



Lefel A

Uned 1

Gwerslyfr

Awdur: Dr Gareth Evans

Fersiwn 1.0 | Ebrill 2025

Ar gael ar www.mathemateg.com:

- Fersiynau Microsoft Word o'r holl becynnau gwaith.
- Adnoddau rhyngweithiol GeoGebra.
- Atebion enghreifftiol i hen bapurau arholiad.
- Atebion i'r pecynnau (ar gael, ar gais, i athrawon; gyrrwch neges o gyfeiriad e-bost ysgol at gareth@mathemateg.com).

Ar gael ar www.youtube.com/adolygumathemateg:

- Fideos adolygu llawn ar gyfer y pecynnau gwaith. Chwiliwch am y rhestrau chwarae ar gyfer 'Lefel A Uned 1' a 'Mathemateg Ychwanegol'.

Ar gael ar y cyfrif TikTok 'Maths Mewn Munud':

- Sesiynau adolygu byw.
- Clipiau adolygu byr.



Testun	Rhif y Dudalen
01 Rheolau Indecsau a Syrdiau	5
02 Geometreg Cyfesurynnau Cartesaidd	19
03 Cyflwyno Fectorau	47
04 Hafaliadau Cwadratig	71
05 Differu o Egwyddorion Sylfaenol	99
06 Differu Sydyn	115
07 Pwyntiau Arhosol	129
08 Cyflwyno Integru	155
09 Trigonometreg Rhan 1	183
10 Trigonometreg Rhan 2	209
11 Hafaliad Cylch	239
12 Theorem y Ffactor	269
13 Trawsffurfiadau Graffiau	287
14 Cyflwyno Logarithmau	309
15 Ffitio Cromliniau	329
16 Theorem y Binomial	349
17 Tri Math o Brawf	365

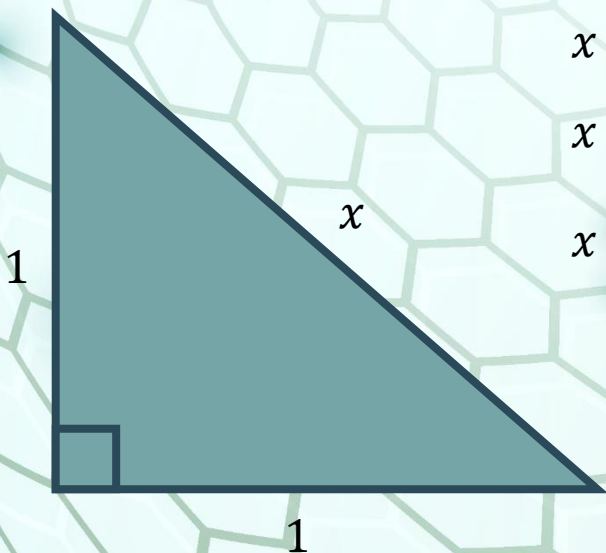


Uned 1, Pecyn 1

12

Rheolau Indecsau

a Syrdiau



$$x = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$x = 2^{\frac{1}{2}}$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Adolygu sut i weithio efo pwerau ac israddau.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Theorem Pythagoras; ehangu cromfachau; rheolau indecsau; syrdiau.

I ble mae'n arwain?

Uned 1: Gwerthoedd arbennig trigonometreg; profion logarithmau; ffio croliniau.

Uned 3: Prawf; ehangiad binomial.

Cymwysiadau: Peirianeg drydanol; prosesu signalau digidol.

Theori

Croeso i'r cwrs Lefel A Mathemateg! Yn ystod y cwrs bydddech yn adeiladu ar eich astudiaethau TGAU i ddatrys problemau sy'n gynyddol fwy cymhleth, mewn cyd-destun a heb gyd-destun.

Mathemateg yw'r gelfyddyd o newid y cymhleth i fod yn syml.

Wrth astudio mathemateg Lefel A, byddwch yn datblygu eich sgiliau dadansoddol a'ch sgiliau datrys problemau. Mae'r sgiliau hyn yn werthfawr iawn yn y gweithle, ac yn drosglwyddadwy i nifer fawr o feysydd gwahanol.

Ymarfer 1

Datrysych y pos Sudoku isod.

