = \sec x$$

$$y = \operatorname{cosec} x$$

$$y = \cot x$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Datrys hafaliadau'n ymwneud â'r ffwythiannau trigonometreg sec, cosec a cot.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid, datrys hafaliadau, ffactorio mynegiadau cwadratig.
Lefel A Uned I: Datrys hafaliadau trigonometreg.

I ble mae'n arwain?

Deall parth, amrediad a graff y tri ffwythiant.
 Differu ac integru ffwythiannau trigonometreg.

Theori

Beth yw **cilydd** y ffwythiannau trigonometreg sin, cos a tan? Mae problem efo defnyddio'r nodiant arferol $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ar gyfer y cilydd, gan ein wedi defnyddio'n barod \sin^{-1} , \cos^{-1} a \tan^{-1} i'n helpu darganfod onglau. Er enghraifft, os yw $\sin(x) = 0.5$, yna mae

$$x = \sin^{-1}(0.5)$$

$$x = \dots, 30^\circ, \dots$$

Felly, nid yw $\sin^{-1}(0.5)$ yn cynrychioli $\frac{1}{\sin(0.5)}$, ond yn hytrach y set o'r onglau ble mae sin yr onglau'n rhoi'r ateb 0.5. Er mwyn cynrychioli $\frac{1}{\sin(0.5)}$, mae mathemategwyr wedi cyflwyno tri ffwythiant trigonometreg newydd:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$

Gallwn olrhain dau unfathiant trigonometreg newydd o'r unfathiant $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} \quad (\text{Rhannu efo } \sin^2(x))$$

$$(\text{Rhannu efo } \cos^2(x))$$

$$1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) \quad (\text{Symleiddio})$$

$$(\text{Symleiddio})$$

$$\operatorname{cosec}^2(x) = 1 + \cot^2(x) \quad (\text{Cyfnewid ochrau})$$

$$(\text{Cyfnewid ochrau})$$

Gallwn ddefnyddio'r unfathiannau uchod wrth ddatrys hafaliadau trigonometreg sy'n cynnwys y ffwythiannau sec, cosec a cot.



Theori



Enghraifft



(C3 Haf 2008)

2. (a) Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

$$\tan 2\theta \equiv \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

yn anghywir.

[2]

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$2\sec^2\theta = 8 - \tan\theta.$$

[6]

(C3 Gaeaf 2010)

2. (a) Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

$$\sin 4\theta \equiv 4 \sin^3 \theta - 3 \sin \theta$$

yn anghywir.

[2]

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$3 \sec^2 \theta = 7 - 11 \tan \theta.$$

Rhowch eich atebion yn gywir i un lle degol.

[6]

(C3 Gaeaf 2011)

2. (a) Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

$$\sec^2 \theta \equiv 1 - \operatorname{cosec}^2 \theta$$

yn anghywir.

[2]

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$3 \operatorname{cosec}^2 \theta = 11 - 2 \cot \theta .$$

[6]

(C3 Gaeaf 2012)

2. (a) Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

$$\sin(\theta + \phi) \equiv \sin \theta + \sin \phi$$

yn anghywir.

[2]

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\sec^2 \theta + 8 = 4 \tan^2 \theta + 5 \sec \theta.$$

[6]

(C3 Gaeaf 2013)

2. (a) (i) Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

$$\cos^3\theta \equiv 1 - \sin^3\theta$$

yn anghywir.

- (ii) **Ysgrifennwch** werth θ sydd yn bodloni'r hafaliad

$$\cos^3\theta = 1 - \sin^3\theta. \quad [3]$$

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$4\operatorname{cosec}^2\theta = 9 - 8\cot\theta. \quad [6]$$

(C3 Gaeaf 2014)

2. (a) Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

‘Os yw x yn ongl lem, yna mae $\sin(x + 30^\circ) > \sin x$ ’

yn anghywir.

[2]

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$15 \operatorname{cosec}^2 \theta + 2 \cot \theta = 23.$$

[6]

(C3 Haf 2015)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$7 \operatorname{cosec}^2 \theta - 4 \cot^2 \theta = 16 + 5 \operatorname{cosec} \theta. \quad [6]$$

- (b) Heb wneud unrhyw waith cyfrifo, eglurwch pam nad oes unrhyw werthoedd ϕ yn yr amrediad $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ sy'n bodloni'r hafaliad

$$4 \sec \phi + 3 \operatorname{cosec} \phi = 6. \quad [1]$$

(C3 Haf 2018)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$3 \operatorname{cosec}^2\theta + 6 \cot\theta = 8 - 5 \cot^2\theta. \quad [6]$$

- (b) Heb wneud unrhyw waith cyfrifo, esboniwch pam nad oes dim gwerthoedd ϕ yn yr amrediad $0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ sy'n bodloni'r hafaliad

$$\sec\phi + 2 \tan\phi = 0.8. \quad [1]$$



(Uned 3 Haf 2019)

0	9
---	---

- a) O wybod bod α a β yn ddwy ongl fel bod $\tan\alpha = 2\cot\beta$, dangoswch fod

$$\tan(\alpha + \beta) = -(\tan\alpha + \tan\beta). \quad [2]$$

- b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni'r hafaliad

$$4\tan\theta = 3\sec^2\theta - 7. \quad [6]$$

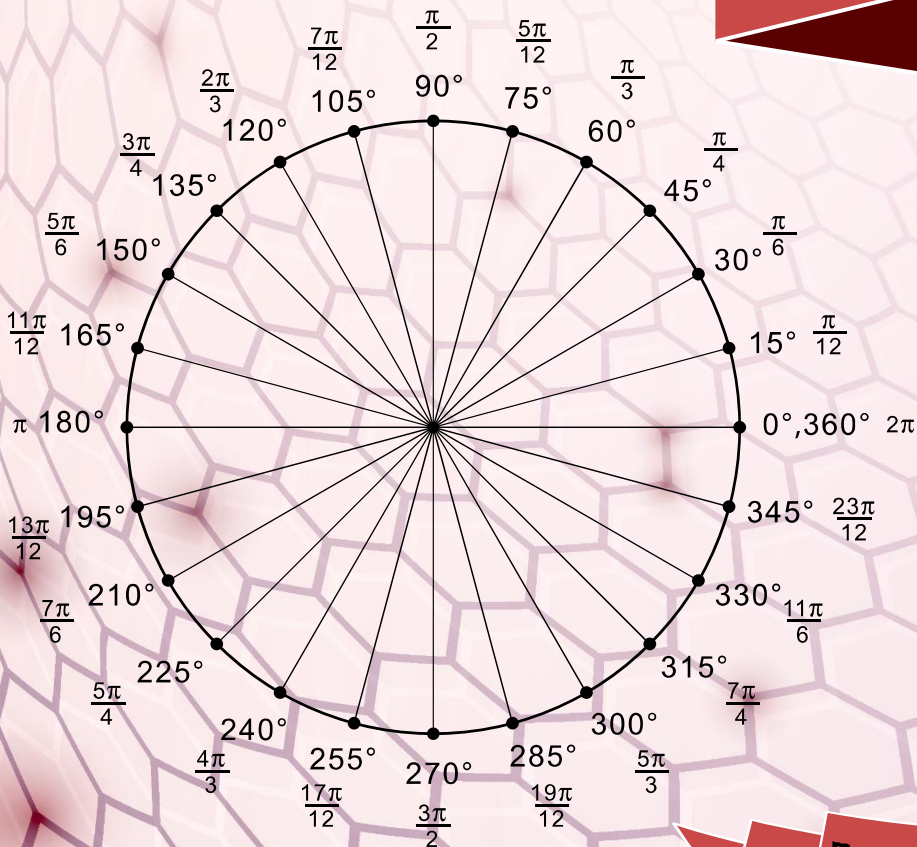


Uned 3, Pecyn 6

13

Mesur Onglau

Mewn Radianau



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Yn y cwrs TGAU, rydym wedi bod yn mesur onglau mewn graddau, o 0° i 360° . Er mwyn gallu cyfrifo hyd arc ac arwynebedd sector mewn cylch yn effeithlon, mae'n fanteisiol i ni ddefnyddio graddfa wahanol i fesur onglau yn y cwrs Lefel A.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Mesur onglau, cyfrifo cylchedd ac arwynebedd cylch, cyfrifo arwynebedd segment cylch.
Lefel A Uned I: Trigonometreg.

I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3:

- Brasamcanion onglau bach.
- Integru ffwythiannau trigonometreg.

Cymwysiadau:

- Mesur buanedd ongllog mewn ffiseg / mathemateg bellach.
- Mesur amledd ton electromagnetig.

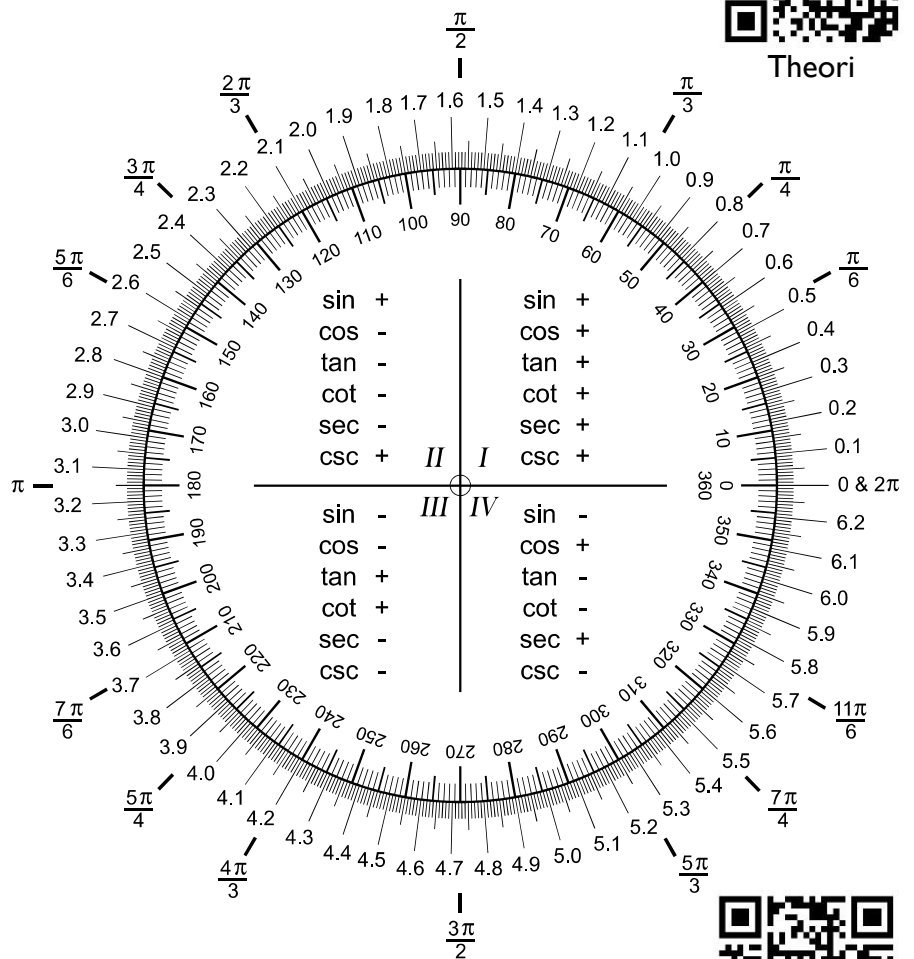
Theori



Theori

Wrth fesur onglau, rhaid penderfynu ar raddfa sy'n mynd o sero i'r gwerth ar gyfer troad cyfan. Wrth fesur onglau mewn **graddau**, mae'r raddfa'n mynd o 0° i 360° . Dewiswyd 360 gan ei fod efo nifer fawr o ffactorau – er enghraifft, yn ystyried y rhifau rhwng 1 a 10, dim ond 7 sydd ddim yn ffactor o 360. Golygai hyn ei bod hi'n hawdd holhti troad cyfan i mewn i 3 darn hafal; 5 darn hafal; ayb.

Nid graddau yw'r unig raddfa ar gyfer mesur onglau. Mae tirfesurwyr yn Ewrop yn defnyddio 400 **gradian** ar gyfer troad cyfan (fel bod 100 gradian ar gyfer bob ongl sgwâr). Mae'r system yma'n deillio o Ffrainc, ac mae'n ymddangos ar gyfrifianellau gwyddonol fel un o'r opsiynau ar gyfer mesur onglau. Ni fyddem, fodd bynnag, yn defnyddio gradianau i fesur onglau yn y cwrs Lefel A. Yn hytrach, y system fydd o ddefnydd i ni fydd y system o fesur onglau mewn **radianau**. Yn y system yma, mae troad cyfan yn hafal i 2π radian (sydd, i 2 le degol, yn hafal i 6.28 radian). Ar yr olwg gyntaf, mae defnyddio system o'r fath yn gwneud pethau'n fwy cymhleth – dychmygwch fesur ongl aflem gan ddefnyddio'r onglydd ar y dde, er enghraifft. Mantais fawr y system, fodd bynnag, yw'r **fformiwlâu** mwy syml sy'n deillio o fesur ongl mewn radianau.



Enghraifft

Ymarfer 1

(a) Cwblhewch y tabl canlynol. Rhowch eich atebion yn nhermau π , os yn bosib.

Ongl mewn graddau	0°	90°		360°	45°		100°	
Ongl mewn radianau			π rad			$\frac{3\pi}{2}$ rad		5 rad

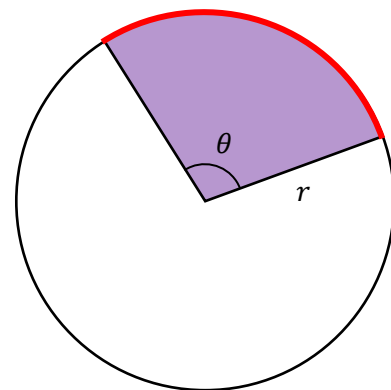
(b) Cwblhewch y brawddegau canlynol.

I newid ongl mewn graddau i fod mewn radianau, rhaid lluosio efo

I newid ongl mewn radianau i fod mewn graddau, rhaid lluosio efo

Hyd Arc ac Arwynebedd Sector

Gadewch i ni ystyried y diagram ar y dde, sy'n dangos cylch efo radiws r . Yn gyntaf, gadewch i ni gyfrifo hyd yr **arc goch**, sydd yn ffracsiwn o gylchedd y cylch.



Mewn graddau

Hyd yr arc = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi \times$ diamedr

Mewn radianau

Hyd yr arc = $\frac{\theta}{2\pi} \times \pi \times$ diamedr
 Hyd yr arc = $\frac{\theta}{2} \times$ diamedr
 Hyd yr arc = $\theta \times$ radiws
 Hyd yr arc = $r\theta$

Gwelwn fod y fformiwla ar gyfer hyd yr arc yn fwy syml o lawer wrth fesur yr ongl mewn radianau. Mae hyn hefyd yn wir wrth geisio cyfrifo arwynebedd y **sector biws**, sydd yn ffracsiwn o arwynebedd y cylch.

Mewn graddau

Arwynebedd y sector = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi \times$ radiws²

Mewn radianau

Arwynebedd y sector = $\frac{\theta}{2\pi} \times \pi \times$ radiws²
 Arwynebedd y sector = $\frac{\theta}{2} \times$ radiws²
 Arwynebedd y sector = $\frac{1}{2} r^2 \theta$

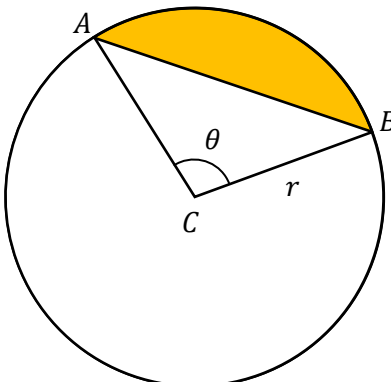
Eto mae'r fformiwla ar gyfer arwynebedd y sector yn fwy syml wrth fesur yr ongl mewn radianau, gan fod y ddau symbol π yn canslo. I grynhoi, wrth fesur ongl mewn radianau,

Hyd arc cylch = $r\theta$

Arwynebedd sector cylch = $\frac{1}{2} r^2 \theta$

Arwynebedd Segment Cylch

Mae'n ddefnyddiol hefyd gallu cofio'r fformiwla ar gyfer cyfrifo arwynebedd **segment cylch**, fel sy'n cael ei ddangos ar y dde. Wrth fesur yr ongl θ mewn radianau:



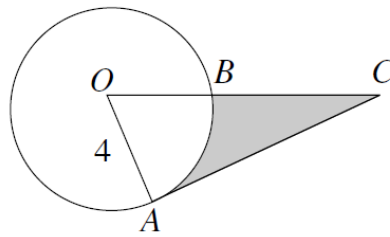
Arwynebedd y segment = Arwynebedd y sector – Arwynebedd y triongl
 Arwynebedd y segment = $\frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} ab \sin C$

Arwynebedd y segment = $\frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$


 Ymarfer

(C2 Gaeaf 2005)

9.



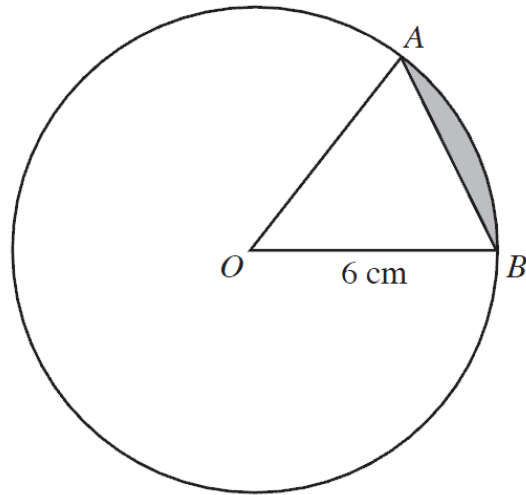
Yn y diagram, mae'r pwyntiau A a B ar gylch, canol O a radiws 4 cm. Mae'r tangiad i'r cylch yn A yn croestorri'r llinell OB wedi'i hestyn (*produced*) yn y pwynt C . Hyd yr arc AB yw 3 cm.

- (a) Darganfyddwch \widehat{AOB} mewn radianau. [2]
- (b) Cyfrifwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. Rhowch eich ateb yn gywir i ddau le degol. [4]


 Y 10 Uchaf

(C2 Haf 2008)

9.

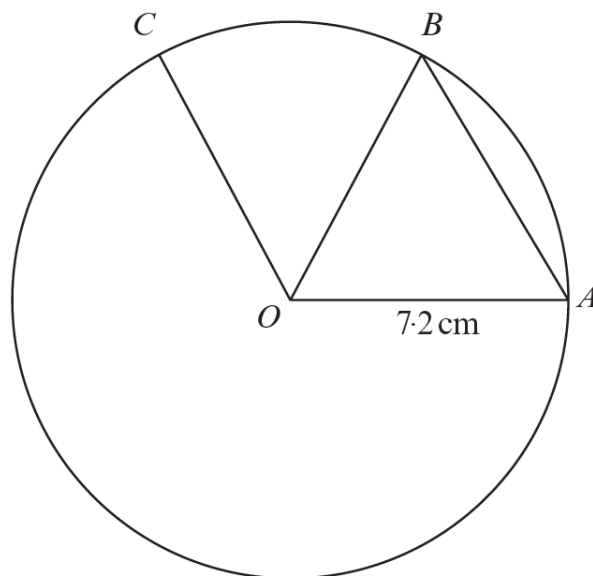


Mae'r diagram yn dangos dau bwynt A a B ar gylch â chanol O a radiws 6 cm. Hyd yr **arc** AB yw 5.4 cm.

- (a) Dangoswch mai arwynebedd y **sector** AOB yw 16.2 cm^2 . [4]
- (b) Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu, gan roi eich ateb yn gywir i un lle degol. [3]

(C2 Haf 2013)

9.

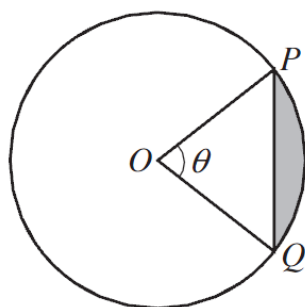


Mae'r diagram yn dangos tri phwynt A , B ac C ar gylch â chanol O a radiws 7.2 cm .

- (a) O wybod bod $\widehat{AOB} = 1.1$ radian, darganfyddwch arwynebedd y **triangl** AOB . Rhowch eich ateb yn gywir i un lle degol. [2]
- (b) Arwynebedd y **sector** BOC yw 19.44 cm^2 . Darganfyddwch hyd yr **arc** BC . [3]

(C2 Haf 2006)

10.

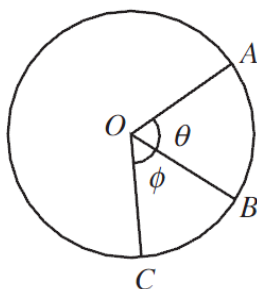


Mae'r diagram yn dangos dau bwynt P a Q ar gylch, canol O a radiws 4 cm, fel bod $\widehat{POQ} = \theta$ radian. Perimeddr ac arwynebedd y **sector** POQ yw x cm ac A cm^2 , yn ôl eu trefn. O wybod bod $x = 3A$,

- (a) dangoswch fod $\theta = 0.4$, [4]
- (b) cyfrifwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu, gan roi eich ateb yn gywir i dri lle degol. [4]

(C2 Gaeaf 2006)

9.

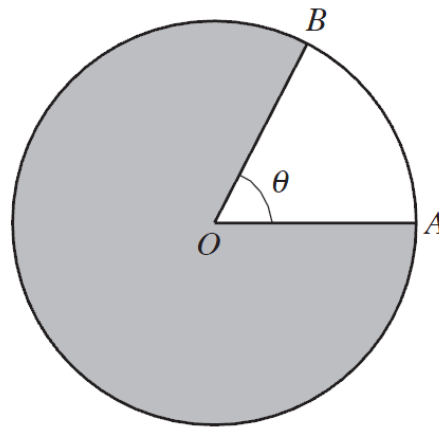


Mae'r diagram yn dangos cylch â chanol O a radiws 4 cm. Mae'r pwyntiau A , B a C ar y cylch, fel y dangosir, ac mae'r onglau θ a ϕ wedi'u mesur mewn radianau. Swm arwynebeddau'r sectorau AOB a BOC yw 15.2 cm^2 .

- (a) Dangoswch fod $\theta + \phi = 1.9$. [2]
- (b) O wybod bod hyd yr arc AB 3.2 cm yn fwy na hyd yr arc BC , darganfyddwch werthoedd θ a ϕ . [4]

(C2 Haf 2007)

9.



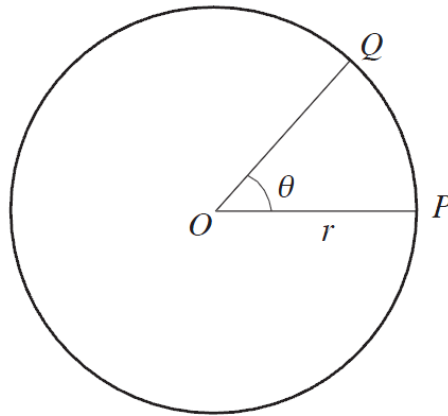
Mae'r diagram yn dangos dau bwynt A a B ar gylch, canol O a radiws 6 cm, fel bod $\widehat{AOB} = \theta$ radian. O wybod bod cylchedd y cylch 24 cm yn fwy na dwywaith hyd yr arc AB ,

(a) dangoswch fod $\theta = \pi - 2$, [4]

(b) cyfrifwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. [3]

(C2 Gaeaf 2008)

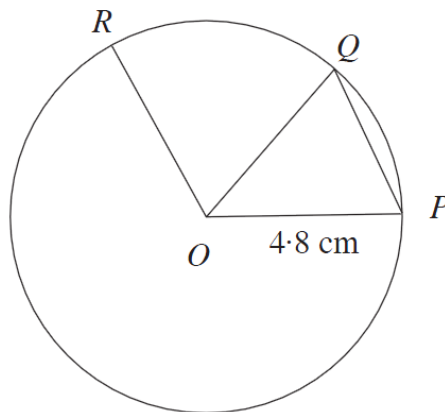
9.



Mae'r diagram yn dangos dau bwynt P a Q ar cylch â chanol O . Radiws y cylch yw r cm ac mae $\widehat{POQ} = \theta$ radian. Hyd yr arc PQ yw 6 cm ac arwynebedd y sector POQ yw 22.5 cm^2 . Darganfyddwch werthoedd r a θ . [5]

(C2 Gaeaf 2009)

9.

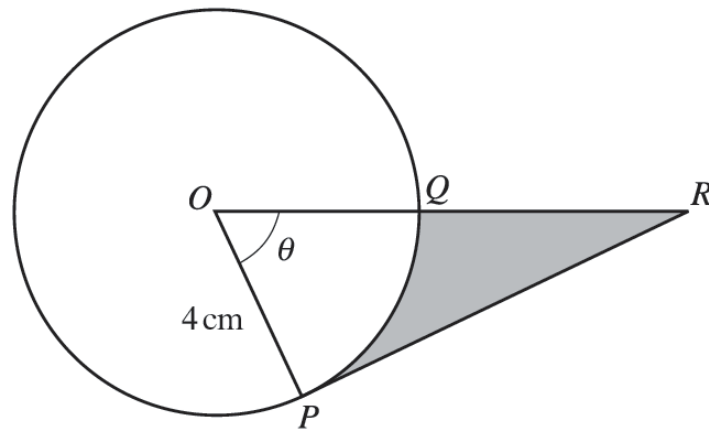


Mae'r diagram yn dangos tri phwynt P , Q ac R ar gylch â chanol O a radiws 4.8 cm.

- (a) O wybod bod $\widehat{POQ} = 0.7$ radian, darganfyddwch arwynebedd **triongl** POQ . Rhowch eich ateb yn gywir i ddau le degol. [2]
- (b) Hyd yr **arc** RQ yw L cm ac arwynebedd y **sector** ROQ yw A cm². O wybod bod $A = kL$, darganfyddwch werth k . [3]

(C2 Gaeaf 2011)

9.



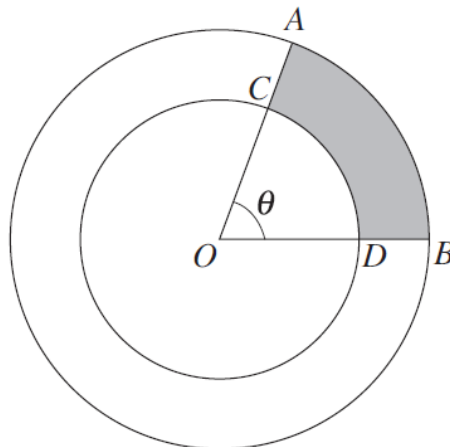
Mae'r diagram yn dangos dau bwynt P a Q ar gylch â chanol O a radiws 4 cm. Mae'r tangiad i'r cylch yn P yn croestorri'r llinell OQ wedi'i hystyng yn y pwynt R . Hyd yr arc PQ yw 5.2 cm ac mae $\widehat{POQ} = \theta$ radian.

- (a) Darganfyddwch werth θ . [2]
- (b) Cyfrifwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu, gan roi eich ateb yn gywir i un lle degol. [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2010)

10.



Mae'r diagram yn dangos dau gylch cydganol (*concentric*) â chanol cyffredin O . Radiws y cylch mwyaf yw R cm a radiws y cylch lleiaf yw r cm. Mae'r pwyntiau A a B ar y cylch mwyaf ac maent fel bod $\widehat{AOB} = \theta$ radian. Mae'r cylch lleiaf yn torri OA ac OB yn y pwyntiau C a D yn ôl eu trefn. Mae hyd arc AB yn L cm **yn fwy** na hyd arc CD . Arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu yw K cm².

- (a) (i) Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer L yn nhermau R , r a θ .
- (ii) Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer K yn nhermau R , r a θ . [2]
- (b) Defnyddiwch eich canlyniadau i ran (a) i ddarganfod mynegiad ar gyfer r yn nhermau R , K ac L . [3]

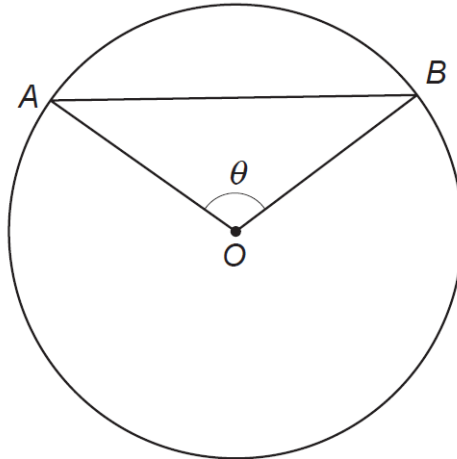
A series of horizontal dotted lines for writing.

Cwestiwn Adolygu

(Uned 3 Haf 2019)

1	2
---	---

Mae cord AB yn cynnal ongl θ radian yng nghanol cylch. Mae'r cord yn rhannu'r cylch yn ddau segment, ac mae arwynebeddau'r segmentau yn ôl y gymhareb 1 : 2.



- a) Dangoswch fod $\sin\theta = \theta - \frac{2\pi}{3}$. [4]
- b)
 - i) Dangoswch fod θ rhwng 2.6 a 2.7.
 - ii) Gan ddechrau gyda $\theta_0 = 2.6$, defnyddiwch y Dull Newton-Raphson i ddarganfod gwerth θ yn gywir i dri lle degol. [6]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

A series of horizontal dotted lines for writing.



Fformiwlâu Adiad

Trigonometreg

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

Roedd **Bhaskara** yn fathemategydd o fri o India a oedd yn byw yn y 12fed ganrif. Cyhoeddodd nifer o lyfrau, gan gynnwys y *Siddhantasiromani*, llyfr am seryddiaeth a oedd yn cynnwys y ddwy fformiwla ar y dde.

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Mae'r pecyn gwaith yma'n ystyried beth yw'r fformiwlâu ar gyfer $\sin(A \pm B)$, $\cos(A \pm B)$ a $\tan(A \pm B)$.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Onglau, trigonometreg, siapiau cyflun.
Lefel A Uned 1: Trigonometreg.

I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3:

- Fformiwlâu onglau dwbl.
- Ysgrifennu gwerthoedd ar gyfer (er enghraifft) $\sin 15^\circ$ heb ddefnyddio cyfrifiannell.

Cymwysiadau:

- Theori dirgryniad.
- Theori cylchedau trydanol.

Theori

Nid yw'r ffwythiannau trigonometreg yn ddosbarthol. Mae hyn yn golygu fod (er enghraifft) $\sin(A + B) \neq \sin A + \sin B$. Gellid profi hyn trwy ystyried $A = B = 45^\circ$:

$$\begin{aligned} \text{Ochr chwith} &= \sin(45^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin(90^\circ) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ochr dde} &= \sin 45^\circ + \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Mae $1 \neq \frac{2}{\sqrt{2}}$ felly nid yw $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$. Y fformiwla gywir ar gyfer $\sin(A + B)$ yw

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

Os yw A a B yn onglau llym, yna gellid profi'r fformiwla hon trwy ystyried y trionglau ar y dde.

Mae OPQ ag OQR yn drionglau ongl sgwâr sy'n cynnwys yr onglau A a B .

Mae RT ag SQ yn llinellau sy'n ffurfio'r onglau sgwâr $O\hat{T}R$ ag $R\hat{S}Q$.

Mae $O\hat{U}T = R\hat{U}Q$ felly mae OTU ag URQ yn drionglau cyflun.

Felly mae $U\hat{R}Q = A$.

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \frac{TR}{OR} \\ &= \frac{TS + SR}{OR} \\ &= \frac{PQ + SR}{OR} \\ &= \frac{PQ}{OR} + \frac{SR}{OR} \\ &= \frac{PQ}{OQ} \times \frac{OQ}{OR} + \frac{SR}{QR} \times \frac{QR}{OR} \end{aligned}$$

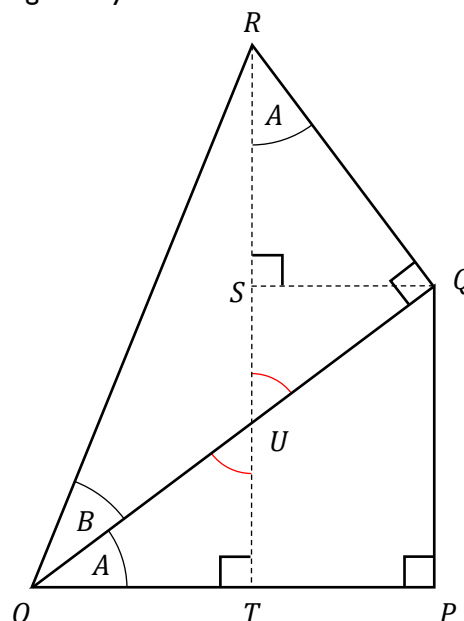
$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$



Theori



Enghraifft



Os ydym yn amnewid $-B$ yn lle B yn y fformiwla

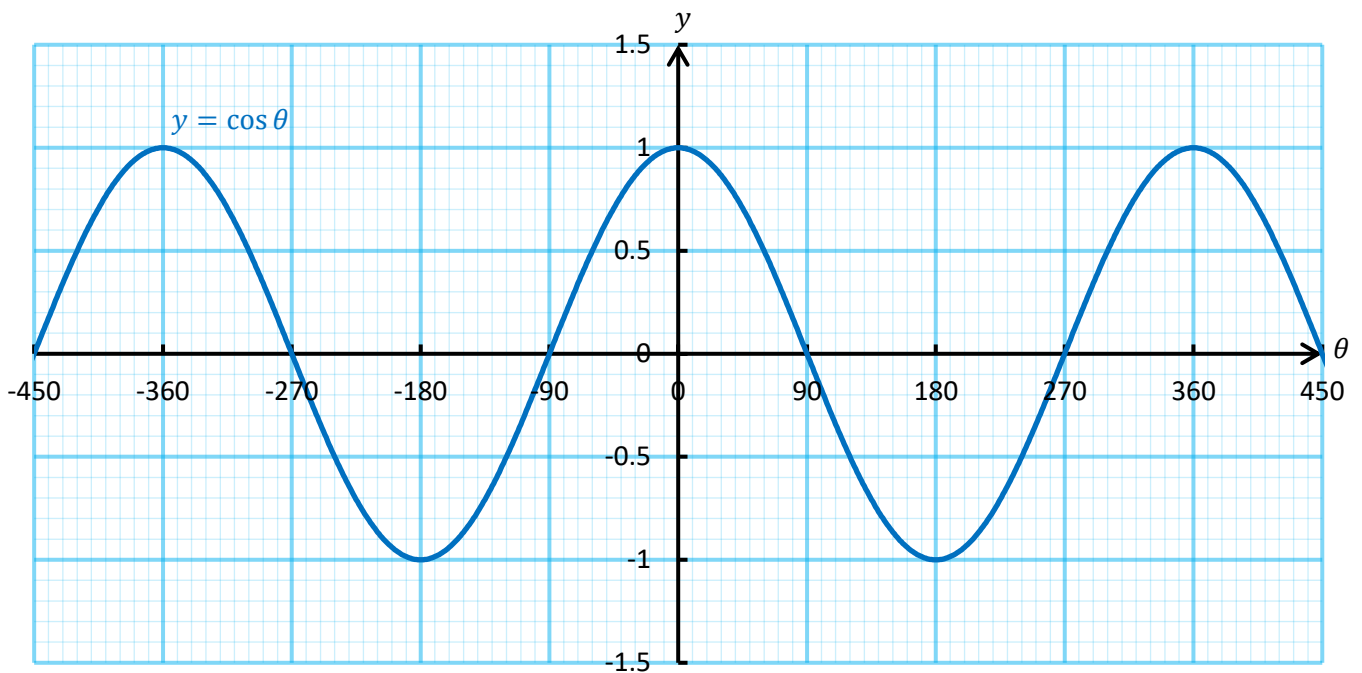
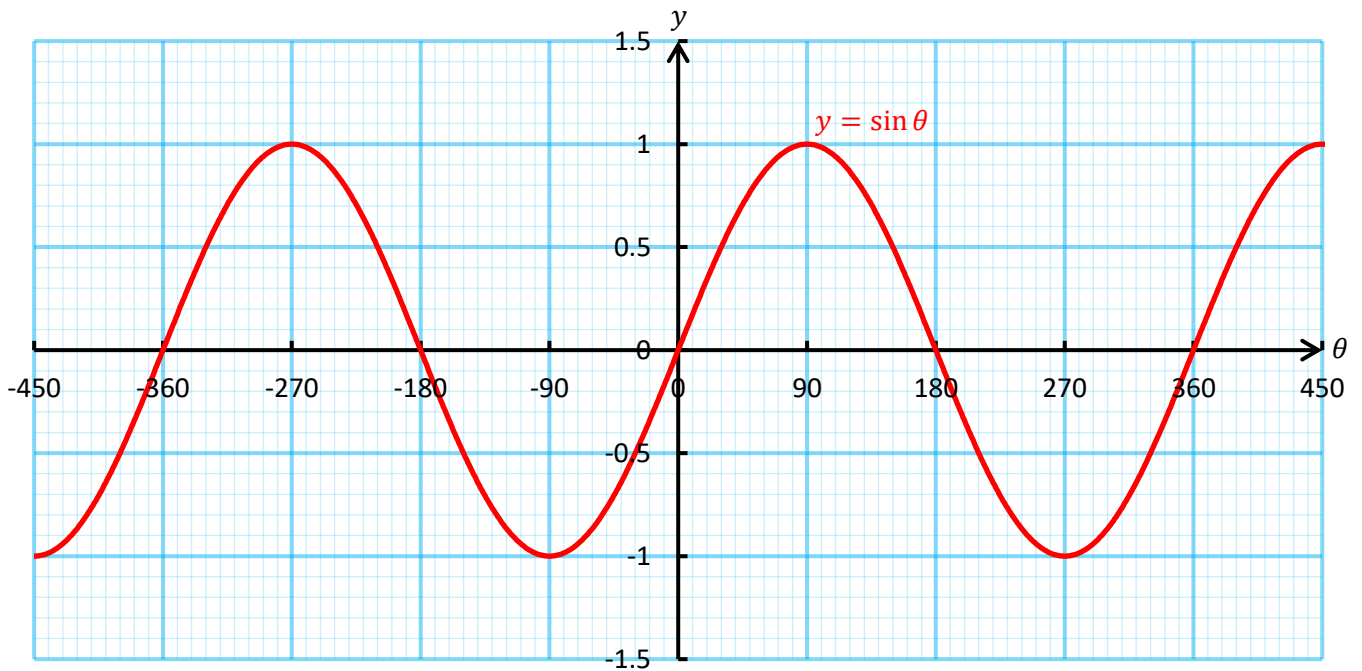
$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

cawn

$$\sin(A - B) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

Nawr trwy ystyried cymesuredd y graffiau sin a cos isod, gwelwn fod $\cos(-B) = \cos B$ a $\sin(-B) = -\sin B$. Felly

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$



Os ydym yn amnewid $\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$ yn lle A yn y fformiwla

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

cawn

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - A - B\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cos B - \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \sin B$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - A - B\right) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

(trwy'r cysylltiad rhwng graffiau sin a cos)

$$\sin(O\hat{R}T) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

(yn ystyried y triongl ORT)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - O\hat{R}T\right) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

(trwy'r cysylltiad rhwng graffiau sin a cos)

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

(yn ystyried y triongl ORT)

Yna, os ydym yn amnewid $-B$ yn lle B yn y fformiwla

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

cawn

$$\cos(A - B) = \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B)$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

(trwy ystyried cymesuredd graffiau sin a cos)

Nesaf, gan gofio bod $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, mae

$$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

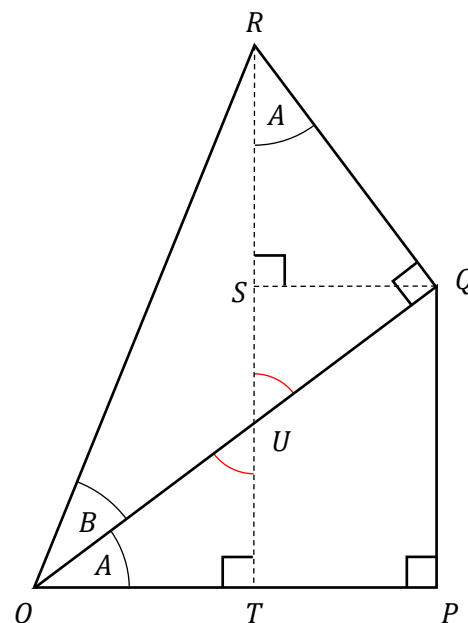
(yn defnyddio'r fformiwlaŵ gynt ar gyfer $\sin(A + B)$ a $\cos(A + B)$)

$$\tan(A + B) = \frac{\frac{\sin A \cancel{\cos B}}{\cancel{\cos A} \cancel{\cos B}} + \frac{\cancel{\cos A} \sin B}{\cancel{\cos A} \cos B}}{\frac{\cancel{\cos A} \cancel{\cos B}}{\cancel{\cos A} \cancel{\cos B}} - \frac{\sin A \sin B}{\cancel{\cos A} \cos B}}$$

(yn rhannu bob term efo $\cos A \cos B$)

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

(yn canslo ac yn defnyddio $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$)



Olaf, os ydym yn amnewid $-B$ yn lle B yn y fformiwla

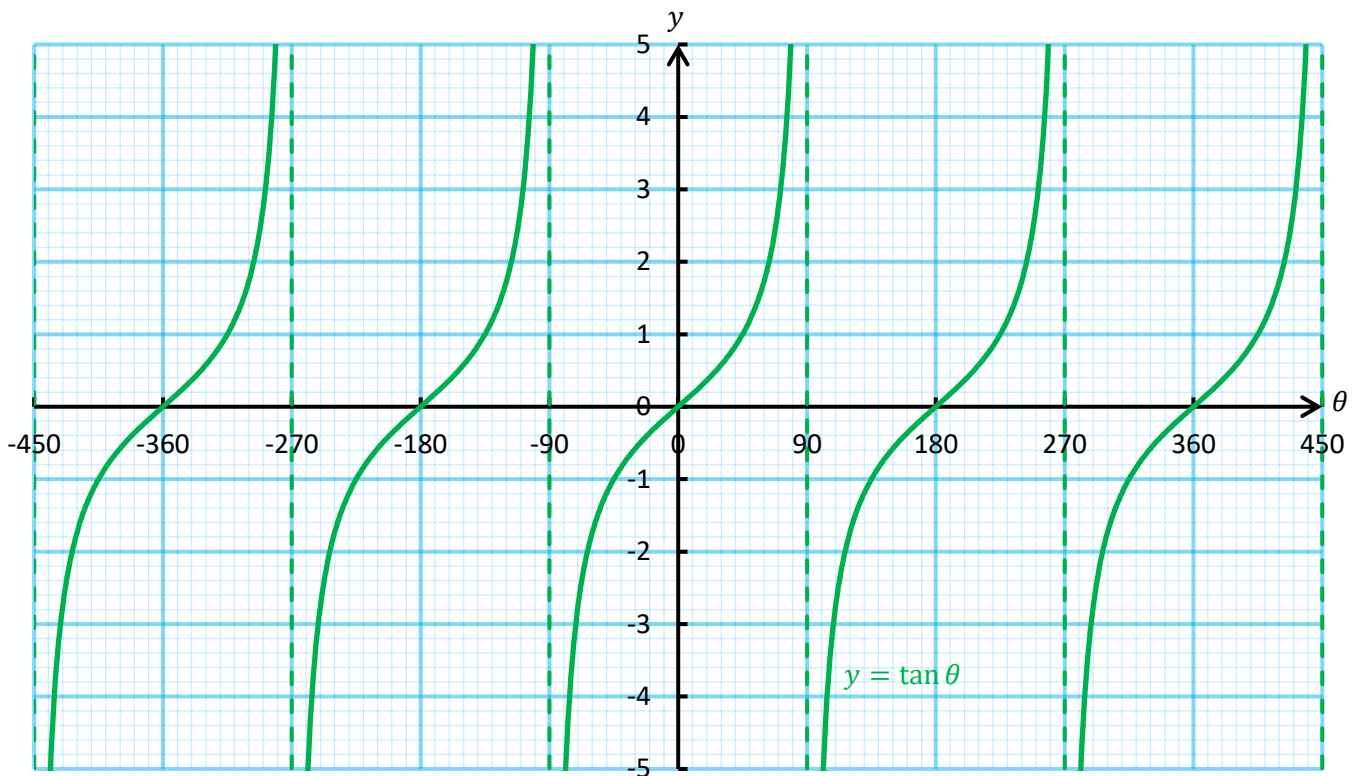
$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

cawn

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A \tan(-B)}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

(trwy gymesuredd graff tan isod, ble mae $\tan(-B) = -\tan B$)



I grynhoi:

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

Mae'r
fformiwlâu
yma'n cael eu
rhoi yn y llyfryn
fformiwlâu.



