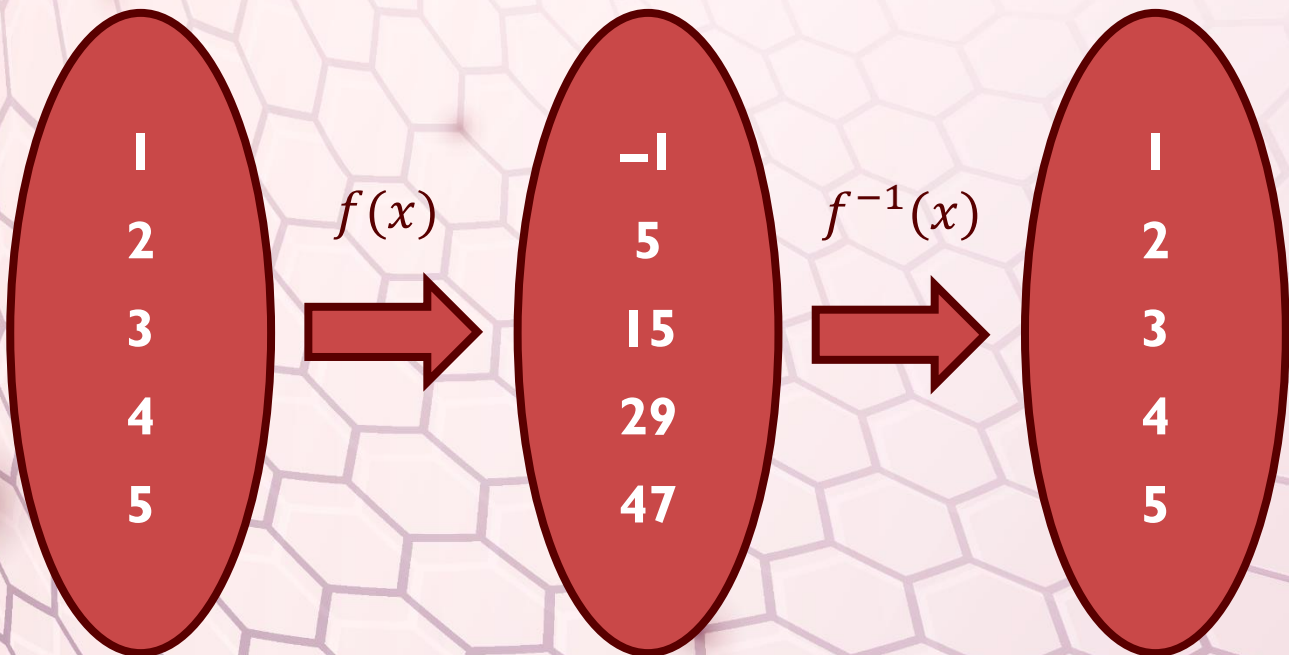




Ffwythiannau

Gwrthdro



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Sut i ddarganfod y ffwythiant gwrthdro $f^{-1}(x)$ er mwyn gallu gwrthdroi effaith y ffwythiant $f(x)$.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Plotio graffiau; newid testun.
Lefel A Uned 3: Ffwythiannau cyfansawdd.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau: Wrth deipio swm i mewn i gyfrifiadur, mae'r cyfrifiadur yn newid y rhifau i mewn i rifau deuaidd ($f(x)$) i allu gwneud y swm, ac yna mae'n newid yn ôl i rif degol ($f^{-1}(x)$) er mwyn gallu dangos yr ateb i chi.

Theori

O gael ffwythiant $f(x)$, mae'r **ffwythiant gwrthdro** $f^{-1}(x)$ yn gwrthdroi effaith y ffwythiant $f(x)$.

Mae'n bosib darganfod y ffwythiant gwrthdro trwy newid testun y ffwythiant $f(x)$ i fod yn x .