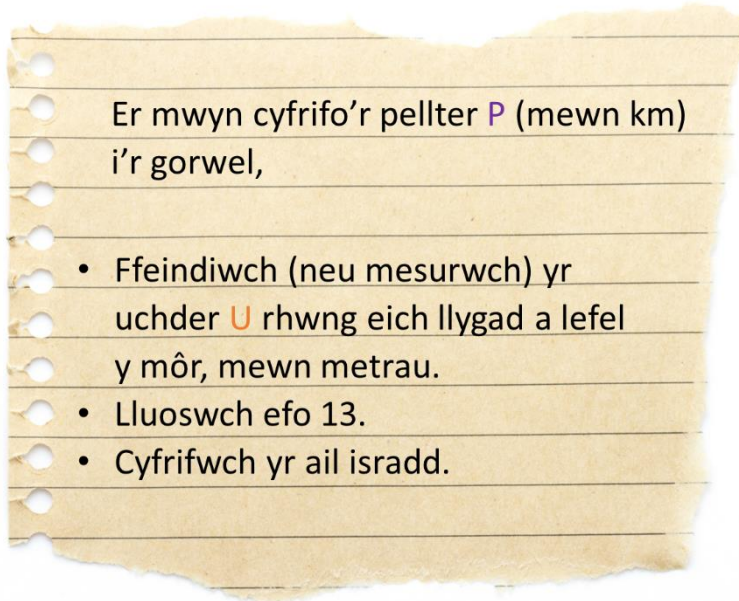
4			8	7			2	
	8					4		
		6	3			8		1
7			1				8	
6	1	2		9	8	7	3	4
				6			1	9
1	9	3	4	2	7	5		
8		7		1		3		2
	2				3			

Ymarfer 2

Dychmygwch eich bod yn sefyll ar lan y môr ac yn edrych allan am y môr. Pa mor bell yr ydych yn gallu gweld? (Pryd mae'r môr yn diflannu?)

Nesaf, dychmygwch eich bod yn sefyll ar ben Yr Wyddfa. Pa mor bell yr ydych yn gallu gweld? A yw'n bosib gweld Tŵr Blackpool?

Dyma ffordd o amcangyfrif y pellter yr ydych yn gallu gweld i'r gorwel.



(a) Defnyddiwch y cyfarwyddiadau uchod i amcangyfrif y pellter i'r gorwel os ydych yn sefyll ar lan y môr.

.....

.....

.....

(b) Defnyddiwch y cyfarwyddiadau uchod i amcangyfrif y pellter i'r gorwel os ydych yn sefyll ar ben Yr Wyddfa. (Uchder Yr Wyddfa yw 1,085 m.)

.....

.....

.....

(c) A yw'n bosib gweld Tŵr Blackpool o ben Yr Wyddfa?

.....

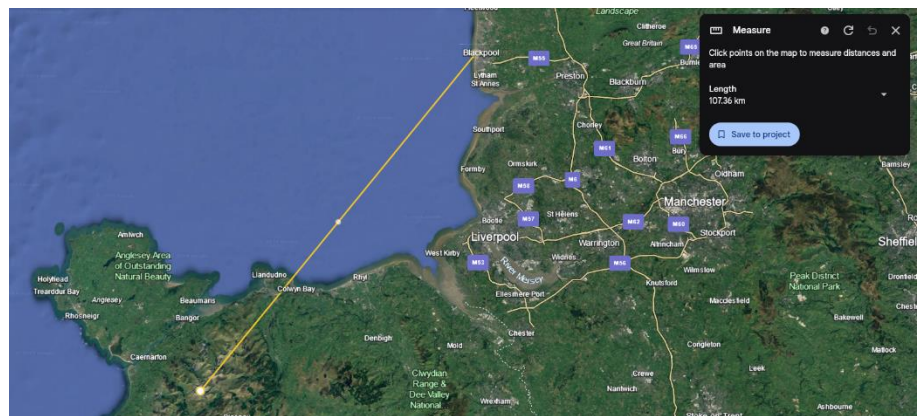
.....

.....