(C4 Haf 2009)

3. (a) Mynegwch $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ yn y ffurf $R\cos(\theta - \alpha)$, lle mae $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. [3]

(b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 1. \quad [4]$$

A series of horizontal dotted lines for writing the solution to the problem.

(C4 Haf 2006)

4. (a) Mynegwch $4\sin x + 3\cos x$ yn y ffurf $R\sin(x + \alpha)$, lle mae R ac α yn gysonion, gydag $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. [3]

(b) Trwy hyn, darganfyddwch werth mwyaf

$$\frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 7} \quad [2]$$



(C4 Haf 2013, Cwestiwn 3)

- (b) Mynegwch $\sqrt{15} \cos \theta - \sin \theta$ yn y ffurf $R \cos(\theta + \alpha)$, lle mae R ac α yn gysonion gydag $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
Trwy hyn, darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\sqrt{15} \cos \theta - \sin \theta = 3. \quad [6]$$

(C4 Haf 2015, Cwestiwn 3)

- (b) (i) Mynegwch $\sqrt{13}\sin\theta - 6\cos\theta$ yn y ffurf $R\sin(\theta - \alpha)$, lle mae R ac α yn gysonion gydag $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- (ii) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\sqrt{13}\sin\theta - 6\cos\theta = -4.$$

[6]

(C4 Haf 2015)

3. (a) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ sy'n bodloni

$$\tan(x + 45^\circ) = 8 \tan x.$$

[5]

(C4 Haf 2008)

3. (a) Mynegwch $3\cos x + 2\sin x$ yn y ffurf $R\cos(x - \alpha)$, lle mae R ac α yn gysonion, gydag $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. [3]

(b) Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$3\cos x + 2\sin x = 1. \quad [3]$$

(C4 Haf 2010, Cwestiwn 3)

(b) (i) Mynegwch $5 \sin x - 12 \cos x$ yn y ffurf $R \sin(x - \alpha)$, lle mae R ac α yn gysonion gydag $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

(ii) Defnyddiwch eich canlyniadau i ran (i) i ddarganfod gwerth lleiaf

$$\frac{1}{5 \sin x - 12 \cos x + 20}.$$

Ysgrifennwch werth ar gyfer x fel bod y gwerth lleiaf hwn yn digwydd.

[6]

(C4 Haf 2014, Cwestiwn 3)

- (b) (i) Mynegwch $21 \sin \theta - 20 \cos \theta$ yn y ffurf $R \sin(\theta - \alpha)$, lle mae R ac α yn gysonion gydag $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- (ii) Defnyddiwch eich canlyniadau i ran (i) i ddarganfod gwerth mwyaf

$$\frac{1}{21 \sin \theta - 20 \cos \theta + 31}.$$

Ysgrifennwch werth ar gyfer θ sy'n rhoi'r gwerth mwyaf hwn.

[6]

(C4 Haf 2012, Cwestiwn 3)

- (b) (i) Mynegwch $8 \sin x + 15 \cos x$ yn y ffurf $R \sin(x + \alpha)$, lle mae R ac α yn gysonion, gydag $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- (ii) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ sy'n bodloni $8 \sin x + 15 \cos x = 11$.
- (iii) Darganfyddwch y gwerth mwyaf posibl ar gyfer k fel bod gan $8 \sin x + 15 \cos x = k$ ddatrysiadau. Rhewch reswm dros eich ateb. [7]

(C4 Haf 2016, Cwestiwn 4)

- (b) Mynegwch $24 \cos \theta - 7 \sin \theta$ yn y ffurf $R \cos (\theta + \alpha)$, lle mae R ac α yn gysonion gydag $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Trwy hyn, darganfyddwch yr amrediad o werthoedd k lle nad oes gan yr hafaliad

$$24 \cos \theta - 7 \sin \theta = k$$

unrhyw ddatrysiadau.

[5]

(C4 Haf 2005, Cwestiwn 4)

(b) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$4\sin\theta + \cos\theta = 2,$$

gan roi eich atebion, mewn graddau, yn gywir i un lle degol.

[6]

(C4 Haf 2007)

3. Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ sy'n bodloni'r hafaliad

$$4\cos x + 2\sin x = 3.$$

[7]



(C4 Haf 2017, Cwestiwn 3)

- (b) (i) Mynegwch $\sqrt{5} \cos \phi + \sqrt{11} \sin \phi$ ar y ffurf $R \cos(\phi - \alpha)$, lle mae R a α yn gysonion gyda $R > 0$ a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.
- (ii) Defnyddiwch eich canlyniad yn rhan (i) i ddarganfod gwerth lleiaf

$$\frac{1}{\sqrt{5} \cos \phi + \sqrt{11} \sin \phi + 6}.$$

Ysgrifennwch werth ar gyfer ϕ lle mae'r gwerth lleiaf hwn yn digwydd.

[6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.



Fformiwlâu

Onglau Dwbl

$$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$

$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$$

$$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$$

$$\tan(2A) = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Mae'r pecyn gwaith yma'n ystyried beth yw'r fformiwlâu ar gyfer $\sin(2A)$, $\cos(2A)$ a $\tan(2A)$.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Lefel A Uned 1: Trigonometreg.
Lefel A Uned 3: Fformiwlâu Adiad Trigonometreg.

I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3:

- Integru ffwythiannau sy'n cynnwys (e.e.) $\sin^2(x)$.

Cymwysiadau:

- Datrys hafaliadau trigonometreg trwy ostwng pwerau'r hafaliad.

Theori

Yn y pecyn gynt, cyflwynwyd y fformiwlâu canlynol ar gyfer adiad trigonometreg:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$



Theori

Ystyriwn yn awr beth sy'n digwydd i'r fformiwlâu uchod os yw'r onglau A a B yn hafal.

$$\sin(A + A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

$$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos(A + A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$$

$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$

$$\tan(A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

$$\tan(2A) = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Mae'r fformiwlâu uchod yn cael eu hadnabod fel y fformiwlâu ar gyfer **onglau dwbl**. Yn achos y fformiwla ar gyfer $\cos(2A)$, mae'n troi allan bod defnyddio'r unfathiant $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ o'r cwrs Uned 1 yn ein helpu i ysgrifennu'r fformiwla mewn dull mwy defnyddiol.

$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$

$$\cos(2A) = (1 - \sin^2(A)) - \sin^2(A)$$

$$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$$

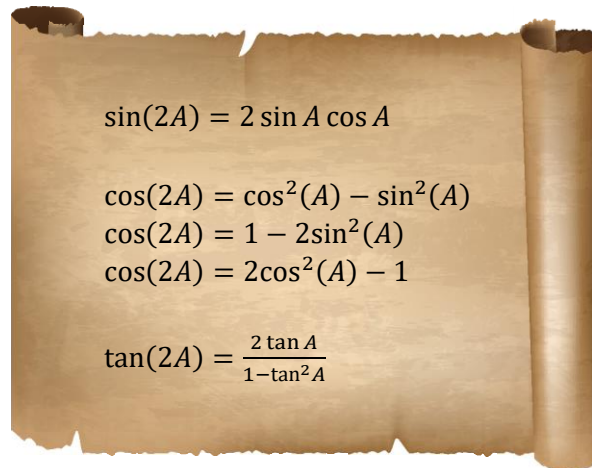
$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$$


$$\cos(2A) = \cos^2(A) - (1 - \cos^2(A))$$

$$\cos(2A) = \cos^2(A) - 1 + \cos^2(A)$$

$$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$$

Dyma grynodeb o'r fformiwlâu ar gyfer onglau dwbl. Mae angen dysgu'r rhain.



Sialens! 

Dangoswch bod hi'n bosib ysgrifennu (a) $\sin(2A) = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2(A)}$, (b) $\cos(2A) = \frac{1 - \tan^2(A)}{1 + \tan^2(A)}$.



(C4 Haf 2010)

3. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$2 \cos 2\theta = 9 \cos \theta + 7. \quad [5]$$

A series of horizontal dotted lines for writing the solution to the problem.

(C4 Haf 2011)

3. (a) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ sy'n bodloni

$$\tan 2x = 4 \tan x.$$

[5]



(C4 Haf 2005)

4. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\sin 2\theta = \cos \theta.$$

[4]

(C4 Haf 2009)

2. Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni $3\sin 2\theta = 2\sin \theta$. [5]

(C4 Haf 2006)

3. Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$2 + 3\cos 2\theta = \cos \theta.$$

[6]

(C4 Haf 2012)

3. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$4 \cos 2\theta = 1 - 2 \sin \theta. \quad [6]$$

(C4 Haf 2013)

3. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$8 \cos 2\theta + 6 = \cos^2 \theta + \cos \theta. \quad [6]$$

(C4 Haf 2014)

3. (a) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ sy'n bodloni

$$\tan 2x = 3 \cot x.$$

[4]

(C4 Haf 2019)

3. (a) O wybod bod $\theta \neq 90^\circ$, darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ sy'n bodloni

$$5 \tan 2\theta = 8 \cot \theta.$$

Rhowch eich atebion mewn graddau, yn gywir i ddau le degol.

[4]

(C4 Haf 2018)

3. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$2 \cos 2\theta = 3 \sin^2\theta - 5 \cos^2\theta + \cos \theta + 1. \quad [6]$$

(C4 Haf 2017)

3. (a) Dangoswch fod yr hafaliad

$$5 \cos^2 \theta + 7 \sin 2\theta = 3 \sin^2 \theta$$

yn gallu cael ei ailysgrifennu ar y ffurf

$$a \tan^2 \theta + b \tan \theta + c = 0,$$

Ile mae a, b, c yn gysonion sydd ddim yn sero ac sydd â'u gwerthoedd i'w darganfod. Trwy hyn, darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ sy'n bodloni'r hafaliad

$$5 \cos^2 \theta + 7 \sin 2\theta = 3 \sin^2 \theta.$$

[6]

(C4 Haf 2016)

4. (a) Mae ongl x fel bod $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, $x \neq 90^\circ$.

O wybod bod x yn bodloni'r hafaliad $3 \tan 2x + 16 \cot^2 x = 0$,

(i) dangoswch fod $3 \tan^3 x - 8 \tan^2 x + 8 = 0$,

(ii) darganfyddwch bob gwerth posibl x , gan roi pob ateb mewn graddau, yn gywir i un lle degol. [8]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Cwestiwn Adolygu

(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol, Cwestiwn 8)

(b) Defnyddiwch amnewidiad priodol i ddangos bod

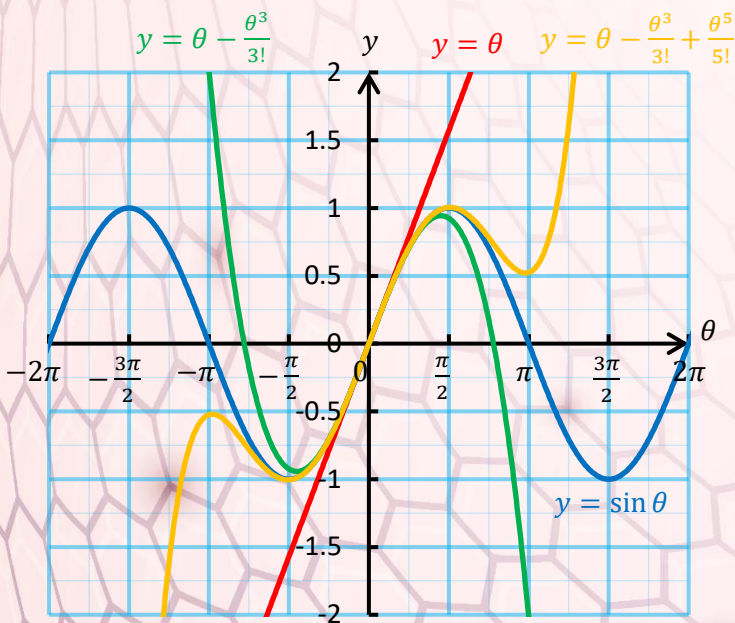
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad [8]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

Brasamcanion

Onglau Bach



$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots$$

$$\tan(\theta) = \theta + \frac{2\theta^3}{3!} + \frac{16\theta^5}{5!} + \frac{272\theta^7}{7!} + \dots$$

Mae'r brasamcanion onglau bach yn defnyddio rhan o'r **cyfresi Taylor** ar gyfer sin, cos a tan.

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Os oes gennych ongl θ sydd ddigon bach, yna mae'n bosib defnyddio mynegiadau amgen ar gyfer $\sin \theta$, $\cos \theta$ a $\tan \theta$, rhai sydd ddim angen cyfrifiannell i'w cyfrifo.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Trigonometreg, arwynebedd sector, anhafaleddau.
Lefel A Uned 3: Mesur onglau mewn radianau, fformiwlaau adiad trigonometreg.

I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3:

- Differu $\sin \theta$ a $\cos \theta$ o egwyddorion sylfaenol.

Cymwysiadau:

- Mesur y pellter i'r sêr.
- Y rheol "un mewn 60" wrth hedfan.

Theori



Theori

Os oes gennym ongl fach, ac os yw'r ongl yn cael ei fesur mewn **radianau**, yna gellir defnyddio'r brasamcanion canlynol.

$$\sin \theta \approx \theta$$

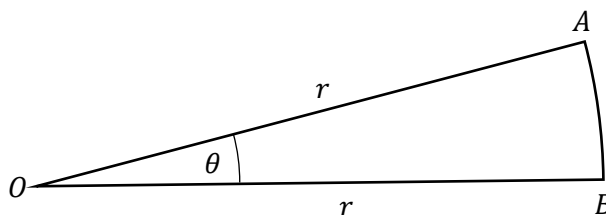
$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\tan \theta \approx \theta$$

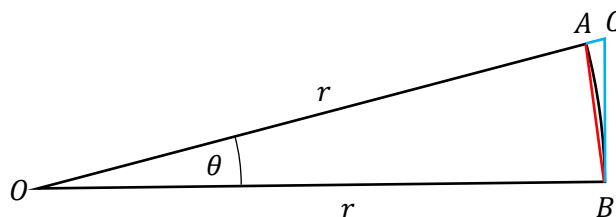
Mae'r brasamcanion yn gywir i dri ffigur ystyrion os yw $-0.115 < \theta < 0.115$ (tua $-6.6^\circ < \theta < 6.6^\circ$), ac yn gywir i ddau ffigur ystyrion os yw $-0.241 < \theta < 0.241$ (tua $-13.8^\circ < \theta < 13.8^\circ$). Y brasamcan \cos yw'r un mwyaf manwl gywir, a'r un tan yr un lleiaf manwl gywir.

Prawf sin

Gadewch i ongl fach θ (mewn radianau) ffurfio sector o gyloch OAB . Arwynebedd y sector yw $\frac{1}{2}r^2\theta$.



Gadewch i ni ychwanegu'r **cord AB** ag **ymestyn** y radiws OA i gyrraedd y pwynt C fel bod OB a BC yn berpendicwlar.



Mae OCB yn driongl ongl sgwâr efo sail r ag uchder $r \tan \theta$.

Arwynebedd triongl OCB yw $\frac{1}{2}r^2 \tan \theta$.

Arwynebedd y triongl isosgeles OAB yw $\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$.

Trigonometreg
TGAU

Mae arwynebedd **triangl** OAB < arwynebedd sector OAB < arwynebedd **triangl** OCB

$$\frac{1}{2}r^2 \sin \theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2 \tan \theta$$

Gallwn rannu efo $\frac{1}{2}r^2$ gan ei fod o hyd yn bositif.

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

Gan fod θ yn ongl fach bositif, mae $\sin \theta$ yn bositif. Felly gallwn rannu'r anhafaledd efo $\sin \theta$.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta} < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{\tan \theta}{\sin \theta}$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta}$$

$$1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \sec \theta$$

Fel mae θ yn agosau at 0, mae $\sec \theta$ yn agosau at 1 (edrychwch ar y graffiau ar y dde).

Felly, wrth i θ agosau at 0, mae $\frac{\theta}{\sin \theta}$ yn gorwedd rhwng 1 a rhif sy'n agosau at 1.

Felly, wrth i θ agosau at 0, mae $\frac{\theta}{\sin \theta}$ yn agosau at 1.

Mae hyn yn golygu bod $\sin \theta \approx \theta$ ar gyfer gwerthoedd bach o θ .

Prawf tan

Mae'r prawf ar gyfer tan yn debyg iawn i'r prawf ar gyfer sin. Rydym yn dilyn union yr un camau nes cyrraedd yr anhafaledd

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta$$

Yna, rydym yn rhannu efo $\tan \theta$ (yn lle $\sin \theta$):

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} < \frac{\theta}{\tan \theta} < \frac{\tan \theta}{\tan \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} < \frac{\theta}{\tan \theta} < 1$$

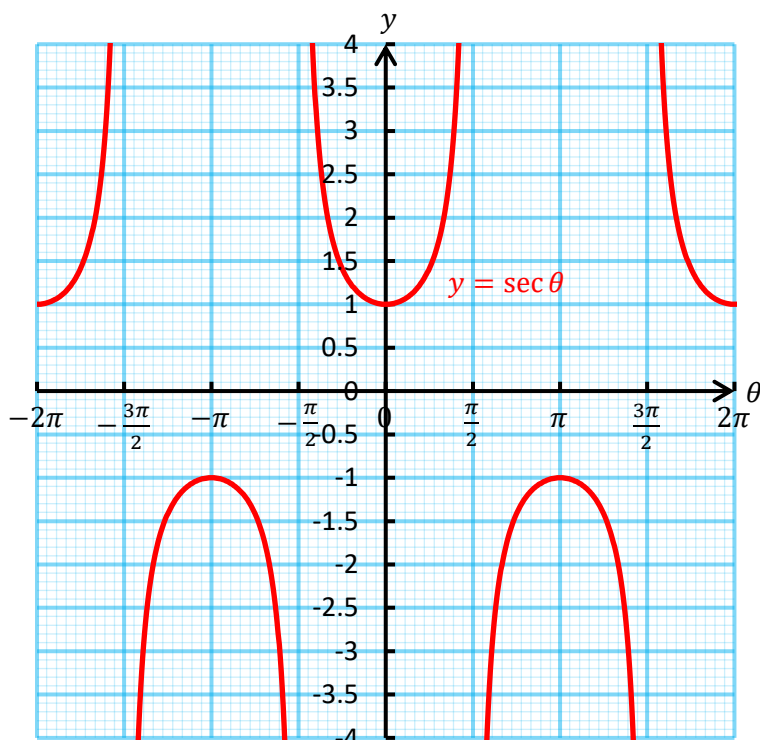
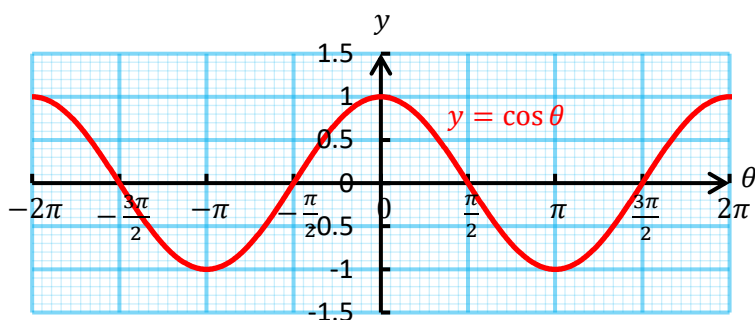
$$\cos \theta < \frac{\theta}{\tan \theta} < 1$$

Fel mae θ yn agosau at 0, mae $\cos \theta$ yn agosau at 1 (edrychwch ar y graff ar y dde).

Felly, wrth i θ agosau at 0, mae $\frac{\theta}{\tan \theta}$ yn gorwedd rhwng rhif sy'n agosau at 1 ag 1.

Felly, wrth i θ agosau at 0, mae $\frac{\theta}{\tan \theta}$ yn agosau at 1.

Mae hyn yn golygu bod $\tan \theta \approx \theta$ ar gyfer gwerthoedd bach o θ .



Prawf cos

Rydym yn defnyddio'r unfathiant ongl ddwbl $\cos 2\theta \equiv 1 - 2\sin^2\theta$ i ddarganfod y brasamcan ar gyfer cos.

Yn yr unfathiant, rydym yn haneru'r onglau, fel bod 2θ yn newid i fod yn θ , a θ yn newid i fod yn $\frac{\theta}{2}$.

$$\cos \theta \equiv 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

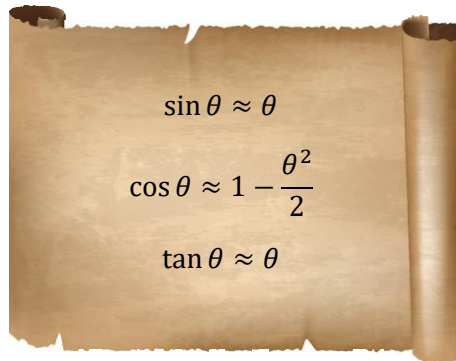
Os yw $\frac{\theta}{2}$ yn ongl fach, yna gallwn ddefnyddio'r brasamcan $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta}{2}$, fel bod

$$\cos \theta \approx 1 - 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

Crynodeb

Os yw θ yn ongl fach, yna



Ymarfer 1

Os yw θ yn ongl fach, darganfyddwch frasamcan ar gyfer y mynegiad $\frac{\sin 3\theta}{1+\cos 2\theta}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

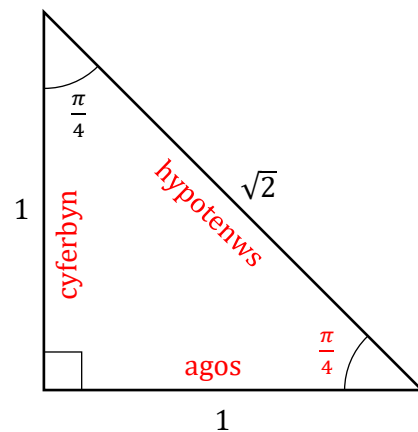
.....

Union Werthoedd

Ystyriwch driongl ongl sgwâr ble mae hyd yr ochrau byrraf yn 1 uned.

Mae'n bosib defnyddio'r triongl yma i gyfrifo union werthoedd sin, cos a tan ar gyfer yr ongl $\frac{\pi}{4}$ (sef 45°).

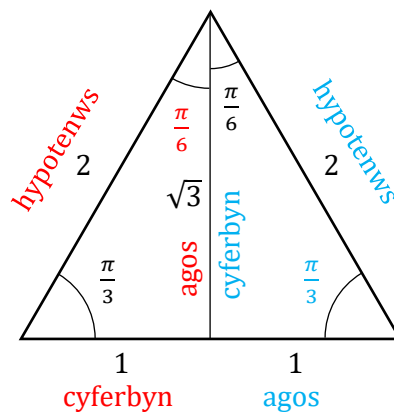
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} & \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$



Nesaf ystyriwch driongl hafalochrog ble mae hyd yr ochrau yn 2 uned.

Trwy hollti'r triongl yma yn ei hanner, mae'n bosib cyfrifo union werthoedd sin, cos a tan ar gyfer yr onglau $\frac{\pi}{6}$ (sef 30°) a $\frac{\pi}{3}$ (sef 60°).

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} & \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} & \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} & \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} \end{aligned}$$



Crynodeb

	sin	cos	tan
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$ (neu 30°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$ (neu 45°)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$ (neu 60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$ (neu 90°)	1	0	Heb ei ddiffinio

Gellir ffeindio gwerth sin, cos a tan ar gyfer lluosrifau gwahanol o $\frac{\pi}{6}$ (neu 30°) trwy ddefnyddio **cymesuredd graffiau** sin, cos a tan.

Ymarfer 2

Os yw θ yn ongl fach, dangoswch fod $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \approx \frac{1+\theta}{1-\theta}$.

Ymarfer 3

Os yw θ yn ddigon bach fel y gallwch anwybyddu θ^2 , dangoswch fod $4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \approx 2\sqrt{2}(1 - \theta)$.

Ymarfer 4

O wybod bod $1^\circ \approx 0.017$ radian, darganfyddwch werthoedd ar gyfer y canlynol heb ddefnyddio'r ffwythiannau trigonometreg ar eich cyfrifiannell.

(a) $\tan(61^\circ)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) $\sin(29^\circ)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

1. Darganfyddwch werth positif bach ar gyfer x sy'n ddatrysiad bras i'r hafaliad.

$$\cos x - 4 \sin x = x^2.$$

[4]

(Uned 3 Haf 2018)

0	7
---	---

 Defnyddiwch frasamcanion ongl fach i ddarganfod gwreiddyn negatif bach yr hafaliad

$$\sin x + \cos x = 0.5.$$

[3]

(Uned 3 Haf 2024)

12. (a) O wybod bod θ yn fach, dangoswch fod $2\cos\theta + \sin\theta - 1 \approx 1 + \theta - \theta^2$. [2]

(Edexcel Pure Mathematics I [9MA0/01] Haf 2018)

1. Given that θ is small and is measured in radians, use the small angle approximations to find an approximate value of

$$\frac{1 - \cos 4\theta}{2\theta \sin 3\theta}$$

(3)

(Edexcel Pure Mathematics I [9MA0/01] Haf 2023)

4. **In this question you must show all stages of your working.**

Solutions relying entirely on calculator technology are not acceptable.

The curve C has equation $y = f(x)$ where $x \in \mathbb{R}$

Given that

- $f'(x) = 2x + \frac{1}{2} \cos x$
- the curve has a stationary point with x coordinate α
- α is small

(a) use the small angle approximation for $\cos x$ to estimate the value of α to 3 decimal places.

(3)



(Uned 3 Haf 2019)

0	9
---	---

a) O wybod bod α a β yn ddwy ongl fel bod $\tan\alpha = 2\cot\beta$, dangoswch fod

$$\tan(\alpha + \beta) = -(\tan\alpha + \tan\beta). \quad [2]$$

(Uned 3 Haf 2022)

1	7
---	---

 a) Profwch fod

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \equiv (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta). \quad [2]$$

b) i) Trwy hyn dangoswch ei bod yn bosibl mynegi $\frac{\cos 3\theta + \sin 5\theta}{\cos 4\theta + \sin 4\theta}$ fel $\cos \theta + \sin \theta$.

ii) Esboniwch pam mae $\frac{\cos 3\theta + \sin 5\theta}{\cos 4\theta + \sin 4\theta} \neq \cos \theta + \sin \theta$ pan mae $\theta = \frac{3\pi}{16}$. [3]

(Uned 3 Haf 2023)

0	6
---	---

- a) Gan ddefnyddio'r unfathiant trigonometrig $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, dangoswch mai **union** werth $\cos 75^\circ$ yw $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. [3]

(Edexcel Pure Mathematics I [9MA0/01] Haf 2022)

14. In this question you must show all stages of your working.**Solutions relying entirely on calculator technology are not acceptable.**

(a) Given that

$$2 \sin(x - 60^\circ) = \cos(x - 30^\circ)$$

show that

$$\tan x = 3\sqrt{3} \quad (4)$$

(b) Hence or otherwise solve, for $0 \leq \theta < 180^\circ$

$$2 \sin 2\theta = \cos(2\theta + 30^\circ)$$

giving your answers to one decimal place.

(4)

A series of horizontal dotted lines for writing.



Uned 3, Pecyn 10

13

Cyfresi

Rhifyddol

Roedd **Carl Friedrich Gauss** yn fathemategwr enwog o'r Almaen. Yn ei ysgol gynradd, rhyfeddodd ei athro trwy adio'r rhifau rhwng 1 a 100 yn gyflym.



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

O gael dilyniant rhyfddol ble rydym yn adio'r un rhif i gael y rhif nesaf, sut mae'n bosib darganfod yr n fed term, neu swm yr n term cyntaf?

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Datrys hafaliadau, n fed term.
Lefel A Uned I: Datrys hafaliadau cydamserol.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau:

- Cyllid: Benthg a buddsoddi arian.
- Astudio sut mae poblogaethau yn newid.
- Rheoli amser mewn prosiectau mawr.

Theori

Mae cyfres o rifau yn **gyfres rifyddol** os ydym yn adio'r un cysonyn i gael y rhif nesaf yn y gyfres. Er enghraifft, mae'r gyfres 5, 8, 11, 14, 17, ... yn gyfres rifyddol ble mae'r term cyntaf yn 5 ac mae'r gwahaniaeth cyffredin yn 3.

Terminoleg

a	Term cyntaf y gyfres
d	Y gwahaniaeth cyffredin
l	Term olaf y gyfres, os oes un yn bodoli
t_n	n fed term y gyfres



Theori

Ar gyfer cyfres rifyddol efo term cyntaf a a gwahaniaeth cyffredin d :

Term cyntaf:	$t_1 = a$
Ail derm:	$t_2 = a + d$
Trydydd term:	$t_3 = a + 2d$
Pedwerydd term:	$t_4 = a + 3d$

Nfed term: $t_n = a + (n - 1)d$

Ar gyfer pob cyfanrif n ,

$$d = t_{n+1} - t_n$$

Ymarfer I

Ar gyfer y gyfres rifyddol 9, 14, 19, 24, 29, ..., ysgrifennwch

- | | |
|-----------------|------------------|
| (a) a | (b) d |
| (c) t_7 | (ch) t_n |

Mae'n bosib ystyried cyfanswm yr n term cyntaf mewn cyfres rifyddol, sy'n cael ei ysgrifennu fel S_n .

Ar gyfer y gyfres rifyddol 5, 8, 11, 14, 17,

$$S_3 = 5 + 8 + 11 = 24$$

$$S_6 = 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 = 75$$

Mae angen dysgu'r prawf ar gyfer cyfrifo S_n .

1

Profwch mai swm n term cyntaf cyfres rifyddol efo term cyntaf a a gwahaniaeth cyffredin d yw

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + l).$$

Prawf

Gadewch i ni ysgrifennu termau'r gyfres mewn trefn ac yna mewn trefn wrthdro.

$$\begin{aligned} S_n &= t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-1} + t_n \\ S_n &= t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \dots + t_2 + t_1 \end{aligned}$$

Trwy adio'r uchod cawn

$$S_n + S_n = (t_1 + t_n) + (t_2 + t_{n-1}) + (t_3 + t_{n-2}) + \dots + (t_{n-1} + t_2) + (t_n + t_1).$$

Mae pob un o'r mynegiadau mewn cromfachau'r un peth â $t_1 + t_n$. Er enghraifft, mae

$$t_2 + t_{n-1} = (t_1 + d) + (t_n - d) = t_1 + t_n, \text{ ac mae}$$

$$t_3 + t_{n-2} = (t_1 + 2d) + (t_n - 2d) = t_1 + t_n.$$

$$\text{Felly mae } 2S_n = \underbrace{(t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + \dots + (t_1 + t_n)}_{n \text{ gwaith}}$$

$$2S_n = n(t_1 + t_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(t_1 + t_n).$$

Ond t_1 yw term cyntaf a y gyfres rifyddol a t_n yw term olaf l y gyfres rifyddol, felly $S_n = \frac{1}{2}n(a + l)$.**QED**

2

Profwch mai swm n term cyntaf cyfres rifyddol efo term cyntaf a a gwahaniaeth cyffredin d yw

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)d).$$

Prawf

Gadewch i ni ysgrifennu termau'r gyfres mewn trefn ac yna mewn trefn wrthdro.

$$\begin{aligned} S_n &= t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-1} + t_n \\ S_n &= t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \dots + t_2 + t_1 \end{aligned}$$

Trwy adio'r uchod cawn

$$S_n + S_n = (t_1 + t_n) + (t_2 + t_{n-1}) + (t_3 + t_{n-2}) + \dots + (t_{n-1} + t_2) + (t_n + t_1).$$

Mae pob un o'r mynegiadau mewn cromfachau'r un peth â $t_1 + t_n$. Er enghraifft, mae

$$t_2 + t_{n-1} = (t_1 + d) + (t_n - d) = t_1 + t_n, \text{ ac mae}$$

$$t_3 + t_{n-2} = (t_1 + 2d) + (t_n - 2d) = t_1 + t_n.$$

$$\text{Felly mae } 2S_n = \underbrace{(t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + \dots + (t_1 + t_n)}_{n \text{ gwaith}}$$

$$2S_n = n(t_1 + t_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(t_1 + t_n).$$

Ond n fed term cyfres rifyddol yw $t_n = a + (n - 1)d$, felly

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + (a + (n - 1)d))$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n - 1)d).$$

QED



(C2 Gaeaf 2005)

5. Mewn cyfres rifyddol, swm y term cyntaf a'r pumed term yw sero. Y trydydd term ar ddeg yw 20.

(a) Darganfyddwch derm cyntaf a gwahaniaeth cyffredin y gyfres. [5]

(b) Cyfrifwch swm ugain term cyntaf y gyfres. [2]

A series of horizontal dotted lines provided for writing the solution to the problem.

Y 10 Uchaf

(C2 Gaeaf 2006)

5. Swm dau derm cyntaf cyfres rifyddol yw 3. Wythfed term y gyfres rifyddol yw 47.

Darganfyddwch

(a) term cyntaf a gwahaniaeth cyffredin y gyfres, [4]

(b) swm ugain term cyntaf y gyfres. [2]

(C2 Gaeaf 2009)

4. (a) Trydydd term ar ddeg cyfres rifyddol yw 51. Mae nawfed term y gyfres bum gwaith yr ail term. Darganfyddwch term cyntaf a gwahaniaeth cyffredin y gyfres rifyddol. [5]
- (b) Term cyntaf cyfres rifyddol arall yw 5 a'r ugeinfed term yw 62. Darganfyddwch swm ugain term cyntaf y gyfres rifyddol hon. [2]

(C2 Haf 2006)

4. (a) Term cyntaf cyfres rifyddol yw a a'r gwahaniaeth cyffredin yw d . Profwch y rhoddir swm yr n term cyntaf gan

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]. \quad [3]$$

- (b) Swm ugain term cyntaf cyfres rifyddol yw 540 a swm tri deg term cyntaf y gyfres yw 1260.

(i) Darganfyddwch derm cyntaf a gwahaniaeth cyffredin y gyfres.

(ii) Cyfrifwch **50ed term** y gyfres. [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2008)

3. (a) Term cyntaf cyfres rifyddol yw a a'r gwahaniaeth cyffredin yw d . Profwch y rhoddir swm n term cyntaf y gyfres gan

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]. \quad [3]$$

- (b) Darganfyddwch fynegiad, yn nhermau n , ar gyfer swm n term cyntaf y gyfres rifyddol

$$1 + 3 + 5 + \dots$$

Symleiddiwch eich ateb. [2]

- (c) Ugeinfed term cyfres rifyddol yw 98 a swm ugain term cyntaf y gyfres yw 1010. Darganfyddwch derm cyntaf a gwahaniaeth cyffredin y gyfres. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2010)

5. (a) Term cyntaf cyfres rifyddol yw a a'r gwahaniaeth cyffredin yw d . Profwch y caiff swm n term cyntaf y gyfres ei roi gan

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]. \quad [3]$$

- (b) Term cyntaf cyfres rifyddol yw 4 a'r gwahaniaeth cyffredin yw 2. Swm n term cyntaf y gyfres rifyddol yw 460. Ysgrifennwch hafaliad y mae n yn ei fodloni. Trwy hyn, darganfyddwch werth n . [3]
- (c) Pumed term cyfres rifyddol arall yw 9. Swm chweched term a degfed term y gyfres hon yw 42. Darganfyddwch derm cyntaf a gwahaniaeth cyffredin y gyfres rifyddol. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2011)

4. (a) Swm pymtheg term cyntaf cyfres rifyddol yw 780. Swm ail, pedwerydd a degfed term y gyfres yw 100. Darganfyddwch derm cyntaf a gwahaniaeth cyffredin y gyfres. [5]
- (b) Mae p fed term cyfres rifyddol arall yn hafal i 1023. Mae $(p + 4)$ fed term y gyfres hon yn hafal i 1059. Darganfyddwch $(p + 7)$ fed term y gyfres. [3]

(C2 Gaeaf 2013)

4. (a) Term cyntaf cyfres rifyddol yw 1 a'r gwahaniaeth cyffredin yw 4.

(i) Dangoswch mai n fed term y gyfres rifyddol yw $4n - 3$.

(ii) Mae swm n term cyntaf y gyfres hon wedi'i roi gan

$$S_n = 1 + 5 + \dots + (4n - 7) + (4n - 3).$$

Profwch o egwyddorion sylfaenol, heb ddefnyddio'r fformiwla ar gyfer swm yr n term cyntaf, fod

$$S_n = n(2n - 1). \quad [4]$$

(b) Swm deg term cyntaf cyfres rifyddol arall yw 55. Swm pedwerydd, seithfed a nawfed term y gyfres yw 27. Darganfyddwch derm cyntaf a gwahaniaeth cyffredin y gyfres rifyddol hon. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2016)

4. (a) Mae Gwilym wedi penderfynu rhedeg mewn ras hanner marathon. Er mwyn bod yn ffit, mae'n llunio rhaglen hyfforddi sy'n golygu ei fod yn rhedeg o amgylch ei drac lleol bob dydd, gan gynyddu'n raddol y pellter mae'n rhedeg o ddydd i ddydd. Ar y diwrnod cyntaf, mae e'n rhedeg 6 lap o'r trac ac ar ôl hynny, ar unrhyw ddiwrnod penodol, mae e'n rhedeg 2 lap yn bellach na'r diwrnod cynt.

- (i) Sawl lap mae e'n eu rhedeg ar 20fed diwrnod ei raglen?
- (ii) Ar ôl sawl diwrnod bydd cyfanswm nifer y lapiau a redodd ers dechrau ei raglen hyfforddi yn hafal i 750? [6]

- (b) Mae n fed term cyfres rifyddol yn cael ei ddynodi gan t_n . Rydym yn gwybod bod

$$t_{12} + t_{13} = 50.$$

- (i) **Ysgrifennwch** werth $t_{11} + t_{14}$. [1]
- (ii) **Darganfyddwch** swm 24 term cyntaf y gyfres rifyddol hon. [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2024)

7. Gan ddangos eich holl waith cyfrifo, enrhifwch

(a)
$$\sum_{r=3}^{50} (4r + 5),$$

[4]



Cwestiynau Adolygu

(Uned 3 Haf 2018)

0	8
---	---

 Darganfyddwch saith rhif sydd mewn dilyniant rhifyddol fel bod y term olaf yn 71 a swm yr holl rifau yw 329. [5]

Area with horizontal dotted lines for writing the answer.

(C2 Haf 2018)

4. Mae Dafydd yn gwneud cytundeb â chwmni cyllid (*finance*) i roi benthychiad iddo i brynu car. Yn ôl telerau'r cytundeb, mae'n rhaid iddo ad-dalu cyfanswm o £3900 dros gyfnod o ddwy flynedd drwy wneud 24 ad-daliad (*repayments*) misol. Mae'r ad-daliad cyntaf yn £ P , ac ym mhob mis dilynol, mae gwerth yr ad-daliad ar gyfer y mis hwnnw £ x **yn llai** na'r ad-daliad ar gyfer y mis blaenorol. O wybod bod wythfed ad-daliad Dafydd yn £185, darganfyddwch werth P a gwerth x . [5]



Cyfresi

Geometrig

An infinite number of mathematicians walk into a bar. The first one orders a drink, the second one orders half a drink, the third one wants a quarter of a drink, and the next one wants just $\frac{1}{8}$ th. The bartender sees where this is going, and stops them before anyone else can order. The bartender pours two drinks, hands them over, and says "you mathematicians should really know your limits".



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

O gael dilyniant geometrig ble rydym yn lluosio'r un rhif i gael y rhif nesaf, sut mae'n bosib darganfod yr n fed term, neu swm yr n term cyntaf?

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Datrys hafaliadau, n fed term.
Lefel A Uned I: Datrys hafaliadau cydamserol, logarithmau.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau:

- Cyfradd ehangiad y bydysawd.
- Dadfeiliad ymbelydrol.
- Adlog.

Theori

Mae cyfres o rifau yn **gyfres geometrig** os ydym yn lluosio efo'r un cysonyn i gael y rhif nesaf yn y gyfres. Er enghraifft, mae'r gyfres 3, 6, 12, 24, 48, ... yn gyfres geometrig ble mae'r term cyntaf yn 3 ac mae'r gymhareb gyffredin yn 2.

Terminoleg

- a Term cyntaf y gyfres
- r Y gymhareb gyffredin
- l Term olaf y gyfres, os oes un yn bodoli
- t_n n fed term y gyfres



Theori

Ar gyfer cyfres geometrig efo term cyntaf a a chymhareb gyffredin r :

- Term cyntaf: $t_1 = a$
- Ail derm: $t_2 = ar$
- Trydydd term: $t_3 = ar^2$
- Pedwerydd term: $t_4 = ar^3$
- Nfed term: $t_n = ar^{n-1}$

Ar gyfer pob cyfanrif n ,

$$r = \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

Ymarfer I

Ar gyfer y gyfres geometrig 2, 6, 18, 54, 162, ..., ysgrifennwch

- (a) a
- (b) r
- (c) t_7
- (ch) t_n

Mae'n bosib ystyried cyfanswm yr n term cyntaf mewn cyfres geometrig, sy'n cael ei ysgrifennu fel S_n .

Ar gyfer y gyfres geometrig 3, 6, 12, 24, 48, ...

$$S_3 = 3 + 6 + 12 = 21$$

$$S_6 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$$

Mae angen dysgu'r prawf ar gyfer cyfrifo S_n .

Profwch mai swm n term cyntaf cyfres geometrig efo term cyntaf a a chymhareb gyffredin r yw

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Prawf

Term 1af: $t_1 = a$

2il Derm: $t_2 = ar$

Nfed Term: $t_n = ar^{n-1}$

Swm yr n term cyntaf:

$$S_n = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n$$

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \text{--- ①}$$

Lluosi efo r :

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad \text{--- ②}$$

Yn gwneud ① - ②:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

QED

Swm i Anfeidredd

Os yw $|r| < 1$, yna mae'n bosib ystyried cyfanswm S_∞ holl dermau cyfres geometrig.

Prawf

Os yw $|r| < 1$ (fel bod $-1 < r < 1$), yna bydd r^n yn dod yn fwy ac yn fwy agos at 0 wrth i n gynyddu.

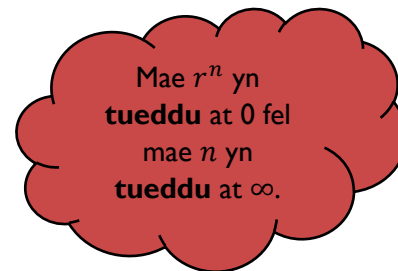
Dywedwn bod $r^n \rightarrow 0$ fel mae $n \rightarrow \infty$.

Felly, os yw $|r| < 1$, mae

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_n \rightarrow \frac{a(1 - 0)}{1 - r}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$



Ymarfer 2

Darllenwch y jôc ar glawr y pecyn.