Enghraifft 1

$$f(x) = 4x + 3$$

$$4x + 3 = f(x)$$

$$4x = f(x) - 3$$

$$x = \frac{f(x)-3}{4}$$

$$\text{Felly, } f^{-1}(x) = \frac{x-3}{4}.$$

(Awgrym: Gallwch newid yr $f(x)$ i fod yn y i wneud trin yr algebra'n fwy hwylus.

$$y = 4x + 3$$

$$4x + 3 = y$$

$$4x = y - 3$$

$$x = \frac{y-3}{4}$$

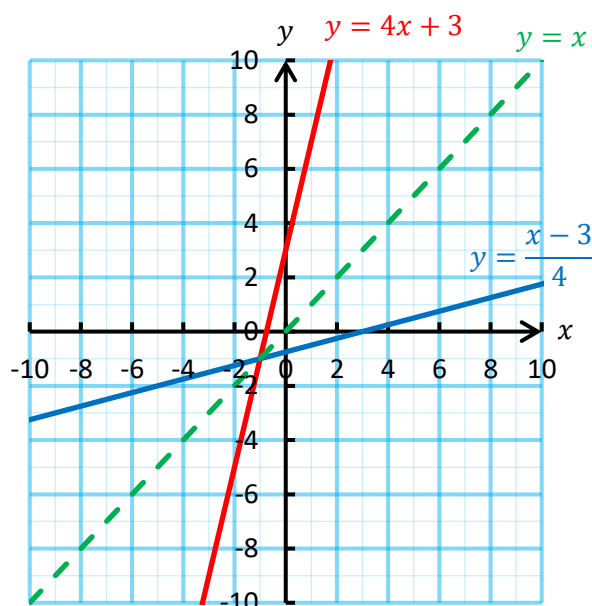
[cyfnewid ochrau]

[tynnu 3]

[rhannu efo 4]



Theori



Mae'r graff ar gyfer $f^{-1}(x)$ yn adlewyrchiad o'r graff ar gyfer $f(x)$ yn y llinell $y = x$.

Parth $f^{-1}(x)$ yw amrediad $f(x)$, ac amrediad $f^{-1}(x)$ yw parth $f(x)$.

O gael eu gwrthdroi, mae ffwythiannau llawer-i-un yn troi'n berthnasau un-i-lawer.

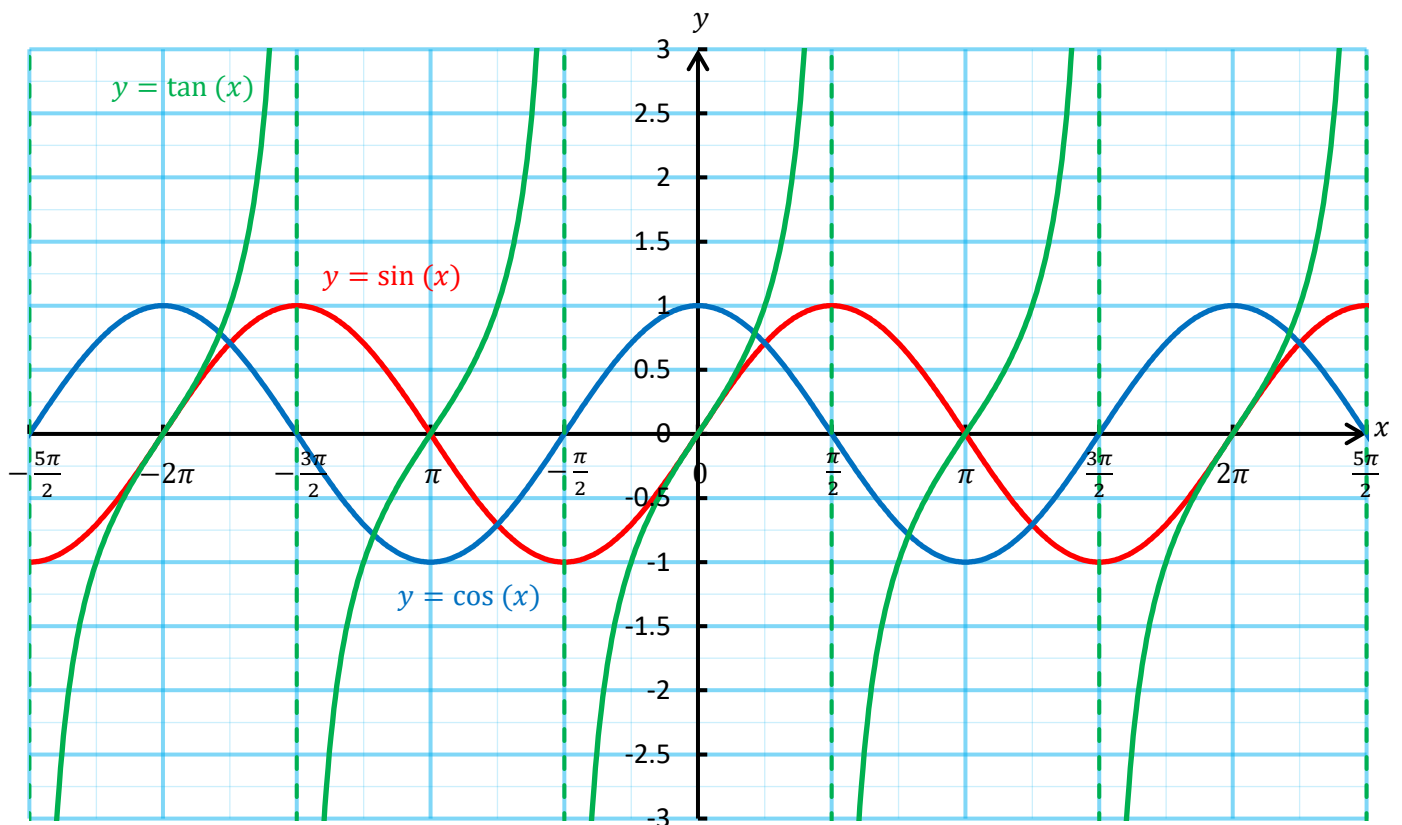
Felly, heb gwtogi'r parth, nid oes ffwythiant gwrthdro'n bodoli ar gyfer ffwythiant llawer-i-un.