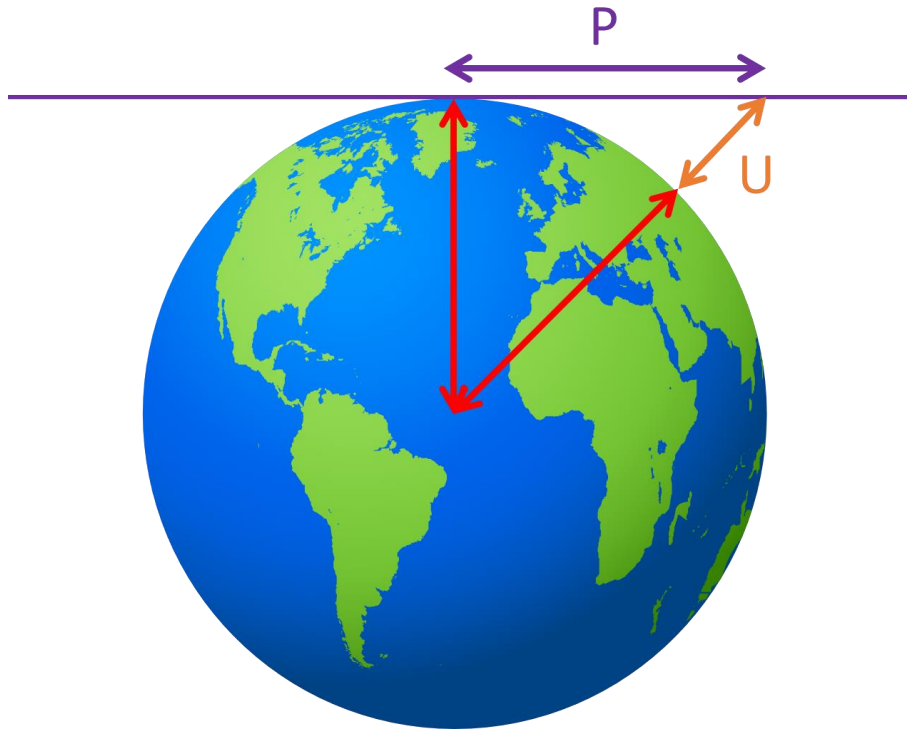
.....

.....

.....



(ch) Defnyddiwch y diagram isod i egluro **pam** fod y dull ar y dudalen flaenorol yn gweithio. (Bydd angen defnyddio Theorem Pythagoras, a'r ffaith fod radiws y ddaear tua 6,500 km.)



A series of horizontal dotted lines for writing the answer.

Rheolau Indecsau

Yn ystod y cwrs, mi fydd angen defnyddio'r rheolau indecsau canlynol.

$$n^a \times n^b = n^{a+b}$$

$$n^a \div n^b = n^{a-b} = \frac{n^a}{n^b}$$

$$n^0 = 1$$

$$(n^a)^b = n^{ab}$$

$$(nm)^a = n^a m^a$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)^a = \frac{n^a}{m^a}$$

$$n^{-a} = \frac{1}{n^a}$$

$$(\sqrt[b]{n})^a = n^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{n^a}$$



Rhestr
Chwarae
TGAU

Ymarfer 3

Symleiddiwch y canlynol.

(a) $x^4 \times x^3$

(b) $\frac{y^{12}}{y^2}$

.....

.....

.....

.....

(c) z^0

(ch) $(x^5)^3$

.....

.....

.....

.....

(d) $(x^2y)^4$

(dd) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

.....

.....

.....

.....

(e) 3^{-2}

(f) $25^{\frac{1}{2}}$

.....

.....

.....

.....

(ff) $16^{\frac{3}{4}}$

(g) $27^{-\frac{2}{3}}$

.....

.....

.....

.....

(ng) $\frac{x^4 \times x^{-2}}{x^{-8}}$

(h) $\frac{2^{-1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Syrdiau

Mae'r rheolau isod yn datblygu'r gwaith TGAU ar syrdiau.

$$\sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{am}$$

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{\frac{a}{m}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{m}}$$

Rhesymoli'r enwadur: $\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \times \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \times \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$,

$$\frac{a+b\sqrt{c}}{d+e\sqrt{f}} = \left(\frac{a+b\sqrt{c}}{d+e\sqrt{f}}\right) \times \left(\frac{d-e\sqrt{f}}{d-e\sqrt{f}}\right)$$