Mae'r jôc yn disgrifio cyfres geometrig ble mae $a = 1$ ac $r = \frac{1}{2}$. Ysgrifennwch

(a) t_6

(b) S_6

(c) S_∞



(C2 Haf 2005)

4. Swm dau derm cyntaf cyfres geometrig yw $6 \cdot 4$, a swm i anfeidredd y gyfres yw 10.
- (a) O wybod bod y gymhareb gyffredin yn bositif, darganfyddwch ei gwerth. [5]
- (b) Darganfyddwch, yn gywir i dri lle degol, swm un term ar ddeg cyntaf y gyfres. [3]

(C2 Gaeaf 2011)

5. (a) Ail derm cyfres geometrig yw 6 a'r pumed term yw 384.
- (i) Darganfyddwch gymhareb gyffredin y gyfres.
 - (ii) Darganfyddwch swm wyth term cyntaf y gyfres geometrig. [6]
- (b) Term cyntaf cyfres geometrig arall yw 5 a'r gymhareb gyffredin yw 1·1.
- (i) *n*fed term y gyfres hon yw 170, yn gywir i'r cyfanrif agosaf. Darganfyddwch werth *n*.
 - (ii) Mae Dafydd wedi bod yn defnyddio ei gyfrifiannell i ymchwilio i wahanol nodweddion y gyfres geometrig hon ac mae'n honni mai swm i anfeidredd y gyfres yw 940. Eglurwch pam nad yw'n bosibl bod y canlyniad hwn yn gywir. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(C2 Haf 2006)

5. Mae ail derm cyfres geometrig naw gwaith pedwerydd term y gyfres.

(a) Darganfyddwch y gwerthoedd posibl ar gyfer y gymhareb gyffredin. [4]

(b) O wybod bod y gymhareb gyffredin yn bositif ac mai 12 yw swm i anfeidredd y gyfres, darganfyddwch drydydd term y gyfres. [3]

(C2 Gaeaf 2007)

3. (a) Term cyntaf cyfres geometrig yw a a'r gymhareb gyffredin yw r . Ysgrifennwch yr n -fed term a phrofwch y rhoddir swm yr n term cyntaf gan

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

O wybod bod $|r| < 1$, ysgrifennwch swm i anfeidredd y gyfres. [5]

- (b) Mae swm term cyntaf ac ail derm cyfres geometrig yn hafal i ddwywaith swm ail derm a thrydydd term y gyfres.

- (i) O wybod bod cymhareb gyffredin y gyfres yn bositif, darganfyddwch werth y gymhareb gyffredin. [4]
- (ii) Swm i anfeidredd y gyfres yw 12. Darganfyddwch, yn gywir i ddau le degol, swm wyth term cyntaf y gyfres. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2017)

5. Mae dyn busnes cyfoethog yn rhoi un rhodd (*donation*) y flwyddyn i elusen benodol. Mae e'n dechrau drwy roi £100 yn y flwyddyn gyntaf. Ym mhob blwyddyn ddilynol, mae gwerth y rhodd 1.2 gwaith cymaint â gwerth rhodd y flwyddyn flaenorol.
- (a) Darganfyddwch beth yw gwerth rhodd y dyn busnes yn y 12^{fed} flwyddyn. Rhowch eich ateb yn gywir i'r bunt agosaf. [2]
- (b) Ar ôl derbyn yr n fed rhodd, mae trysorydd (*treasurer*) yr elusen yn cyfrifo bod y dyn busnes, dros y blynyddoedd, wedi rhoi **cyfanswm** o £15474, yn gywir i'r bunt agosaf. Darganfyddwch werth n . [5]

(C2 Gaeaf 2013)

5. (a) Mae p fed term cyfres geometrig yn hafal i 16. Mae $(p + 1)$ fed term y gyfres hon yn hafal i 24. Darganfyddwch $(p + 4)$ fed term y gyfres. [3]
- (b) Swm tri therm cyntaf cyfres geometrig arall yw $22 \cdot 8$. Swm i anfeidredd y gyfres yw $18 \cdot 75$. Darganfyddwch gymhareb gyffredin a therm cyntaf y gyfres geometrig hon. [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2006)

4. (a) Term cyntaf cyfres geometrig yw a a'r gymhareb gyffredin yw r . Ysgrifennwch n -fed term y gyfres a phrofwch y rhoddir swm yr n term cyntaf gan

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}. \quad [4]$$

- (b) Pedwerydd term cyfres geometrig yw 2 a'r seithfed term yw 54.

- (i) Darganfyddwch gymhareb gyffredin y gyfres.
- (ii) Darganfyddwch swm deg term cyntaf y gyfres, gan roi eich ateb yn gywir i un lle degol.
- (iii) Darganfyddwch werth lleiaf n fel bod yr n -fed term yn fwy na 125 000. [10]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2010)

5. (a) Term cyntaf cyfres geometrig yw a a'r gymhareb gyffredin yw r . Profwch y caiff swm yr n term cyntaf ei roi gan

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} . \quad [3]$$

- (b) Mae cymhareb gyffredin cyfres geometrig yn bositif. Swm pedwar term cyntaf y gyfres yw $73 \cdot 8$. Swm i anfeidredd y gyfres yw 125 . Darganfyddwch gymhareb gyffredin a themm cyntaf y gyfres geometrig. [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2010)

6. (a) Darganfyddwch swm i anfeidredd y gyfres geometrig $40 - 24 + 14 \cdot 4 - \dots$ [3]

(b) Term cyntaf cyfres geometrig arall yw a a'r gymhareb gyffredin yw r . Pedwerydd term y gyfres geometrig hon yw 8. Swm trydydd, pedwerydd a phumed term y gyfres yw 28.

(i) Dangoswch fod r yn bodloni'r hafaliad

$$2r^2 - 5r + 2 = 0.$$

(ii) O wybod bod $|r| < 1$, darganfyddwch werth r a gwerth cyfatebol a . [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2024)

7. Gan ddangos eich holl waith cyfrifo, enrhifwch

$$(b) \sum_{r=2}^{\infty} \left(540 \times \left(\frac{1}{3} \right)^r \right).$$

[3]



Cwestiynau Adolygu

(Uned 3 Haf 2019)

0	8
---	---

- a) Mae 3^{ydd}, 19^{fed} a 67^{fed} term dilyniant rhifyddol yn ffurfio dilyniant geometrig. O wybod bod y dilyniant rhifyddol yn cynyddu ac mai 3 yw'r term cyntaf, darganfyddwch wahaniaeth cyffredin y dilyniant rhifyddol. [5]

(Uned 3 Haf 2018)

0	9
---	---

- a) Esboniwch pam mae swm i anfeidredd cyfres geometrig â'r gymhareb gyffredin r dim ond yn cydgyfeirio (*converges*) pan mae $|r| < 1$. [1]
- b) Term cyntaf dilyniant geometrig V yw 2 a'i gymhareb gyffredin yw r . Mae dilyniant arall W yn cael ei ffurfio drwy sgwario pob term yn V . Dangoswch fod W hefyd yn ddilyniant geometrig. O wybod bod swm W i anfeidredd 3 gwaith cymaint â swm V i anfeidredd, darganfyddwch werth r . [6]
- c) Ar ddechrau pob blwyddyn, mae dyn yn buddsoddi £5000 mewn cyfrif cynilo sy'n ennill adlog ar y gyfradd 3% y flwyddyn. Mae'r llog yn cael ei ychwanegu ar ddiwedd pob blwyddyn. Darganfyddwch gyfanswm ei gynilion ar ddiwedd yr 20fed flwyddyn yn gywir i'r bunt agosaf. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Uned 3, Pecyn 12

13

Mathau o

Gyfresi

Mae'r wefan <https://oeis.org/> yn adnabod cyfresi gwahanol, ac yn darparu gwybodaeth amdanynt.

The OEIS is supported by the many generous donors to the OEIS Foundation.

0 1 3 6 2 7
: 13
: 20
23 12
10 22 11 21
THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA
OF INTEGER SEQUENCES®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Y Gwyddoniadur Ar-lein o Ddilyniannau Cyfanrif

Rhowch ddilyniant, gair (Saesneg), neu rif dilyniant:

1,2,3,6,11,23,47,106,235

[Chwilio](#) [Awgrymiadau](#) [Welcome](#) [Video](#)

Ma'r tudalennau canlynol oll yn y Saesneg.

Edrychwch ar y [Dudalen Groeso](#) am wybodaeth ynglŷn â'r Gwyddoniadur

Languages: English Shqip العربية Bangla Български Català 中文 (正體字, 简化字 (1), 简化字 (2)) Hrvatski Čeština Dansk Nederlands Esperanto Eesti فارسی Suomi Français Deutsch Ελληνικά ગુજરાતી עברית हिंदी Magyar Igbo Bahasa Indonesia Italiano 日本語 ಕನ್ನಡ 한국어 Lietuvių Македонски Бокмål Nynorsk Polski Português Română Русский Српски Slovenščina Español Svenska Tagalog தமிழ் Türkçe Українська اردو Tiếng Việt Cymraeg

Enw:



Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Dysgu sut i adnabod cyfresi rhifyddol; geometrig; cynyddol; disgynnol; cyfnodol; a rhai o'r ffurf $x_{n+1} = f(x_n)$.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Datrys hafaliadau, n fed term.
Lefel A Uned 1: Datrys hafaliadau cydamserol.
Lefel A Uned 3: Cyfresi rhifyddol; cyfresi geometrig.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau:

- Gall cyfresi cyfnodol fodelu sefyllfaoedd cylchol, e.e. mudiant planedau; tonnau radio; llanw'r môr.



Theori

Mae cyfres o rifau yn **gyfres rifyddol** os ydym yn adio'r un cysonyn i gael y rhif nesaf yn y gyfres.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

Enghraifft 1 $t_n = 4 + 3(n - 1)$.
 Y gyfres yw 4, 7, 10, 13, 16, ...

Mae cyfres o rifau yn **gyfres geometrig** os ydym yn lluosio efo'r un cysonyn i gael y rhif nesaf yn y gyfres.

$$t_n = ar^{n-1}$$

Enghraifft 2 $t_n = 5 \times 2^{n-1}$.
 Y gyfres yw 5, 10, 20, 40, 80, ...

Mae cyfres o rifau yn **gyfres gyfnodol** os yw'r gyfres yn ailadrodd ar ôl x term. Dywedir mai x yw **cyfnod** y gyfres.

Enghraifft 3 $t_n = (-1)^n$.
 Y gyfres yw $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$
 Mae hwn yn gyfres gyfnodol efo cyfnod 2.

Mae cyfres o rifau yn **gyfres esgynnol** os yw $t_{n+1} > t_n$ ar gyfer pob $n \geq 1$.
 Mae'r cyfresi yn enghreifftiau 1 a 2 yn gyfresi esgynnol.

Mae cyfres o rifau yn **gyfres ddisgynnol** os yw $t_{n+1} < t_n$ ar gyfer pob $n \geq 1$.

Nodyn: nid yw cyfres gyfnodol yn esgynnol neu'n ddisgynnol.

Ymarfer 1

A yw'r cyfresi canlynol yn gynyddol, yn ddisgynnol neu'n gyfnodol?

	Nfed term	Term laf	2il Derm	3ydd Term	4ydd Term	5ed Term	Cynyddol, Disgynnol neu Gyfnodol?
(a)	$t_n = 4n + 3$						
(b)	$t_n = \frac{5}{n + 1}$						
(c)	$t_n = n^2 + 2n + 5$						
(ch)	$t_n = \sin(30n)^\circ$						
(d)	$t_n = 3 - 2n$						
(dd)	$t_n = \frac{n}{n + 1}$						

Ymarfer 2

Ar gyfer y cyfresi cynyddol yn Ymarfer 1, profwch eu bod yn gyfresi cynyddol, trwy ddangos bod $t_{n+1} - t_n$ o hyd yn bositif.

Ar gyfer y cyfresi disgynnol yn Ymarfer 1, profwch eu bod yn gyfresi disgynnol, trwy ddangos bod $t_{n+1} - t_n$ o hyd yn negatif.

Ar gyfer y cyfresi cyfnodol yn Ymarfer 1, darganfyddwch y cyfnod ar gyfer y cyfresi.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned 3 Haf 2022)

0	9
---	---

Ar gyfer pob un o'r dilyniannau canlynol, darganfyddwch y 5 term cyntaf, u_1 i u_5 .
Disgrifiwch ymddygiad pob dilyniant.

a) $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ [2]

b) $u_6 = 33, u_n = 2u_{n-1} - 1$ [3]

(C2 Gaeaf 2010)

10. Mae n fed term dilyniant rhif (*number sequence*) wedi'i ddynodi gan t_n . Mae $(n + 1)$ fed term y dilyniant yn bodloni

$$t_{n+1} = 2t_n + 1,$$

ar gyfer pob cyfanrif positif n . O wybod bod $t_4 = 63$,

(a) enrhifwch t_1 , [2]

(b) heb wneud unrhyw gyfrifo pellach, eglurwch pam na all 6043582 fod yn un o dermau'r dilyniant rhif hwn. [1]

(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

6. Mae hydoedd ochrau ffigur plân â phymtheg ochr yn ffurfio dilyniant rhifyddol. Perimedrx y ffigur yw 270 cm ac mae hyd yr ochr fwyaf wyth gwaith cymaint â'r ochr leiaf. Darganfyddwch hyd yr ochr leiaf. [4]

(Uned 3 Haf 2024)

15. Mae Robert eisiau rhoi $\pounds P$ mewn cyfrif cynilo. Mae ganddo ddewis o ddau gyfrif.

- Mae cyfrif A yn cynnig cyfradd adlog flynyddol o 1%.
- Mae cyfrif B yn cynnig cyfradd llog o 5% am y flwyddyn gyntaf a chyfradd adlog flynyddol o 0.6% am bob blwyddyn ar ôl hynny.

Ar ôl n o flynyddoedd, mae cyfrif A yn fwy proffidiol (*profitable*) na chyfrif B . Darganfyddwch werth lleiaf n .

[5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Uned 13, Pecyn 13

13

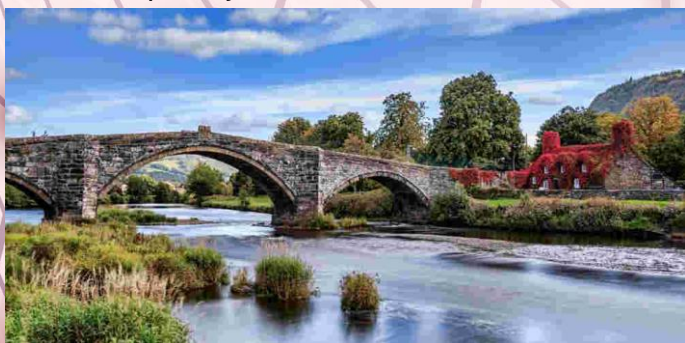
Ehangiad

Binomial 2

1000 × 494 picseil. JPEG 100%. 440 Kb



1000 × 494 picseil. JPEG 10%. 31 Kb



1000 × 494 picseil. JPEG 1%. 16 Kb



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Ystyried sut i ddatblygu'r gwaith Uned I ar ehangu $(a + bx)^n$ i gynnwys achosion ble mae n yn rhif negatif neu'n ffracsiwn.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Ehangu cromfachau; symleiddio; amnewid; rheolau indecsau; datrys anhafaleddau.
Lefel A Uned I: Ehangiad binomial.

I ble mae'n arwain?

Gallwn ddefnyddio'r gwaith yma i amcangyfrif gwerthoedd mynegiadau algebraidd neu rifau anghymarebol.

Theori

Adolygu gwaith Uned I

Os yw n yn gyfanrif positif, yna mae

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + x^n$$

$$(a + x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}x^3 + \dots + x^n$$

$$(a + bx)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}(bx) + \binom{n}{2}a^{n-2}(bx)^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}(bx)^3 + \dots + (bx)^n$$



Theori

ble mae $\binom{n}{r}$ yn cynrychioli sawl ffordd sydd o ddewis r eitem o n eitem, ac mae'n gallu cael ei gyfrifo o driongl Pascal neu o'r botwm **nCr** ar gyfrifiannell.

Enghraifft I

Ehangwch $(1 + 3x)^4$.

Triongl Pascal:

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1	3		3		1		
1		4	6	4			1	

$$(1 + 3x)^4 = 1(1)^4(3x)^0 + 4(1)^3(3x)^1 + 6(1)^2(3x)^2 + 4(1)^1(3x)^3 + 1(1)^0(3x)^4$$

$$(1 + 3x)^4 = 1(1)^4 + 4(1)^3(3x)^1 + 6(1)^2(3x)^2 + 4(1)^1(3x)^3 + 1(3x)^4$$

$$(1 + 3x)^4 = 1 + 4(3x) + 6(9x^2) + 4(27x^3) + 1(81x^4)$$

$$(1 + 3x)^4 = 1 + 12x + 54x^2 + 108x^3 + 81x^4$$

Os **nad** yw n yn gyfanrif positif, yna

- Nid yw'n bosib ffeindio $(a + bx)^n$ trwy luosi allan $(a + bx)$ n o weithiau;
- Nid yw'n bosib defnyddio triongl Pascal neu'r botwm **nCr** ar gyfrifiannell i gyfrifo'r cyfernodau.

Rhaid yn hytrach defnyddio cyfres anfeidrol a diffiniad cyffredinol $\binom{n}{r}$.

Yn gyffredinol,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ble mae $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.

Er enghraifft, mae

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cancel{(n-4)} \times \cancel{(n-5)} \times \dots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{[4 \times 3 \times 2 \times 1] \times [\cancel{(n-4)} \times \cancel{(n-5)} \times \dots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}]}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Felly, ar gyfer cyfanrif positif n , mae

$$(a+bx)^n = a^n + na^{n-1}(bx) + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} a^{n-2}(bx)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} a^{n-3}(bx)^3 + \dots + (bx)^n$$

Os **nad** yw n yn gyfanrif positif, yna ni allwn ddweud faint o dermau sydd yn y gyfres. Mae'n bosib fodd bynnag ysgrifennu'r ehangiad fel cyfres anfeidrol:

$$(a+bx)^n = a^n + na^{n-1}(bx) + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} a^{n-2}(bx)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} a^{n-3}(bx)^3 + \dots$$

Mae'r gyfres yn synhwyrol dim ond os yw'r termau'n mynd yn **llai** (yn agosach at sero) wrth fynd ymlaen. Mae hyn yn digwydd pan fo

$$\left| \frac{bx}{a} \right| < 1$$

a dyma pryd mae'r ehangiad yn **ddilys**.

Enghraifft 2

Ehangwch $(3+2x)^{-\frac{1}{2}}$ hyd at y term yn x^2 . Nodwch pryd fydd eich ehangiad yn ddilys.

$$\begin{aligned} (3+2x)^{-\frac{1}{2}} &= 3^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3^{-\frac{1}{2}-1} \times (2x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2 \times 1} \times 3^{-\frac{1}{2}-2} \times (2x)^2 + \dots \\ &= 3^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 3^{-\frac{3}{2}} \times (2x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2 \times 1} \times 3^{-\frac{5}{2}} \times (2x)^2 + \dots \\ &= 3^{-\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{3}{2}}x + \frac{3}{8} \times 3^{-\frac{5}{2}} \times 4x^2 + \dots \\ &= 3^{-\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{3}{2}}x + 3^{-\frac{5}{2}} \times \frac{3}{2}x^2 + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}x + \frac{1}{9\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}x^2 + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}x + \frac{1}{6\sqrt{3}}x^2 + \dots \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}x + \frac{\sqrt{3}}{18}x^2 + \dots \\ (3+2x)^{-\frac{1}{2}} &\approx \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{6}\right) \end{aligned} \quad \text{(hyd at y term yn } x^2)$$

Mae'r ehangiad yn ddilys os yw $\left| \frac{2x}{3} \right| < 1$, hynny yw $|x| < \frac{3}{2}$.



(C4 Haf 2016)

2. (a) (i) Ehangwch $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 .
- (ii) Nodwch ar gyfer ba amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys (*valid*). [3]
- (b) Defnyddiwch eich ehangiad yn rhan (a) i ddarganfod gwerth bras ar gyfer un gwreiddyn yr hafaliad

$$\frac{6}{\sqrt{1+2x}} = 4 + 15x - x^2. \quad [2]$$

(C4 Haf 2007)

4. Ehangwch $(1 + 4x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1 + 3x}$ hyd at y term yn x^2 . Ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys? [7]

(C4 Haf 2010)

5. Ehangwch $\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 .

Nodwch amrediad gwerthoedd x fel bod eich ehangiad yn ddilys.
Trwy hyn, gan ysgrifennu $x = 1$ yn eich ehangiad, dangoswch fod

$$\sqrt{3} \approx \frac{111}{64}. \quad [5]$$



(C4 Haf 2013)

5. (a) (i) Ehangwch $(1 + 6x)^{\frac{1}{3}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 .
- (ii) Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys. [3]
- (b) Defnyddiwch eich ehangiad yn rhan (a) i ddarganfod bras werth ar gyfer un gwreiddyn o'r hafaliad

$$2(1 + 6x)^{\frac{1}{3}} = 2x^2 - 15x. \quad [2]$$

(C4 Haf 2011)

6. Ehangwch $4(1+2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{(1+3x)^2}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 .

Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys.

[7]

(C4 Haf 2014)

5. Ehangwch

$$6\sqrt{1-2x} - \frac{1}{1+4x}$$

mewn pwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 .

Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys.

[7]

(C4 Haf 2008)

9. Ehangwch $\frac{1+3x}{\sqrt{1-2x}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, a chan gynnwys, y term yn x^2 . Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae'r ehangiad yn ddilys. [5]

(C4 Haf 2005)

2. Ehangwch $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, a chan gynnwys, y term yn x^2 . Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae'r ehangiad yn ddilys.

Trwy hyn, trwy ysgrifennu $x = \frac{1}{8}$ yn eich ehangiad, darganfyddwch fras werth ar gyfer $\sqrt{3}$ yn y ffurf $\frac{a}{b}$, lle mae a a b yn gyfanrifau. [5]

(C4 Haf 2006)

10. Ehangwch $\left(1 + \frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, a chan gynnwys, y term yn x^2 . Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae'r ehangiad yn ddilys. Trwy hyn, trwy ysgrifennu $x = 1$ yn eich ehangiad, dangoswch fod $\sqrt{2} \approx \frac{256}{181}$.

[5]

(C4 Haf 2009)

9. Ehangwch $(1 + 4x)^{\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at y term yn x^2 . Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys.

Ehangwch $(1 + 4k + 16k^2)^{\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol o k hyd at y term yn k^2 . [6]

(C4 Haf 2017)

5. (a) Ehangwch $(1 + 4x)^{-\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol (*ascending*) o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 . Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys (*valid*). [3]
- (b) Defnyddiwch eich ateb yn rhan (a) i ehangu $(1 + 4y + 8y^2)^{-\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol o y hyd at, ac yn cynnwys, y term yn y^2 . [3]

(Uned 3 Haf 2019)

0	2
---	---

Ehangwch $\frac{4-x}{\sqrt{1+2x}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at ac yn cynnwys y term yn x^3 .

Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae'r ehangiad yn ddilys (*valid*). [6]



(C4 Haf 2012)

5. Ehangwch $\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at, ac yn cynnwys, y term yn x^2 .

Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys.

Trwy hyn, gan ysgrifennu $x = \frac{1}{5}$ yn eich ehangiad, darganfyddwch fras werth ar gyfer $\sqrt{15}$ yn y

ffurf $\frac{a}{b}$, lle mae a a b yn gyfanrifau y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd. [5]

(C4 Haf 2018)

4. (a) Ehangwch $\frac{1}{(1+2x)^2}$ mewn pwerau esgynnol (*ascending*) o x hyd at ac yn cynnwys y term yn x^2 . [2]
- (b) (i) **Defnyddiwch eich ateb i ran (a)** i ehangu $\left(\frac{1+3x}{1+2x}\right)^2$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at ac yn cynnwys y term yn x^2 .
- (ii) Nodwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae eich ehangiad yn ddilys. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(Uned 3 Haf 2023)

0	3
---	---

a) Mynegwch $\frac{9}{(1-x)(1+2x)^2}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

b) **Gan ddefnyddio eich ateb i ran (a),** darganfyddwch ehangiad

$\frac{9}{(1-x)(1+2x)^2}$ mewn pwerau esgynnol o x hyd at y term mewn x^2 . Nodwch ar gyfer pa werthoedd x mae'r ehangiad yn ddilys (*valid*). [7]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Differu

Pellach

y	$\frac{dy}{dx}$
$(f(x))^n$	$n(f(x))^{n-1}f'(x)$
uv	$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
$\sin(f(x))$	$f'(x)\cos(f(x))$
$\cos(f(x))$	$-f'(x)\sin(f(x))$
$\tan(f(x))$	$f'(x)\sec^2(f(x))$
$\sec(f(x))$	$f'(x)\sec(f(x))\tan(f(x))$
$\operatorname{cosec}(f(x))$	$-f'(x)\operatorname{cosec}(f(x))\cot(f(x))$
$\cot(f(x))$	$-f'(x)\operatorname{cosec}^2(f(x))$
$\sin^{-1}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$\cos^{-1}(f(x))$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$\tan^{-1}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$
$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$
$a^{f(x)}$	$f'(x)a^{f(x)}\ln(a)$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Ystyried sut i ddatblygu'r gwaith Uned I ar ddifferu i gynnwys ffwythiannau trigonometreg; esbonyddol a logarithmig. Deall sut i ddifferu cyfuniadau o ffwythiannau gan ddefnyddio rheol y lluoswm; rheol y gyfran a rheol y gadwyn.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid, datrys hafaliadau, newid testun.
Lefel A Uned I: Differu.

I ble mae'n arwain?

Darganfod y gyfradd newid mewn problemau ffiseg, peirianeg neu gemeg (a mwy!).

Theori

Adolygu gwaith Uned I

Os yw $y = ax^n$ yna mae $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$. (Mae'r nodiant $\frac{dy}{dx}$ neu y' yn cael ei ddefnyddio i gynrychioli'r graddiant.)

Enghraifft 1

y	$\frac{dy}{dx}$
$5x^2$	$10x$
$8x^5 + 3x^2 + 8x + 4$	$40x^4 + 6x + 8$
$-5x^3 + 2x^{-6}$	$-15x^2 - 12x^{-7}$

Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl canlynol.

y	$\frac{dy}{dx}$
$4x^7$	
$6x^3 - 12x + 5$	
$18x^3 + 12x^{-4} - \frac{6}{x}$	

Ymarfer 2

Os yw $y = 4x^3 + 5$, darganfyddwch werth y graddiant y' os yw $x = 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ffwythiannau Trigonometrig

Prawf

Os yw $y = \sin x$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol.



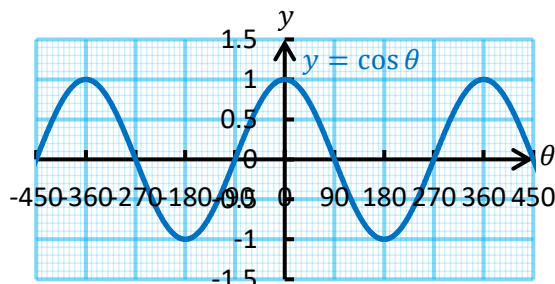
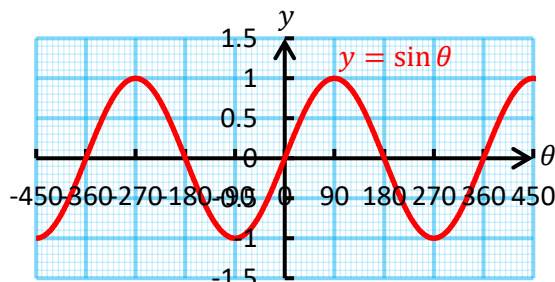
O waith Uned I, i ddifferu o egwyddorion sylfaenol rydym yn defnyddio $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

$$\begin{aligned} \text{Felly } \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \end{aligned}$$

yn defnyddio $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

Wrth i $h \rightarrow 0$, mae $\sin(h) \rightarrow h$ ac mae $\cos(h) \rightarrow 1 - \frac{h^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Felly } \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\left(1 - \frac{h^2}{2}\right) + \cos(x)h - \sin(x)}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)\left(\frac{h^2}{2}\right) + \cos(x)h - \sin(x)}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)\left(\frac{h^2}{2}\right) + \cos(x)h}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin(x)\left(\frac{h}{2}\right) + \cos(x) \\ \frac{dy}{dx} &= -\sin(x)\left(\frac{0}{2}\right) + \cos(x) \\ \frac{dy}{dx} &= \cos(x) \end{aligned}$$



Prawf

Os yw $y = \cos x$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol.

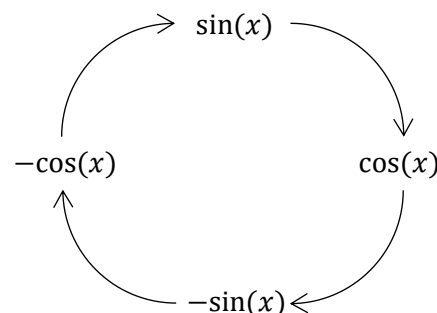
O waith Uned I, i ddifferu o egwyddorion sylfaenol rydym yn defnyddio $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

$$\begin{aligned} \text{Felly } \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \end{aligned}$$

yn defnyddio $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

Wrth i $h \rightarrow 0$, mae $\sin(h) \rightarrow h$ ac mae $\cos(h) \rightarrow 1 - \frac{h^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Felly } \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\left(1 - \frac{h^2}{2}\right) - \sin(x)h - \cos(x)}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(x)\left(\frac{h^2}{2}\right) - \sin(x)h - \cos(x)}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)\left(\frac{h^2}{2}\right) - \sin(x)h}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\cos(x)\left(\frac{h}{2}\right) - \sin(x) \\ \frac{dy}{dx} &= -\cos(x)\left(\frac{0}{2}\right) - \sin(x) \\ \frac{dy}{dx} &= -\sin(x) \end{aligned}$$



Nodyn

Gall y diagram ar y dde eich helpu i gofio sut i ddifferu ffwythiannau sin a cos.

Rheol y Gadwyn

O gael dau ffwythiant $y = f(t)$ a $t = g(x)$, yna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

Gallwn ddefnyddio reol y gadwyn i ddifferu ffwythiannau mwy cymhleth na'r rhai o Uned 1.

Enghraifft 2

Os yw $y = (2x + 4)^3$, defnyddiwch reol y gadwyn i ddarganfod $\frac{dy}{dx}$.

Gadewch i $t = 2x + 4$, fel bod $y = t^3$.

Yna $\frac{dt}{dx} = 2$ ac mae $\frac{dy}{dt} = 3t^2$.

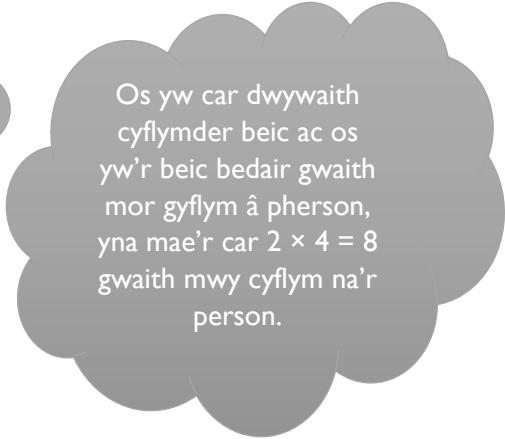
Felly mae

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3t^2 \times 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 6t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(2x + 4)^2$$



Enghraifft 3

Os yw $y = \sin(3x)$, defnyddiwch reol y gadwyn i ddarganfod $\frac{dy}{dx}$.

Gadewch i $t = 3x$, fel bod $y = \sin(t)$.

Yna $\frac{dt}{dx} = 3$ ac mae $\frac{dy}{dt} = \cos(t)$.

Felly mae

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(t) \times 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cos(t)$$

Ymarfer 3

Defnyddiwch reol y gadwyn i ddarganfod $\frac{dy}{dx}$ ym mhob un o'r achosion canlynol.

(a) $y = (3x + 9)^5$

(b) $y = \sin(5x)$

.....

.....

.....

.....

.....

(c) $y = \sqrt{4x - 3}$

(ch) $y = 4 \cos(9x)$

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 4

Defnyddiwch reol y gadwyn i ddarganfod $\frac{dy}{dx}$ ym mhob un o'r achosion canlynol.

(a) $y = (f(x))^n$

(b) $y = \sin(f(x))$

.....

.....

.....

.....

Rheol y Lluoswm (Rheol Leibniz)

Os yw $y = uv$, yna

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$



Prawf (dim angen ei gofio)

Gadewch i $y = u(x)v(x)$. O ddiffinio $f(x) = u(x)v(x)$, mae

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \quad (\text{Sylwch fod } -u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) = 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h)[u(x+h) - u(x)] + u(x)[v(x+h) - v(x)]}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x)[v(x+h) - v(x)] + v(x+h)[u(x+h) - u(x)]}{h} \quad (\text{Ail-drefnu'r rhifiadur})$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

QED

Enghraifft 4

Os yw $y = 4x^3 \sin(x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

Gadewch i $u = 4x^3$, $v = \sin(x)$.

Yna $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 \cos(x) + \sin(x) \times 12x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^2(x \cos(x) + 3 \sin(x))$$

Ymarfer 5

(a) Os yw $y = 5x^2 \cos(x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

(b) Os yw $y = 9\sqrt{x} \sin(x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

Rheol y Cyniferydd

Os yw $y = \frac{u}{v}$, yna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$



Prawf (dim angen ei gofio)

Gadewch i $y = \frac{u(x)}{v(x)}$. O ddiffinio $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, mae

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+h)v(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+h)v(x)} \quad (\text{Sylwch fod } -u(x)v(x) + u(x)v(x) = 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \right] \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+h)v(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\lim_{h \rightarrow 0} v(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+h)v(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[v \times \frac{du}{dx} - u \times \frac{dv}{dx} \right] \times \frac{1}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

QED

Mae hwn yn cael ei roi yn y llyfryn fformiwlâu yn y ffurf $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Enghraifft 5

Os yw $y = \frac{\sin(x)}{x^2}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

Gadewch i $u = \sin(x)$, $v = x^2$.

Yna $\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cos(x) - \sin(x) \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cos(x) - 2x \sin(x)}{x^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cos(x) - 2 \sin(x)}{x^3}$$

O ail-drefnu'r cwestiwn fel $y = x^{-2} \sin(x)$, byddai modd ateb y cwestiwn hefyd gan ddefnyddio rheol y lluoswm.

Ymarfer 6

(a) Os yw $y = \frac{4x^3}{\sin(x)}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

(b) Os yw $y = \frac{7x^2+3}{x^5}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ffwythiannau Trigonometrig 2

Enghraifft 6



(a) Os yw $y = \tan(x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Gadewch i $u = \sin(x)$, $v = \cos(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times -\sin(x)}{(\cos(x))^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad (\text{yn defnyddio } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(x)$$

Ymarfer 7

(a) Trwy ysgrifennu $y = \cot(x)$ fel $y = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$,

dangoswch fod $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Os yw $y = \tan^{-1}(x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \tan^{-1}(x)$$

$\tan(y) = x$ (cymryd tan o bob ochr)

$x = \tan(y)$ (cyfnewid ochrau)

$\frac{dx}{dy} = \sec^2(y)$ (yn defnyddio canlyniad rhan (a))

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2(y)}$ (cymryd y cilydd)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)}$ (yn defnyddio $\sec^2(y) = 1 + \tan^2(y)$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

(b) Trwy ysgrifennu $y = \sec(x)$ fel $y = \frac{1}{\cos(x)}$,

dangoswch fod $\frac{dy}{dx} = \sec(x) \tan(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Os yw $y = \tan^{-1}(3x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ gan

ddefnyddio rheol y gadwyn.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(ch) Trwy ysgrifennu $y = \operatorname{cosec}(x)$ fel $\frac{1}{\sin(x)}$,

dangoswch fod $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}(x) \cot(x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

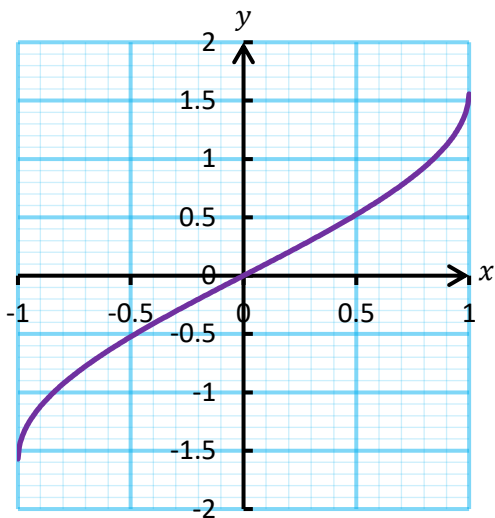
.....

.....

.....

Enghraifft 7

Mae graff $y = \sin^{-1}(x)$ rhwng -1 a 1 yn cael ei ddangos isod.



Os yw $y = \sin^{-1}(x)$, dangoswch fod $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$y = \sin^{-1}(x)$
 $\sin(y) = x$ (cymryd sin o bob ochr)
 $x = \sin(y)$ (cyfnewid ochrau)

$\frac{dx}{dy} = \cos(y)$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)}$ (cymryd y cilydd)

Nawr mae $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ felly

$\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$
 $\cos(y) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(y)}$

Felly $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}}$
 $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Ond mae graddiant graff $y = \sin^{-1}(x)$ yn bositif,

felly $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **QED**

Ymarfer 9

(a) Os yw $y = \sin^{-1}(8x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ gan ddefnyddio rheol y gadwyn.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

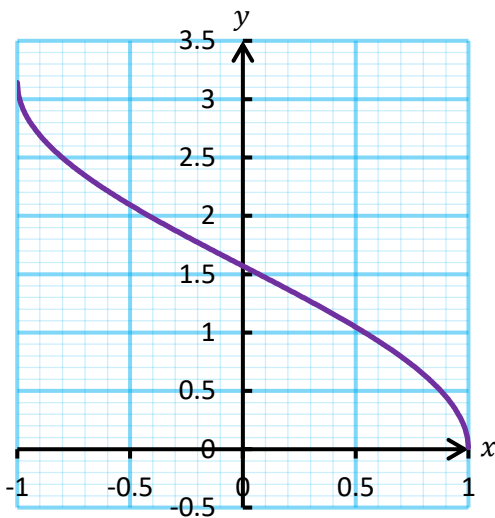
.....

.....

.....

Ymarfer 8

Mae graff $y = \cos^{-1}(x)$ rhwng -1 a 1 yn cael ei ddangos isod.



Os yw $y = \cos^{-1}(x)$, dangoswch fod $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Os yw $y = \cos^{-1}(5x^2)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ gan ddefnyddio rheol y gadwyn.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ffwythiannau Esbonyddol

O Uned 1, graddiant y graff $y = e^x$ yw $\frac{dy}{dx} = e^x$.

Enghraifft 8

Os yw $y = e^{4x^6}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

Gadewch i $t = 4x^6$, fel bod $y = e^t$.

Yna $\frac{dt}{dx} = 24x^5$ ac mae $\frac{dy}{dt} = e^t$.

$$\begin{aligned} \text{Felly mae } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= e^t \times 24x^5 \\ \frac{dy}{dx} &= 24x^5 e^{4x^6} \end{aligned}$$

Ymarfer 11

(a) Os yw $y = e^{f(x)}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 10

Os yw $y = e^{3x^2+5x+3}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....



(b) Os yw $y = e^{5x} \sin(x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Os yw $y = \frac{e^{x^3}}{2x+3}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

(ch) Os yw $y = (2 + e^{\cos(x)})^3$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Os yw $y = a^x$, yna mae $\frac{dy}{dx} = a^x \ln(a)$.

Prawf (dim angen ei gofio)

Gadewch i $y = a^x$. O ddiffiniad logarithm yn Uned 1, mae $e^{\ln(a)} = a$ (cofiwch mai $\ln(a)$ yw logarithm bôn e).

Felly $y = (e^{\ln(a)})^x$
 $y = e^{x \ln(a)}$ (rheolau indecsau, $(n^a)^b = n^{a \times b}$)

Gadewch i $t = x \ln(a)$, fel bod $y = e^t$.

Yna $\frac{dt}{dx} = \ln(a)$ ac mae $\frac{dy}{dt} = e^t$.

$$\begin{aligned} \text{Felly mae } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= e^t \times \ln(a) \\ \frac{dy}{dx} &= a^x \ln(a) \end{aligned}$$

Enghraifft 9

Os yw $y = 5^{6x^2}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

Gadewch i $t = 6x^2$, fel bod $y = 5^t$.

Yna $\frac{dt}{dx} = 12x$ ac mae $\frac{dy}{dt} = 5^t \ln(5)$.

Felly mae $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 5^t \ln(5) \times 12x$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x \times 5^{6x^2} \ln(5)$$

Ymarfer 13

(a) Os yw $y = a^{f(x)}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Os yw $y = 2^{7x} \cos(x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Os yw $y = \frac{6^{x^2}}{5x-7}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(ch) Os yw $y = (7 + 8^{2x})^4$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ffwythiannau Logarithmig

Os yw $y = \ln(x)$, yna $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

Prawf (dim angen ei gofio)

Gadewch i $y = \ln(x)$.

Felly $e^y = e^{\ln(x)}$

$$e^y = x \quad (\text{trwy ddiffiniad logarithm})$$

$$x = e^y \quad (\text{cyfnewid ochrau})$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y \quad (\text{differu})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} \quad (\text{cymryd y cilydd})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

**QED**

Enghraifft 10

Os yw $y = \ln(3x^2 + 5)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

Gadewch i $t = 3x^2 + 5$, fel bod $y = \ln(t)$.

Yna $\frac{dt}{dx} = 6x$ ac mae $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$.

$$\begin{aligned} \text{Felly mae } \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{t} \times 6x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{6x}{3x^2+5} \end{aligned}$$

Ymarfer 15

(a) Os yw $y = \ln(f(x))$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Os yw $y = \frac{\ln(7x^3+5x)}{\sin(x)}$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(d) Os yw $y = \ln(\sin(x))$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 14

Os yw $y = \ln(7 - 3x^4)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Os yw $y = 4x \ln(8x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(ch) Os yw $y = (\ln(8x + 2) + e^x)^4$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(dd) Os yw $y = \tan^{-1}(5x) \ln(5x)$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Crynodeb

Dyma grynodeb o'r sgiliau a ffeithiau differu sydd wedi ymddangos yn y pecyn gwaith yma.

Enw	y	$\frac{dy}{dx}$	Yn ymddangos yn y llyfryn fformiwlâu:
Ffwythiant i bŵer	$(f(x))^n$	$n(f(x))^{n-1}f'(x)$	
Rheol y lluoswm (Rheol Leibniz)	uv	$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	
Rheol y cyniferydd	$\frac{u}{v}$	$\frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
Differu ffwythiannau trigonometrig	$\sin(f(x))$	$f'(x) \cos(f(x))$	
	$\cos(f(x))$	$-f'(x) \sin(f(x))$	
	$\tan(f(x))$	$f'(x) \sec^2(f(x))$	$\frac{d}{dx} (\tan(x)) = \sec^2(x)$
Differu cilydd ffwythiannau trigonometrig	$\sec(f(x))$	$f'(x) \sec(f(x)) \tan(f(x))$	$\frac{d}{dx} (\sec(x)) = \sec(x) \tan(x)$
	$\operatorname{cosec}(f(x))$	$-f'(x) \operatorname{cosec}(f(x)) \cot(f(x))$	$\frac{d}{dx} (\operatorname{cosec}(x)) = -\operatorname{cosec}(x) \cot(x)$
	$\cot(f(x))$	$-f'(x) \operatorname{cosec}^2(f(x))$	$\frac{d}{dx} (\cot(x)) = -\operatorname{cosec}^2(x)$
Differu gwrthdro ffwythiannau trigonometrig	$\sin^{-1}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$\frac{d}{dx} (\sin^{-1}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\cos^{-1}(f(x))$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$	$\frac{d}{dx} (\cos^{-1}(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\tan^{-1}(f(x))$	$\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$\frac{d}{dx} (\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$
Differu ffwythiannau esbonyddol	$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$	
	$a^{f(x)}$	$f'(x)a^{f(x)} \ln(a)$	
Differu ffwythiannau logaritmig	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	



(Uned 3 Haf 2022)

0	2
---	---

Differwch y ffwythiannau canlynol mewn perthynas ag x .

a) $x^3 \ln(5x)$ [3]

b) $(x + \cos 3x)^4$ [2]

(C3 Gaeaf 2006)

5. Differwch bob un o'r canlynol mewn perthynas ag x , gan symleiddio eich ateb pan fydd hyn yn bosibl.

(a) $e^{3x} \cos x$ [3]

(b) $\frac{2x^2 + 1}{3x^2 + 2}$ [3]

(c) $\tan(5x^2 + 3)$ [2]

(ch) $\ln(2x)$ [2]

(d) $\sin^{-1}(3x)$. [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Gaeaf 2008)

5. Differwch bob un o'r canlynol mewn perthynas ag x , a symleiddiwch eich atebion pan fo hyn yn bosibl.

(a) $\frac{\ln x}{x^2}$

(b) $\cos^{-1} 5x$

(c) $\sqrt{1+6x^4}$

(ch) $x^3 \tan 2x$

[3],[2],[2],[3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Gaeaf 2010)

5. Differwch **bob un** o'r canlynol mewn perthynas ag x , gan symleiddio eich ateb pan fo hyn yn bosibl.

(a) $\tan^{-1} 3x$

(b) $\ln(2x^2 - 3x + 4)$

[2], [2]

(c) $e^{2x} \sin x$

(ch) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

[3], [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Haf 2007)

6. (a) Differwch bob un o'r canlynol mewn perthynas ag x , a symleiddiwch eich atebion pan fo hyn yn bosibl.