🔗 Mae gan $f(x)$ wrthdro $f^{-1}(x)$ dim ond os yw $f(x)$ yn ffwythiant un-i-un. 🔗

Os yw ffwythiant efo ffwythiant gwrthdro, yna $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$.

Ffwythiannau Trigonometrig

Byddwch yn gyfarwydd efo siâp graffiau **sin**, **cos** a **tan** o waith blaenorol.



Graffiau sec, cosec, cot

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

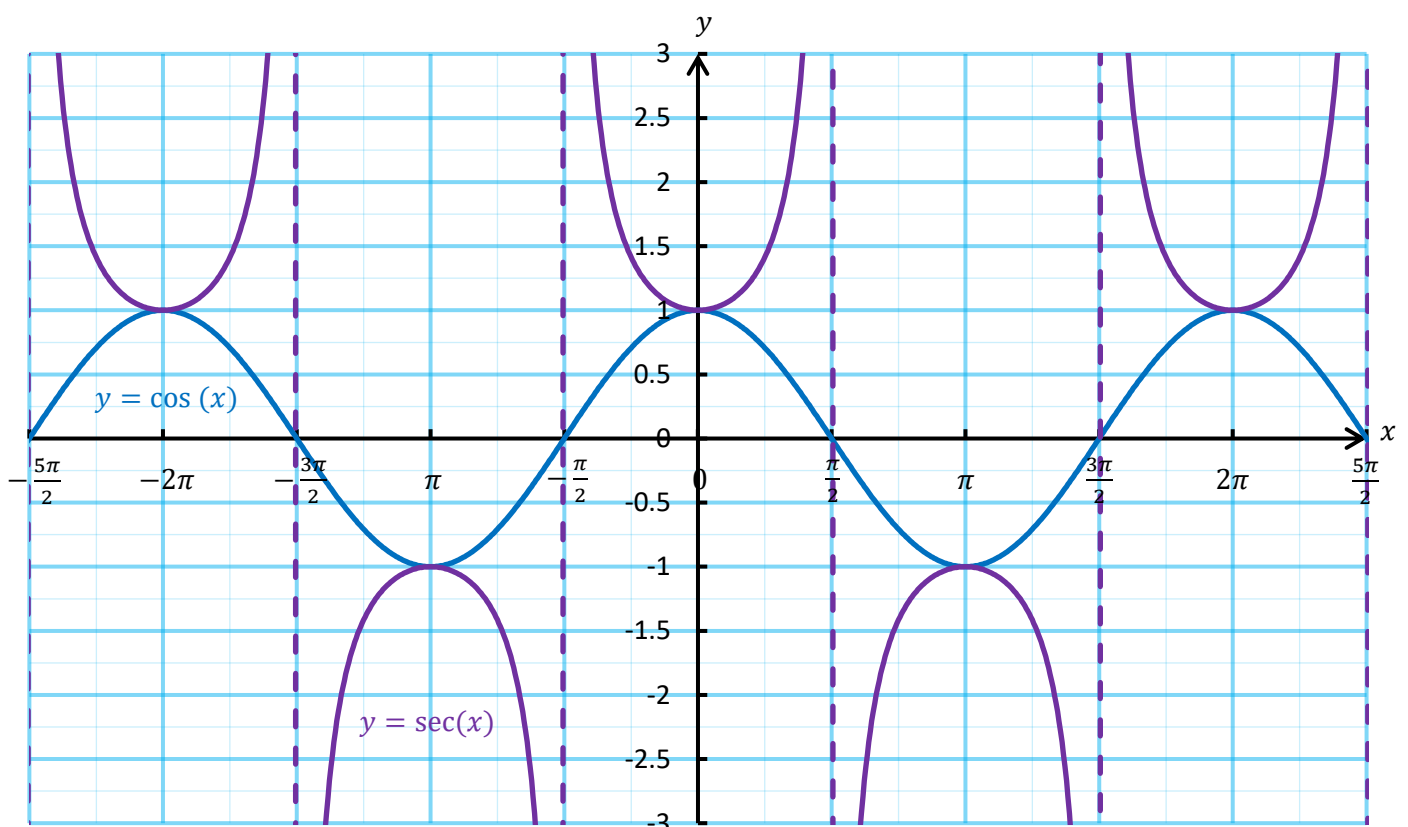
$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$y = \sec(x)$ Parth $(-\infty, \infty)$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Amrediad $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Asymptotau fertigol bob 180°