Symleiddio Syrdiau



Ehangu efo Syrdiau

Enghraifft

$$\begin{aligned} & \frac{5-2\sqrt{5}}{3+7\sqrt{10}} \\ &= \left(\frac{5-2\sqrt{5}}{3+7\sqrt{10}}\right) \times \left(\frac{3-7\sqrt{10}}{3-7\sqrt{10}}\right) \\ &= \frac{15-35\sqrt{10}-6\sqrt{5}+14 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10}}{9-21\sqrt{10}+21\sqrt{10}-49 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{15-35\sqrt{10}-6\sqrt{5}+14 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{9-49 \times 10} \\ &= \frac{15-35\sqrt{11}-6\sqrt{5}+14 \times 5 \times \sqrt{2}}{-481} \\ &= \frac{15-35\sqrt{11}-6\sqrt{5}+70\sqrt{2}}{-481} \end{aligned}$$

Ymarfer 4

Symleiddiwch y canlynol.

(a) $\sqrt{6} \times \sqrt{6}$

.....

(b) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}$

.....

(c) $\sqrt[5]{96} \div \sqrt[5]{3}$

.....

(ch) $\sqrt{45}$

.....

(d) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

.....

(dd) $\frac{7+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

.....



(CI Gaeaf 2005)

2. Symleiddiwch

$$\frac{6 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2},$$

gan fynegi eich ateb ar ffurf swrd.

[4]

(CI Gaeaf 2006)

2. (a) Symleiddiwch y canlynol.

$$\sqrt{48} + \sqrt{27} - \frac{6}{\sqrt{3}}$$

[4]

(b) Symleiddiwch $\frac{2 + \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$, gan fynegi eich ateb ar ffurf swrd.

[4]

(CI Haf 2006)

2. Symleiddiwch bob un o'r canlynol, gan fynegi eich atebion ar ffurf swrd.

$$(a) \quad \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}, \quad [4]$$

$$(b) \quad (2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{12}). \quad [4]$$

(CI Haf 2005)

2. Symleiddiwch bob un o'r canlynol, gan fynegi eich atebion ar ffurf swrd:

$$(a) \quad \sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{125}; \quad [3]$$

$$(b) \quad \frac{6 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}. \quad [4]$$

(CI Gaeaf 2007)

2. Symleiddiwch **bob un** o'r mynegiadau canlynol, gan fynegi eich atebion ar ffurf swrd.

(a) $2\sqrt{32} + 3\sqrt{8} - \sqrt{18}$ [3]

(b) $\frac{6 + \sqrt{30}}{6 - \sqrt{30}}$ [4]

(CI Haf 2008)

2. Symleiddiwch

(a) $\sqrt{75} - \frac{9}{\sqrt{3}} + (\sqrt{6} \times \sqrt{2})$, [4]

(b) $\frac{5\sqrt{5} - 2}{4 + \sqrt{5}}$. [4]

(CI Haf 2010)

2. Symleiddiwch

$$(a) \quad \frac{5\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}, \quad [4]$$

$$(b) \quad (\sqrt{15} \times \sqrt{20}) - \sqrt{75} - \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}}. \quad [4]$$

(CI Gaeaf 2010)

2. Symleiddiwch

$$(a) \quad \frac{2\sqrt{11}-3}{\sqrt{11+2}}, \quad [4]$$

$$(b) \quad \frac{22}{\sqrt{2}} - \sqrt{50} - (\sqrt{2})^5. \quad [4]$$

(CI Haf 2011)

2. Symleiddiwch

$$(a) \quad \frac{9}{\sqrt{3}-1} + \frac{7}{\sqrt{3}+1}, \quad [4]$$

$$(b) \quad \frac{90}{\sqrt{3}} - \sqrt{6} \times \sqrt{8} - (2\sqrt{3})^3. \quad [4]$$

(Uned I Haf 2019)

0	7
---	---

O wybod bod a, b yn gyfanrifau, symleiddiwch y canlynol. Dangoswch eich holl waith cyfrifo.

a) $\frac{2\sqrt{3}+a}{\sqrt{3}-1}$ [3]

b) $\frac{2\sqrt{6b^2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{27} + \sqrt{192}$ [3]

A decorative banner with a teal background and white text that reads "Cwestiwn Adolygu". The banner has a ribbon-like shape with pointed ends.