(i) $x^2 \sin x$ (ii) $\ln(x^2 + 3)$ (iii) e^{9-2x} (iv) $\frac{4}{(3x+7)^2}$
(v) $\sin^{-1} 3x$ [10]

(b) O wybod bod $y = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ ($\tan x \neq 1$), dangoswch fod $\frac{dy}{dx}$ bob amser yn bositif. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Gaeaf 2009)

5. (a) Differwch **bob un** o'r canlynol mewn perthynas ag x , a symleiddiwch eich atebion pan fo hyn yn bosibl.

(i) $\ln(\sin x)$ (ii) $\sin^{-1}(4x)$ (iii) $\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 5}$ [8]

(b) Trwy yn gyntaf ysgrifennu $y = \tan^{-1}x$ fel $x = \tan y$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau x . [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Gaeaf 2013)

5. (a) Differwch bob un o'r canlynol mewn perthynas ag x .

(i) $\sqrt{5x^2 - 3x}$ (ii) $\sin^{-1} 7x$ (iii) $e^{3x} \ln x$ [7]

(b) Trwy yn gyntaf ysgrifennu $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, dangoswch fod $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Haf 2010)

5. (a) Differwch **bob un** o'r canlynol mewn perthynas ag x , gan symleiddio eich ateb pan fo hyn yn bosibl.

(i) $(7 + 2x)^{13}$ (ii) $\sin^{-1} 5x$ (iii) $x^3 e^{4x}$ [7]

(b) Trwy yn gyntaf ysgrifennu $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, dangoswch fod

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x. \quad [3]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Haf 2014)

6. (a) Differwch bob un o'r canlynol mewn perthynas ag x a symleiddiwch eich ateb pan fo hyn yn bosibl.

(i) $\frac{1}{\sqrt[4]{9-4x^5}}$

(ii) $\frac{3+2x^3}{7-x^3}$

[5]

- (b) (i) Brasluniwch graff $y = \sin^{-1}x$ ar gyfer gwerthoedd o x sy'n bodloni $-1 \leq x \leq 1$.

- (ii) Trwy yn gyntaf ailysgrifennu $y = \sin^{-1}x$ fel $x = \sin y$, darganfyddwch fynegiad ar gyfer $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau x . Rhaid i chi gyfiawnhau unrhyw ddewis o arwydd rydych yn ei wneud. [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(C3 Haf 2018)

6. (a) Differwch bob un o'r canlynol mewn perthynas ag x , gan symleiddio eich ateb pan mae hynny'n bosibl.

(i) $\ln(8 + 7x - 4x^3)$

(ii) $\sqrt[3]{(5 - 9x^2)}$

(iii) $\frac{2 + 5 \sin x}{4 - 3 \cos x}$

[7]

(b) Trwy yn gyntaf ysgrifennu $y = \tan^{-1} 5x$ fel $5x = \tan y$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau x . [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Haf 2011)

5. Differwch bob un o'r canlynol mewn perthynas ag x , gan symleiddio eich ateb pan fo hyn yn bosibl.

$$(a) (9 - 2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$(b) \ln(\cos x)$$

$$(c) x^3 \tan 4x$$

$$(ch) \frac{e^{6x}}{(3x + 2)^4}$$

[2], [3], [3], [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Uned 3, Pecyn 15

13

Pwyntiau

Ffurfdro



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Ymchwilio i **bwyntiau ffurfdro** cromlin, ble mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ac mae arwydd $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn newid bob ochr i'r pwynt ffurfdro.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid, datrys hafaliadau, ffactorio mynegiadau cwadratig.

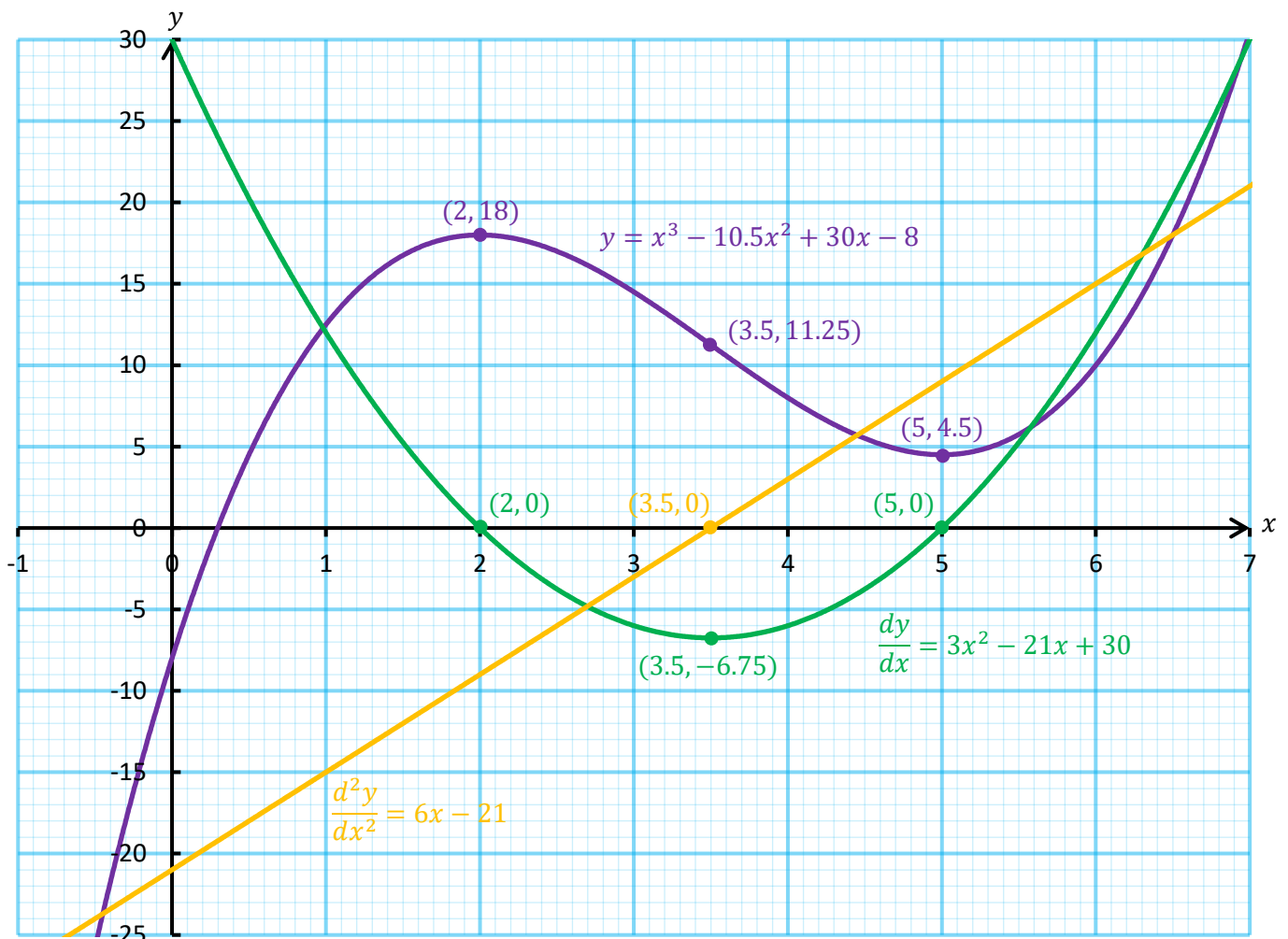
Lefel A Uned 1: Differu, darganfod pwyntiau arhosol.

I ble mae'n arwain?

Ym myd busnes, gall pwynt ffurfdro ddangos twf sylweddol, neu awgrymu bod marchnad ar fin cwmpo.

Theori

Gadewch i ni ystyried y ffwythiant $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$. Trwy ddifferu, mae $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$. Trwy ddifferu eto, mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 21$. Mae'r graff isod yn dangos y tri ffwythiant hyn, a'r cysylltiadau rhyngddynt.



Yn canolbwyntio ar y **gromlin biws** ar gyfer $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$, gwelwn fod pwynt maccsimwm lleol yn $(2, 18)$ a phwynt minimwm lleol yn $(5, 4.5)$. Mae'r rhain yn cyd-fynd efo'r pwyntiau ble mae $\frac{dy}{dx} = 0$.

Yn canolbwyntio ar y **gromlin werdd** ar gyfer $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$, gwelwn fod pwynt minimwm yn $(3.5, -6.75)$.

Mae hwn yn cyd-fynd efo'r pwynt ble mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Ar y **gromlin biws** wreiddiol, mae **pwynt ffurfdro** yn ymddangos ar y pwynt $(3.5, 11.25)$.

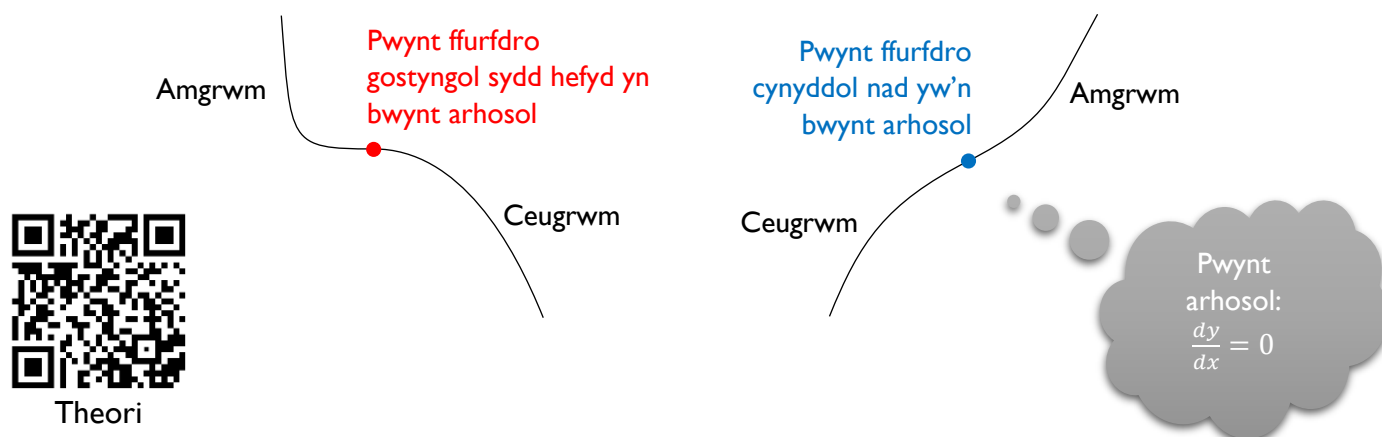
Diffiniadau

Amgrwm a Cheugrwm

- Mae cromlin yn **amgrwm** (*convex*) os yw $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, ac felly mae'r tangiad i'r gromlin yn ymddangos **o dan** y gromlin.
- Mae cromlin yn **geugrwm** (*concave*) os yw $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, ac felly mae'r tangiad i'r gromlin yn ymddangos **uwchben** y gromlin.

Pwynt Ffurfdro

- Mae **pwynt ffurfdro** yn digwydd pan fo cromlin yn newid o fod yn amgrwm i fod yn geugrwm, neu'n newid o fod yn geugrwm i fod yn amgrwm. Hynny yw, mae arwydd $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn newid.



O edrych ar y **gromlin biws** ar y dudalen flaenorol, byddai'r gromlin yn geugrwm cyn $x = 3.5$, gan fod $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, ac mae'r tangiad yn ymddangos uwchben y gromlin. Ar ôl $x = 3.5$, mae'r gromlin yn amgrwm, gan fod $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, ac mae'r tangiad yn ymddangos o dan y gromlin. Ar $x = 3.5$, mae'r gromlin felly'n newid o fod yn geugrwm i fod yn amgrwm, a gallwn ddweud bod pwynt ffurfdro yn y pwynt $(3.5, 11.25)$.

Dyma strategaeth ar gyfer darganfod cyfesurynnau pwyntiau ffurfdro cromlin:

- Datrysych $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ i ddarganfod cyfesurynnau-pwyntiau ffurfdro posibl.
- Gwiriwch i weld os yw arwydd $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn newid bob ochr i'ch cyfesurynnau- x .
Os ydi hyn yn wir, mae gennych bwynt ffurfdro. Os nad yw hyn yn wir, mae gennych math arall o bwynt (er enghraifft pwynt maccsimwm lleol neu bwynt minimwm lleol).
- Ar gyfer y pwyntiau ffurfdro rydych wedi'u darganfod, amnewidiwch yn ôl i mewn i y i ddarganfod y cyfesurynnau- y .

Mae angen gwirio bod arwydd $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn newid; nid yw'n ddigonol datrys $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ yn unig.

Enghraifft 1

- (a) Darganfyddwch gyfesuryn pwynt ffurfdro y gromlin $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$.
- (b) Dangoswch nad yw'r pwynt ffurfdro yn bwynt arhosol.

Ateb: (a) Differu: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$

Differu eto: $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 21$

Datrys $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$: $6x - 21 = 0$
 $6x = 21$
 $x = 3.5$

Amnewid yn ôl i y: $y = 3.5^3 - 10.5 \times 3.5^2 + 30 \times 3.5 - 8$
 $y = 11.25$

Gwirio bod (3.5, 11.25) yn bwynt ffurfdro:

Os yw $x = 3.4$, mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 3.4 - 21$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = -0.6$

Os yw $x = 3.6$, mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 3.6 - 21$
 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0.6$

Mae arwydd $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn newid, felly mae (3.5, 11.25) yn bwynt ffurfdro.

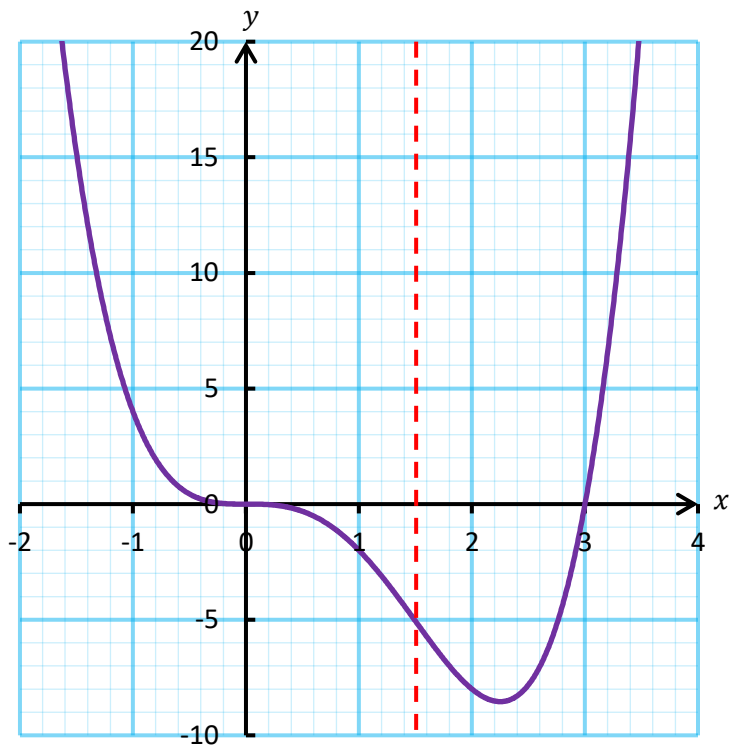
(b) Os yw $x = 3.5$, mae $\frac{dy}{dx} = 3 \times 3.5^2 - 21 \times 3.5 + 30$
 $\frac{dy}{dx} = -6.75$

Mae $\frac{dy}{dx} \neq 0$ felly nid yw (3.5, 11.25) yn bwynt arhosol.

Ymarfer 1

Mae'r graff ar y dde yn dangos y gromlin ar gyfer $y = x^4 - 3x^3$.

- (a) Ble mae'r gromlin yn geugrwm?
- (b) Sawl pwynt ffurfdro sydd gan y gromlin?
- (c) Sawl pwynt arhosol sydd gan y gromlin?
- (ch) Darganfyddwch gyfesurynnau a natur pob un o'r pwyntiau ffurfdro.
- (d) Darganfyddwch gyfesurynnau a natur pob un o'r pwyntiau arhosol.



A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned 3 Haf 2023)

1	1
---	---

 Hafaliad cromlin C yw $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x$.

- a) Darganfyddwch gyfesuryn- x y pwynt ffurfdro (*point of inflection*). Nodwch, gan roi rheswm, a yw'r pwynt ffurfdro yn arhosol (*stationary*) neu ddim yn arhosol. [5]
- b) Darganfyddwch amrediad gwerthoedd x lle mae C yn geugrwm (*concave*). [2]

(Uned 3 Haf 2022)

1	3
---	---

Mae ffwythiant wedi'i ddiffinio gan $f(x) = 2x^3 + 3x - 5$.

- a) Profwch nad oes pwynt arhosol gan graff $f(x)$. [2]

- b) Dangoswch fod gan graff $f(x)$ bwynt ffurfdro (*point of inflection*) a darganfyddwch gyfesurynnau'r pwynt ffurfdro. [4]

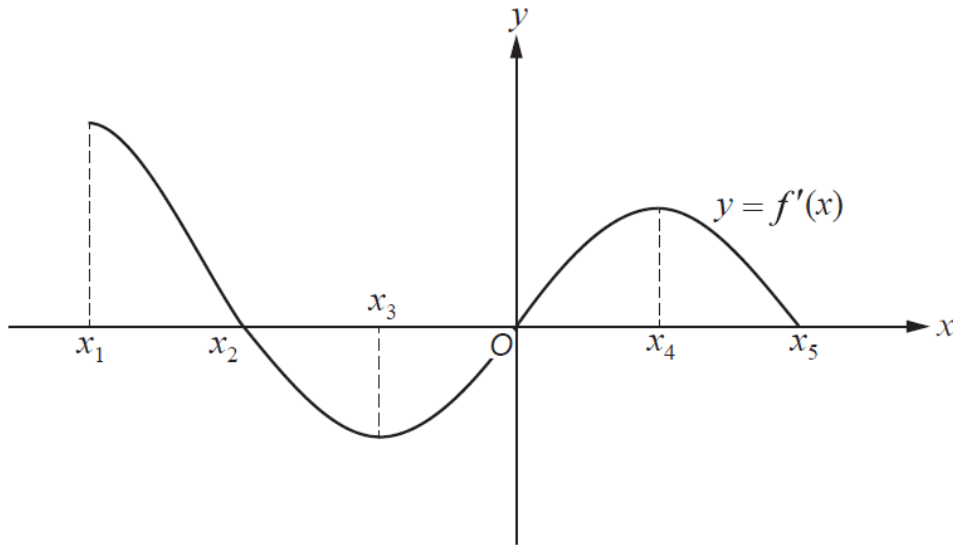
- c) Brasluniwch graff $f(x)$. [1]

Area with horizontal dotted lines for writing answers.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2024)

13. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r graff $y = f'(x)$ ar gyfer y cyfwng $[x_1, x_5]$.



- (a) Darganfyddwch y cyfwng lle mae $f(x)$ yn lleihau a hefyd yn amgrwm (*convex*). Rhwch resymau dros eich ateb.

[2]

- (b) Ysgrifennwch gyfesuryn- x pwynt ffurfdro ar y graff $y = f(x)$.

[1]

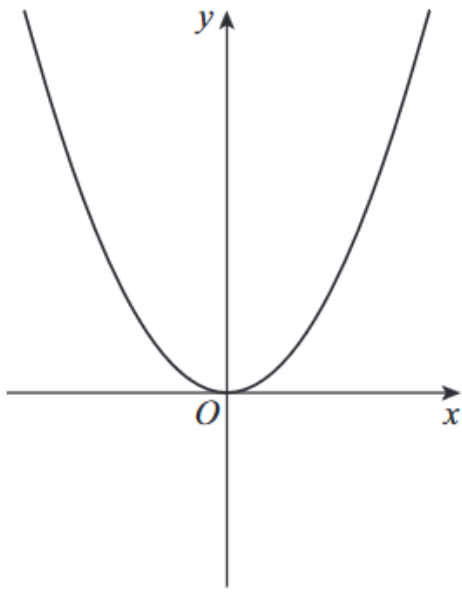
A series of horizontal dotted lines for writing.

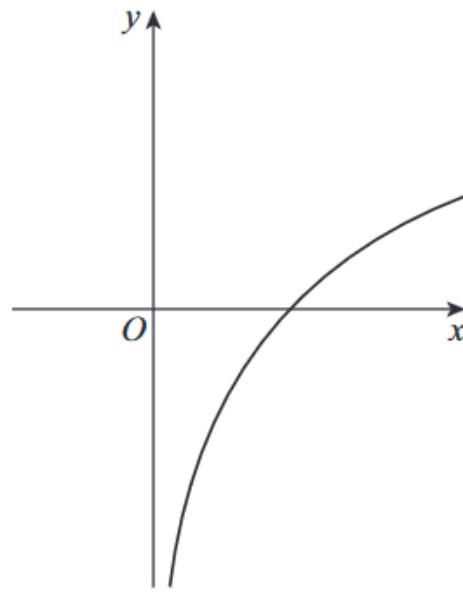
(AQA Papur 2 Haf 2022)

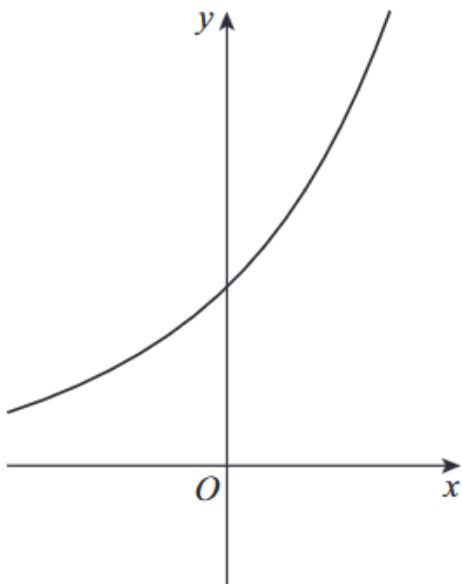
3 The function f is concave and is represented by one of the graphs below.
Identify the graph which represents f .

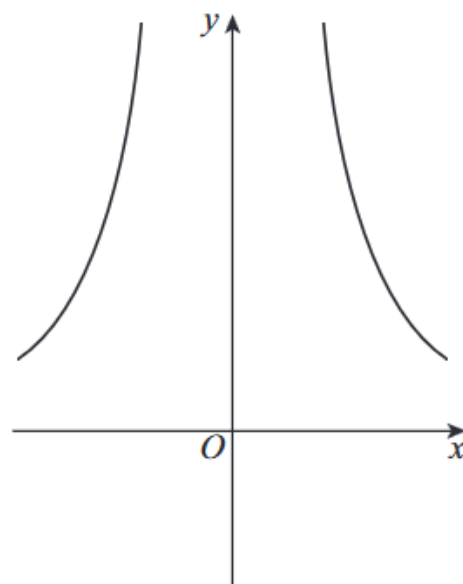
Tick (✓) **one** box.

[1 mark]











(AQA Papur 2 Haf 2021)

2 A curve has equation $y = f(x)$

The curve has a point of inflection at $x = 7$

It is given that $f'(7) = a$ and $f''(7) = b$, where a and b are real numbers.

Identify which one of the statements below must be true.

Circle your answer.

[1 mark]

$f'(7) \neq 0$

$f'(7) = 0$

$f''(7) \neq 0$

$f''(7) = 0$

(AQA Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

8 A curve has equation $y = 2x \cos 3x + (3x^2 - 4) \sin 3x$

8 (a) Find $\frac{dy}{dx}$, giving your answer in the form $(mx^2 + n) \cos 3x$, where m and n are integers.

[4 marks]

8 (b) Show that the x -coordinates of the points of inflection of the curve satisfy the equation

$$\cot 3x = \frac{9x^2 - 10}{6x}$$

[4 marks]

A series of horizontal dotted lines for writing.

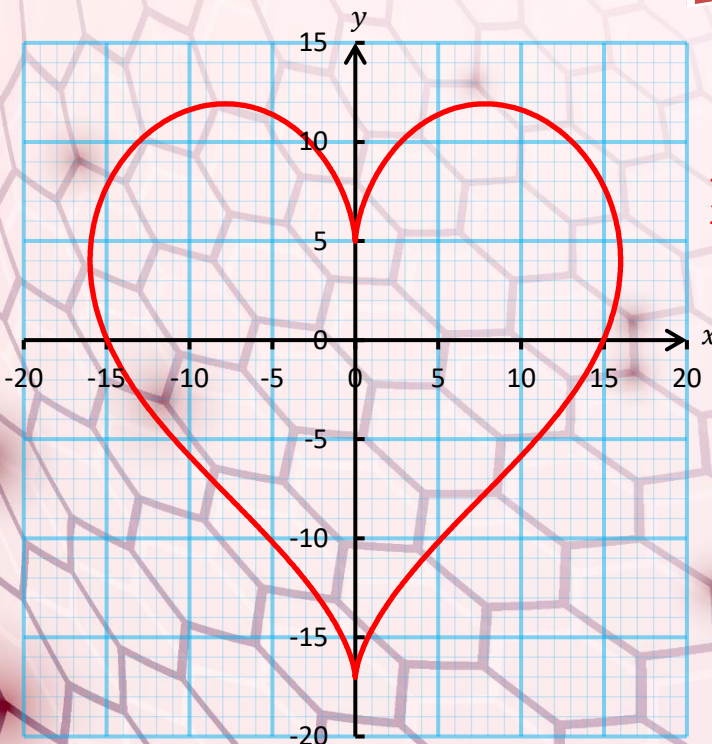
A series of horizontal dotted lines for writing.



Hafaliadau

Parametrig ac

Ymhlyg



$$x = 16 \sin^3(t)$$
$$y = 13 \cos(t) - 5 \cos(2t) - 2 \cos(3t) - \cos(4t)$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Darganfod hafaliadau tangiadau a normalau i gromliniau sydd wedi'u diffinio'n **barametrig** neu'n **ymhlyg**. Trawsnewid rhwng ffurfiau Cartesaidd a pharametrig.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid, datrys hafaliadau, newid testun.
Lefel A Uned 3: Differu.

I ble mae'n arwain?

Gall hafaliadau parametrig fodlu mudiant sy'n gylchol ei natur, neu fudiant sy'n dychwelyd i'r un lleoliad.

Theori

Hyd yma, rydym wedi bod yn differu ffwythiannau o'r ffurf $y = f(x)$, ble mae un gwerth o y ar gyfer pob gwerth o x . Nid yw pob cromlin o'r math yma fodd bynnag; ystyriwch yr hafaliad $x^2 + y^2 = 1$ sy'n rhoi cylch unedol i ni. I geisio differu'r ffwythiant hwn, gallwn geisio ei ail-drefnu i'r ffurf $y = f(x)$:

$$y^2 = 1 - x^2$$

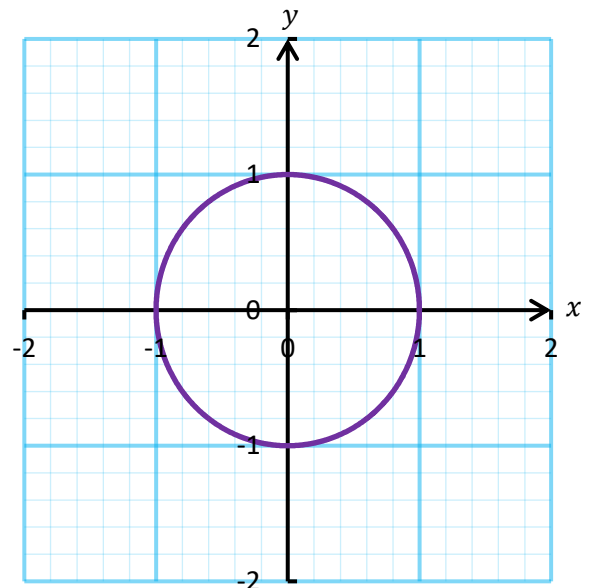
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Nid yw hwn yn ffwythiant **echblyg** (*explicit*), gan fod dau werth o y ar gyfer pob gwerth o x . Er enghraifft, os yw $x = 0$, mae

$$y = \pm\sqrt{1 - 0^2}$$

$$y = \pm 1$$

Mae hyn i'w weld ar y graff gan fod y pwyntiau $(0, 1)$ a $(0, -1)$ yn gorwedd ar y cylch. Gan nad yw'n echblyg beth yw gwerth y ar gyfer pob gwerth o x , rydym yn dweud bod $x^2 + y^2 = 1$ yn hafaliad **ymhlyg** (*implicit*).



Differu Hafaliadau Ymhlyg

Sut ydym yn differu $x^2 + y^2 = 1$ mewn perthynas ag x ? Does dim problem differu x^2 mewn perthynas ag x : byddai hyn yn rhoi $2x$ i ni. Gallwn hefyd ddifferu 1 mewn perthynas ag x i roi 0. Ond sut ydym yn differu y^2 mewn perthynas ag x ? I weld sut, gadewch i ni ddiffinio z fel $z = y^2$. Gallwn ddifferu z mewn perthynas ag y :

$$\frac{dz}{dy} = 2y$$

Yna, gallwn ddefnyddio rheol y gadwyn i ddifferu z mewn perthynas ag x :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 2y \times \frac{dy}{dx}$$



Theori

Felly, i ddifferu z mewn perthynas ag x , rydym yn ei ddifferu mewn perthynas ag y , ac yna'n lluosio efo $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2) \times \frac{dy}{dx}$$

Yn gyffredinol, i ddifferu unrhyw ffwythiant o y mewn perthynas ag x , rydym yn ei ddifferu mewn perthynas ag y , ac yna'n lluosio efo $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(f(y)) = \frac{d}{dy}(f(y)) \times \frac{dy}{dx}$$

Yn dychwelyd at hafaliad y cylch $x^2 + y^2 = 1$, pan rydym yn ei ddifferu mewn perthynas ag x , rydym yn cael

$$2x + 2y \times \frac{dy}{dx} = 0$$

Gallwn ail-drefnu hwn i ddarganfod $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} 2y \times \frac{dy}{dx} &= -2x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x}{2y} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

O gael pwynt sydd yn gorwedd ar y cylch, gallwn amnewid y pwynt i mewn i $\frac{dy}{dx}$ i ddarganfod graddiant y cylch ar y pwynt hwnnw. Er enghraifft, o'r dudalen gynt rydym yn gwybod bod y pwynt $(0, 1)$ yn gorwedd ar y cylch. Yma mae

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{0}{1} \\ \frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Gallwn nawr (er enghraifft) ddarganfod hafaliad y tangiad i'r cylch yn y pwynt $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 0(x - 0) \\ y - 1 &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Mae hon yn llinell lorweddol sy'n mynd trwy'r pwynt $(0, 1)$.

Enghraifft 1

Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ ar gyfer y gromlin $3x^2 + 5y^2 = 7$.

Ateb: Trwy ddifferu'n ymhllyg: $6x + 10y \times \frac{dy}{dx} = 0$

$$\begin{aligned} 10y \times \frac{dy}{dx} &= -6x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-6x}{10y} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{3x}{5y} \end{aligned}$$

Ymarfer 1

(a) Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ ar gyfer y gromlin $8x^2 + 2y^2 = 10$.

(b) Mae'r pwynt $(-1, 1)$ yn gorwedd ar y gromlin $8x^2 + 2y^2 = 10$.
Darganfyddwch hafaliad y tangiad i'r gromlin $8x^2 + 2y^2 = 10$ yn y pwynt $(-1, 1)$.

Ymarfer 2

Darganfyddwch hafaliad y normal i'r gromlin $4x^2 + 3y^2 - 7x + 2y = 13$ yn y pwynt $(1, 2)$.
Ysgrifennwch eich ateb yn y ffurf $y = mx + c$.

Hafaliadau Parametrig

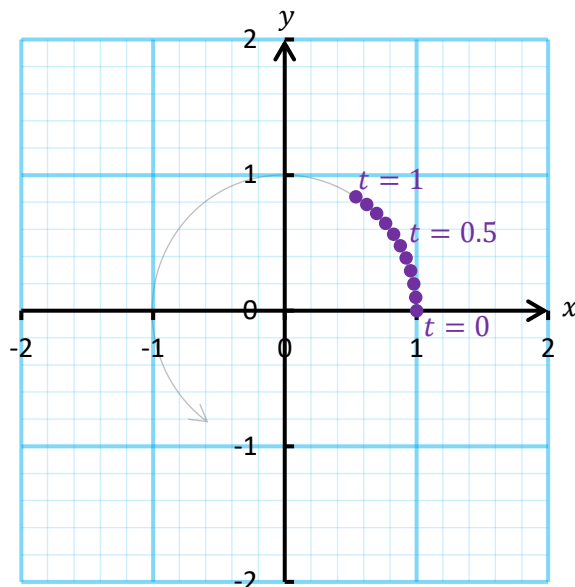
Mae hafaliadau parametrig cromlin yn diffinio cyfesurynnau'r gromlin gan ddefnyddio trydydd newidyn, fel arfer t , sydd yn cynrychioli'r **paramedr**.

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}$$

Er enghraifft, gallwn gynrychioli'r cylch unedol gan ddefnyddio'r hafaliadau parametrig canlynol.

$$\begin{aligned} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \end{aligned}$$

Mae'r tabl canlynol yn dangos beth fyddai gwerthoedd x ag y ar gyfer gwerthoedd gwahanol o t , gan gychwyn o $t = 0$, ac yn mynd i fyny fesul 0.1. (Dangosir y gwerthoedd yn gywir i bedwar lle degol, gyda'r ongl t mewn radianau.) Mae'r rhain yn cael eu plotio fel **cyfesurynnau piws** ar y graff ar y dde. (I blotio'r cylch cyfan, byddai angen i werth t gyrraedd 2π .)



t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
x	1	0.9950	0.9801	0.9553	0.9211	0.8776	0.8253	0.7648	0.6967	0.6216	0.5403
y	0	0.0998	0.1987	0.2955	0.3894	0.4794	0.5646	0.6442	0.7174	0.7833	0.8415

I ddarganfod graddiant y gromlin ar unrhyw bwynt, gallwn ddifferu'r ffwythiannau $f(t)$ a $g(t)$ mewn perthynas â t :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f'(t) \\ \frac{dy}{dt} &= g'(t) \end{aligned}$$

Yna gallwn ddefnyddio rheol y gadwyn i ddarganfod y graddiant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

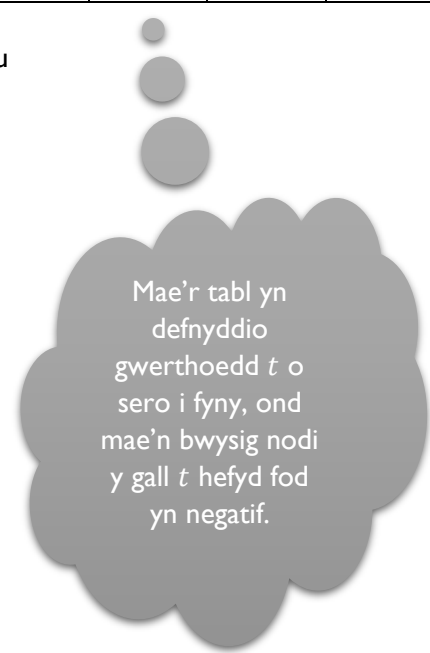
ble mae

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

Ar gyfer yr enghraifft uchod, mae

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \cos(t) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \cos(t) \times \frac{1}{-\sin(t)} \\ \frac{dy}{dx} &= -\cot(t) \end{aligned}$$

Os yw (er enghraifft) $t = 1$, mae $\frac{dy}{dx} = -\cot(1)$
 $\frac{dy}{dx} = -0.6421$ i 4 lle degol.



Mae'r tabl yn defnyddio gwerthoedd t o sero i fyny, ond mae'n bwysig nodi y gall t hefyd fod yn negatif.



Theori

Er mwyn darganfod hafaliad y normal i'r gromlin yn y pwynt ble mae $t = 1$, gallwn ddefnyddio'r wybodaeth ganlynol o'r dudalen flaenorol:

Os yw $t = 1$, mae (i 4 lle degol) $x = 0.5403$, $y = 0.8415$, $\frac{dy}{dx} = -0.6421$

Graddiant y normal fydd $-\frac{1}{-0.6421} = 1.5574$ (sef negatif cilydd $\frac{dy}{dx}$).

Hafaliad y normal yn y pwynt ble mae $t = 1$ yw $y - y_1 = m(x - x_1)$
 $y - 0.8415 = 1.5574(x - 0.5403)$
 $y - 0.8415 = 1.5574x - 0.8415$
 $y = 1.5574x$

Ymarfer 3

Mae cromlin yn cael ei ddiffinio gan yr hafaliadau parametrig

$$x = t^2$$

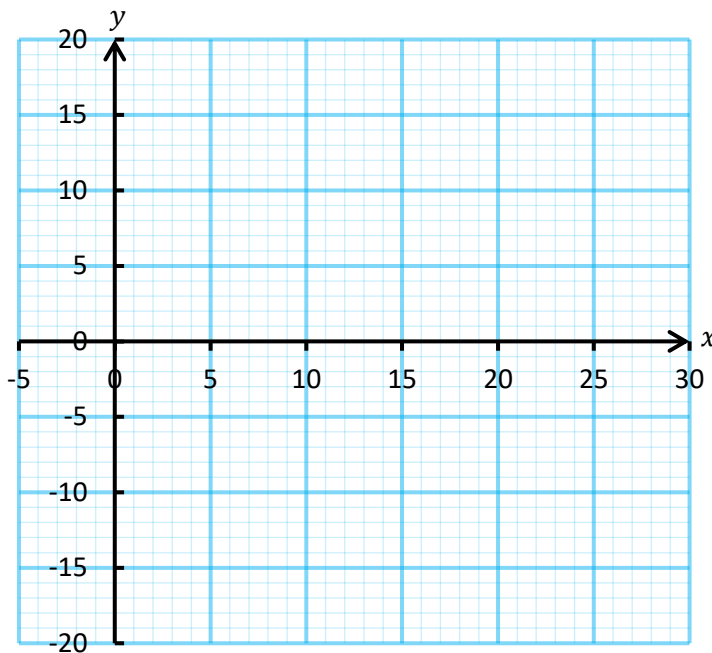
$$y = 2t + 3$$

(a) Llenwch y tabl canlynol.

t	0	1	2	3	4	5
x						
y						

(b) Defnyddiwch y tabl uchod i blotio darn o'r gromlin ar y papur graff ar y dde.

(c) Darganfyddwch raddiant $\frac{dy}{dx}$ y gromlin, gan ysgrifennu eich ateb yn nhermau t .



(ch) Darganfyddwch hafaliad y tangiad i'r gromlin yn y pwynt ble mae $t = 2$.

(d) Darganfyddwch hafaliad y normal i'r gromlin yn y pwynt ble mae $t = 4$.

Ysgrifennu Hafaliadau Parametrig fel Hafaliad Cartesaidd

Weithiau, mae'n bosib trawsnewid set o hafaliadau parametrig i fod yn un **hafaliad Cartesaidd**, sy'n osgoi defnyddio'r paramedr gwreiddiol, ac yn defnyddio x ag y yn unig.

Enghraifft 2

Ar dudalen 5, defnyddiwyd yr hafaliadau parametrig canlynol i ddiffinio'r cylch unedol.

$$x = \cos(t)$$

$$y = \sin(t)$$

I ddileu'r paramedr t o'r hafaliadau hyn, gallwn ddefnyddio'r unfathiant $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ o Uned 1:

$$y^2 + x^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Hwn yw'r hafaliad ar gyfer y cylch unedol o dudalen 2.

Enghraifft 3

Yn Ymarfer 3, defnyddiwyd yr hafaliadau parametrig canlynol i ddiffinio cromlin.

$$x = t^2$$

$$y = 2t + 3$$

I ddileu'r paramedr t o'r hafaliadau hyn, gallwn ail-drefnu'r ail hafaliad i wneud t yn destun:

$$y - 3 = 2t$$

$$\frac{y - 3}{2} = t$$

Gallwn wedyn amnewid ar gyfer t i mewn i'r hafaliad cyntaf:

$$x = \left(\frac{y - 3}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{(y - 3)^2}{2^2}$$

$$x = \frac{(y - 3)(y - 3)}{4}$$

$$4x = y^2 - 3y - 3y + 9$$

$$4x = y^2 - 6y + 9$$

$$4x - y^2 + 6y - 9 = 0$$

Ymarfer 4

Mae cromlin yn cael ei ddiffinio gan yr hafaliadau parametrig

$$x = t^2 - 3$$

$$y = t + 2$$

Darganfyddwch yr hafaliad Cartesaidd sy'n diffinio'r gromlin.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



(C3 Gaeaf 2010)

3. (a) Mae'r gromlin C wedi'i diffinio gan

$$y^3 + 2x^3y = 3x^2 + 4x - 3.$$

Darganfyddwch werth $\frac{dy}{dx}$ yn y pwynt $(2, 1)$.

[4]

(C3 Gaeaf 2012)

3. (a) Mae ffwythiant wedi'i ddiffinio'n baramedrig gan

$$x = 3t^2, y = t^6 - 4t^3.$$

(i) Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau t .(ii) O wybod bod $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{2}$, dangoswch fod $2t^4 - 4t - 7 = 0$. [5]

(C3 Haf 2014)

4. O wybod bod $x = 2e^t - 5$, $y = 8e^{-t} + 3e^t - 4$, darganfyddwch werth t pan fydd $\frac{dy}{dx} = -1$.

Rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[7]

(C3 Haf 2006)

3. (a) O wybod bod $x = \cos t$, $y = \sin 2t$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau t . [4]

(b) O wybod bod

$$x^4 + 2x^2y + y^2 = 21,$$

darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau x ac y . [4]

(C3 Gaeaf 2008)

3. (a) O wybod bod $x = t^4 + 1$, $y = e^{2t} + 5$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau t . [4]

(b) O wybod bod $x^4 + \sin y + x^2y^3 = 9$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau x ac y . [3]

(C3 Haf 2008)

3. O wybod bod

$$x^2 + x \sin y + y^3 = \pi^3 + 1,$$

darganfyddwch werth $\frac{dy}{dx}$ yn y pwynt $(1, \pi)$.

[4]

(Uned 3 Haf 2024)

11. Mae cromlin yn cael ei diffinio'n barametrig gan

$$x = 2\theta + \sin 2\theta, \quad y = 1 + \cos 2\theta.$$

(a) Dangoswch fod graddiant y cromlin yn y pwynt sydd â'r paramedr θ yn $-\tan\theta$. [6]

(b) Darganfyddwch hafaliad y tangiad i'r gromlin yn y pwynt lle mae $\theta = \frac{\pi}{4}$. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing the answer.