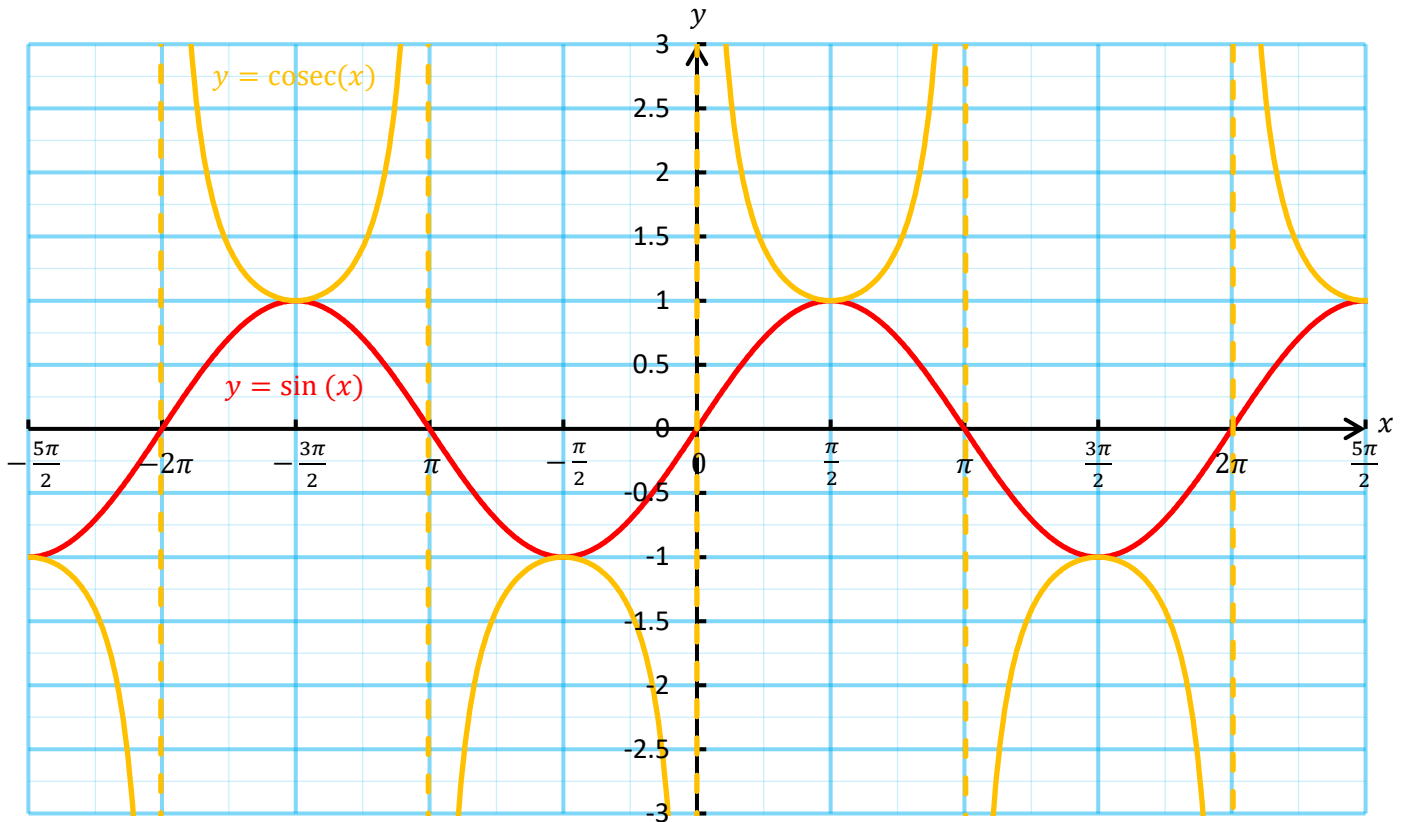


$y = \operatorname{cosec}(x)$

Parth $(-\infty, \infty)$, $x \neq k\pi$

Amrediad $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Asymptotau fertigol bob 180°