(Uned I Haf 2018)

0	1
---	---

 Gan ddangos eich holl waith cyfrifo, symleiddiwch

a) $\frac{24\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+3)^2 - (\sqrt{a}-3)^2}$, [3]

b) $\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$. [4]



Uned 1, Pecyn 2

12

Geometreg

Cyfesurynnau

Cartesaidd

Ganwyd René Descartes ar y 15fed o Fawrth, 1596, yn Ffrainc. Defnyddiodd graffiau er mwyn cysylltu algebra efo geometreg. Mae graffiau'n defnyddio echelinau- x ag y yn cael eu galw'n graffiau **Cartesaidd**, ar ei ôl.



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Dychmygwch linell syth sy'n cysylltu dau gyfesuryn gwahanol. Mae'r gwaith yma'n galluogi ni i ddarganfod pethau fel *hafaliad y llinell syth*; *canolbwynt y ddau gyfesuryn*; *graddiant y llinell syth*; a'r *pellter* rhwng y ddau gyfesuryn.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Y cymedr; cyfesurynnau; amnewid; datrys hafaliadau; arwynebedd; y cilydd; Theorem Pythagoras; graddiant; hafaliad llinell syth; trigonometreg; newid testun; syrdiau.

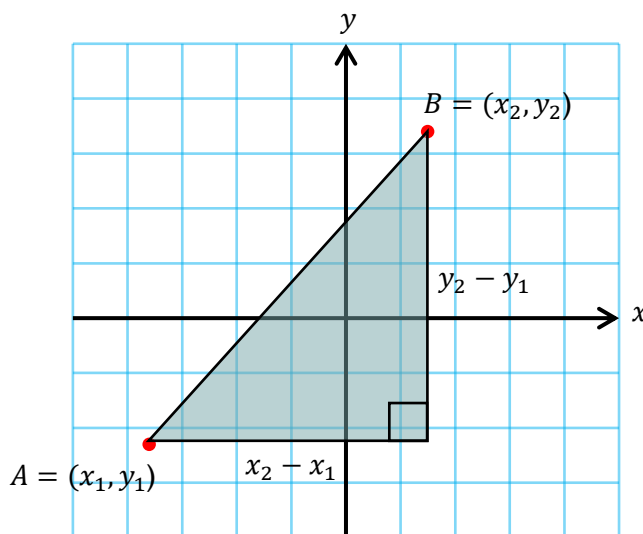
I ble mae'n arwain?

Uned 1: Hafaliad cylch; hafaliad tangiad a normal.
Uned 3: Hafaliad tangiad a normal.

Cymwysiadau: System GPS y byd; creu ac arddangos ffeiliau PDF.

Theori

Ystyriwch unrhyw ddau bwynt $A = (x_1, y_1)$ a $B = (x_2, y_2)$ mewn plân.



Hyd AB



Graddiant AB



Hafaliad AB

Graddiant
Paralel a
Pherpenticwlar

Gallwn ddefnyddio'r *cymedr* i ddarganfod **canolbwynt** AB: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Gallwn ddefnyddio *Theorem Pythagoras* i ddarganfod **hyd** AB: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Graddiant y llinell AB yw $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Hafaliad y llinell AB yw $y - y_1 = m(x - x_1)$, ble mae m yn cynrychioli graddiant y llinell, ac mae (x_1, y_1) yn cynrychioli unrhyw bwynt ar y llinell. Gallwn ail-drefnu'r hafaliad yma i fod yn y ffurf $y = mx + c$ neu $ax + by + c = 0$, yn ôl yr angen.

Mae dwy linell syth yn **baralel** os yw eu graddiannau'n hafal. Mae dwy linell syth yn **berpenticwlar** os yw eu graddiannau'n lluosu i roi -1 , neu os yw un graddiant yn negatiff cilydd y llall.

A series of horizontal dotted lines for writing.