(Uned 3 Haf 2023)

1	3
---	---

 Hafaliadau parametrig y gromlin C_1 yw $x = 3p + 1$, $y = 9p^2$.Hafaliadau parametrig y gromlin C_2 yw $x = 4q$, $y = 2q$.Darganfyddwch gyfesurynnau Cartesaidd pwyntiau croestoriad C_1 ac C_2 . [7]

(Uned 3 Haf 2022)

1	6
---	---

 Hafaliadau paramedrig y gromlin C yw

$$x = 3 - 4t + t^2, \quad y = (4 - t)^2.$$

- a) Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwyntiau lle mae C yn cwrdd â'r echelin- y . [3]
- b) Dangoswch fod yr echelin- x yn dangiad i'r gromlin C. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2018)

1	0
---	---

 Mae hafaliad cromlin C wedi'i roi gan yr hafaliadau paramedrig

$$x = \cos 2\theta, \quad y = \cos \theta.$$

- a) Darganfyddwch hafaliad Cartesaidd C . [2]
- b) Dangoswch fod y llinell $x - y + 1 = 0$ yn cwrdd ag C yn y pwynt P , lle mae $\theta = \frac{\pi}{3}$, ac yn y pwynt Q , lle mae $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ysgrifennwch gyfesurynnau P a Q . [5]
- c) Darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau i C yn P a Q . Ysgrifennwch gyfesurynnau pwynt croestoriad y ddau dangiad. [7]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned 3 Haf 2019)

0 6

Hafaliadau paramedrig cromlin C yw $x = \sin\theta$, $y = \cos2\theta$.

- a) Hafaliad y tangiad i'r gromlin C yn y pwynt P lle mae $\theta = \frac{\pi}{4}$ yw $y = mx + c$. Darganfyddwch union werthoedd m ac c . [6]

- b) Darganfyddwch gyfesurynnau pwyntiau croestoriad y gromlin C a'r llinell syth $x + y = 1$. [5]

Area with horizontal dotted lines for writing answers.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Gaeaf 2009)

3. (a) O wybod bod $x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x = 13$, darganfyddwch werth $\frac{dy}{dx}$ yn y pwynt (1, 2). [4]

(b) O wybod bod $x = 2e^t + 6$, $y = 4e^{2t} + 3e^t + 1$, darganfyddwch werth t pan fydd $\frac{dy}{dx} = 6$, gan roi eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[7]



Integru

Pellach 1

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a} (ax + b)^{n+1} + c$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$\int \sec^2(ax + b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int a^{ax+b} \ln(a) dx = \frac{1}{a} a^{ax+b} + c$$

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + c$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Defnyddio'r gwaith blaenorol ar ddifferu ffwythiannau trigonometrig; esbonyddol a logarithmig i **integru** ffwythiannau tebyg. Defnyddio integrynnau pendant i ddarganfod yr arwynebedd rhwng dwy gromlin.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Lefel A Uned 1: Differu ac integru.
Lefel A Uned 3: Differu pellach.

I ble mae'n arwain?

Gall y cwestiynau yn y pecyn gwaith yma ymddangos wrth geisio modelu twf poblogaeth; dadfeiliad ymbelydrol; a thwf ariannol.

Theori

Dyma rai o'r technegau differu a ymddangosodd yn y pecyn gwaith blaenorol ar ddifferu pellach.

Enw	y	$\frac{dy}{dx}$	Yn ymddangos yn y llyfryn fformiwlâu:
Ffwythiant i bŵer	$(f(x))^n$	$n(f(x))^{n-1}f'(x)$	
Differu ffwythiannau trigonometrig	$\sin(f(x))$ $\cos(f(x))$ $\tan(f(x))$	$f'(x)\cos(f(x))$ $-f'(x)\sin(f(x))$ $f'(x)\sec^2(f(x))$	$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$
Differu ffwythiannau esbonyddol	$e^{f(x)}$ $a^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$ $f'(x)a^{f(x)}\ln(a)$	
Differu ffwythiannau logarithmig	$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	

Mae'r technegau uchod i gyd yn defnyddio **rheol y gadwyn**: O gael dau ffwythiant $y = f(t)$ a $t = g(x)$, mae

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

Mae'r set ganlynol o gwestiynau differu i gyd yn defnyddio'r tabl ar y dudalen flaenorol, mewn achosion ble mae'r ffwythiant $f(x)$ o'r ffurf $ax + b$ ar gyfer cysonion a a b .

Enghraifft 1

Differwch y ffwythiannau canlynol.

$$(a) y = (3x - 5)^4$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(3x - 5)^3 \times 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 12(3x - 5)^3$$

$$(b) y = \sin(6x - 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 \times \cos(6x - 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 \cos(6x - 4)$$

$$(c) y = e^{8x+9}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \times e^{8x+9}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8e^{8x+9}$$

$$(ch) y = 6^{5x+3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \times 6^{5x+3} \times \ln(6)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \ln(6) \times 6^{5x+3}$$

$$(d) y = \ln(7x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{7x + 3}$$

Ymarfer 1

Differwch y ffwythiannau canlynol.

$$(a) y = (6x + 11)^7$$

$$(b) y = \cos(9x + 7)$$

$$(c) y = e^{x-3}$$

$$(ch) y = 9^{2x-9}$$

$$(d) y = \ln(9x + 25)$$

Gan gofio bod integru yn dadwneud differu, gallwn ddefnyddio'r gwaith uchod i lunio ychydig o gwestiynau integru:

$$\int 12(3x - 5)^3 dx = (3x - 5)^4 + c$$

$$\int 6 \cos(6x - 4) dx = \sin(6x - 4) + c$$

$$\int 8e^{8x+9} dx = e^{8x+9} + c$$

ac yn y blaen...

Mae'r symiau integru yma i gyd yn **dadwneud** rheol y gadwyn. Yn gyffredinol, os yw

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

yna

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$$

Prawf (dim angen ei gofio)

Gadewch i $y = \frac{1}{a}F(ax + b) + c$. Trwy ddiffinio $t = ax + b$, mae $y = \frac{1}{a}F(t) + c$.

Trwy ddifferu, mae $\frac{dt}{dx} = a$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a}f(t)$.

Defnyddio rheol y gadwyn:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{a}f(t) \times a \\ \frac{dy}{dx} &= f(t) \\ \frac{dy}{dx} &= f(ax + b)\end{aligned}$$

Felly mae $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c$.

QED

Yn ymarferol, pan rydym yn defnyddio'r uchod i integru, rydym yn meddwl beth sy'n **differu** i roi $f(ax + b)$, gan luosi efo cysonyn yn ôl yr angen.

Enghraifft 2

Integrwch y canlynol.

(a) $\int 18(3x + 2)^5 dx$

Mae differu $(3x + 2)^6$ yn rhoi $6 \times (3x + 2)^5 \times 3 = 18(3x + 2)^5$, felly mae $\int 18(3x + 2)^5 dx = (3x + 2)^6 + c$.

(b) $\int 32(2x - 5)^3 dx$

Mae differu $(2x - 5)^4$ yn rhoi $4 \times (2x - 5)^3 \times 2 = 8(2x - 5)^3$. Ond rydym angen $32(2x - 5)^3$, sydd 4 gwaith yn fwy, felly mae angen differu $4(2x - 5)^4$ i roi $32(2x - 5)^3$. Felly mae $\int 32(2x - 5)^3 dx = 4(2x - 5)^4 + c$.

(c) $\int \sin(7x - 1) dx$

Mae differu $-\cos(7x - 1)$ yn rhoi $7 \times \sin(7x - 1)$. Ond rydym angen $\sin(7x - 1)$, sydd 7 gwaith yn llai, felly mae angen differu $-\frac{1}{7}\cos(7x - 1)$ i roi $\sin(7x - 1)$. Felly mae $\int \sin(7x - 1) dx = -\frac{1}{7}\cos(7x - 1) + c$.

(ch) $\int e^{5x+7} dx$

Mae differu e^{5x+7} yn rhoi $5 \times e^{5x+7}$. Ond rydym angen e^{5x+7} , sydd 5 gwaith yn llai, felly mae angen differu $\frac{1}{5}e^{5x+7}$ i roi $\frac{1}{5} \times 5 \times e^{5x+7} = e^{5x+7}$. Felly mae $\int e^{5x+7} dx = \frac{1}{5}e^{5x+7} + c$.

(d) $\int 15 \ln(7) \times 7^{5x-2} dx$

Mae differu 7^{5x-2} yn rhoi $5 \times 7^{5x-2} \times \ln(7)$. Ond rydym angen $15 \ln(7) \times 7^{5x-2}$, sydd 3 gwaith yn fwy, felly mae angen differu $3 \times 7^{5x-2}$ i roi $3 \times 5 \times 7^{5x-2} \times \ln(7) = 15 \ln(7) \times 7^{5x-2}$. Felly mae $\int 15 \ln(7) \times 7^{5x-2} dx = 3 \times 7^{5x-2} + c$.

Ymarfer 2

Integrwch y canlynol.

(a) $\int 10(2x - 5)^4 dx$

(b) $\int 70(5x + 1)^6 dx$

(c) $\int \cos(3x + 2) dx$

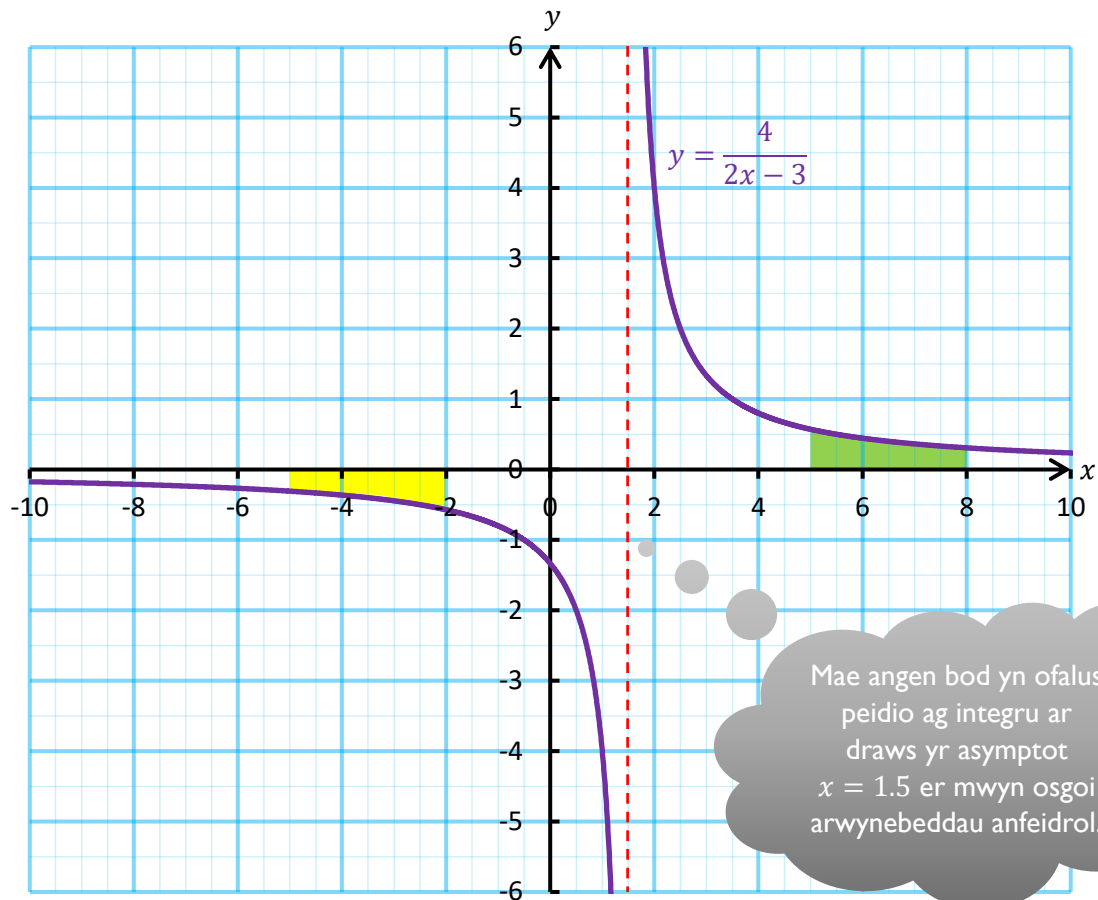
(ch) $\int e^{-2x+3} dx$

(d) $\int 18 \ln(3) \times 3^{2x+4} dx$



Theori

Enghraifft 3

Enrhifwch $\int_{-5}^{-2} \frac{4}{2x-3} dx$.

Ateb: Os ydym yn ysgrifennu'r integryn $\frac{4}{2x-3}$ yn y ffurf $2 \times \frac{2}{2x-3}$, gwelwn fod y ffraciwn o'r ffurf $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Mae'r ffraciwn felly'n integru i roi logarithm naturiol, gan fod $\frac{d}{dx}(\ln(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Y rheol rydym yn ei ddefnyddio i integru ffraciwn o'r ffurf $\frac{f'(x)}{f(x)}$ yw

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Yn yr achos uchod, mae

$$\begin{aligned} & \int_{-5}^{-2} \frac{4}{2x-3} dx \\ &= \int_{-5}^{-2} 2 \times \frac{2}{2x-3} dx \\ &= [2 \ln|2x-3|]_{-5}^{-2} \\ &= (2 \ln|2 \times -2 - 3|) - (2 \ln|2 \times -5 - 3|) \\ &= (2 \ln|-7|) - (2 \ln|-13|) \\ &= 2 \ln(7) - 2 \ln(13) \\ &= -1.238 \text{ i } 3 \text{ lle degol} \end{aligned}$$

Mae hyn yn cyfateb i'r arwynebedd melyn yn y graff uchod.

Crynodeb

Enw	Integryn	Ateb
Ffwythiant i bŵer	$\int (ax + b)^n dx$	$\frac{1}{(n+1)a} (ax + b)^{n+1} + c$
Integru ffwythiannau trigonometrig	$\int \cos(ax + b) dx$ $\int \sin(ax + b) dx$ $\int \sec^2(ax + b) dx$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$ $-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$ $\frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$
Integru ffwythiannau esbonyddol	$\int e^{ax+b} dx$ $\int a^{ax+b} \ln(a) dx$	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + c$ $\frac{1}{a} a^{ax+b} + c$
Integru i roi ffwythiannau logarithmig	$\int \frac{1}{ax + b} dx$	$\frac{1}{a} \ln ax + b + c$

Arwynebedd rhwng dwy gromlin

Enghraifft 4

Mae'r diagram ar y dde'n dangos braslun o'r cromliniau $y = x^2 + 4$ a $y = 12 - x^2$. Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i ffinio gan y ddwy gromlin.

Ateb: Cam 1: Darganfod ble mae'r cromliniau'n croestorri.

$$x^2 + 4 = 12 - x^2$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

Naill ai $x = 2$ neu $x = -2$

Cam 2: Arwynebedd rhwng y cromliniau

$$= (\text{Arwynebedd o dan } 12 - x^2 \text{ rhwng } -2 \text{ a } 2) - (\text{Arwynebedd o dan } x^2 + 4 \text{ rhwng } -2 \text{ a } 2)$$

Arwynebedd o dan $12 - x^2$ rhwng -2 a 2 :

$$\int_{-2}^2 12 - x^2 dx$$

$$= \left[12x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2$$

$$= \left(12 \times 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(12 \times -2 - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

$$= \left(24 - \frac{8}{3} \right) - \left(-24 + \frac{8}{3} \right)$$

$$= \frac{64}{3} - -\frac{64}{3}$$

$$= \frac{128}{3}$$

Arwynebedd o dan $x^2 + 4$ rhwng -2 a 2 :

$$\int_{-2}^2 x^2 + 4 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2$$

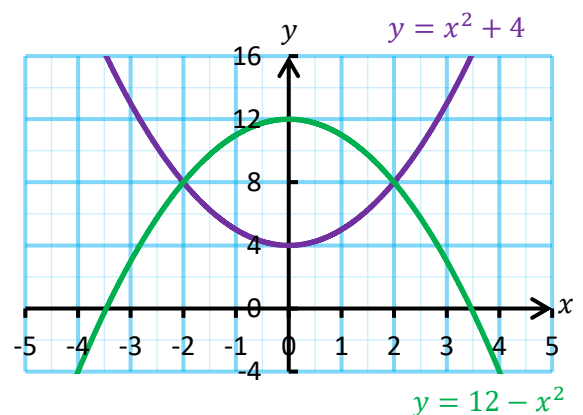
$$= \left(\frac{2^3}{3} + 4 \times 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 4 \times -2 \right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 8 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 8 \right)$$

$$= \frac{32}{3} - -\frac{32}{3}$$

$$= \frac{64}{3}$$

Felly'r arwynebedd rhwng y cromliniau yw $\frac{128}{3} - \frac{64}{3} = \frac{64}{3}$ uned sgwâr.





(C3 Haf 2007)

7. (a) Darganfyddwch (i) $\int \frac{1}{(5-2x)} dx$, (ii) $\int (3x+2)^{20} dx$,
(iii) $\int e^{7x} dx$. [7]

(b) Enrhifwch $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) dx$. [4]

(C3 Gaeaf 2006)

7. (a) Darganfyddwch

$$(i) \int \left(\frac{4}{7x+2} + \frac{5}{(3x+1)^3} \right) dx, \quad [4]$$

$$(ii) \int \cos 2x \, dx. \quad [2]$$

$$(b) \text{ Enrhifwch } \int_0^4 e^{\frac{x}{2}} \, dx. \quad [4]$$

(C3 Haf 2008)

7. (a) Darganfyddwch (i) $\int \sin 3x \, dx$, (ii) $\int \frac{2}{3x+5} \, dx$, (iii) $\int e^{3x+4} \, dx$. [6]

(b) Enrhifwch $\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^4} \, dx$. [4]

(C3 Gaeaf 2007)

7. (a) Darganfyddwch

(i) $\int \frac{1}{(2x+3)^5} dx$

(ii) $\int e^{2-3x} dx.$ [4]

(b) Enrhifwch $\int_0^2 \frac{6}{3x+2} dx,$ gan fynegi eich ateb fel logarithm sengl. [4]

(c) Enrhifwch $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx.$ [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Gaeaf 2010)

6. (a) Darganfyddwch

$$(i) \int \frac{1}{4x-7} dx, \quad (ii) \int e^{3x-1} dx, \quad (iii) \int \frac{5}{(2x+3)^4} dx. \quad [6]$$

$$(b) \text{ Enrhifwch } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx, \text{ gan fynegi eich ateb ar ffurf swrd.} \quad [4]$$

(C3 Haf 2012)

6. Darganfyddwch

$$(a) \quad (i) \int 3e^{2-\frac{x}{4}} dx \quad (ii) \int \frac{9}{(2x-3)^6} dx \quad (iii) \int \frac{7}{3x+1} dx \quad [6]$$

(b) O wybod bod $0 < a < \frac{\pi}{2}$ a bod

$$\int_0^a \sin 2x dx = \frac{1}{4},$$

darganfyddwch werth y cysonyn a .

[5]

(C3 Haf 2019)

6. (a) Darganfyddwch bob un o'r integrynnau canlynol, gan symleiddio eich ateb pan mae hyn yn bosibl.

(i) $\int \frac{7}{8x+1} dx$

(ii) $\int \frac{10}{(3x-2)^5} dx$

(iii) $\int \sec^2 3x dx$

[6]

- (b) O wybod bod $\frac{\pi}{3} < a < 3$ a bod

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^a \cos \frac{1}{2}x dx = 0.92,$$

darganfyddwch werth y cysonyn a . Rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[5]

(C3 Haf 2015)

7. (a) Darganfyddwch bob un o'r integrynnau canlynol a symleiddiwch eich ateb pan fo hyn yn bosibl.

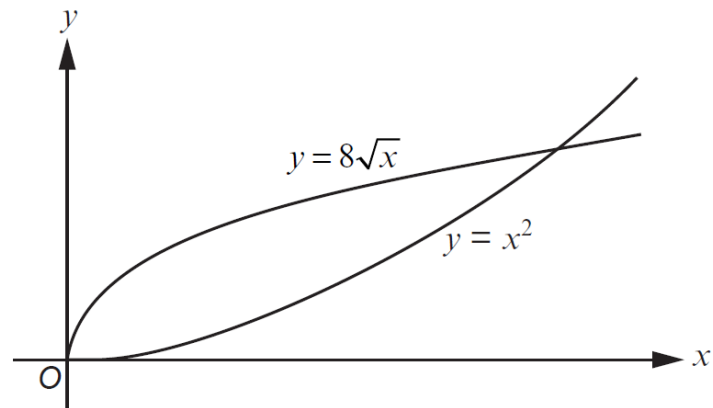
(i) $\int \frac{(7x^2 - 2)}{x} dx$

(ii) $\int \sin\left(\frac{2x}{3} - \pi\right) dx$ [5]

(b) Enrhifwch $\int_3^6 \frac{1}{\sqrt[4]{(5x - 14)}} dx$. [4]

(Uned 3 Haf 2022)

0	7
---	---

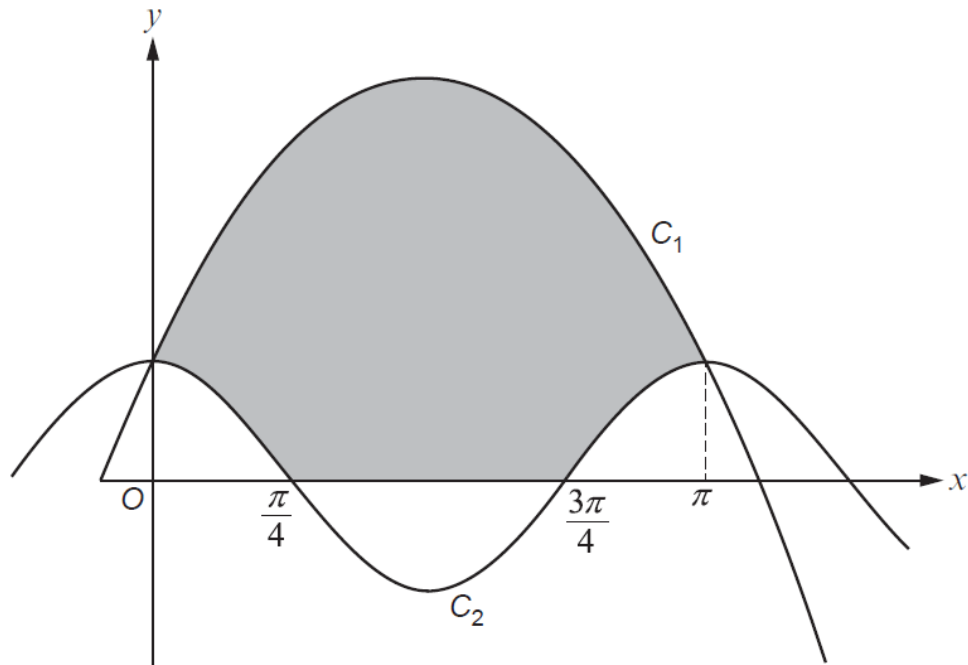
 Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r cromliniau $y = x^2$ ac $y = 8\sqrt{x}$.

Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i ffinio gan y ddwy gromlin. [7]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2024)

9. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r gromlin C_1 â'r hafaliad $y = -x^2 + \pi x + 1$ a braslun o'r gromlin C_2 â'r hafaliad $y = \cos 2x$. Mae'r cromliniau'n croestorri yn y pwyntiau lle mae $x = 0$ ac $x = \pi$.



Cyfrifwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu ac sydd wedi'i amgáu (*enclosed*) gan C_1 , C_2 a'r echelin- x . Rhwch eich ateb yn nhermau π . [9]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Cwestiwn Adolygu

(C3 Gaeaf 2014)

7. (a) Darganfyddwch bob un o'r canlynol a symleiddiwch eich ateb pan fo hyn yn bosibl.

(i) $\int e^{\frac{5x}{6}} dx$, (ii) $\int \sqrt[3]{8x+1} dx$, (iii) $\int \sin\left(1 - \frac{x}{3}\right) dx$. [6]

(b) O wybod bod $a > 2$, a bod

$$\int_2^a \frac{1}{4x-1} dx = 0.284,$$

darganfyddwch werth y cysonyn a . Rhowch eich ateb yn gywir i un lle degol. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Uned 3, Pecyn 18

13

Integru

Pellach 2

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Dadwneud rheol y gadwyn a rheol y lluoswm i allu **integu trwy amnewid** ag **integu fesul rhan**.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Lefel A Uned 1: Differu ac integru.
Lefel A Uned 3: Differu ac integru pellach.

I ble mae'n arwain?

Gall integru fesul rhan gael ei ymestyn at ddefnyddio fformiwlâu gostwng sy'n gallu integru mynegiadau fel $\cos^n x$.

Theori

Mewn achosion ble rydym yn ceisio integru rhywbeth sy'n cynnwys **ffwythiant a'i ddeilliad**, gallwn geisio ffeindio'r ateb gan **integu trwy amnewid**. Dangoswn sut mae hyn yn gweithio trwy ystyried yr enghraifft ganlynol.

Enghraifft 1

$$\int (24x^2 + 9)e^{8x^3 + 9x} dx$$

Rydym yn adnabod yn gyntaf bod yr integryn yn cynnwys y ffwythiant $f(x) = 8x^3 + 9x$ a'i ddeilliad $f'(x) = 24x^2 + 9$. Rydym yn dewis yr amnewid i'w ddefnyddio yn seiliedig ar y ffwythiant hwn: $u = 8x^3 + 9x$.

Trwy ddifferu u , rydym yn cael

$$\frac{du}{dx} = 24x^2 + 9$$

Gallwn ail-drefnu'r uchod i wneud dx yn destun:

$$\begin{aligned} du &= (24x^2 + 9) dx \\ \frac{du}{24x^2 + 9} &= dx \end{aligned}$$

Rydym nawr yn amnewid u yn lle $8x^3 + 9x$ a $\frac{du}{24x^2 + 9}$ yn lle dx yn yr integryn gwreiddiol:

$$\begin{aligned} &\int (24x^2 + 9)e^{8x^3 + 9x} dx \\ &= \int \cancel{(24x^2 + 9)} e^u \frac{du}{\cancel{24x^2 + 9}} \\ &= \int e^u du \end{aligned}$$

Mae e^u yn integru (mewn perthynas ag u) i roi e^u . Felly mae

$$\int e^u du = e^u + c$$



Theori

I orffen, rydym yn amnewid yn ôl ar gyfer u :

$$\int e^u du = e^{8x^3+9x} + c$$

Felly mae

$$\int (24x^2 + 9)e^{8x^3+9x} dx = e^{8x^3+9x} + c$$

Ymarfer 1

Defnyddiwch integru trwy amnewid i ddangos bod

$$\int 12x \cos(6x^2 - 4) dx = \sin(6x^2 - 4) + c$$

Yn gyffredinol, gallwn **integru trwy amnewid** pan rydym yn integru mynegiad o'r ffurf $f'(g(x))g'(x)$.

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

I ddangos pam fod yr uchod yn wir, gallwn ddefnyddio rheol y gadwyn i ddifferu $y = f(g(x)) + c$.

Gadewch i $u = g(x)$ fel bod $y = f(u) + c$.

Trwy ddifferu, $\frac{du}{dx} = g'(x)$ a $\frac{dy}{du} = f'(u)$.

Rheol y gadwyn: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$
 $\frac{dy}{dx} = f'(u) \times g'(x)$
 $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$

Felly, mae $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$, a gallwn feddwl am integru trwy amnewid fel y **gwrthdro** i reol y gadwyn.

Enghraifft 2

Enrhifwch $\int_0^{0.5} x \cos(3x^2 + 5) dx$.

Rydym yn adnabod yn gyntaf bod yr integryn yn cynnwys y ffwythiant $f(x) = 3x^2 + 5$ a **lluosrif** o'i ddeilliad $f'(x) = 6x$. Rydym yn dewis yr amnewid i'w ddefnyddio yn seiliedig ar y ffwythiant hwn: $u = 3x^2 + 5$.

Trwy ddifferu u , rydym yn cael

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

Gallwn ail-drefnu'r uchod i wneud dx yn destun:

$$\begin{aligned} du &= 6x dx \\ \frac{du}{6x} &= dx \end{aligned}$$

Rydym nawr yn amnewid u yn lle $3x^2 + 5$ a $\frac{du}{6x}$ yn lle dx yn yr integryn gwreiddiol:

$$\begin{aligned} &\int_0^{0.5} x \cos(3x^2 + 5) dx \\ &= \int_0^{0.5} \cancel{x} \cos(u) \frac{du}{\cancel{6x}} \\ &= \int_0^{0.5} \frac{1}{6} \cos(u) du \end{aligned}$$

Cyn integru mewn perthynas ag u , rhaid sicrhau fod y **terfannau** hefyd yn nhermau u , nid x . Ar hyn o bryd, rydym yn integru rhwng $x = 0$ ac $x = 0.5$. O gofio bod $u = 3x^2 + 5$,

$$\begin{aligned} \text{Os yw } x = 0 \text{ mae } u &= 3 \times 0^2 + 5 \\ &u = 5 \end{aligned}$$

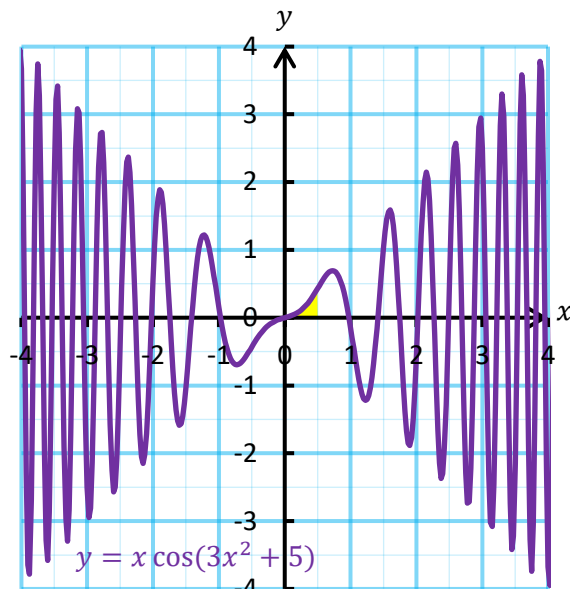
$$\begin{aligned} \text{Os yw } x = 0.5 \text{ mae } u &= 3 \times 0.5^2 + 5 \\ &u = 5.75 \end{aligned}$$

Felly'r integryn yn nhermau u yw

$$\int_5^{5.75} \frac{1}{6} \cos(u) du$$

Mae $\cos(u)$ yn integru (mewn perthynas ag u) i roi $\sin(u)$. Felly mae

$$\begin{aligned} &\int_5^{5.75} \frac{1}{6} \cos(u) du \\ &= \left[\frac{1}{6} \sin(u) \right]_5^{5.75} \\ &= \left(\frac{1}{6} \times \sin(5.75) \right) - \left(\frac{1}{6} \times \sin(5) \right) \\ &= -0.08471317958 - -0.1598207124 \\ &= 0.07510753282 \\ &= 0.075 \text{ uned sgwâr, i 3 lle degol} \end{aligned}$$



Ymarfer 2Enrhifwch $\int_1^2 12x e^{3x^2-4} dx$.**Integru $\sin^2(\theta)$ a $\cos^2(\theta)$**

Fe gofiwn o waith gynt bod

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$$

neu

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$$

Trwy ail-drefnu, mae

$$\frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \cos^2(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

Felly

$$\begin{aligned} \int \cos^2(\theta) d\theta &= \int \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta \\ &= \int \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \sin(2\theta) + \frac{\theta}{2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2(\theta) d\theta &= \int \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta) + c \end{aligned}$$

Enghraifft 3(a) Defnyddiwch yr amnewid $x = 4 \sin(\theta)$ i ddangos bod

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)}} dx = \int_0^a b \sin^2 \theta d\theta$$

lle mae a a b yn gysonion y mae eu gwerthoedd i'w darganfod.(b) **Trwy hyn**, enrhifwch

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)}} dx$$

Rhowch eich ateb yn y ffurf $c\pi + d$, lle mae c a d yn gyfanrifau y mae eu gwerthoedd i'w darganfod.

$$(a) \text{ Os yw } x = 4 \sin(\theta) \text{ yna } \frac{dx}{d\theta} = 4 \cos(\theta) \quad \text{ac mae} \quad x^2 = 16 \sin^2(\theta)$$

$$dx = 4 \cos(\theta) d\theta$$

$$\text{Terfannau: Os yw } x = 0 \text{ mae } 0 = 4 \sin(\theta) \quad \text{Os yw } x = 2\sqrt{2} \text{ mae } 2\sqrt{2} = 4 \sin(\theta)$$

$$0 = \sin(\theta) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\theta)$$

$$\theta = \sin^{-1}(0) \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\theta = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Felly

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16 \sin^2(\theta)}{\sqrt{(16-16 \sin^2(\theta))}} \times 4 \cos(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16 \sin^2(\theta)}{\sqrt{16(1-\sin^2(\theta))}} \times 4 \cos(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16 \sin^2(\theta)}{\sqrt{16 \cos^2(\theta)}} \times 4 \cos(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16 \sin^2(\theta)}{4 \cos(\theta)} \times 4 \cos(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \sin^2(\theta) d\theta$$

Felly $a = \frac{\pi}{4}$, $b = 16$.

(b)

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \sin^2(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8(1 - \cos(2\theta)) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8 - 8 \cos(2\theta) d\theta$$

$$= [8\theta - 4 \sin(2\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(8 \times \frac{\pi}{4} - 4 \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) \right) - (8 \times 0 - 4 \times \sin(2 \times 0))$$

$$= (2\pi - 4 \times 1) - (0 - 4 \times 0)$$

$$= (2\pi - 4) - (0 - 0)$$

$$= 2\pi - 4$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

Felly $c = 2$, $d = -4$.

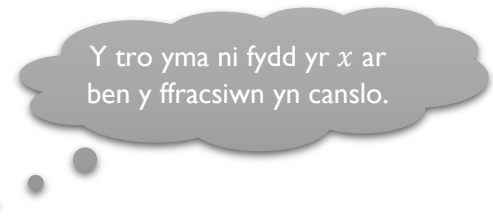
Ymarfer 3

Defnyddiwch amnewidiad priodol i ddangos bod

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Enghraifft 4

Defnyddiwch yr amnewid $u = 3x - 2$ i enrhifo



$$\int_1^2 \frac{x}{(3x - 2)^4} dx.$$

Os yw $u = 3x - 2$ yna $\frac{du}{dx} = 3$
 $du = 3 dx$
 $\frac{du}{3} = dx$

Os yw $u = 3x - 2$ yna $u + 2 = 3x$
 $\frac{u+2}{3} = x$

Terfannau: Os yw $x = 1$ mae $u = 3 \times 1 - 2$
 $u = 1$

Os yw $x = 2$ mae $u = 3 \times 2 - 2$
 $u = 4$

Felly

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \frac{x}{(3x - 2)^4} dx \\ &= \int_1^4 \frac{\left(\frac{u + 2}{3}\right)}{u^4} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 \frac{u + 2}{u^4} du \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 u^{-3} + 2u^{-4} du \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{u^{-2}}{-2} + \frac{2u^{-3}}{-3} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{9} \left[\left(\frac{4^{-2}}{-2} + \frac{2 \times 4^{-3}}{-3} \right) - \left(\frac{1^{-2}}{-2} + \frac{2 \times 1^{-3}}{-3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[\left(\frac{1}{-32} + \frac{2}{-192} \right) - \left(\frac{1}{-2} + \frac{2}{-3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[-\frac{1}{24} - -\frac{7}{6} \right] \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{9}{8} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ymarfer 4

Defnyddiwch yr amnewid $u = 2x - 3$ i enrhifo

$$\int_2^3 \frac{x}{(2x - 3)^3} dx.$$

Dewis amnewidiad priodol

Nid yw'r amnewid yn cael ei roi bob tro mewn cwestiwn arholiad. Dyma **rai** amnewidiadau addas.

Integryn	Amnewid
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$	$x = a \sin \theta$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$	$x = a \sin \theta$
$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$	$x = a \tan \theta$

Fel arall, ceisiwch ddewis amnewid ar gyfer u fel bod

- u a'i ddeilliad yn ymddangos yn yr integryn
- u yn ymddangos mewn cromfach
- u yn ymddangos yn yr enwadur
- u yn ffwythiant sydd wedi'i godi i'r pŵer uchaf

Integru Fesul Rhan

Yn y pecyn gynt ar ddifferu pellach, fe welsom **reol y lluoswm**, sef y dechneg ar gyfer differu mynegiad o'r ffurf $y = uv$.

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Gallwn integru'r uchod mewn perthynas as x i roi'r canlynol.

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$y = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$uv - \int v \frac{du}{dx} dx = \int u \frac{dv}{dx} dx$$

Mae hwn yn cael ei roi yn y llyfryn fformiwlâu.

Trwy gyfnewid ochrau, cawn y fformiwla ar gyfer **integru fesul rhan**:

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

Defnyddiwn y dechneg hon i integru mynegiad sy'n lluoswm o ddau ddarn, u a $\frac{dv}{dx}$.

Fel rheol, dewiswch u fel y ffwythiant sy'n ymddangos **uchaf** yn y rhestr 'LIATE' ganlynol.

L	Ffwythiannau L ogarithmig, e.e. $\ln(3x)$
I	Ffwythiannau T rigonometrig G wrthdro (I nverse), e.e. $\tan^{-1}(2x)$
A	Ffwythiannau A lgebraidd (polynomialau syml), e.e. $3x^2 - 5x + 8$
T	Ffwythiannau T rigonometrig, e.e. $\sin(5x)$
E	Ffwythiannau E sbonyddol, e.e. e^{7x}

Enghraifft 5

Darganfyddwch

$$\int 5x \cos x dx.$$

Ateb: Mae'r integryn yn lluoswm dau fynegiad, felly gallwn geisio defnyddio integru fesul rhan i'w dacio.

Gadewch i

$$u = 5x \quad \frac{dv}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = 5 \quad v = \sin x$$

Yna

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$\int 5x \cos x dx = 5x \times \sin x - \int \sin x \times 5 dx$$

$$\int 5x \cos x dx = 5x \sin x - \int 5 \sin x dx$$

$$\int 5x \cos x dx = 5x \sin x - -5 \cos x + c$$

$$\int 5x \cos x dx = 5x \sin x + 5 \cos x + c$$

$$\int 5x \cos x dx = 5(x \sin x + \cos x) + c$$



Theori

Ymarfer 5

Darganfyddwch

$$\int 7xe^{3x} dx.$$

Enghraifft 6

Darganfyddwch

$$\int x^2 e^x dx.$$

Ateb: Gadewch i

$$\begin{aligned} u &= x^2 & \frac{dv}{dx} &= e^x \\ \frac{du}{dx} &= 2x & v &= e^x \end{aligned}$$

Yna

$$\begin{aligned} \int u \frac{dv}{dx} dx &= uv - \int v \frac{du}{dx} dx \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 \times e^x - \int e^x \times 2x dx \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2xe^x dx \end{aligned}$$

Nawr ar gyfer $\int 2xe^x dx$ rhaid integru fesul rhan eto.

Gadewch i

$$\begin{aligned} u &= 2x & \frac{dv}{dx} &= e^x \\ \frac{du}{dx} &= 2 & v &= e^x \end{aligned}$$

Yna

$$\begin{aligned} \int u \frac{dv}{dx} dx &= uv - \int v \frac{du}{dx} dx \\ \int 2x e^x dx &= 2x \times e^x - \int e^x \times 2 dx \end{aligned}$$

$$\int 2x e^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx$$

$$\int 2x e^x dx = 2xe^x - 2e^x + c$$

Felly

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x + c)$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

Gallwn barhau i
adio'r cysonyn
integu (Pam?)

Ymarfer 6

Darganfyddwch

$$\int e^x \sin x dx.$$



(C4 Haf 2010)

7. (a) Darganfyddwch $\int x^3 \ln x \, dx$. [4]

(b) Defnyddiwch yr amnewid $u = 2x - 3$ i enrhifo $\int_1^2 x(2x - 3)^4 \, dx$. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2005)

7. (a) Defnyddiwch yr amnewid $u = 2x - 1$ i enrhifo

$$\int_0^1 x(2x-1)^9 dx . \quad [5]$$

(b) (i) Darganfyddwch $\int x \cos 2x dx$. [4]

(ii) Defnyddiwch y canlyniad yn (b)(i) i ddarganfod

$$\int x \cos^2 x dx . \quad [3]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2011)

7. (a) Darganfyddwch $\int x \sin 2x dx$. [4]

(b) Defnyddiwch yr amnewid $u = 5 - x^2$ i enrhifo

$$\int_0^2 \frac{x}{(5-x^2)^3} dx . \quad [4]$$

(C4 Haf 2016)

6. (a) Darganfyddwch $\int (2x+1)e^{-3x} dx$. [4]

(b) Defnyddiwch yr amnewid $u = 4 + 5 \tan x$ i enrhifo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4+5\tan x}}{\cos^2 x} dx. [4]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2014)

7. (a) Darganfyddwch $\int x^4 \ln 2x \, dx$. [4]

(b) Defnyddiwch yr amnewid $u = 10 \cos x - 1$ i enrhifo

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(10 \cos x - 1)} \sin x \, dx. \quad [4]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2007)

7. (a) Darganfyddwch $\int x^2 \ln x \, dx$. [4]

(b) Defnyddiwch yr amnewid $x = 2\sin\theta$ i ddangos bod

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = \int_0^a k \sin^2 \theta \, d\theta ,$$

lle mae gwerthoedd a a k i'w darganfod.

Trwy hyn, neu fel arall, enrhifwch $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$. [8]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2018)

1	4
---	---

 Enrhifwch

a) $\int_1^2 x^3 \ln x \, dx$. [6]

b) $\int_0^1 \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$. [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Cwestiwn Adolygu

(Uned 3 Haf 2019)

1	4
---	---

 a) Darganfyddwch $\int (e^{2x} + 6\sin 3x) dx$. [2]

b) Darganfyddwch $\int 7(x^2 + \sin x)^6 (2x + \cos x) dx$. [1]

c) Darganfyddwch $\int \frac{1}{x^2} \ln x dx$. [4]

ch) Defnyddiwch yr amnewid $u = 2\cos x + 1$ i enrhifo

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(2\cos x + 1)^2} dx$$
. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

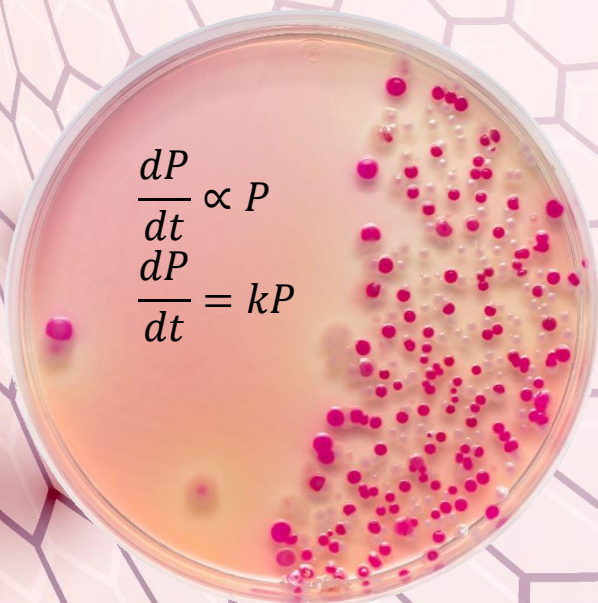


Uned 3, Pecyn 19

13

Hafaliadau

Differol



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Datrys **hafaliadau differol trefn un**, sydd yn hafaliadau sy'n cynnwys ffwythiant a'i ddeilliad.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Lefel A Uned 1: Differu ac integru; logarithmau.
Lefel A Uned 3: Integru pellach.

I ble mae'n arwain?

Mathemateg Pellach: datrys hafaliadau differol trefn dau.
Cymwysiadau: Modelu cylchedau trydanol; grymoedd ar drawstiau.

Theori

Mae **hafaliad differol** yn cysylltu ffwythiant y a'i ddeilliad $\frac{dy}{dx}$. Trwy wahanu'r newidynnau ac integru, gallwn ffeindio hafaliad sy'n cysylltu x ag y .