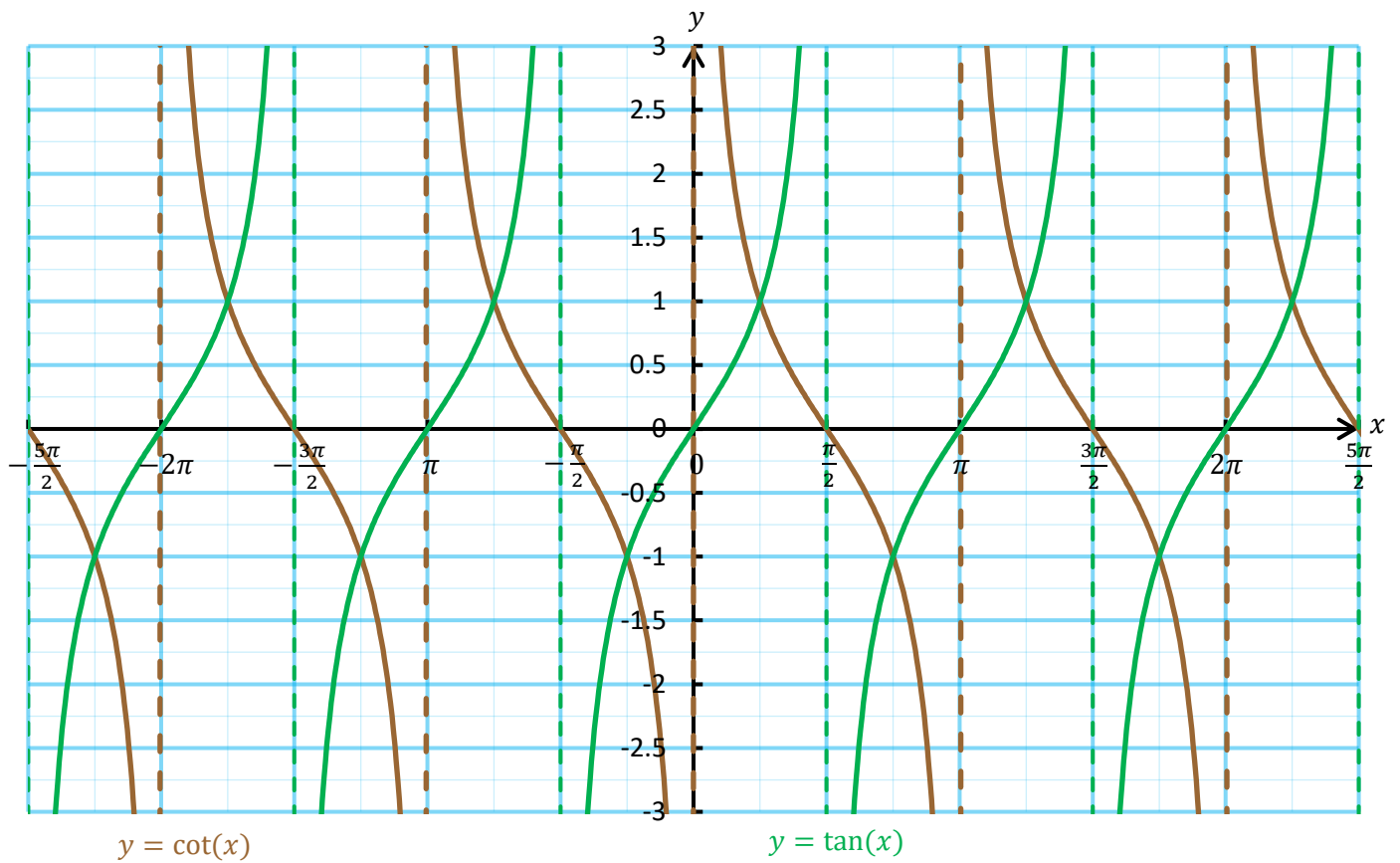


$y = \cot(x)$

Parth $(-\infty, \infty)$, $x \neq k\pi$

Amrediad $(-\infty, \infty)$

Asymptotau fertigol bob 180°



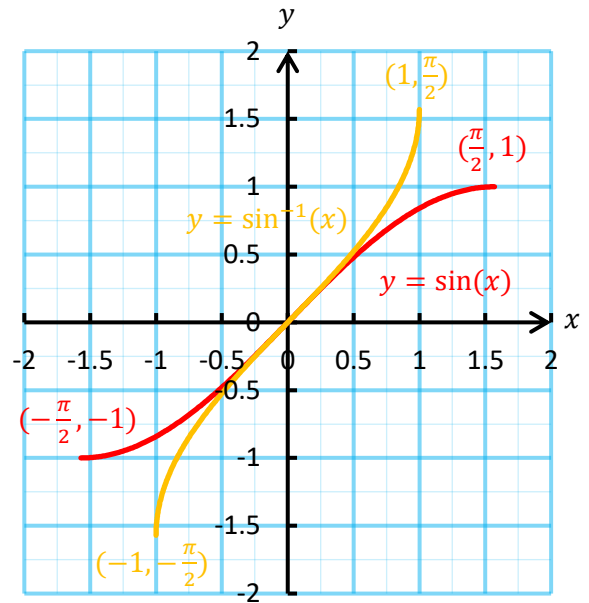
Graffiau \sin^{-1} , \cos^{-1} , \tan^{-1}

Mae'r ffwythiant $f(x) = \sin(x)$ yn ffwythiant llawer-i-un, gan fod nifer o onglau'n rhoi'r un gwerth.

Er enghraifft, mae $\sin(0) = 0$ ac hefyd $\sin(\pi) = 0$.

Felly, nid oes gwrthdro'n bodoli ar gyfer $f(x) = \sin(x)$ oni bai ein bod yn cwtdogi'r parth.