(CI Haf 2006)

1. Cyfesurynnau'r pwyntiau A, B, C, D yw $(3, 2), (-4, 3), (5, 6), (4, -1)$, yn ôl eu trefn.

(a) Dangoswch fod y llinellau AC a BD yn berpendicwlar. [5]

(b) Dangoswch mai hafaliad y llinell AC yw

$$2x - y - 4 = 0$$

a darganfyddwch hafaliad y llinell BD . [4]

(c) Darganfyddwch gyfesurynnau E , sef croestorfan AC a BD . [2]

(ch) Darganfyddwch hyd AE . [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2007)

1. Cyfesurynnau'r pwyntiau A, B, C, D yw $(-1, 3), (1, 7), (2, -1), (5, k)$, yn ôl eu trefn. Mae'r llinell AB yn baralel i'r llinell CD .
- (a) Darganfyddwch raddiant AB . [2]
- (b) Dangoswch fod $k = 5$. [3]
- (c) Mae'r llinell L yn berpendicwlar i CD ac mae'n mynd trwy'r pwynt A . Dangoswch mai hafaliad L yw $x + 2y - 5 = 0$. [3]
- (ch) Mae'r llinell L yn croestorri'r llinell CD yn y pwynt E . Darganfyddwch gyfesurynnau E . [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Gaeaf 2009)

1. Cyfesurynnau'r pwyntiau A , B , C yw $(2, -1)$, $(-7, 1)$, $(5, 4)$, yn ôl eu trefn. Mae'r llinell trwy A sy'n berpendicwlar i'r llinell BC yn croestorri BC yn y pwynt D .

- (a) Dangoswch mai hafaliad BC yw

$$x - 4y + 11 = 0,$$

a darganfyddwch hafaliad AD .

[7]

- (b) Dangoswch mai $(1, 3)$ yw cyfesurynnau D .

[2]

- (c) Darganfyddwch hyd CD .

[2]

- (ch) Mae'r llinell AD yn cael ei hymestyn i E fel mai D yw canolbwynt AE . Darganfyddwch gyfesurynnau E .

[2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2009)

1. Mae'r pwyntiau A , B , C fel mai cyfesurynnau A , B yw $(-1, 5)$, $(7, 11)$, yn ôl eu trefn, a C yw canolbwynt AB . Y llinell L yw hanerydd perpendicwlar AB .

(a) Darganfyddwch raddiant AB . [2]

(b) Darganfyddwch gyfesurynnau C . [2]

(c) Dangoswch mai hafaliad L yw

$$4x + 3y - 36 = 0. \quad [4]$$

(ch) Mae'r llinell L yn croestorri'r echelin- x yn y pwynt D .

(i) Darganfyddwch gyfesurynnau D .

(ii) Darganfyddwch hyd CD .

(iii) Darganfyddwch werth tan \widehat{CAD} . [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2011)

1. Cyfesurynnau'r pwyntiau A a B yw $(3, 11)$ a $(9, -1)$ yn ôl eu trefn.
Mae'r llinell L_1 yn mynd trwy'r pwynt B ac mae'n **berpendicwlar** i AB .

(a) Darganfyddwch raddiant AB . [2]

(b) Darganfyddwch hafaliad L_1 a symleiddiwch eich ateb. [4]

Hafaliad y llinell L_2 yw $6x + 7y + 10 = 0$.

Mae'r llinellau L_1 ac L_2 yn croestorri yn y pwynt C .

(c) (i) Dangoswch mai cyfesurynnau C yw $(3, -4)$.

(ii) Darganfyddwch hyd BC .

(iii) Darganfyddwch gyfesurynnau canolbwynt BC .

(iv) Ysgrifennwch hafaliad y llinell AC . [7]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2012)

1. Mae'r pwyntiau A , B , C fel mai cyfesurynnau A , B yw $(-4, 7)$, $(2, -1)$, yn ôl eu trefn, ac C yw canolbwynt AB . Y llinell L yw hanerydd perpendicwlar AB .

(a) Darganfyddwch raddiant AB . [2]

(b) Darganfyddwch gyfesurynnau C . [2]

(c) Dangoswch mai hafaliad L yw

$$3x - 4y + 15 = 0. \quad [4]$$

(ch) Cyfesurynnau'r pwynt D yw $(7, k)$ ac mae D ar L .

(i) Dangoswch fod $k = 9$.

(ii) Darganfyddwch hyd CA a hyd DA .