Enghraifft (C4 Haf 2005)

Gellir modelu maint P poblogaeth o facteria fel newidyn di-dor fel bod cyfradd cynnydd P ar amser t diwrnod mewn cyfrannedd union â P .

- (a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae P yn ei fodloni.
(b) O wybod mai maint cychwynnol y boblogaeth yw P_0 , dangoswch fod $P = P_0 e^{kt}$, lle mae k yn gysonyn positif.
(c) Dau ddiwrnod ar ôl cychwyn, maint y boblogaeth yw $1.2P_0$. Darganfyddwch pryd fydd maint y boblogaeth yn $2P_0$.

Ateb: (a) Os yw cyfradd cynnydd P ar amser t diwrnod mewn cyfrannedd union â P , yna

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &\propto P \\ \frac{dP}{dt} &= kP\end{aligned}$$

- (b) Yn gwahanu'r newidynnau yn yr hafaliad differol uchod,

$$\begin{aligned}dP &= kP dt \\ \frac{1}{P} dP &= k dt\end{aligned}$$

Yn integru,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{P} dP &= \int k dt \\ \ln|P| &= kt + c\end{aligned}$$

Maint cychwynnol y boblogaeth yw P_0 , felly mae $P = P_0$ pan fo $t = 0$.

$$\begin{aligned}\ln|P_0| &= k(0) + c \\ \ln|P_0| &= c\end{aligned}$$



Theori

Felly

$$\ln|P| = kt + \ln|P_0|$$

$$\ln|P| - \ln|P_0| = kt$$

$$\ln\left|\frac{P}{P_0}\right| = kt$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{kt}$$

$$P = P_0 e^{kt}$$

(c) Os yw $t = 2$, mae $P = 1.2P_0$. Felly

$$1.2P_0 = P_0 e^{k(2)}$$

$$1.2 = e^{2k}$$

$$\ln(1.2) = 2k$$

$$\frac{1}{2}\ln(1.2) = k$$

Felly

$$P = P_0 e^{\frac{1}{2}\ln(1.2)t}$$

Os yw $P = 2P_0$,

$$2P_0 = P_0 e^{\frac{1}{2}\ln(1.2)t}$$

$$2 = e^{\frac{1}{2}\ln(1.2)t}$$

$$\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(1.2)t$$

$$\frac{2\ln(2)}{\ln(1.2)} = t$$

$$t = 7.60 \text{ diwrnod, i 2 le degol.}$$

Sefydlu Hafaliad Differol

Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl canlynol.

Disgrifiad	Perthynas Cyfrannol	Hafaliad Differol
Mae cyfradd cynnydd P ar amser t mewn cyfrannedd union â P^2 .	$\frac{dP}{dt} \propto P^2$	$\frac{dP}{dt} = kP^2$
Mae cyfradd cynnydd P ar amser t mewn cyfrannedd wrthdro â P^2 .	$\frac{dP}{dt} \propto \frac{1}{P^2}$	$\frac{dP}{dt} = \frac{k}{P^2}$
Mae cyfradd lleihad P ar amser t mewn cyfrannedd union â P^2 .	$\frac{dP}{dt} \propto -P^2$	$\frac{dP}{dt} = -kP^2$
Mae cyfradd lleihad P ar amser t mewn cyfrannedd wrthdro â P^2 .	$\frac{dP}{dt} \propto -\frac{1}{P^2}$	$\frac{dP}{dt} = -\frac{k}{P^2}$
Mae cyfradd cynnydd P ar amser t mewn cyfrannedd union â P^3 .		
Mae cyfradd lleihad P ar amser t mewn cyfrannedd wrthdro â P .		
Mae cyfradd cynnydd P ar amser t mewn cyfrannedd wrthdro â P^4 .		
Mae cyfradd lleihad P ar amser t mewn cyfrannedd union â \sqrt{P} .		



(C4 Haf 2006)

8. Mae dŵr yn gollwng o dwll sydd yng ngwaelod tanc dŵr mawr. Dyfnder y dŵr ar amser t munud yw x metr. Mae cyfradd lleihad x mewn cyfranedd union ag \sqrt{x} .

(a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae x yn ei fodloni. [1]

(b) O wybod mai dyfnder y dŵr yn y tanc pan fydd $t = 0$ yw 9 metr, dangoswch fod

$$kt = 6 - 2\sqrt{x},$$

lle mae k yn gysonyn positif. [4]

(c) O wybod mai dyfnder y dŵr yn y tanc pan fydd $t = 20$ yw 4 metr, darganfyddwch yr amser y mae'n cymryd i'r tanc wagio'n llwyr (*empty*). [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2007)

8. Gellir modelu pris eitem $\pounds P$ ar amser t mlynedd gan newidyn di-dor sydd fel bod cyfradd cynnydd P mewn cyfrannedd union â P .
- (a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae P yn ei fodloni. [1]
- (b) O wybod mai pris yr eitem pan fydd $t = 0$ yw $\pounds 50$, dangoswch fod $P = 50e^{kt}$, lle mae k yn gysonyn positif. [5]
- (c) Pris yr eitem ar ôl saith mlynedd yw $\pounds 65$. Darganfyddwch bris yr eitem ar ôl un deg chwe blynedd. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2009)

7. Mae'n bosibl modelu gwerth cydran electronig fel newidyn di-dor. Gwerth y gydran ar amser t mlynedd yw $\pounds P$. Mae cyfradd lleihad P mewn cyfrannedd union â P^3 .

(a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae P yn ei fodloni. [1]

(b) Gwerth y gydran pan fydd $t = 0$ yw $\pounds 20$. Dangoswch fod

$$\frac{1}{P^2} = \frac{1}{400} + At,$$

lle mae A yn gysonyn positif. [5]

(c) O wybod mai gwerth y gydran pan fydd $t = 1$ yw $\pounds 10$, darganfyddwch yr amser pan fydd ei gwerth yn $\pounds 5$. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2010)

8. Mae gwerth car wedi'i ddynodi gan $\pounds V$. Mae'n bosibl modelu V fel newidyn di-dor ac ar amser t mlynedd, mae cyfradd lleihad V mewn cyfrannedd union â V^2 .

(a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae V yn ei fodloni. [1]

(b) O wybod bod $V = 12000$ pan fydd $t = 0$, dangoswch fod

$$V = \frac{12000}{at + 1},$$

lle mae a yn gysonyn. [4]

(c) Gwerth y car ar ddiwedd dwy flynedd yw $\pounds 9000$. Darganfyddwch werth y car ar ddiwedd pedair blynedd. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2013)

8. Mae rhan o wyneb llyn bach wedi'i orchuddio gan algâu gwyrdd. Arwynebedd y rhan o'r llyn sydd wedi'i orchuddio gan yr algâu ar amser t blwyddyn yw $A \text{ m}^2$. Mae cyfradd cynnydd A mewn cyfrannedd union ag \sqrt{A} .

(a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae A yn ei fodloni. [1]

(b) Arwynebedd y rhan o'r llyn sydd wedi'i orchuddio gan yr algâu ar amser $t = 3$ yw 64 m^2 a'r arwynebedd sydd wedi'i orchuddio ar amser $t = 5.5$ yw 196 m^2 . Darganfyddwch fynegiad ar gyfer A yn nhermau t . [6]

Dotted lines for writing answers.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2015)

9. Mae gwerthwr llyfrau yn rhoi gwerth o £ A ar lyfr prin (*rare*) ar Awst 1^{af} 2010. Mae'n bosibl modelu gwerth, £ P , y llyfr t mlynedd ar ôl y dyddiad hwn fel newidyn di-dor. Gallwch dybio bod cyfradd cynnydd P mewn cyfrannedd union â P^2 .

(a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae P yn ei fodloni. [1]

(b) Dangoswch fod

$$\frac{1}{k} \left(\frac{P - A}{PA} \right) = t,$$

lle mae k yn gysonyn. [4]

(c) Gwerth y llyfr ar Awst 1^{af} 2013 yw £800 a'i werth ar Awst 1^{af} 2014 yw £900. Darganfyddwch werth A . [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2016)

7. Mae'n bosibl modelu gwerth £ V car penodol fel newidyn di-dor. Ar amser t blynedd, mae cyfradd lleihad V mewn cyfrannedd union â V^3 .

(a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae V yn ei fodloni. [1]

(b) O wybod mai gwerth cychwynnol y car yw £ A , dangoswch fod

$$V^2 = \frac{A^2}{bt+1},$$

lle mae b yn gysonyn. [4]

(c) Pan mae $t = 2$, mae gwerth y car wedi gostwng i hanner ei werth cychwynnol. Darganfyddwch werth t pan fydd gwerth y car wedi gostwng i chwarter ei werth cychwynnol. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2018)

8. Gwerth paentiad (*painting*) ar 1 Ionawr 2000 oedd £900. Mae'n bosibl modelu gwerth, $\pounds V$, y paentiad t o flynyddoedd ar ôl y dyddiad hwn fel newidyn di-dor. Gallwch dybio bod cyfradd cynnydd V mewn cyfrannedd union â $V^{\frac{3}{2}}$.

(a) Ysgrifennwch hafaliad differol sy'n cael ei fodloni gan V . [1]

(b) Gwerth y paentiad ar 1 Ionawr 2003 oedd £1600.
Darganfyddwch beth oedd ei werth ar 1 Ionawr 2008. [8]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2018)

1	5
---	---

 Mae'r newidyn y yn bodloni'r hafaliad differol

$$2\frac{dy}{dx} = 5 - 2y, \quad \text{lle mae } x \geq 0.$$

O wybod bod $y = 1$ pan mae $x = 0$, darganfyddwch fynegiad ar gyfer y yn nhermau x . [5]

(Uned 3 Haf 2019)

1	3
---	---

Mae blodau gwyllt yn tyfu ar yr ymyl wair (*grass verge*) wrth ochr traffordd. Yr arwynebedd sydd â blodau gwyllt drosto ar amser t o flynyddoedd yw A m². Mae cyfradd cynnydd A mewn cyfrannedd union ag A .

- a) Ysgrifennwch hafaliad differol y mae A yn ei fodloni. [1]
- b) Ar amser $t = 0$, yr arwynebedd sydd â blodau gwyllt drosto yw 0.2m². Flwyddyn yn ddiweddarach, mae'r arwynebedd wedi cynyddu i 1.48m². Darganfyddwch fynegiad ar gyfer A yn nhermau t yn y ffurf pq^t , lle mae p a q yn rhifau cymarebol i'w darganfod. [7]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.



Ffracsiynau

Rhannol

Ffwythiant Cymarebol	Ffracsiynau Rhannol
$\frac{px + q}{(ax + b)(cx + d)}$	$\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d}$
$\frac{px + q}{(ax + b)^2}$	$\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2}$
$\frac{px^2 + qx + r}{(ax + b)(cx + d)(ex + f)}$	$\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d} + \frac{C}{ex + f}$
$\frac{px^2 + qx + r}{(ax + b)^2(cx + d)}$	$\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2} + \frac{C}{cx + d}$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Gwahanu ffracsiwn algebraidd i roi swm ffracsiynau efo enwaduron llinol. Defnyddio'r gwaith yma i integru ffracsiynau algebraidd.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Lefel A Uned 1: Differu ac integru.
Lefel A Uned 3: Integru pellach.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau: Lleihau'r sŵn cefndirol mewn clip sain; cywasgu ffeiliau cyfrifiadurol; astudio sut mae cyffur yn dadfeilio yn y corff.

Theori

Symleiddio Mynegiadau Cymarebol

Cyn defnyddio'r technegau ar gyfer ffracsiynau algebraidd sy'n dilyn, mae'n bwysig gwirio i weld os yw'n bosib symleiddio mynegiad algebraidd gan ddefnyddio technegau blaenorol.



Enghraifft 1

Symleiddiwch $\frac{15x+20}{(3x+4)(2x-3)}$.

$$\begin{aligned} \text{Ateb: } \frac{15x+20}{(3x+4)(2x-3)} &= \frac{5(\cancel{3x+4})}{(\cancel{3x+4})(2x-3)} \\ &= \frac{5}{(2x-3)} \end{aligned}$$

Enghraifft 3

Symleiddiwch $\frac{6x^3-5x^2+2x+3}{2x+1}$.

Ateb: Trwy ddefnyddio ffrâm rannu,

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 3 \\ 2x + 1 \overline{) 6x^3 - 5x^2 + 2x + 3} \\ \underline{6x^3 + 3x^2} \\ -8x^2 + 2x + 3 \\ \underline{-8x^2 - 4x} \\ 6x + 3 \\ \underline{6x + 3} \\ \hline \hline \end{array}$$

Felly $\frac{6x^3-5x^2+2x+3}{2x+1} = 3x^2 - 4x + 3$.

Enghraifft 2

Symleiddiwch $\frac{x^2+8x+15}{x^2+2x-15}$.

$$\begin{aligned} \text{Ateb: } \frac{x^2+8x+15}{x^2+2x-15} &= \frac{\cancel{(x+5)}(x+3)}{\cancel{(x+5)}(x-3)} \\ &= \frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

Enghraifft 4

Symleiddiwch $\frac{6x^3-5x^2+2x+5}{2x+1}$.

Ateb: Trwy ddefnyddio ffrâm rannu,

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 3 \\ 2x + 1 \overline{) 6x^3 - 5x^2 + 2x + 5} \\ \underline{6x^3 + 3x^2} \\ -8x^2 + 2x + 5 \\ \underline{-8x^2 - 4x} \\ 6x + 5 \\ \underline{6x + 3} \\ \hline 2 \end{array}$$

Felly $\frac{6x^3-5x^2+2x+5}{2x+1} = 3x^2 - 4x + 3 + \frac{2}{2x+1}$.

Ymarfer 1

Symleiddiwch $\frac{12x-8}{(2x+5)(3x-2)}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 3

Symleiddiwch $\frac{6x^3+19x^2+37x+18}{3x+2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 5

Datrysych yr hafaliad $\frac{2x^2-3x-20}{x-4} = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 2

Symleiddiwch $\frac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 4

Symleiddiwch $\frac{6x^3+19x^2+37x+15}{3x+2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 6

Datrysych yr hafaliad $\frac{6x^6+11x^5-4x^4-4x^3}{2x+1} = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ffracsiynau Rhannol

O gael ffracsiwn ble mae'r enwadur yn lluoswm ffactorau llinol, gallwn ddadelfennu'r ffracsiwn i mewn i'w **ffracsiynau rhannol**.

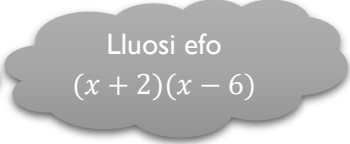


Enghraifft 5

Mynegwch y ffracsiwn $\frac{7x-10}{(x+2)(x-6)}$ yn nhermau ffracsiyanu rhannol.

Ateb: Mae'n bosib ysgrifennu'r ffracsiwn yn y ffurf $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-6}$, ble mae A a B yn rhifau mae angen eu darganfod.

$$\begin{aligned} \frac{7x-10}{(x+2)(x-6)} &\equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-6} \\ 7x-10 &\equiv \frac{A(x+2)(x-6)}{x+2} + \frac{B(x+2)(x-6)}{x-6} \\ 7x-10 &\equiv A(x-6) + B(x+2) \end{aligned}$$



Mae dwy dechneg ar gyfer ceisio darganfod gwerthoedd A a B :

- Amnewid gwerthoedd i mewn i'r unfathiant, fel arfer gwerthoedd sy'n dileu rhai o'r termau;
- Cymharu cyfernodau, e.e. cyfernodau x .

Trwy amnewid $x = 6$ i mewn i'r unfathiant, bydd y term efo'r A yn diflannu, a gallwn gyfrifo gwerth B .

$$\begin{aligned} 7(6) - 10 &\equiv A(6 - 6) + B(6 + 2) \\ 42 - 10 &\equiv A(0) + B(8) \\ 32 &\equiv 8B \\ B &\equiv 4 \end{aligned}$$

Trwy amnewid $x = -2$ i mewn i'r unfathiant, bydd y term efo'r B yn diflannu, a gallwn gyfrifo gwerth A .

$$\begin{aligned} 7(-2) - 10 &\equiv A(-2 - 6) + B(-2 + 2) \\ -14 - 10 &\equiv A(-8) + B(0) \\ -24 &\equiv -8A \\ A &\equiv 3 \end{aligned}$$

Felly $\frac{2x}{(x+2)(x-6)} = \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-6}$.

Ymarfer 7

Mynegwch y ffracsiwn $\frac{13x-1}{(x+3)(x-7)}$ yn nhermau ffracsiyanu rhannol.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Os yw enwadur yn cynnwys ffactor wedi'i sgwario, rhaid ystyried y ffactor yn unigol ac wedi'i sgwario.

Enghraifft 6 (C4 Haf 2005)

(a) Mynegwch y ffracsiwn $\frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)}$ yn nhermau ffracsiyanu rhannol.

(b) Darganfyddwch $\int \frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)} dx$.

Ateb: (a) Mae'n bosib ysgrifennu'r ffracsiwn yn y ffurf $\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$, ble mae A , B ac C yn rhifau mae angen eu darganfod.

$$\begin{aligned} \frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)} &\equiv \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \\ 8x^2+x-5 &\equiv \frac{A(2x-1)^2(x+2)}{2x-1} + \frac{B(2x-1)^2(x+2)}{(2x-1)^2} + \frac{C(2x-1)^2(x+2)}{x+2} \\ 8x^2+x-5 &\equiv A(2x-1)(x+2) + B(x+2) + C(2x-1)^2 \end{aligned}$$

Lluosi efo
 $(2x-1)^2(x+2)$

Trwy amnewid $x = -2$ i mewn i'r unfathiant, bydd y termau efo'r A a'r B yn diflannu, a gallwn gyfrifo gwerth C .

$$\begin{aligned} 8(-2)^2 + (-2) - 5 &\equiv A(2(-2) - 1)(-2 + 2) + B(-2 + 2) + C(2(-2) - 1)^2 \\ 32 - 2 - 5 &\equiv A(0) + B(0) + C(25) \\ 25 &\equiv 25C \\ C &\equiv 1 \end{aligned}$$

Trwy amnewid $x = 0.5$ i mewn i'r unfathiant, bydd y termau efo'r A a'r C yn diflannu, a gallwn gyfrifo gwerth B .

$$\begin{aligned} 8(0.5)^2 + 0.5 - 5 &\equiv A(2(0.5) - 1)(0.5 + 2) + B(0.5 + 2) + C(2(0.5) - 1)^2 \\ 2 + 0.5 - 5 &\equiv A(0) + B(2.5) + C(0) \\ -2.5 &\equiv 2.5B \\ B &\equiv -1 \end{aligned}$$

Trwy gymharu cyfernodau x^2 , gallwn gyfrifo gwerth A .

$$\begin{aligned} 8 &\equiv 2A + 0B + 4C \\ 8 &\equiv 2A + 4(1) \\ 4 &\equiv 2A \\ A &\equiv 2 \end{aligned}$$

$(2x-1)(x+2) =$
 $2x^2 + 3x - 2,$
 $(2x-1)^2 =$
 $4x^2 - 4x + 1$

Felly $\frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x+2}$.

$$\begin{aligned} \text{(b) } \int \frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)} dx &= \int \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x+2} dx \\ &= \int \frac{2}{2x-1} dx - \int (2x-1)^{-2} dx + \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \ln|2x-1| + \frac{1}{2}(2x-1)^{-1} + \ln|x+2| + c \\ &= \ln|(2x-1)(x+2)| + \frac{1}{2(2x-1)} + c \end{aligned}$$

Pa ddulliau eraill y byddai'n bosib eu defnyddio i ddarganfod gwerth A ?

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2007)

1. (a) Mynegwch $\frac{x+3}{x^2(x-1)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

(b) Darganfyddwch $\int \frac{x+3}{x^2(x-1)} dx$. [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2010)

1. Mae'r ffwythiant f wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = \frac{8 - x - x^2}{x(x-2)^2}.$$

(a) Mynegwch $f(x)$ yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

(b) Defnyddiwch eich canlyniad i ran (a) i ddarganfod gwerth $f'(1)$. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2013)

1. Mae'r ffwythiant f wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = \frac{6 + x - 9x^2}{x^2(x + 2)}.$$

(a) Mynegwch $f(x)$ yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

(b) Gan ddefnyddio eich canlyniad i ran (a),

(i) darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f'(x)$,

(ii) gwireddwch fod gan $f(x)$ werth arhosol pan fydd $x = 2$. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2014)

2. (a) Mynegwch $\frac{5x^2 + 7x + 17}{(x + 1)^2(x - 4)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

(b) Defnyddiwch eich ateb i ran (a) i fynegi $\frac{5x^2 + 9x + 9}{(x + 1)^2(x - 4)}$ yn nhermau ffracsiynau rhannol. [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2022)

1	0
---	---

 Datrysych yr hafaliad

$$\frac{6x^5 - 17x^4 - 5x^3 + 6x^2}{(3x + 2)} = 0. \quad [5]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned 3 Haf 2024)

1. Mae'r ffwythiant f yn cael ei roi gan

$$f(x) = \frac{25x + 32}{(2x - 5)(x + 1)(x + 2)} .$$

(a) Mynegwch $f(x)$ yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing the answer.

- (b) Dangoswch fod $\int_1^2 f(x) dx = -\ln P$, lle mae P yn gyfanrif y mae ei gwerth i'w ddarganfod.

[5]

- (c) Dangoswch fod arwydd $f(x)$ yn newid yn y cyfwng (*interval*) $x = 2$ i $x = 3$. Esboniwch pam mae'r dull newid arwydd yn methu lleoli un o wreiddiau'r hafaliad $f(x) = 0$ yn yr achos hwn.

[2]

Integru fel Terfan Swm

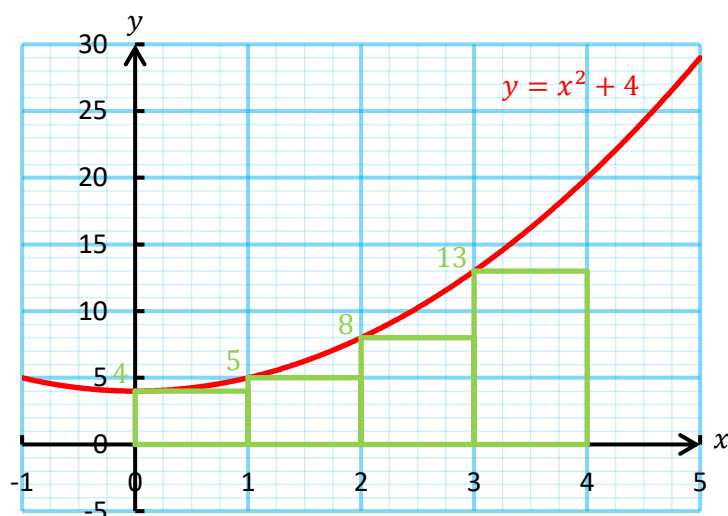
Gallwn ddefnyddio integru i ddarganfod yr arwynebedd wedi'i ffinio gan y gromlin $y = f(x)$, yr echelin- x , y llinell $x = a$ a'r llinell $x = b$.

$$\int_a^b y \, dx$$

Byddai'n bosib amcangyfrif yr arwynebedd yma trwy ei hollti i mewn i betryalau o led gyson δx .

Enghraifft 7

Mae'r diagram isod yn dangos y gromlin $y = x^2 + 4$ rhwng $x = -1$ ac $x = 5$.



Gallwn amcangyfrif gwerth $\int_0^4 x^2 + 4 \, dx$ trwy ddefnyddio'r petryalau gwyrdd uchod, i gyd o led 1 uned. Uchder bob petryal yw gwerth y ffwythiant ar ochr chwith y petryal.

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx \approx (1 \times 4) + (1 \times 5) + (1 \times 8) + (1 \times 13)$$

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx \approx 30$$

Gwelwn o'r diagram bod yr amcangyfrif yn tanamcangyfrif, gan fod y gromlin goch yn gorwedd uwchben y petryalau. Go wir, mae

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^4$$

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx = \left[\frac{4^3}{3} + 4 \times 4 \right] - \left[\frac{0^3}{3} + 4 \times 0 \right]$$

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx = \frac{112}{3}$$

Felly, mae ein hamcangyfrif $\frac{112}{3} - 30 = \frac{22}{3}$ uned sgwâr yn rhy fach. Byddai'n bosib gwella'r amcangyfrif trwy ddefnyddio mwy o betryalau, o led llai.

Yn gyffredinol, os oes gennym n petryal, i gyd o led δx , yna'r amcangyfrif o'r arwynebedd A yw

$$A \approx y_1 \delta x + y_2 \delta x + \dots + y_n \delta x$$

Gallwn ysgrifennu'r swm uchod gan ddefnyddio nodiant sigma:

$$A \approx \sum_{i=1}^n y_i \delta x$$

Wrth i ni gynyddu'r nifer o betryalau n , byddai lled δx y petryalau'n lleihau a byddai'r swm yn rhoi gwell amcangyfrif ar gyfer yr arwynebedd. Trwy gymryd y derfan, mae

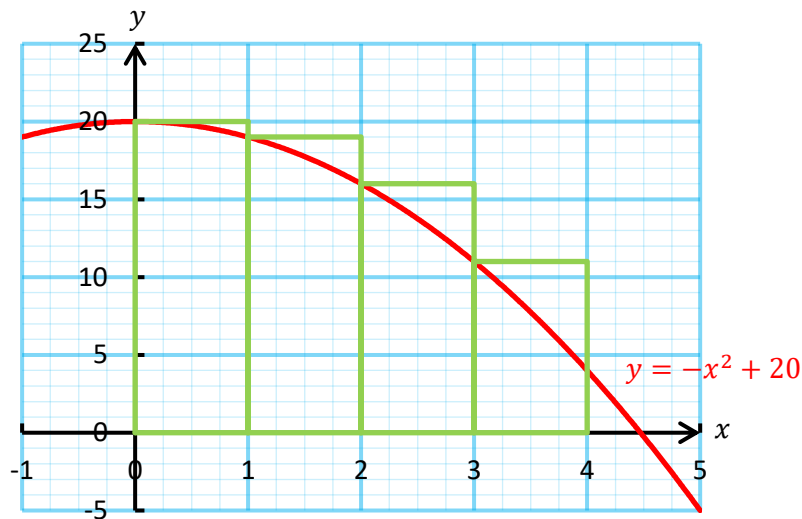
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \delta x = \int_a^b y \, dx$$

Gan fod y gwerthoedd y_i yn dod o'r ffwythiant $y = f(x)$, gallwn ysgrifennu

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \delta x = \int_a^b y \, dx$$

Ymarfer 8

Mae'r diagram isod yn dangos y gromlin $y = -x^2 + 20$ rhwng $x = -1$ ac $x = 5$.



Darganfyddwch amcangyfrif ar gyfer $\int_0^4 -x^2 + 20 \, dx$ trwy ddefnyddio'r pedwar petryal gwyrdd yn y diagram.

A yw eich amcangyfrif yn tanamcangyfrif neu'n goramcangyfrif?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Uned 3, Pecyn 21

13

Prawf Trwy

Wrthddywediad

“Gadewch i ni brofi bod hyn yn wir...”



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Profi fod rhywbeth yn wir trwy ddangos bod y gwrthwyneb ddim yn gallu bod yn wir.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

TGAU: Datrys hafaliadau ac anhafaleddau.
Lefel A Uned 1: Prawf.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau: Dangos bod nifer anfeidrol o rifau cysefin; dangos nad yw'n bosib ysgrifennu syrddiau megis $\sqrt{2}$ fel ffracsiwn $\frac{a}{b}$.

Theori



Theori

Prawf trwy wrthddywediad

Gallwn brofi fod rhywbeth yn wir trwy ddangos bod y gwrthwyneb byth yn gallu bod yn wir.

Enghraifft 1 (C4 Haf 2005)

Cwblhewch y prawf trwy wrthddywediad canlynol i ddangos bod $x + \frac{25}{x} \geq 10$ lle mae x yn real a phositif.

Tybiwch fod $x + \frac{25}{x} < 10$, lle mae x yn real a phositif.

Oherwydd bod x yn positif, mae lluosu dwy ochr yr anhafaledd ag x yn rhoi $x^2 + 25 < 10x$.

Ateb: Trwy dynnu $10x$ o bob ochr, cawn $x^2 - 10x + 25 < 0$.

Trwy ffactorio, mae $(x - 5)(x - 5) < 0$.
 $(x - 5)^2 < 0$.

Mae sgwario unrhyw rif real yn rhoi rhif sy'n fwy na neu'n hafal i 0, felly does dim gwerth real a phositif ar gyfer x fel bod $(x - 5)^2$ yn llai na sero. Mae hwn yn wrthddywediad i'r dybiaeth bod x yn real, felly rhaid bod $x + \frac{25}{x} \geq 10$ os yw x yn real a phositif.

Enghraifft 2 (C4 Haf 2006)

Cwblhewch y prawf trwy wrthddywediad canlynol i ddangos bod $\sqrt{2}$ yn anghymarebol.

Tybiwch fod $\sqrt{2}$ yn gymarebol. Yna gellir ysgrifennu $\sqrt{2}$ yn y ffurf $\frac{a}{b}$, lle mae a, b yn gyfanrifau positif sydd heb ffactor cyffredin.

$\therefore a^2 = 2b^2$.
 \therefore mae 2 yn ffactor o a^2 .
 \therefore mae 2 yn ffactor o a , ac felly mae $a = 2k$, lle mae k yn gyfanrif.

\therefore yw 'felly'

Ateb: Yn amnewid $a = 2k$ i mewn i $a^2 = 2b^2$, cawn
 $(2k)^2 = 2b^2$.
 $4k^2 = 2b^2$.
 $2k^2 = b^2$.

\therefore mae 2 yn ffactor o b^2 .

\therefore mae 2 yn ffactor o b .

Ond os yw 2 yn ffactor o a ac o b , yna mae hyn yn gwrthdweud y dybiaeth gynt bod a, b yn gyfanrifau positif heb ffactor cyffredin. (Rydym wedi darganfod ffactor cyffredin, sef 2.)

Felly, nid yw $\sqrt{2}$ yn gymarebol.

Enghraifft 3

Defnyddiwch brawf trwy wrthddywediad i ddangos bod nifer anfeidrol o rifau cysefin.

Ateb: Cymerwch i'r gwrthwyneb bod nifer meidrol n o rifau cysefin yn bodoli.

Gallwn restru'r rhifau cysefin hyn: $2, 3, 5, 7, \dots, p_n$.

Gadewch i x fod yn lluoswm yr holl rifau cysefin hyn, ac yna adio un.

$$x = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p_n) + 1.$$

Nid yw 2 yn ffactor o x gan fod gweddill o 1 wrth rannu x efo 2.

Gallwn ddefnyddio'r un ddadl i ddangos bod yr holl rifau cysefin hyd at p_n ddim chwaith yn ffactorau o x .

Felly, rhaid bod x yn rhif cysefin sy'n fwy na p_n .

Mae hyn yn gwrthdweud y dybiaeth gynt mai'r rhif cysefin mwyaf yw p_n .

Felly rhaid bod nifer anfeidrol o rifau cysefin.

Enghraifft 4 (C4 Haf 2014)

Cwblhewch y prawf trwy wrthddywediad canlynol i ddangos bod

$$\sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2}$$

ar gyfer bob gwerth o θ .

Tybiwch fod gwerth ar gyfer θ fel bod $\sin \theta + \cos \theta > \sqrt{2}$.

Yna, mae sgwario'r ddwy ochr yn rhoi:

Ateb: $(\sin \theta + \cos \theta)^2 > 2$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta) > 2$$

$$\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta > 2$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta > 2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta > 2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta > 2$$

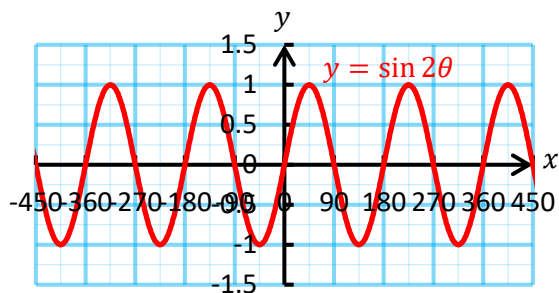
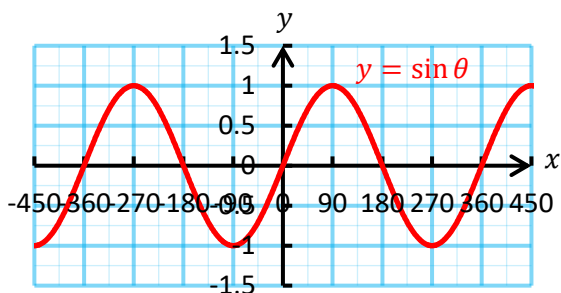
(yn defnyddio $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$)

$$2 \sin \theta \cos \theta > 1$$

$$\sin 2\theta > 1$$

(yn defnyddio $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$)

Mae graff $\sin \theta$ yn amrywio rhwng -1 ac 1 , felly mi fydd graff $\sin 2\theta$ hefyd yn amrywio rhwng -1 ac 1 .



Felly mae'n amhosib ffeindio gwerth ar gyfer θ fel bod $\sin 2\theta > 1$.

Mae hwn yn wrthddywediad i'r dybiaeth gynt bod $\sin \theta + \cos \theta > \sqrt{2}$.

Felly, rhaid bod $\sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2}$ ar gyfer bob gwerth o θ .



(C4 Haf 2008)

10. Defnyddiwch brawf trwy wrthddywediad i brofi'r gosodiad canlynol.

Pan fydd x yn real a phositif, mae

$$x + \frac{49}{x} \geq 14 .$$

Rhoddir llinell gyntaf y prawf isod.

Tybiwch fod gwerth real a phositif o x yn bodoli fel bod

$$x + \frac{49}{x} < 14 . \quad [4]$$

(C4 Haf 2010)

10. Defnyddiwch brawf trwy wrthddywediad i brofi'r gosodiad canlynol.

Os yw a, b yn rhifau real positif, yna mae $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Mae llinell gyntaf y prawf wedi'i rhoi isod.

Tybiwch fod rhifau real positif a, b yn bodoli fel bod $a + b < 2\sqrt{ab}$. [3]

(C4 Haf 2013)

10. Defnyddiwch brawf trwy wrthddywediad i brofi'r gosodiad canlynol.

Pan fydd x yn real, mae,

$$(5x - 3)^2 + 1 \geq (3x - 1)^2.$$

Mae llinell gyntaf y prawf wedi'i rhoi isod.

Tybiwch fod gwerth real o x fel bod

$$(5x - 3)^2 + 1 < (3x - 1)^2.$$

[3]

(Uned 3 Haf 2024)

5. Profwch drwy wrthddywediad y gosodiad canlynol:

Pan mae x yn real ac yn bositif, $x + \frac{81}{x} \geq 18$. [4]

(C4 Haf 2009)

10. Cwblhewch y prawf trwy wrthddywediad canlynol i ddangos bod $\sqrt{3}$ yn anghymarebol.

Tybiwch fod $\sqrt{3}$ yn gymarebol. Yna gallwn ysgrifennu $\sqrt{3}$ yn y ffurf $\frac{a}{b}$ lle mae a, b yn gyfanrifau sydd heb ffactorau cyffredin.

$$\therefore a^2 = 3b^2.$$

\therefore mae 3 yn ffactor o a^2 .

\therefore mae 3 yn ffactor o a , ac felly mae $a = 3k$, lle mae k yn gyfanrif. [4]

(Uned 3 Haf 2019)

1	5
---	---

Defnyddiwch brawf drwy wrthddywediad i ddangos bod $\sqrt{6}$ yn anghymarebol.

[5]

Area with horizontal dotted lines for writing the proof.

(Uned 3 Haf 2018)

1	1
---	---

 Ar gyfer pob rhif real x fel bod $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, profwch drwy wrthddywediad fod

$$\sin x + \cos x \geq 1.$$

[4]

(C4 Haf 2007)

10. Cwblhewch y prawf trwy wrthddywediad canlynol i ddangos, os yw n yn gyfanrif positif a $3n + 2n^3$ yn odrif, yna mae n yn odrif.

*Mae'n hysbys bod $3n + 2n^3$ yn odrif.
Tybiwch fod n yn eilrif ac felly mae $n = 2k$.*

[2]

(C4 Haf 2015)

10. Defnyddiwch brawf trwy wrthddywediad i brofi'r gosodiad canlynol.

Os yw a a b yn odrifau fel bod 4 yn ffactor o $a - b$,
yna **nid** yw 4 yn ffactor o $a + b$.

Mae llinellau cyntaf y prawf wedi'u rhoi isod.

*Tybiwch fod 4 yn ffactor o $a + b$.
Yna, mae cyfanrif c yn bodoli fel bod $a + b = 4c$.*

[3]

(Uned 3 Haf 2022)

1	7
---	---

 a) Profwch fod

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \equiv (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta). \quad [2]$$

b) i) Trwy hyn dangoswch ei bod yn bosibl mynegi $\frac{\cos 3\theta + \sin 5\theta}{\cos 4\theta + \sin 4\theta}$ fel $\cos \theta + \sin \theta$.

ii) Esboniwch pam mae $\frac{\cos 3\theta + \sin 5\theta}{\cos 4\theta + \sin 4\theta} \neq \cos \theta + \sin \theta$ pan mae $\theta = \frac{3\pi}{16}$. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(C4 Haf 2017)

10. Cwblhewch y prawf trwy wrthddywediad canlynol i ddangos bod $\sqrt{7}$ yn anghymarebol (*irrational*).

Tybiwch fod $\sqrt{7}$ yn gymarebol. Yna mae'n bosibl ysgrifennu $\sqrt{7}$ ar y ffurf $\frac{a}{b}$,

lle mae a, b yn gyfanrifau sydd heb ffactorau cyffredin.

\therefore Mae $a^2 = 7b^2$.

\therefore Mae gan a^2 ffactor 7.

\therefore Mae gan a ffactor 7 fel bod $a = 7k$, lle mae k yn gyfanrif.

[3]

(C4 Haf 2019)

10. Profwch drwy wrthddywediad y gosodiad canlynol.

Pan mae x yn real ac $x \neq 0$,

$$\left|4x + \frac{1}{x}\right| \geq 4.$$

Mae dwy linell gyntaf y prawf wedi'u rhoi isod.

Tybiwch (Assume) fod gwerth real o x fel bod

$$\left|4x + \frac{1}{x}\right| < 4.$$

Yna gan sgwario'r ddwy ochr, mae gennym:

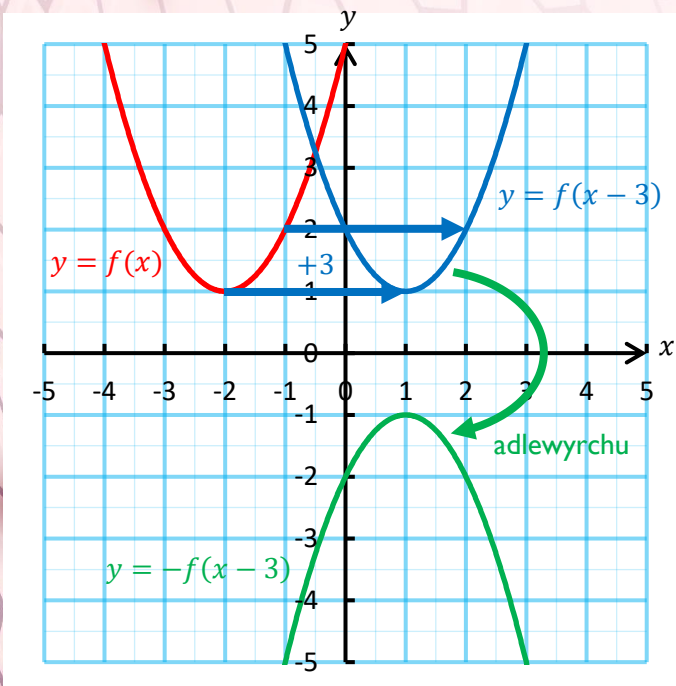
[3]



Cyfuno

Trawsffurfiadau

Graffiau



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Cyfuno'r trawsffurfiadau graffiau o Uned I.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Plotio graffiau, trawsffurfiadau graffiau.
Lefel A Uned I: Trawsffurfiadau graffiau.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau: Trawsnewid unedau (e.e. tymheredd mewn Celsius, Fahrenheit a Kelvin); mudiant harmonig syml.

Theori

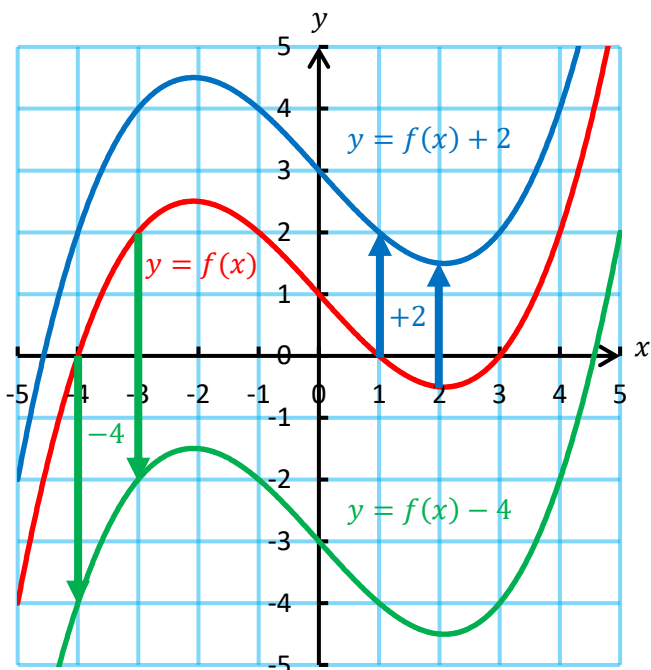
Mae'r theori canlynol yn dod o'r nodiadau TGAU, neu o'r nodiadau Uned I. Bydd y cwestiynau yn y pecyn hwn yn **cyfuno'r** darnau sy'n dilyn.



Trawsffurfiadau Graffiau

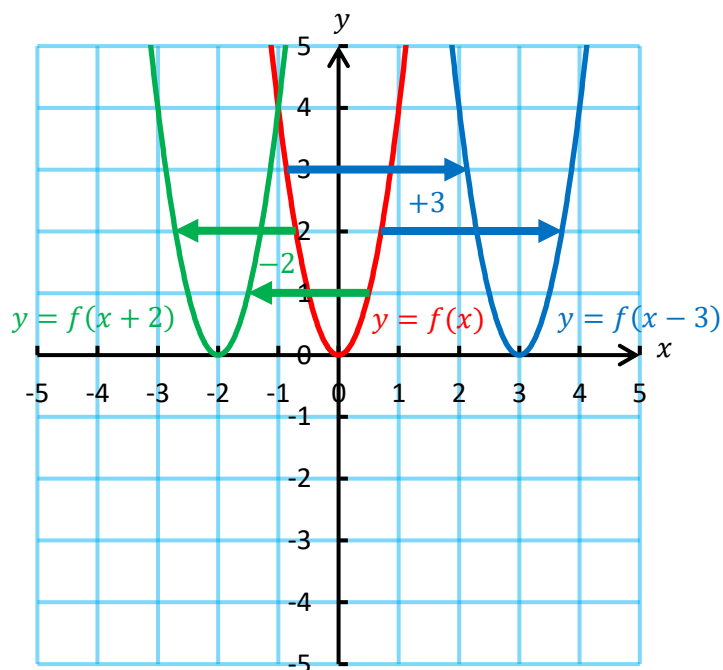
Gallwn drawsffurfio graff y ffwythiant $y = f(x)$ gan ddefnyddio'r technegau canlynol.

$$y = f(x) + a$$



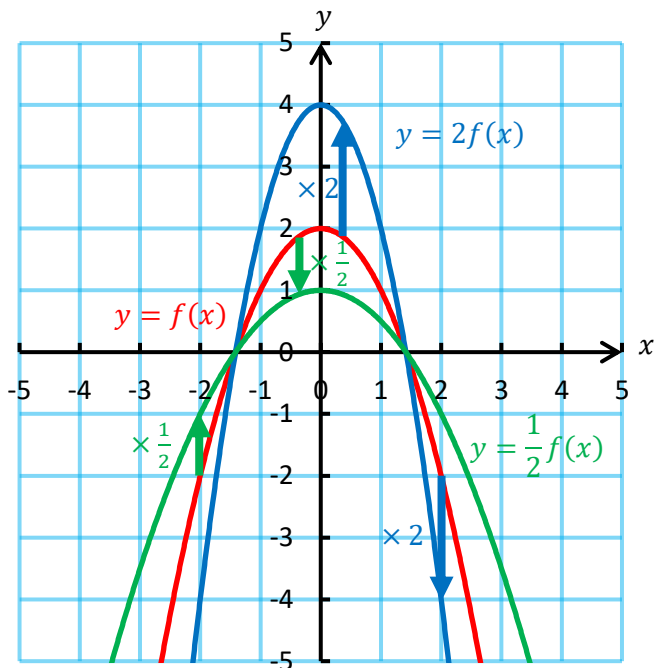
Mae'r trawsffurfiad $y = f(x) + a$ yn symud y graff a uned i fyny (os yw a yn bositif) neu a uned i lawr (os yw a yn negatiff).

$$y = f(x + a)$$



Mae'r trawsffurfiad $y = f(x + a)$ yn symud y graff a uned i'r chwith (os yw a yn bositif) neu a uned i'r dde (os yw a yn negatiff).