Trwy wneud hyn rhwng $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ (sef rhwng -90° a 90°), gallwn ffurfio'r ffwythiant $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$.



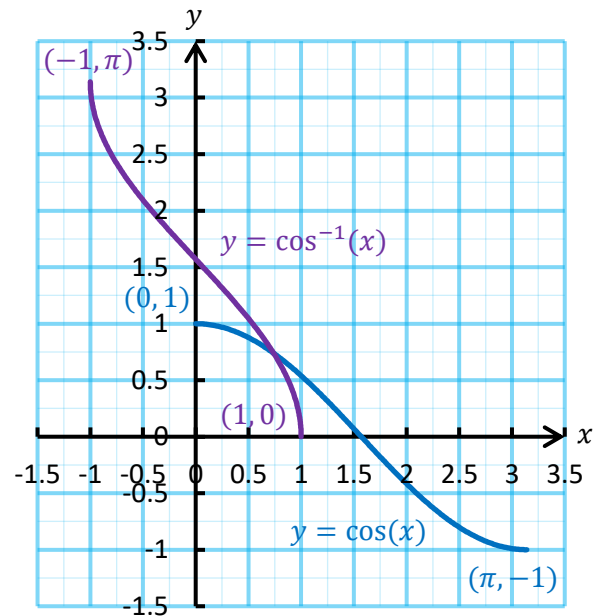
Ffwythiant	Parth	Amrediad
$f(x)$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$f^{-1}(x)$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Mae'r ffwythiant $f(x) = \cos(x)$ yn ffwythiant llawer-i-un, gan fod nifer o onglau'n rhoi'r un gwerth.

Er enghraifft, mae $\cos(0) = 1$ ac hefyd $\cos(2\pi) = 1$.