$y = af(x)$

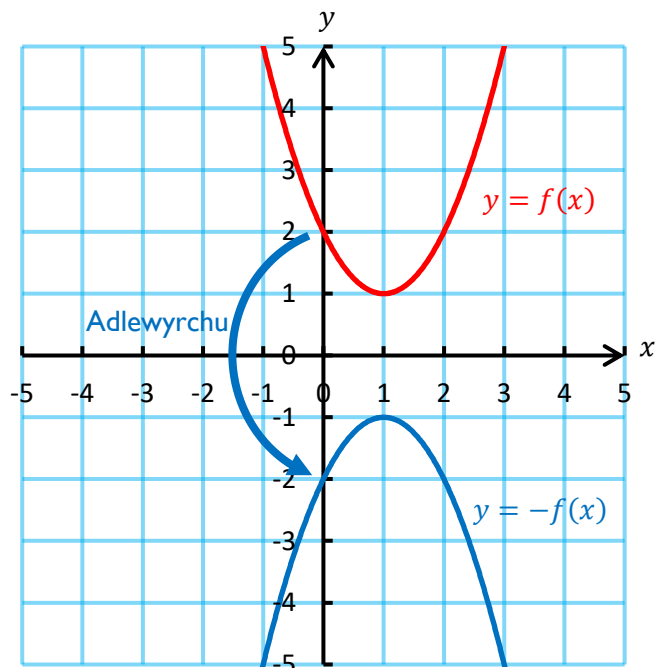


Mae'r trawsffurfiad $y = af(x)$ yn ymestyn y graff yng nghyfeiriad yr echelin-y (os yw $a > 1$) neu yn cywasgu y graff yng nghyfeiriad yr echelin-y (os yw $0 < a < 1$).

Fel canllaw cyffredinol, mae angen **dilyn** beth sy'n digwydd **y tu allan** i gromfach, a **dadwneud** unrhyw beth sy'n digwydd **y tu mewn** i gromfach. Felly, er enghraifft, rydym yn dilyn $y = f(x) + 3$ ac yn symud y graff 3 uned i fyny; ond rydym yn dadwneud $y = f(x + 3)$ gan symud y graff 3 uned i'r chwith.

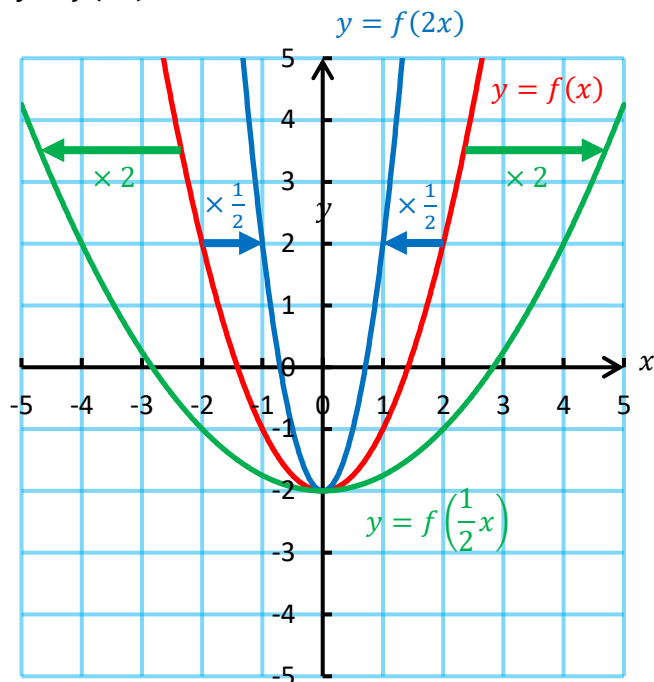
Achosion arbennig

$y = -f(x)$



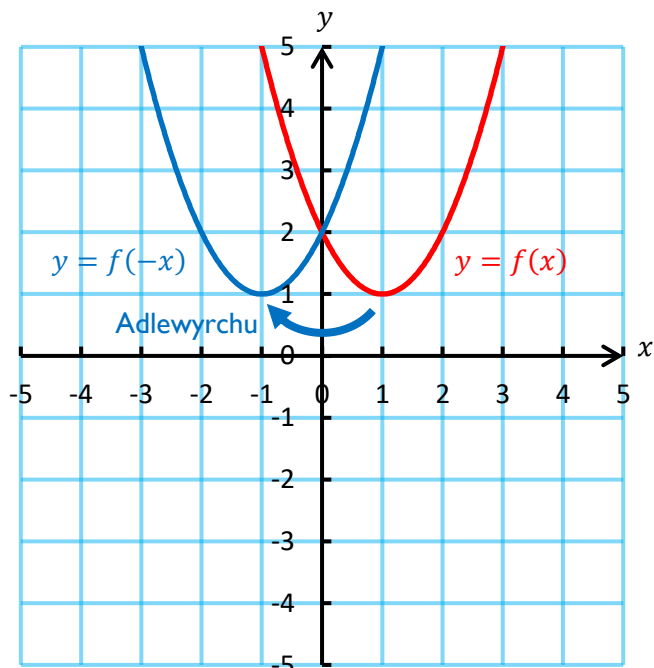
Mae'r trawsffurfiad $y = -f(x)$ yn adlewyrchu graff $y = f(x)$ yn yr echelin-x.

$y = f(ax)$



Mae'r trawsffurfiad $y = f(ax)$ yn cywasgu y graff yng nghyfeiriad yr echelin-x (os yw $a > 1$) neu yn ymestyn y graff yng nghyfeiriad yr echelin-x (os yw $0 < a < 1$).

$y = f(-x)$



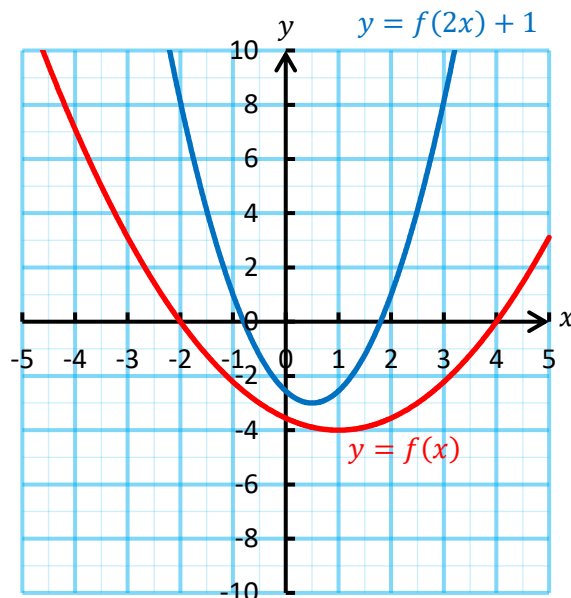
Mae'r trawsffurfiad $y = f(-x)$ yn adlewyrchu graff $y = f(x)$ yn yr echelin-y.

Cyfuno'r Trawsffurfiadau

Ystyriwch y graff ar gyfer $y = f(x)$ sy'n cael ei ddangos ar y dde.

I blotio $y = f(2x) + 1$, rhaid cyfuno dau drawsffurfiad.

- Yn gyntaf, rhaid ffurfio $y = f(2x)$, sy'n cywasgu yng nghyfeiriad yr echelin- x . O dan y trawsffurfiad yma, mae'r pwyntiau $(-2, 0)$, $(1, -4)$ a $(4, 0)$ yn symud i'r pwyntiau $(-1, 0)$, $(\frac{1}{2}, -4)$ a $(2, 0)$.
- Yna, rhaid ffurfio $y = f(2x) + 1$, sy'n symud y graff un uned i fyny. Mae'r pwyntiau $(-1, 0)$, $(\frac{1}{2}, -4)$ a $(2, 0)$ yn symud i'r pwyntiau $(-1, 1)$, $(\frac{1}{2}, -3)$ a $(2, 1)$.



Ymarfer 1

Llenwch y tabl canlynol, sy'n ystyried sut i gyfuno dau drawsffurfiad graffiau.

Ym mhob achos, dangoswch beth sy'n dangos i'r pwynt $(8, 12)$ o dan y trawsffurfiadau.

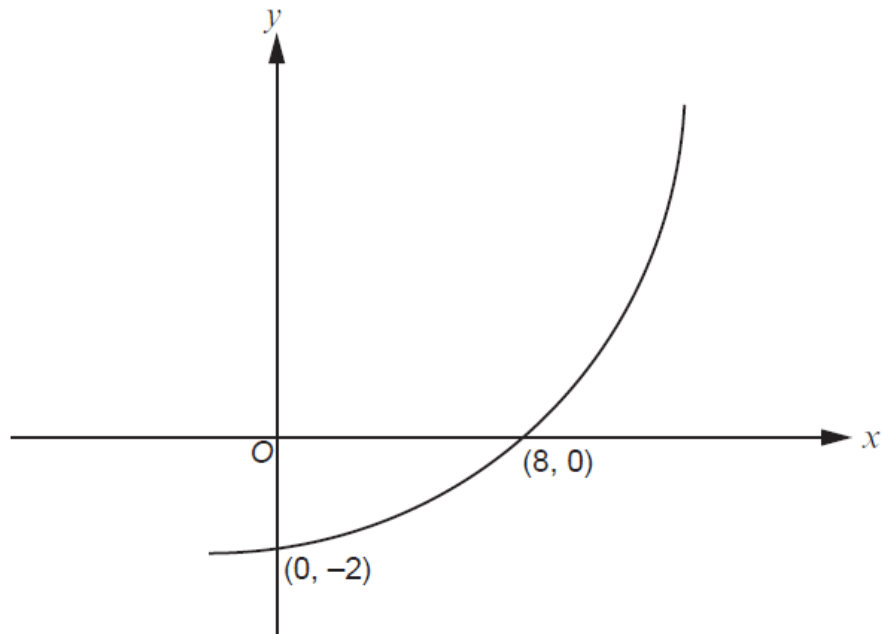
Trawsffurfiad	Cam cyntaf	Effaith ar $(8, 12)$	Ail gam	Effaith ar $(8, 12)$
$y = 3f(x - 2)$	$y = f(x - 2)$ Symud 2 uned i'r dde	$(10, 12)$	$y = 3f(x - 2)$ Ymestyn ar hyd yr echelin- y	$(10, 36)$
$y = f(x + 1) - 4$				
$y = f(2x) + 3$				
$y = 5f(4x)$				
$y = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}x\right)$				
$y = -f(x + 4)$				
$y = 2f(-x)$				
$y = 3 - f(x)$				
$y = f\left(\frac{1}{3}x\right) + 7$				
$y = -2f(-3x)$				

Y 10 Uchaf

(Uned 3 Haf 2019)

0	7
---	---

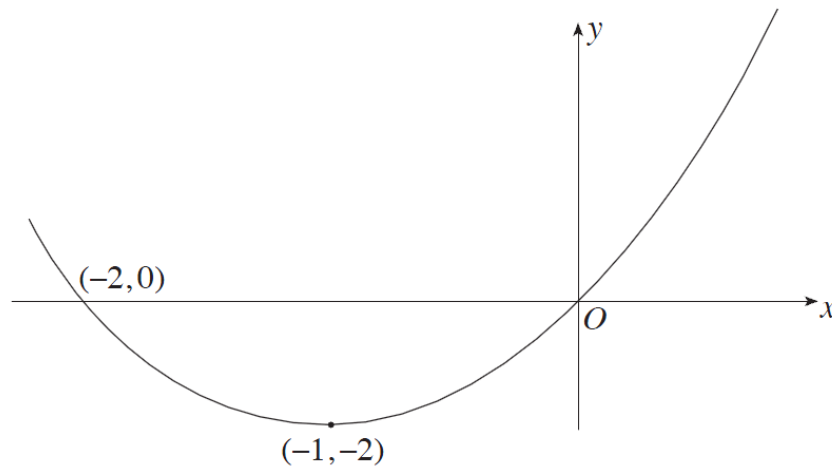
Mae'r diagram isod yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn croesi'r echelin- y yn y pwynt $(0, -2)$, a'r echelin- x yn y pwynt $(8, 0)$.



- a) Brasluniwch graff $y = -4f(x + 3)$. Dangoswch gyfesurynnau'r pwynt lle mae'r graff yn croesi'r echelin- x a chyfesuryn- y y pwynt lle mae $x = -3$. [3]
- b) Brasluniwch graff $y = 3 + f(2x)$. Dangoswch gyfesuryn- y y pwynt lle mae $x = 4$. [2]

(C3 Gaeaf 2007)

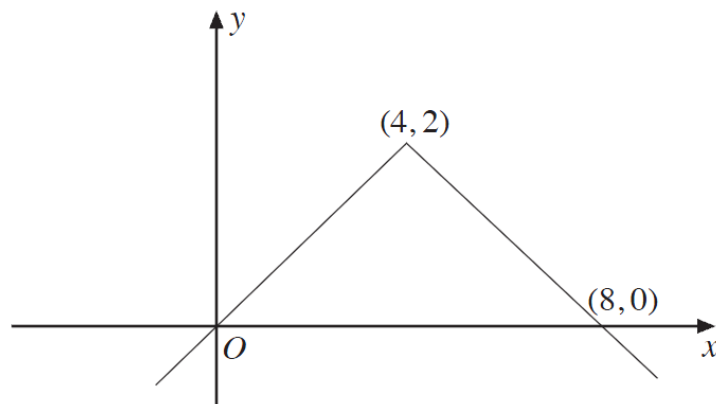
8. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r tarddbwynt a'r pwynt $(-2, 0)$, ac mae ganddo bwynt minimwm yn $(-1, -2)$.



- (a) Brasluniwch graff $y = 2f(x - 3)$. Nodwch gyfesurynnau'r pwynt arhosol a'r pwyntiau lle mae'r graff yn croesi'r echelin- x . [3]
- (b) Ar ddiagram gwahanol, brasluniwch graff $y = -f(x) + 1$. Nodwch gyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau'r pwynt lle mae'r graff yn croesi'r echelin- y . [3]

(C3 Gaeaf 2008)

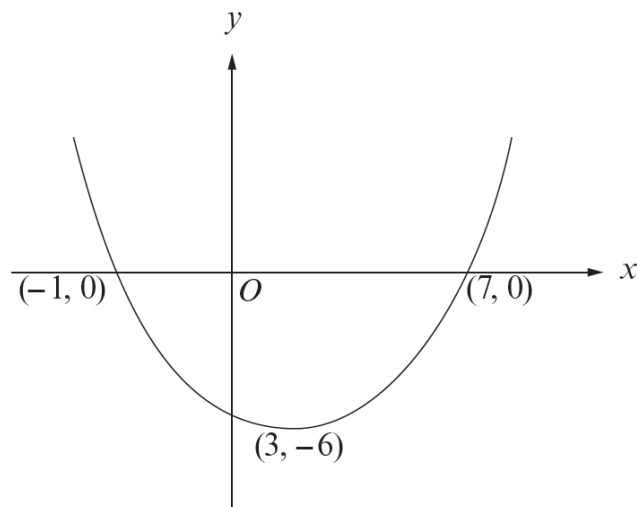
8. Mae'r diagram yn dangos graff $y = f(x)$. Pwynt uchaf y graff yw $(4, 2)$ ac mae'r graff yn croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau $(0, 0)$ ac $(8, 0)$.



- (a) Brasluniwch graff $y = 2f(x + 3)$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt uchaf a'r pwyntiau lle mae'r graff yn croestorri'r echelin- x . [3]
- (b) Ar ddiagram gwahanol, brasluniwch graff $y = f(2x) + 1$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt uchaf a'r pwynt lle mae'r graff yn croestorri'r echelin- y . [3]

(C3 Haf 2013)

9. Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r pwyntiau $(-1, 0)$ a $(7, 0)$ ac mae ganddo bwynt minimwm (isafbwynt) yn $(3, -6)$.



Brasluniwch graff $y = -\frac{2}{3}f(x + 4)$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau'r graff â'r echelin-x. [3]

(C3 Gaeaf 2010)

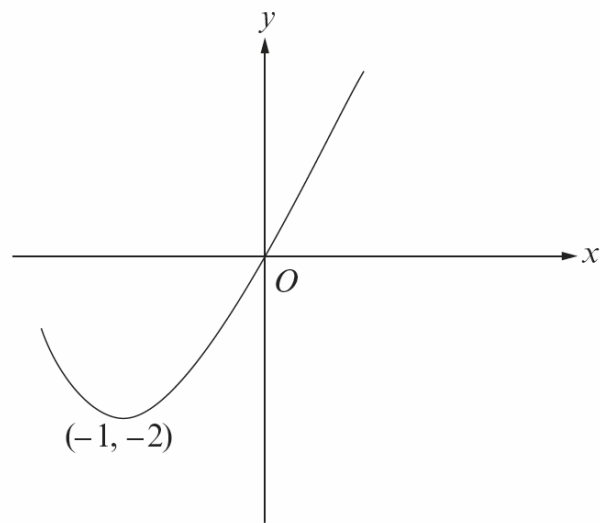
8. O wybod bod $f(x) = e^x$, brasluniwch, ar yr un diagram, graffiau $y = f(x)$ ac $y = 2f(x) - 3$. Labelwch gyfesurynnau croestorfan pob un o'r graffiau â'r echelin-y. Nodwch beth yw ffurf pob un o'r graffiau ar gyfer gwerthoedd x sy'n fawr a phositif a mawr a negatif. [5]

(C3 Gaeaf 2009)

8. O wybod bod $f(x) = \ln x$, brasluniwch, ar yr un diagram, graffiau $y = f(x)$ ac $y = -f(x + 1)$. Labelwch gyfesurynnau'r croestorfannau â'r echelin- x a dangoswch beth yw ffurf y graffiau ar gyfer gwerthoedd y sy'n fawr a phositif a mawr a negatif. [5]

(C3 Haf 2012)

8. Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r tarddbwynt ac mae ganddo bwynt minimwm (isafbwynt) yn $(-1, -2)$.

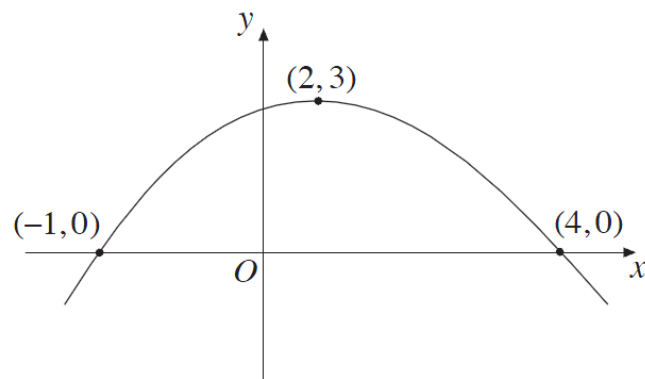


Brasluniwch graff $y = -4f(2x)$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol.

[3]

(C3 Haf 2009)

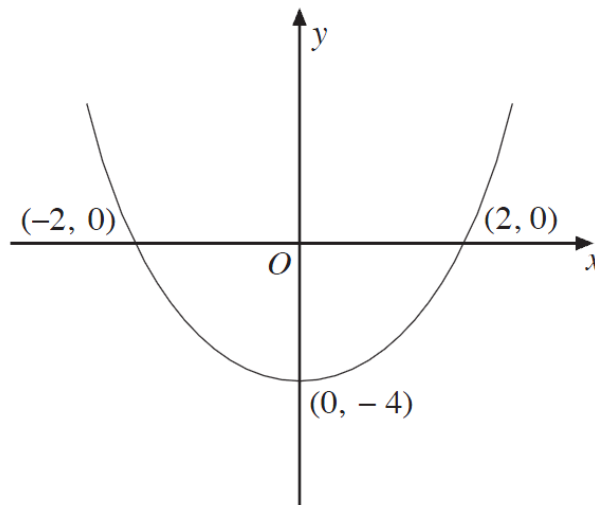
8.



Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Pwynt uchaf y graff yw $(2, 3)$ ac mae'r graff yn croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau $(-1, 0)$ a $(4, 0)$. Brasluniwch graff $y = 3f(x - 2)$, gan nodi cyfesurynnau tri phwynt ar y graff. [3]

(C3 Haf 2008)

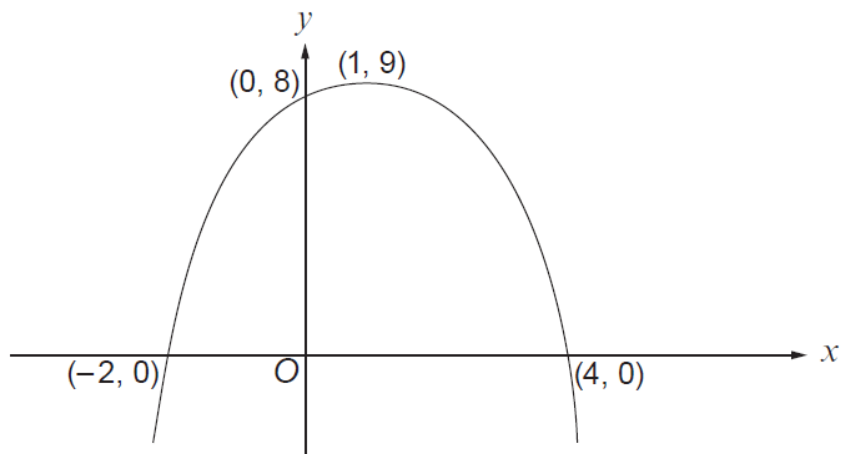
6. (a) Mae'r diagram yn dangos graff $y = f(x)$. Mae gan y graff bwynt arhosol yn $(0, -4)$ ac mae'n croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau $(-2, 0)$ a $(2, 0)$.



Brasluniwch graff $y = 3f(x - 1)$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a'r pwyntiau lle mae'r graff yn croesi'r echelin- x . [3]

(Uned 3 Haf 2018)

0 3 Mae'r diagram isod yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r pwyntiau $(-2, 0)$, $(0, 8)$, $(4, 0)$ ac mae ganddo uchafbwynt (pwynt maccsimwm) yn $(1, 9)$.



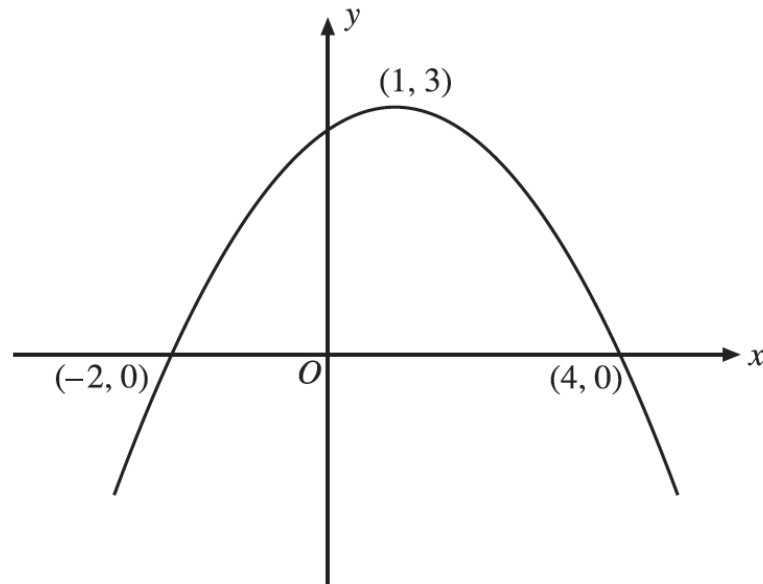
- a) Brasluniwch graff $y = 2f(x + 3)$. Dangoswch gyfesurynnau'r pwynt arhosol a'r pwyntiau lle mae'r graff yn croesi'r echelin- x . [3]
- b) Brasluniwch graff $y = 5 - f(x)$. Dangoswch gyfesurynnau'r pwynt arhosol a'r pwynt lle mae'r graff yn croesi'r echelin- y . [3]



Cwestiynau Adolygu

(C3 Gaeaf 2011)

8. Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r pwyntiau $(-2, 0)$ a $(4, 0)$ ac mae ganddo bwynt magsimwm (uchafbwynt) yn $(1, 3)$.



Brasluniwch graff $y = -3f(x + 2)$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau'r graff â'r echelin- x . [3]

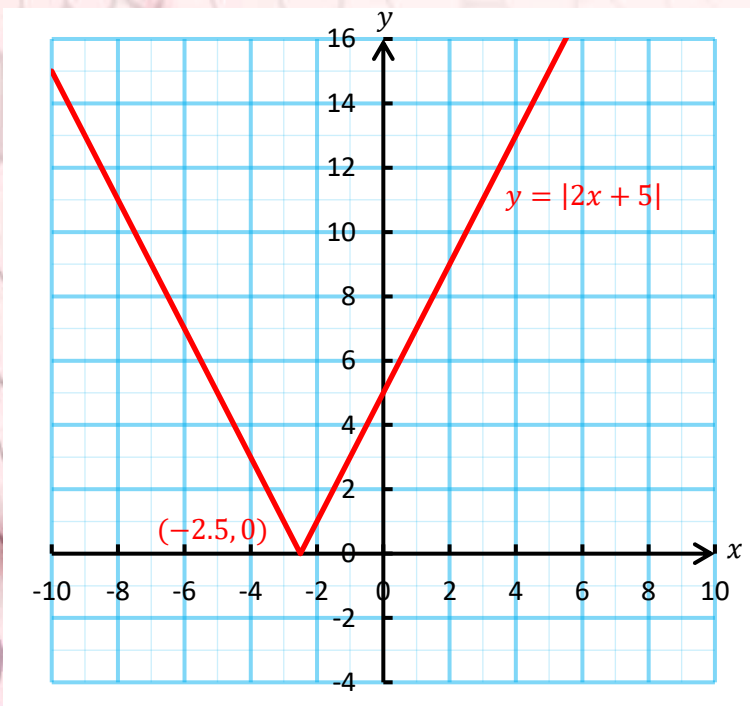


Uned 3, Pecyn 23

13

Y Ffwythiant

Modwlws



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Cyflwyno'r ffwythiant modwlws, sy'n diystyru arwydd rhif.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Plotio graffiau, trawsffurfiadau graffiau, datrys anhafaleddau.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau: Darganfod yr ongl rhwng 2 fector; dadansoddi'r canlyniadau i brofion ystadegol.

Theori

Mae'r ffwythiant modwlws $y = |x|$ yn rhoi maint rhif, yn annibynnol o'i arwydd (positif neu negatif).

Er enghraifft, os yw $x = 3$, mae $|3| = 3$; ac os yw $x = -3$, mae $|-3| = 3$.

Mae'r graff ar gyfer $y = |x|$ yn siâp 'v', fel sy'n cael ei ddangos ar y dde. Nid yw'r graddiant wedi'i ddiffinio os yw $x = 0$.

Datrys Hafaliadau

Gallwn ddatrys hafaliadau sy'n cynnwys y ffwythiant modwlws.

Enghraifft 1

Datrysych yw'r anhafaledd $|3x + 4| > 5$.

Ateb: I ddarlunio'r ateb, gallwn blotio'r graff ar gyfer $y = |3x + 4|$, fel sy'n cael ei ddangos ar y dde.

Mae dau ran i'r ateb:

$$3x + 4 > 5$$

$$3x > 1$$

$$x > \frac{1}{3}$$

Hwn yw'r darn o'r graff uwchben y llinell las $y = 5$ ar ôl $x = \frac{1}{3}$.

$$a \quad 3x + 4 < -5$$

$$3x < -9$$

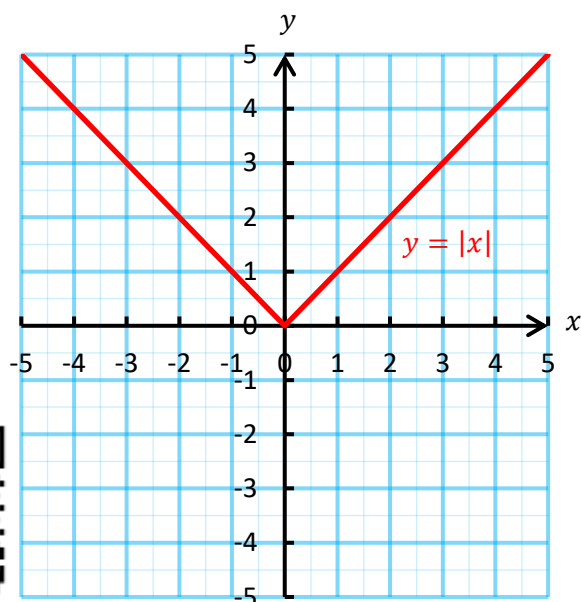
$$x < -\frac{9}{3}$$

$$x < -3$$

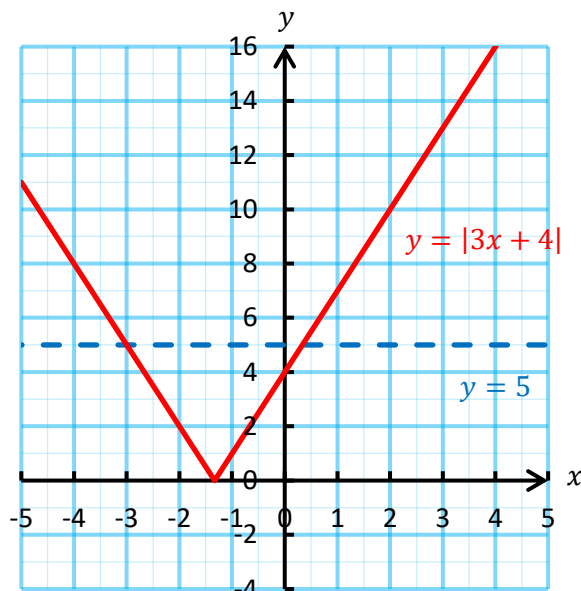
Hwn yw'r darn o'r graff uwchben y llinell las $y = 5$ cyn $x = -3$.

Er mwyn ei ddarganfod rydym yn ffeindio ble fyddai'r graff $y = 3x + 4$ yn llai na -5 .

Ateb terfynol: $x > \frac{1}{3}$ neu $x < -3$.



Theori



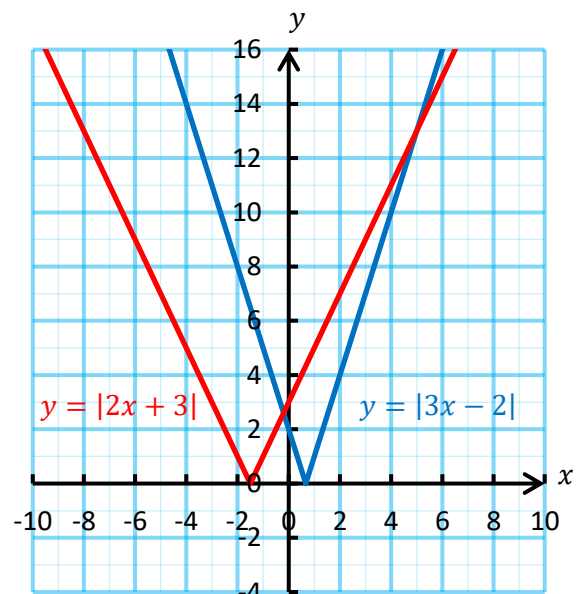
Ymarfer 1Datrysych yr anhafaledd $|4x + 1| > 13$.**Enghraifft 2**Datrysych yr hafaliad $3|x| + 4 = 6 - 2|x|$.

Ateb: $3|x| + 4 = 6 - 2|x|$
 $5|x| + 4 = 6$ adio $2|x|$ i bob ochr
 $5|x| = 2$ tynnu 4 o bob ochr
 $|x| = 0.4$ rhannu efo 5
 Naill ai $x = 0.4$ neu $x = -0.4$

Ymarfer 2Datrysych yr hafaliad $5|x + 1| + 2 = 17 + 2|x + 1|$.**Enghraifft 3**Datrysych yr hafaliad $|2x + 3| = |3x - 2|$.

Ateb: Gallwn weld y ddau ateb yn y graffiau ar y dde.
 I'w darganfod, rhaid sgwario'r hafaliad i gael gwared â'r symbol modwlws.

$$\begin{aligned} (2x + 3)^2 &= (3x - 2)^2 \\ (2x + 3)(2x + 3) &= (3x - 2)(3x - 2) \\ 4x^2 + 6x + 6x + 9 &= 9x^2 - 6x - 6x + 4 \\ 4x^2 + 12x + 9 &= 9x^2 - 12x + 4 \\ 0 &= 5x^2 - 24x - 5 \\ 5 \times -5 &= -25 \\ 0 &= 5x^2 - 25x + x - 5 \\ 0 &= 5x(x - 5) + 1(x - 5) \\ 0 &= (x - 5)(5x + 1) \\ \text{Naill ai } x - 5 = 0 &\text{ neu } 5x + 1 = 0 \\ x = 5 & \qquad \qquad x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$





(C3 Gaeaf 2010)

7. Datrysych y canlynol.

$$(a) \quad 2|x+1| - 3 = 7$$

[2]

$$(b) \quad |5x-8| \geq 3$$

[3]

(C3 Gaeaf 2009)

6. Datryswech y canlynol.

$$(a) \frac{2|x|+9}{|x|+1} = 5 \quad [2]$$

$$(b) |5x+7| \leq 4 \quad [3]$$

(C3 Gaeaf 2012)

7. Datrysweh y canlynol.

$$(a) \quad |4x - 5| \geq 3, \quad [3]$$

$$(b) \quad (3|x| + 1)^{\frac{1}{3}} = 4. \quad [2]$$

(Uned 3 Haf 2019)

0	5
---	---

 a) Darganfyddwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae $|1 - 3x| > 7$. [3]b) Brasluniwch graff $y = |1 - 3x| - 7$. Labelwch yn glir y pwynt minimwm (isafbwynt) a'r pwyntiau lle mae'r graff yn croesi'r echelin- x . [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(C3 Haf 2015)

8. (a) Darganfyddwch holl werthoedd x sy'n bodloni'r anhafaledd $|3x - 5| \leq 1$. [3]

(b) Defnyddiwch eich ateb i ran (a) i ddarganfod holl werthoedd y sy'n bodloni'r anhafaledd

$$\left| \frac{3}{y} - 5 \right| \leq 1. \quad [2]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Haf 2013)

7. (a) Trwy ddefnyddio gwrthenghraifft, dangoswch fod y gosodiad

$$\text{'Os yw } |a + 1| = |b + 1|, \text{ yna mae } a = b'$$

yn anghywir.

[2]

- (b) Datrysych yr anhafaledd

$$|x^2 - 10| \leq 6.$$

[4]



(C3 Haf 2008)

6. (b) Datryswech $3|x| + 1 = 2 - |x|$. [2]

(c) Datryswech $|2x - 9| > 3$. [4]



Uned 3, Pecyn 24

13

Ffwythiannau

Cyfansawdd



Mae Ffion eisiau prynu ffôn symudol newydd ar y we.
Cost y ffôn yw £500.

Mae gan Ffion cod '10% i ffwrdd' ar gyfer y wefan,
a hefyd taleb £50 i ffwrdd.

A ddylai Ffion fewnbynnu'r cod '10% i ffwrdd' yn
gyntaf, ac wedyn y daleb £50, neu fewnbynnu'r daleb
£50 yn gyntaf, ac wedyn y cod '10% i ffwrdd'?

Enter a gift card, voucher or promotional code



Enter Code

Apply

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Sut i gyfuno dau ffwythiant gwahanol mewn ffwythiant cyfansawdd.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid; datrys hafaliadau; datrys anhafaleddau; newid testun.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau: Unrhyw sefyllfa ble mae angen gwneud cyfres o gyfrifiadau, ac mae canlyniad un cyfrifiad yn dylanwadu'n uniongyrchol ar fewnbwn y cyfrifiad nesaf.

Theori

Mae **ffwythiant** f yn mapio elfennau o'r set X (y **parth**) i elfennau o'r set Y (yr **amrediad**). Mae'r mewnbwn $x \in X$ yn mapio i un (a dim ond un) allbwn $y \in Y$.

Ar gyfer $f(x) = x^2 - 7$,
y parth yw $(-\infty, \infty)$ a'r amrediad yw $[-7, \infty)$.

Ar gyfer $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$,
y parth yw $(3, \infty)$ a'r amrediad yw $(0, \infty)$.

Nodiant

\in 'yn elfen o'
 $[2, 5)$ Yr holl rifau rhwng 2 a 5,
 yn cynnwys 2 ond ddim yn cynnwys 5.



Theori

Mewn **ffwythiant un-i-un**, mae pob elfen o'r amrediad yn cyfateb i **union un elfen** o'r parth.

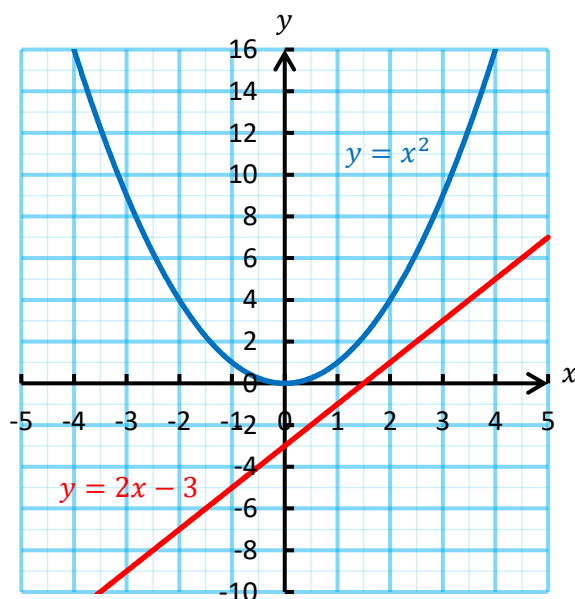
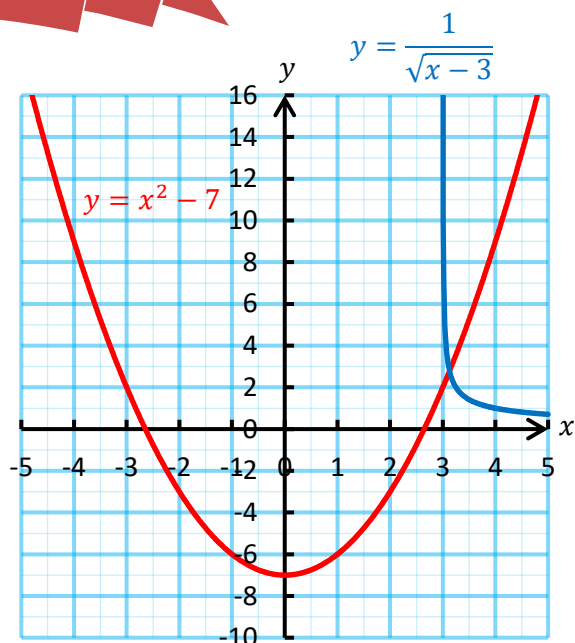
Enghraifft 1

$$f(x) = 2x - 3.$$

Mewn **ffwythiant llawer-i-un**, mae pob elfen o'r amrediad yn gallu cyfateb i **fwy nag un elfen** o'r parth.

Enghraifft 2

$$f(x) = x^2.$$



Ffwythiannau Cyfansawdd

Mae **ffwythiant cyfansawdd** yn cyfuno dau neu fwy o ffwythiannau.

O gael ffwythiannau $f(x)$ a $g(x)$, mae'r ffwythiant cyfansawdd $fg(x)$ yn golygu 'gweithredu f ar ganlyniadau $g(x)$ '. Mae'r ffwythiant cyfansawdd $gf(x)$ yn golygu 'gweithredu g ar ganlyniadau $f(x)$ '.

Mae'r drefn yn bwysig. Nid yw $fg(x)$ o angenrheidrwydd yr un peth â $gf(x)$.

Enghraifft 3

Os yw $f(x) = x^2$, $g(x) = 5x + 3$, cyfrifwch

- (a) $f(4)$ (b) $g(4)$ (c) $fg(4)$ (ch) $gf(4)$

Ateb:

(a) $f(4) = 4^2$ = 16	(b) $g(4) = 5 \times 4 + 3$ = 20 + 3 = 23	(c) $fg(4) = f(g(4))$ = $f(23)$ = 23^2 = 529	(ch) $gf(4) = g(f(4))$ = $g(16)$ = $5 \times 16 + 3$ = 80 + 3 = 83
--------------------------	-------------------------------------------------	---------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------

Ymarfer 1

Os yw $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, cyfrifwch

- (a) $f(16)$ (b) $g(16)$ (c) $fg(16)$ (ch) $gf(16)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Enghraifft 4 (C3 Haf 2005)

Mae gan y ffwythiannau f a g barthau $(0, \infty)$ a $(5, \infty)$, yn ôl eu trefn, ac fe'u diffinnir gan

$$f(x) = x^2 + 1$$

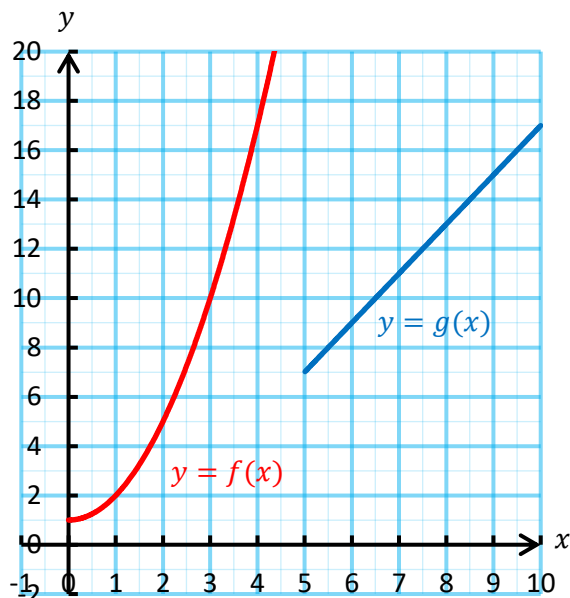
$$g(x) = 2x - 3$$

- (a) Ysgrifennwch amrediadau f a g .
- (b) Rhowch y rheswm pam na ellir ffurfio $gf(1)$.
- (c) Datrys wch yr hafaliad $fg(x) = 3x^2 - 6x + 17$.

Ateb: (a) Trwy ystyried bod $f(x)$ a $g(x)$ yn ffwythiannau cynyddol trwy gydol eu parthau,
Amrediad $f(x) = (1, \infty)$
Amrediad $g(x) = (7, \infty)$

(b) $gf(1) = g(f(1))$
= $g(1^2 + 1)$
= $g(1 + 1)$
= $g(2)$

Ni ellir ffurfio $gf(1)$ gan nad yw 2 ym mharth $g(x)$.



$$(c) fg(x) = 3x^2 - 6x + 17$$

$$f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 17$$

$$f(2x - 3) = 3x^2 - 6x + 17$$

$$(2x - 3)^2 + 1 = 3x^2 - 6x + 17$$

$$(2x - 3)(2x - 3) + 1 = 3x^2 - 6x + 17$$

$$4x^2 - 6x - 6x + 9 + 1 = 3x^2 - 6x + 17$$

$$4x^2 - 12x + 10 = 3x^2 - 6x + 17$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x - 7)(x + 1) = 0$$

Naill ai $x - 7 = 0$ neu $x + 1 = 0$

$$x = 7 \qquad x = -1$$

Ond nid yw -1 ym mharth $g(x)$ felly'r unig ddatrysiaid yw $x = 7$.

Mae hyn yn anodd i'w egluro mewn geiriau! Mae'n haws deall trwy ystyried yr enghreifftiau sy'n dilyn...

Parth $fg(x)$

Pa rifau sy'n gallu cael eu mewnbynnu i $fg(x)$?

- (1) Darganfyddwch barth g a pharth f .
- (2) Darganfyddwch yr holl werthoedd x o barth g fel bod $g(x)$ ym mharth f .
- (3) Parth $fg(x)$ yw'r gwerthoedd o gam (2) fel bod y ffwythiant $fg(x)$ wedi'i ddiffinio.

Enghraifft 3

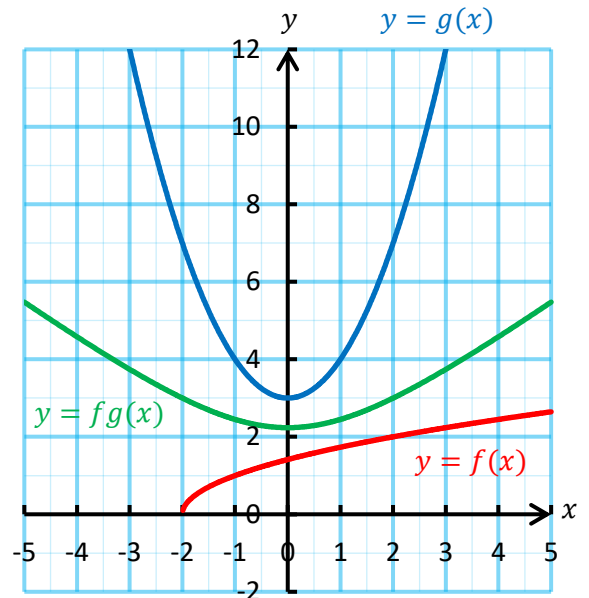
$$f(x) = \sqrt{x + 2}, \quad g(x) = x^2 + 3$$

Ffwythiant	Parth	Amrediad
$f(x)$	$[-2, \infty)$	$[0, \infty)$
$g(x)$	$(-\infty, \infty)$	$[3, \infty)$
$fg(x)$	$(-\infty, \infty)$	$[\sqrt{5}, \infty)$

$$fg(x) = \sqrt{g(x) + 2}$$

$$fg(x) = \sqrt{(x^2 + 3) + 2}$$

$$fg(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$



Enghraifft 4

$$f(x) = \sqrt{x + 2}, \quad g(x) = x^2 - 3$$

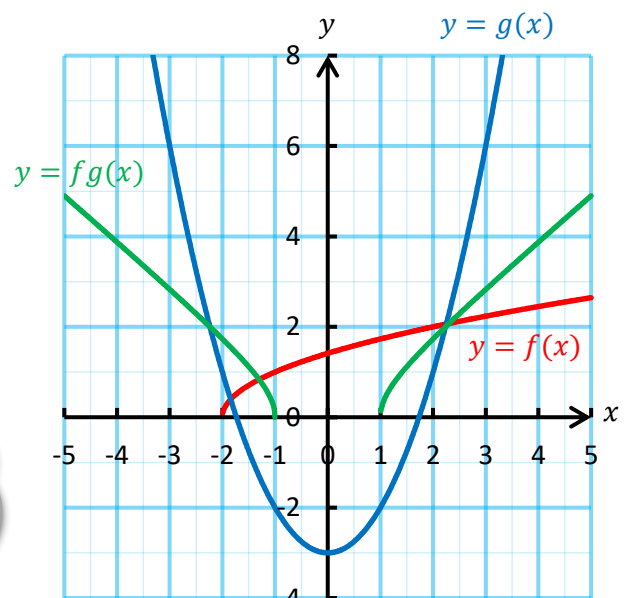
Ffwythiant	Parth	Amrediad
$f(x)$	$[-2, \infty)$	$[0, \infty)$
$g(x)$	$(-\infty, \infty)$	$[-3, \infty)$
$fg(x)$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \infty)$

$$fg(x) = \sqrt{g(x) + 2}$$

$$fg(x) = \sqrt{(x^2 - 3) + 2}$$

$$fg(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Nid yw $fg(x)$ wedi'i ddiffinio ar gyfer $(-1, 1)$





(C3 Gaeaf 2010)

10. Mae gan y ffwythiannau f a g barthau $(0, \infty)$ a $(2, \infty)$ yn ôl eu trefn, ac maent wedi'u diffinio gan

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 1, \\ g(x) &= 2x - 1. \end{aligned}$$

- (a) Ysgrifennwch amrediadau f a g . [2]
- (b) Rhowch y rheswm pam nad yw'n bosibl ffurfio $gf(1)$. [1]
- (c) (i) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $fg(x)$. Symleiddiwch eich ateb.
- (ii) Ysgrifennwch barth ac amrediad fg . [4]

(C3 Haf 2012)

10. Mae gan y ffwythiant g barth $(-\infty, \infty)$ ac mae wedi'i ddiffinio gan

$$g(x) = \sqrt{3x^2 + 7}.$$

Datrysych yr hafaliad

$$gg(x) = 8.$$

[5]

(C3 Gaeaf 2011)

10. Mae gan y ffwythiannau f a g barthau $[0, \infty)$ a $(-\infty, \infty)$ yn ôl eu trefn ac maent wedi'u diffinio gan

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, \\ g(x) &= 4x^3 + 7. \end{aligned}$$

- (a) Darganfyddwch a symleiddiwch fynegiad ar gyfer $gf(x)$. [2]
- (b) Darganfyddwch barth ac amrediad gf . [2]
- (c) (i) Datrysych yr hafaliad $gf(x) = 18$. Rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol.
- (ii) Gan roi rheswm, ysgrifennwch werth ar gyfer k fel nad oes gan $gf(x) = k$ ddatrysiaid. [3]

(C3 Haf 2017)

9. Mae gan y ffwythiant f barth $[2, \infty)$ ac mae wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = 4x + k,$$

lle mae k yn gysonyn.

(a) Ysgrifennwch, yn nhermau k , amrediad f . [1]

Mae gan y ffwythiant g barth $[-3, \infty)$ ac mae wedi'i ddiffinio gan

$$g(x) = x^2 - 9.$$

(b) Darganfyddwch werth lleiaf k fel bod y ffwythiant gf yn gallu cael ei ffurfio. [2]

(c) (i) Ysgrifennwch fynegiad, yn nhermau k , ar gyfer $gf(x)$.

(ii) O wybod bod $gf(2) = 7$, darganfyddwch werth k .

[5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Haf 2009)

9. Mae gan y ffwythiant f barth $(-\infty, \infty)$ ac mae wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = 3e^{2x}.$$

Mae gan y ffwythiant g barth $(0, \infty)$ ac mae wedi'i ddiffinio gan

$$g(x) = \ln 4x.$$

(a) Ysgrifennwch barth ac amrediad fg . [2]

(b) Datrysych yr hafaliad $fg(x) = 12$. [5]

(C3 Gaeaf 2007)

10. Diffinnir y ffwythiannau f a g ar gyfer pob gwerth o x gan

$$f(x) = x + 5,$$

$$g(x) = |2x + 1| + 2.$$

Datrysych yr anhafaledd $fg(x) > 10$.

[5]

(C3 Haf 2007)

8. Mae gan y ffwythiannau f a g barthau $[0, \infty)$ a $(-\infty, \infty)$ yn ôl eu trefn, ac fe'u diffinnir gan

$$f(x) = e^x,$$

$$g(x) = x^2 + 1.$$

- (a) Darganfyddwch amrediad f ac amrediad g . [2]
- (b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $gf(x)$, gan symleiddio eich mynegiad gymaint ag sydd bosibl. [2]
- (c) Ysgrifennwch barth ac amrediad gf . [2]
- (ch) Brasluniwch, ar yr un diagram, graffiau $y = f(x)$ ac $y = gf(x)$ gan nodi lle mae'r graffiau'n cyfarfod â'r echelin-y. [5]

(C3 Gaeaf 2014)

10. Mae gan y ffwythiannau f a g barthau $(0, \infty)$ a $(-\infty, -2)$ yn ôl eu trefn ac maent wedi'u diffinio gan

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5},$$

$$g(x) = \frac{-4}{x+1}.$$

- (a) Trwy ystyried $g'(x)$, dangoswch fod g yn ffwythiant cynyddol (*increasing*). [2]
- (b) Ysgrifennwch amrediad g . [2]
- (c) Ysgrifennwch barth ac amrediad fg . [2]
- (ch) (i) Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer $fg(x)$.
(ii) Trwy hyn datrysych yr hafaliad

$$fg(x) = 3. \quad [5]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Gaeaf 2013)

9. (a) Mae gan y ffwythiannau f a g barthau $(-\infty, \infty)$ a $(0, \infty)$ yn ôl eu trefn ac maent wedi'u diffinio gan

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 25, \\ g(x) &= 2x - 3. \end{aligned}$$

- (i) Ysgrifennwch barth fg .
- (ii) Ysgrifennwch amrediad fg .
- (iii) Ysgrifennwch fynegiad ar gyfer $fg(x)$.
- (iv) Datrysych yr hafaliad $fg(x) = 0$.

[7]

- (b) Mae'r ffwythiant h wedi'i ddiffinio gan

$$h(x) = \frac{2x + 7}{5x - 2}.$$

- (i) Dangoswch fod $hh(x) = x$.
- (ii) **Trwy hyn** ysgrifennwch fynegiad ar gyfer $h^{-1}(x)$.

[3]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(C3 Haf 2010)

10. Mae gan y ffwythiannau f a g barthau $[-3, \infty)$ a $(-\infty, \infty)$ yn ôl eu trefn ac maent wedi'u diffinio gan

$$f(x) = \sqrt{x+4},$$

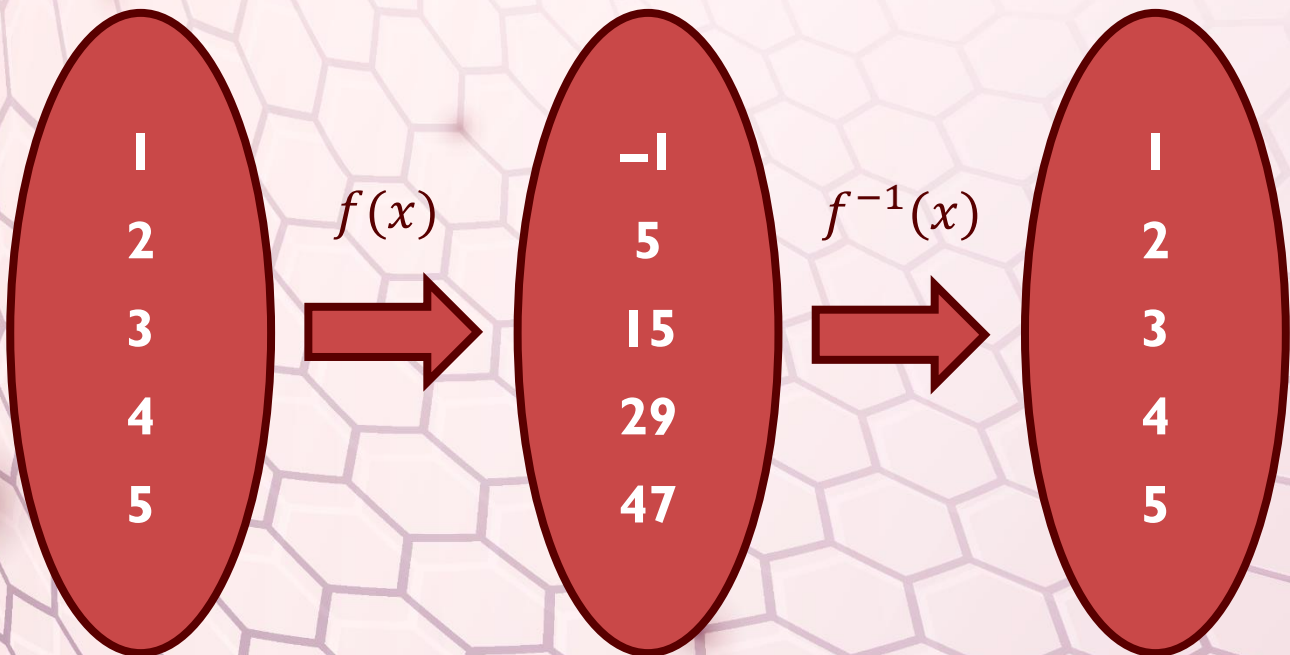
$$g(x) = 2x^2 - 3.$$

- (a) Ysgrifennwch amrediad f ac amrediad g . [2]
- (b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $gf(x)$. Symleiddiwch eich ateb. [2]
- (c) Datrysych yr hafaliad $fg(x) = 17$. [4]



Ffwythiannau

Gwrthdro



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Sut i ddarganfod y ffwythiant gwrthdro $f^{-1}(x)$ er mwyn gallu gwrthdroi effaith y ffwythiant $f(x)$.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Plotio graffiau; newid testun.
Lefel A Uned 3: Ffwythiannau cyfansawdd.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau: Wrth deipio swm i mewn i gyfrifiadur, mae'r cyfrifiadur yn newid y rhifau i mewn i rifau deuaidd ($f(x)$) i allu gwneud y swm, ac yna mae'n newid yn ôl i rif degol ($f^{-1}(x)$) er mwyn gallu dangos yr ateb i chi.

Theori

O gael ffwythiant $f(x)$, mae'r **ffwythiant gwrthdro** $f^{-1}(x)$ yn gwrthdroi effaith y ffwythiant $f(x)$.

Mae'n bosib darganfod y ffwythiant gwrthdro trwy newid testun y ffwythiant $f(x)$ i fod yn x .

Enghraifft 1

$$f(x) = 4x + 3$$

$$4x + 3 = f(x)$$

$$4x = f(x) - 3$$

$$x = \frac{f(x) - 3}{4}$$

$$\text{Felly, } f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{4}.$$

(Awgrym: Gallwch newid yr $f(x)$ i fod yn y i wneud trin yr algebra'n fwy hwylus.

$$y = 4x + 3$$

$$4x + 3 = y$$

$$4x = y - 3$$

$$x = \frac{y - 3}{4}$$

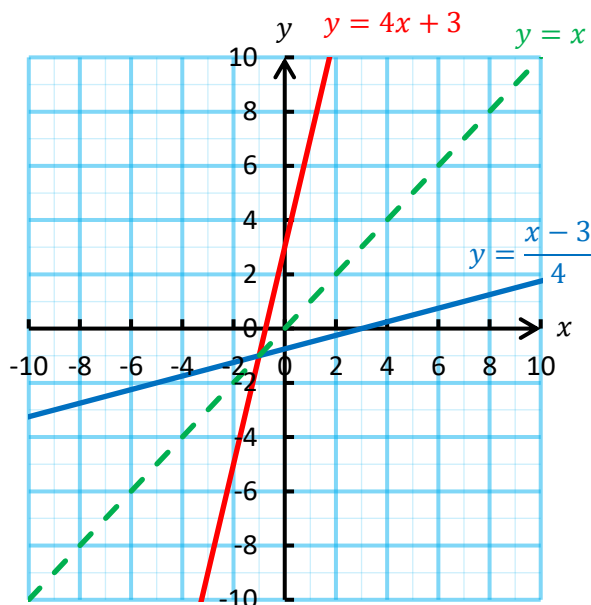
[cyfnewid ochrau]

[tynnu 3]

[rhannu efo 4]



Theori



Mae'r graff ar gyfer $f^{-1}(x)$ yn adlewyrchiad o'r graff ar gyfer $f(x)$ yn y llinell $y = x$.

Parth $f^{-1}(x)$ yw amrediad $f(x)$, ac amrediad $f^{-1}(x)$ yw parth $f(x)$.

O gael eu gwrthdroi, mae ffwythiannau llawer-i-un yn troi'n berthnasau un-i-lawer.

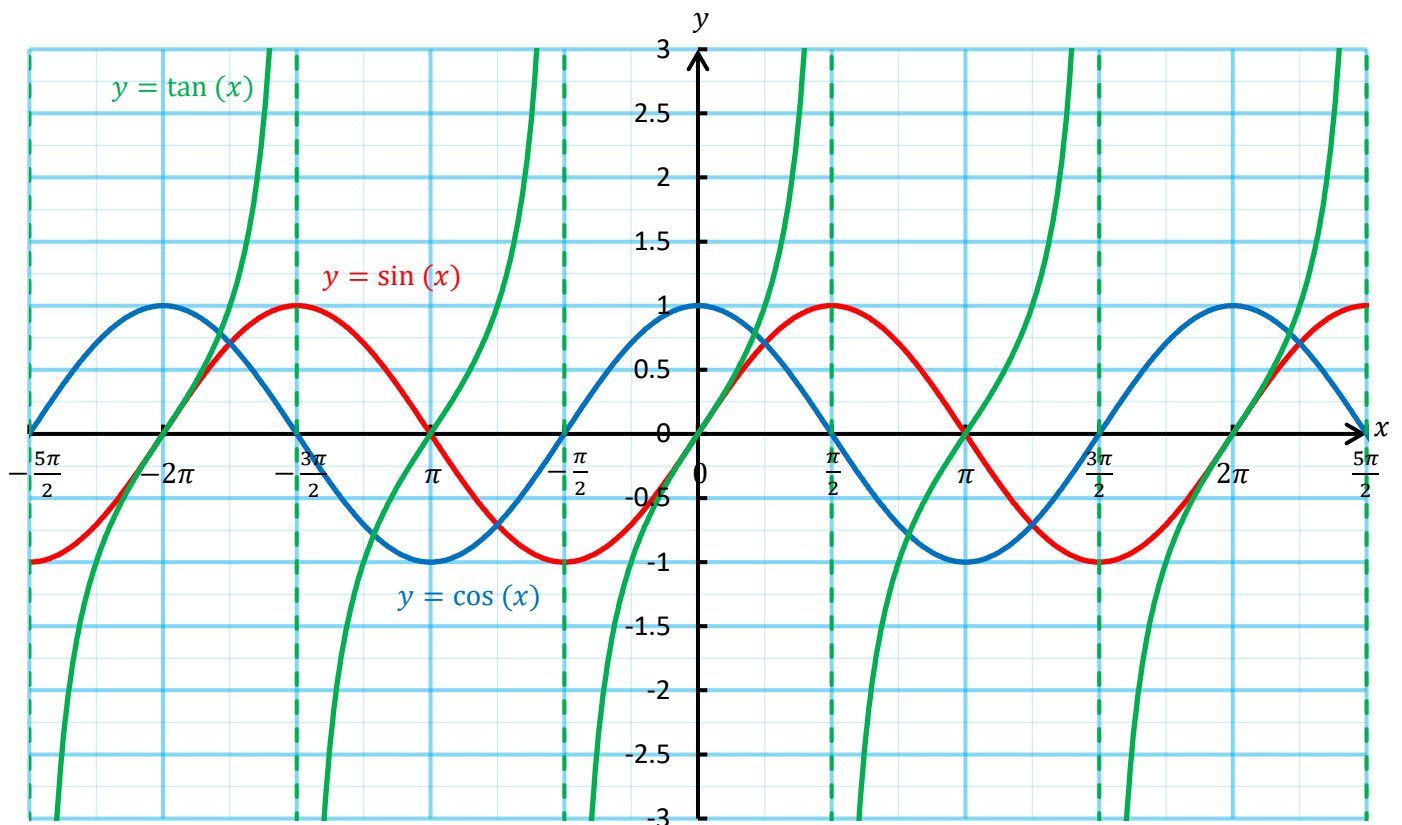
Felly, heb gwtogi'r parth, nid oes ffwythiant gwrthdro'n bodoli ar gyfer ffwythiant llawer-i-un.

🔗 Mae gan $f(x)$ wrthdro $f^{-1}(x)$ dim ond os yw $f(x)$ yn ffwythiant un-i-un. 🔗

Os yw ffwythiant efo ffwythiant gwrthdro, yna $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$.

Ffwythiannau Trigonometrig

Byddwch yn gyfarwydd efo siâp graffiau **sin**, **cos** a **tan** o waith blaenorol.



Graffiau sec, cosec, cot

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

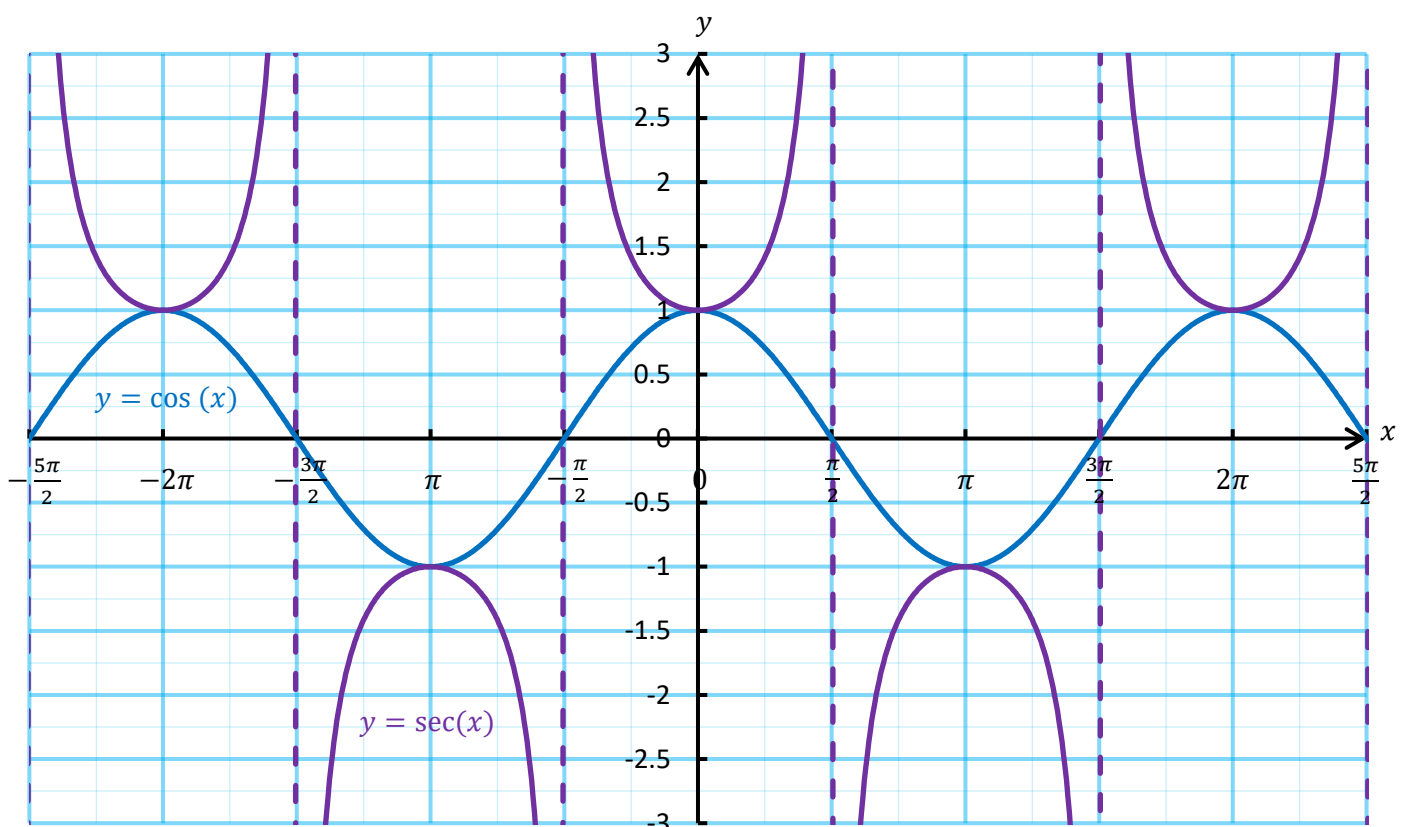
$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$y = \sec(x)$ Parth $(-\infty, \infty)$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Amrediad $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Asymptotau fertigol bob 180°

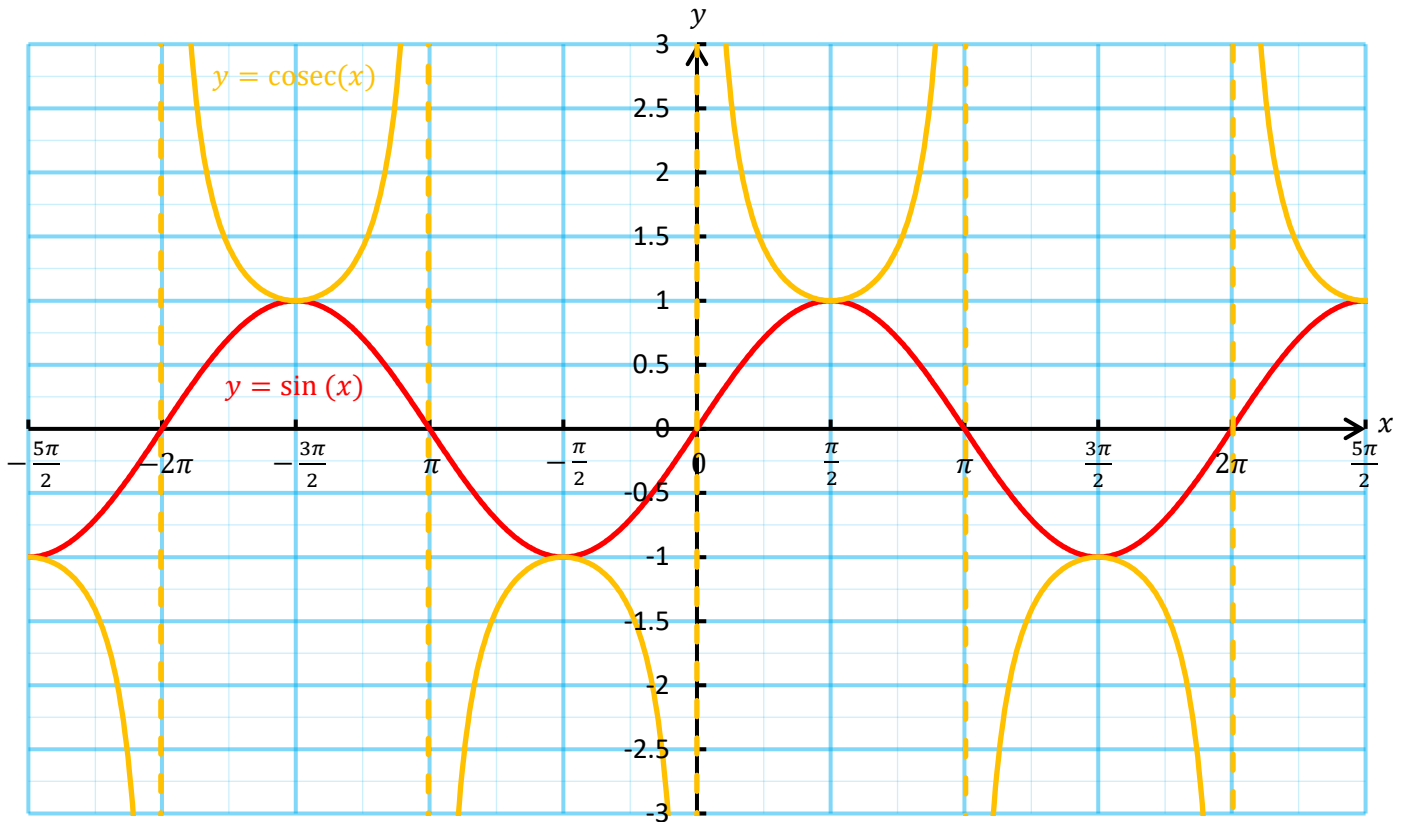


$y = \operatorname{cosec}(x)$

Parth $(-\infty, \infty)$, $x \neq k\pi$

Amrediad $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Asymptotau fertigol bob 180°

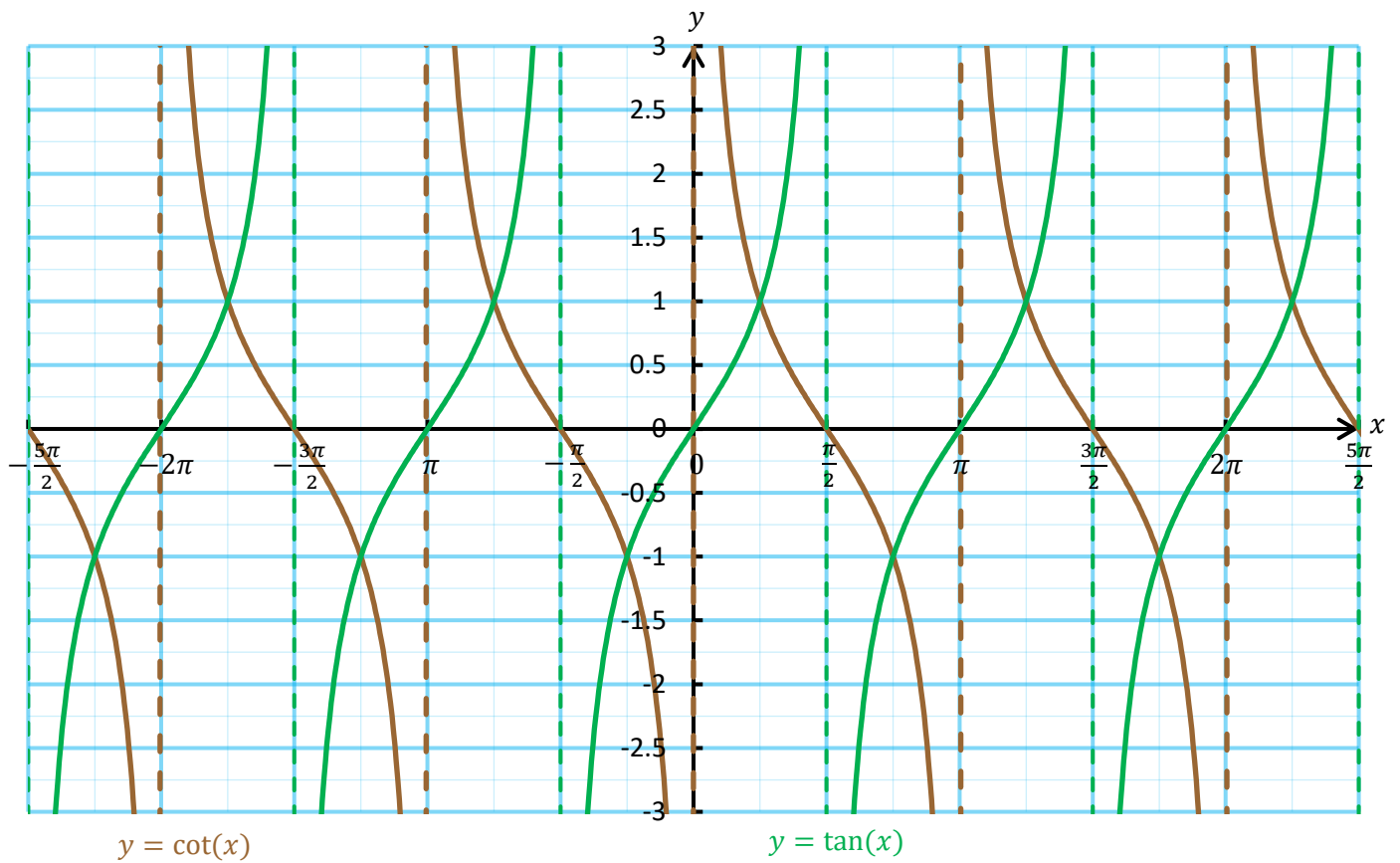


$y = \cot(x)$

Parth $(-\infty, \infty)$, $x \neq k\pi$

Amrediad $(-\infty, \infty)$

Asymptotau fertigol bob 180°



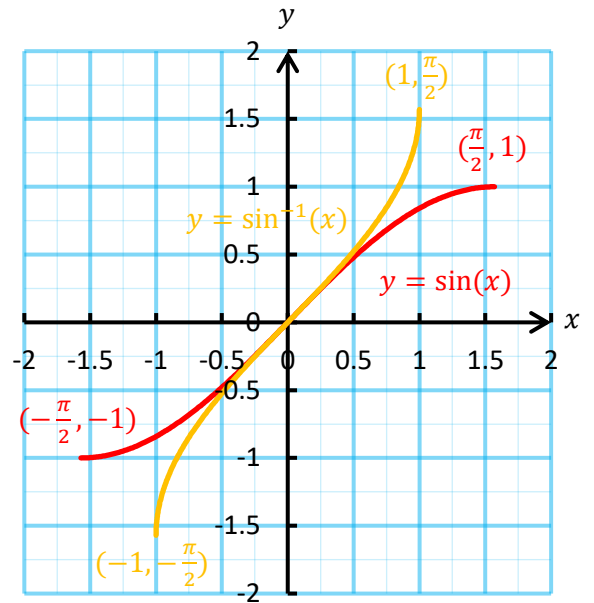
Graffiau \sin^{-1} , \cos^{-1} , \tan^{-1}

Mae'r ffwythiant $f(x) = \sin(x)$ yn ffwythiant llawer-i-un, gan fod nifer o onglau'n rhoi'r un gwerth.

Er enghraifft, mae $\sin(0) = 0$ ac hefyd $\sin(\pi) = 0$.

Felly, nid oes gwrthdro'n bodoli ar gyfer $f(x) = \sin(x)$ oni bai ein bod yn cwtdogi'r parth.

Trwy wneud hyn rhwng $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ (sef rhwng -90° a 90°), gallwn ffurfio'r ffwythiant $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$.



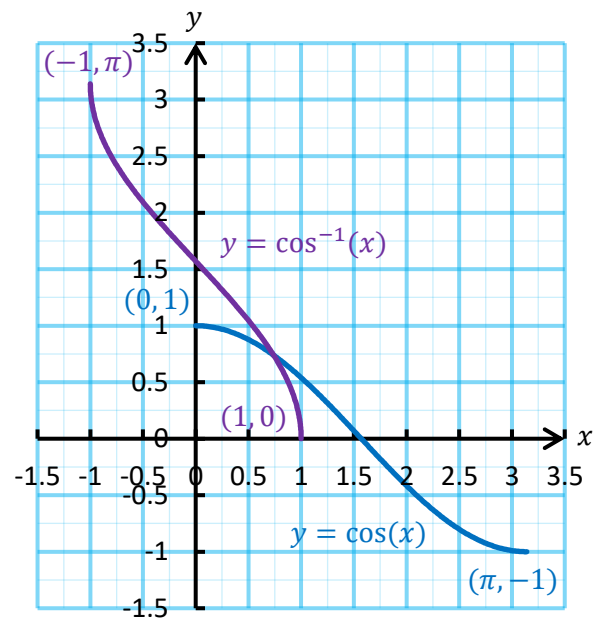
Ffwythiant	Parth	Amrediad
$f(x)$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$f^{-1}(x)$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Mae'r ffwythiant $f(x) = \cos(x)$ yn ffwythiant llawer-i-un, gan fod nifer o onglau'n rhoi'r un gwerth.

Er enghraifft, mae $\cos(0) = 1$ ac hefyd $\cos(2\pi) = 1$.

Felly, nid oes gwrthdro'n bodoli ar gyfer $f(x) = \cos(x)$ oni bai ein bod yn cwtdogi'r parth.

Trwy wneud hyn rhwng 0 a π (sef rhwng 0° a 180°), gallwn ffurfio'r ffwythiant $f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$.



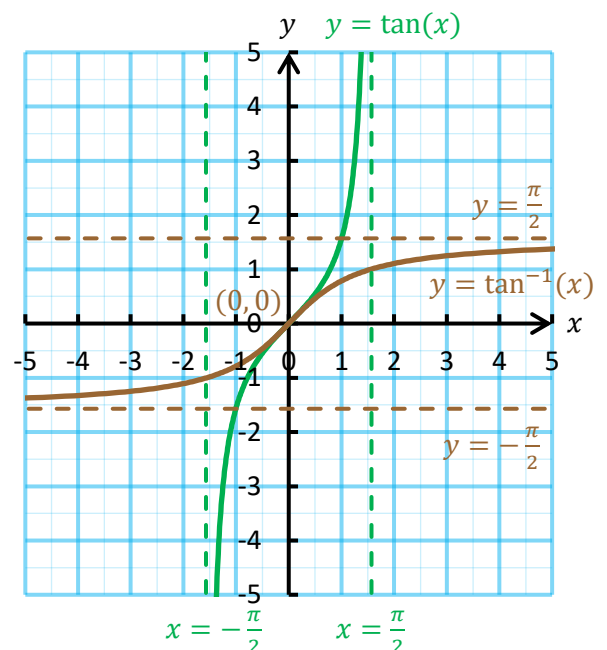
Ffwythiant	Parth	Amrediad
$f(x)$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$f^{-1}(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$

Mae'r ffwythiant $f(x) = \tan(x)$ yn ffwythiant llawer-i-un, gan fod nifer o onglau'n rhoi'r un gwerth.

Er enghraifft, mae $\tan(0) = 0$ ac hefyd $\tan(\pi) = 0$.

Felly, nid oes gwrthdro'n bodoli ar gyfer $f(x) = \tan(x)$ oni bai ein bod yn cwtdogi'r parth.

Trwy wneud hyn rhwng $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ (sef rhwng -90° a 90°), gallwn ffurfio'r ffwythiant $f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$.



Ffwythiant	Parth	Amrediad
$f(x)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, \infty)$
$f^{-1}(x)$	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(C3 Haf 2008)

9. Mae gan y ffwythiant f barth $x \leq -1$ ac fe'i diffinnir gan

$$f(x) = (x + 1)^2 - 2.$$

(a) Darganfyddwch amrediad f . [1]

(b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f^{-1}(x)$. Nodwch barth ac amrediad f^{-1} . [6]

(Uned 3 Haf 2018)

1	2
---	---

a) O wybod bod f yn ffwythiant,i) nodwch yr amod (*condition*) er mwyn i f^{-1} fodoli (*exist*),ii) darganfyddwch $ff^{-1}(x)$.

[2]

b) Mae'r ffwythiannau g a h , wedi'u rhoi gan

$$g(x) = x^2 - 1,$$

$$h(x) = e^x + 1.$$

i) Awgrymwch barth ar gyfer g fel bod g^{-1} yn bodoli.ii) O wybod mai parth h yw $(-\infty, \infty)$, darganfyddwch fynegiad ar gyfer $h^{-1}(x)$ a brasluniwch, gan ddefnyddio yr un echelinau, graffiau $h(x)$ a $h^{-1}(x)$. Dangoswch yn glir yr asymptotau a'r pwyntiau lle mae'r graffiau'n croesi'r echelinau cyfesurynnol.iii) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $gh(x)$ ar ei ffurf symlaf.

[8]

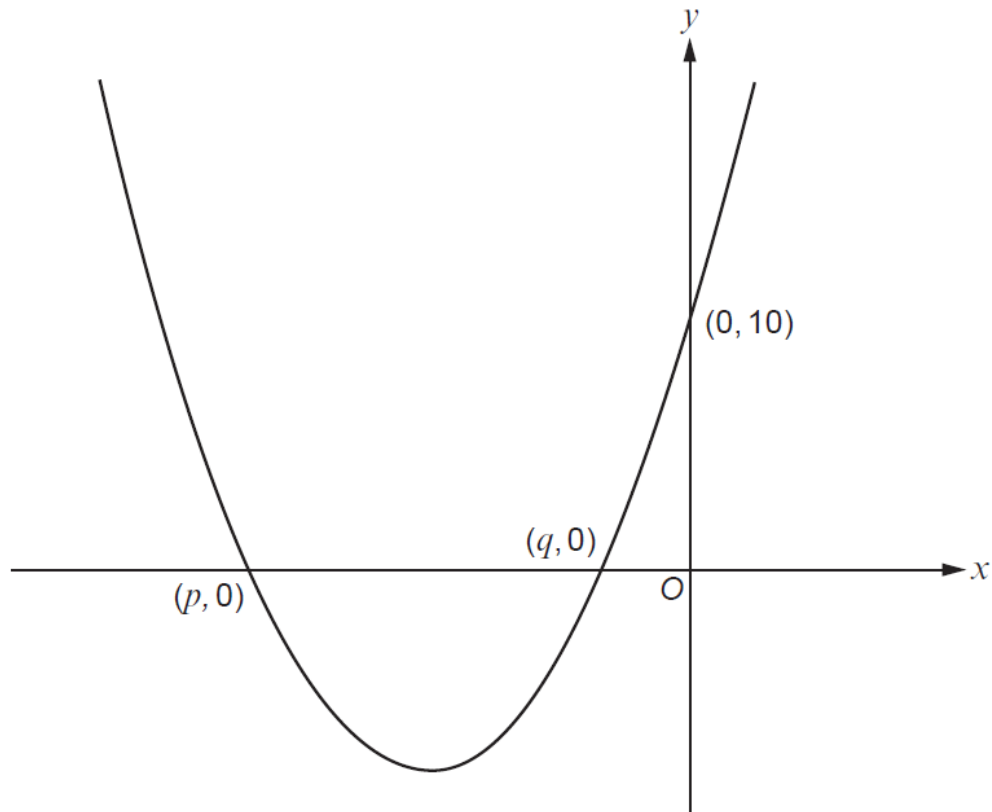
(Uned 3 Haf 2022)

1	2
---	---

Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r graff $y = f(x)$, lle mae

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 10.$$

Mae'r graff yn croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau $(p, 0)$, $(q, 0)$ ac mae'n croestorri'r echelin- y yn y pwynt $(0, 10)$.



- a) Ysgrifennwch werth $ff(p)$. [1]
- b) Darganfyddwch werthoedd p a q . [2]
- c) Mynegwch $f(x)$ yn y ffurf $a(x+b)^2 + c$, lle mae a, b, c yn gysonion y mae eu gwerthoedd i'w darganfod. Ysgrifennwch gyfesurynnau'r pwynt minimwm (isafbwynt). [3]
- ch) Esboniwch pam nad yw $f^{-1}(x)$ yn bodoli. [1]
- d) Mae'r ffwythiant $g(x)$ wedi'i ddiffinio fel
- $$g(x) = f(x) \quad \text{ar gyfer} \quad -3 \leq x < \infty.$$
- i) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $g^{-1}(x)$. [4]
- ii) Brasluniwch graff $y = g^{-1}(x)$, gan ddangos cyfesurynnau'r pwyntiau lle mae'r graff yn croestorri'r echelin- x a'r echelin- y . [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2023)

1	0
---	---

Mae dau ffwythiant real wedi'u diffinio fel

$$f(x) = \frac{8}{x-4} \quad \text{ar gyfer } (-\infty < x < 4) \cup (4 < x < \infty),$$

$$g(x) = (x-2)^2 \quad \text{ar gyfer } -\infty < x < \infty.$$

- a) i) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $fg(x)$. [2]
- ii) Darganfyddwch y gwerthoedd ar gyfer x lle dydy $fg(x)$ ddim yn bodoli. [3]
- b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f^{-1}(x)$. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Haf 2014)

9. Mae gan y ffwythiant f barth $(-\infty, 4)$ ac mae wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = x^2 - 8x + 7.$$

- (a) Mynegwch $f(x)$ yn y ffurf

$$f(x) = (x + a)^2 + b,$$

Ile mae a, b yn gysonion y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd. [1]

- (b) Trwy hyn, neu fel arall, darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f^{-1}(x)$. [4]