Felly, nid oes gwrthdro'n bodoli ar gyfer $f(x) = \cos(x)$ oni bai ein bod yn cwtdogi'r parth.

Trwy wneud hyn rhwng 0 a π (sef rhwng 0° a 180°), gallwn ffurfio'r ffwythiant $f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$.



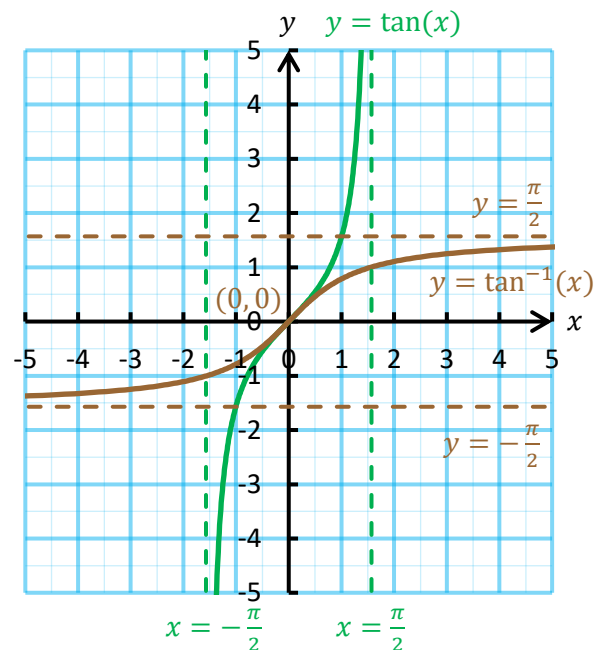
Ffwythiant	Parth	Amrediad
$f(x)$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$f^{-1}(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$

Mae'r ffwythiant $f(x) = \tan(x)$ yn ffwythiant llawer-i-un, gan fod nifer o onglau'n rhoi'r un gwerth.

Er enghraifft, mae $\tan(0) = 0$ ac hefyd $\tan(\pi) = 0$.

Felly, nid oes gwrthdro'n bodoli ar gyfer $f(x) = \tan(x)$ oni bai ein bod yn cwtdogi'r parth.

Trwy wneud hyn rhwng $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ (sef rhwng -90° a 90°), gallwn ffurfio'r ffwythiant $f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$.



Ffwythiant	Parth	Amrediad
$f(x)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, \infty)$
$f^{-1}(x)$	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(C3 Haf 2008)

9. Mae gan y ffwythiant f barth $x \leq -1$ ac fe'i diffinnir gan

$$f(x) = (x + 1)^2 - 2.$$

(a) Darganfyddwch amrediad f . [1]

(b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f^{-1}(x)$. Nodwch barth ac amrediad f^{-1} . [6]

(Uned 3 Haf 2018)

1	2
---	---

a) O wybod bod f yn ffwythiant,i) nodwch yr amod (*condition*) er mwyn i f^{-1} fodoli (*exist*),ii) darganfyddwch $ff^{-1}(x)$.

[2]

b) Mae'r ffwythiannau g a h , wedi'u rhoi gan

$$g(x) = x^2 - 1,$$

$$h(x) = e^x + 1.$$

i) Awgrymwch barth ar gyfer g fel bod g^{-1} yn bodoli.ii) O wybod mai parth h yw $(-\infty, \infty)$, darganfyddwch fynegiad ar gyfer $h^{-1}(x)$ a brasluniwch, gan ddefnyddio yr un echelinau, graffiau $h(x)$ a $h^{-1}(x)$. Dangoswch yn glir yr asymptotau a'r pwyntiau lle mae'r graffiau'n croesi'r echelinau cyfesurynnol.iii) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $gh(x)$ ar ei ffurf symlaf.

[8]

A series of horizontal dotted lines for writing.

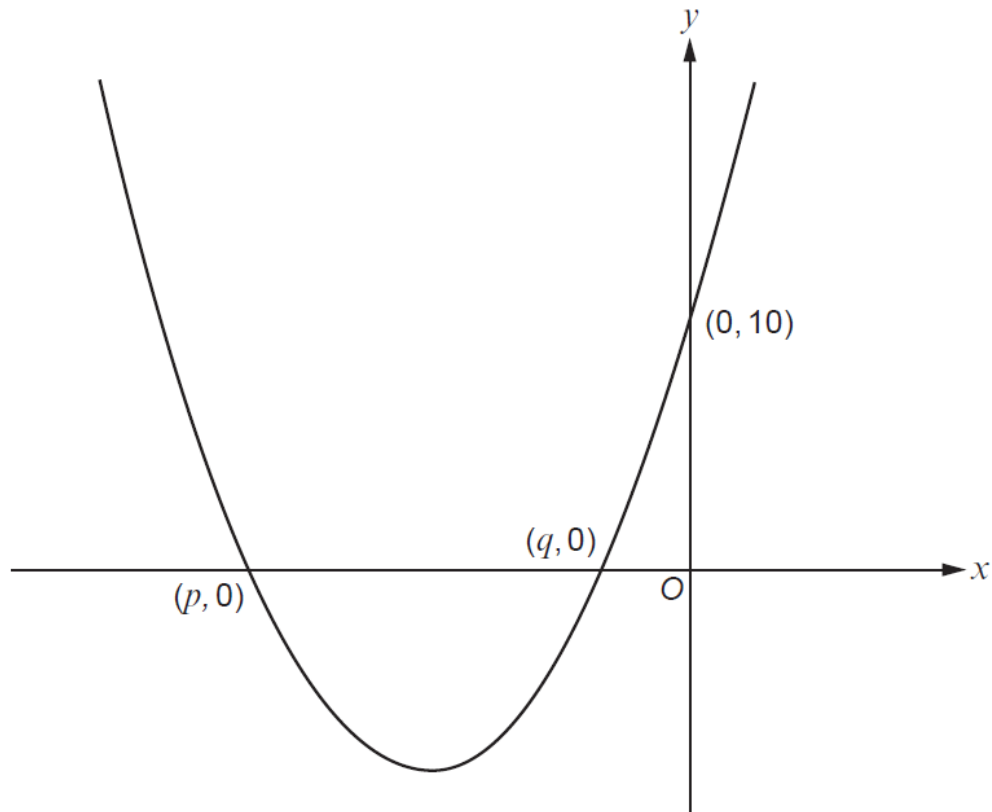
(Uned 3 Haf 2022)

1	2
---	---

Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r graff $y = f(x)$, lle mae

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 10.$$

Mae'r graff yn croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau $(p, 0)$, $(q, 0)$ ac mae'n croestorri'r echelin- y yn y pwynt $(0, 10)$.



- a) Ysgrifennwch werth $ff(p)$. [1]
- b) Darganfyddwch werthoedd p a q . [2]
- c) Mynegwch $f(x)$ yn y ffurf $a(x+b)^2 + c$, lle mae a, b, c yn gysonion y mae eu gwerthoedd i'w darganfod. Ysgrifennwch gyfesurynnau'r pwynt minimwm (isafbwynt). [3]
- ch) Esboniwch pam nad yw $f^{-1}(x)$ yn bodoli. [1]
- d) Mae'r ffwythiant $g(x)$ wedi'i ddiffinio fel
- $$g(x) = f(x) \quad \text{ar gyfer} \quad -3 \leq x < \infty.$$
- i) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $g^{-1}(x)$. [4]
- ii) Brasluniwch graff $y = g^{-1}(x)$, gan ddangos cyfesurynnau'r pwyntiau lle mae'r graff yn croestorri'r echelin- x a'r echelin- y . [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2023)

1	0
---	---

Mae dau ffwythiant real wedi'u diffinio fel

$$f(x) = \frac{8}{x-4} \quad \text{ar gyfer } (-\infty < x < 4) \cup (4 < x < \infty),$$

$$g(x) = (x-2)^2 \quad \text{ar gyfer } -\infty < x < \infty.$$

- a) i) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $fg(x)$. [2]
- ii) Darganfyddwch y gwerthoedd ar gyfer x lle dydy $fg(x)$ ddim yn bodoli. [3]
- b) Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f^{-1}(x)$. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C3 Haf 2014)

9. Mae gan y ffwythiant f barth $(-\infty, 4)$ ac mae wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = x^2 - 8x + 7.$$

(a) Mynegwch $f(x)$ yn y ffurf

$$f(x) = (x + a)^2 + b,$$

lle mae a, b yn gysonion y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd.

[1]

(b) Trwy hyn, neu fel arall, darganfyddwch fynegiad ar gyfer $f^{-1}(x)$.

[4]