(iii) Trwy hyn, dangoswch ei bod yn bosibl mynegi gwerth $\sin \widehat{ADC}$ yn y ffurf $\frac{1}{\sqrt{a}}$, lle mae a yn gyfanrif y mae'n rhaid darganfod ei werth. [7]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Gaeaf 2014)

1. Cyfesurynnau'r pwyntiau A a B yw $(6, -2)$ a $(4, 1)$, yn ôl eu trefn. Mae'r llinell L_1 yn mynd trwy'r pwynt B ac mae'n berpendicwlar i AB .
- (a) (i) Darganfyddwch raddiant AB .
(ii) Darganfyddwch hafaliad L_1 . [5]
- (b) Mae'r llinell L_2 yn mynd trwy A a'i hafaliad yw $x - 8y - 22 = 0$. Mae'r llinellau L_1 ac L_2 yn croestorri yn y pwynt C .
- (i) Dangoswch mai $(-2, -3)$ yw cyfesurynnau C .
(ii) Darganfyddwch gyfesurynnau canolbwynt AC .
(iii) Darganfyddwch arwynebedd y triongl ABC a symleiddiwch eich ateb. [9]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2017)

1. Cyfesurynnau'r pwyntiau A a B yw $(-2, 3)$ a $(4, 5)$ yn ôl eu trefn. Mae'r llinell L_1 yn mynd trwy'r pwynt B ac mae'n **berpendicwlar** i AB .

(a) (i) Darganfyddwch raddiant AB .

(ii) Darganfyddwch hafaliad L_1 .

[5]

Hafaliad y llinell L_2 yw $x + 2y + 1 = 0$.

Mae'r llinellau L_1 ac L_2 yn croestorri yn y pwynt C .

(b) (i) Dangoswch mai $(7, -4)$ yw cyfesurynnau C .

(ii) Dangoswch fod gwerth $\cos \widehat{BCA}$ yn gallu cael ei fynegi ar y ffurf $\frac{3}{\sqrt{a}}$, lle mae gwerth y cyfanrif a i'w ddarganfod.

[7]

(c) Mae'r llinell CB yn cael ei hymestyn i'r pwynt D fel bod B yn ganolbwynt CD .

(i) Darganfyddwch gyfesurynnau D .

(ii) **Ysgrifennwch** yr enw geometregol ar gyfer y triongl ACD .

[3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2018)

0	2
---	---

Cyfesurynnau'r pwyntiau A a B yw $(-1, 10)$ a $(5, 1)$ yn ôl eu trefn. Hafaliad y llinell syth L yw $2x - 3y + 6 = 0$.

- a) Mae'r llinell L yn croestorri'r llinell AB yn y pwynt C . Darganfyddwch gyfesurynnau C . [5]
- b) Darganfyddwch y gymhareb mae llinell L yn rhannu'r llinell AB . [2]
- c) Mae'r llinell L yn croesi'r echelin- x yn y pwynt D . Darganfyddwch gyfesurynnau D . [1]
- ch) i) Dangoswch fod L yn berpendicwlar i AB .
ii) Cyfrifwch arwynebedd y triongl ACD . [6]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2019)

0	4
---	---

Mae'r llinell L_1 yn mynd trwy'r pwyntiau $A(-1, 3)$ a $B(2, 9)$. Hafaliad y llinell L_2 yw $2y + x = 25$ ac mae'r llinell hon yn croestorri L_1 yn y pwynt C . Mae L_2 hefyd yn croestorri'r echelin- x yn y pwynt D .

- a) Dangoswch mai hafaliad y llinell L_1 yw $y = 2x + 5$. [3]
- b) i) Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwynt D .
ii) Dangoswch fod L_1 ac L_2 yn berpendicwlar.
iii) Darganfyddwch gyfesurynnau C . [5]
- c) Darganfyddwch hyd CD . [2]
- ch) Cyfrifwch yr ongl ADB . Rhowch eich ateb mewn graddau, yn gywir i un lle degol. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned I Haf 2023)

0	3
---	---

Cyfesurynnau'r pwynt A yw $(-2, 5)$ a chyfesurynnau'r pwynt B yw $(3, 8)$. Mae'r pwynt C ar yr echelin- x fel bod AC yn berpendicwlar i AB .

- a) Darganfyddwch hafaliad AB . [3]
- b) Dangoswch mai cyfesurynnau C yw $(1, 0)$. [3]
- c) Cyfrifwch arwynebedd y triongl ABC . [4]
- ch) Darganfyddwch hafaliad y cylch sy'n mynd trwy'r pwyntiau A , B ac C . [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Uned 1, Pecyn 3

12

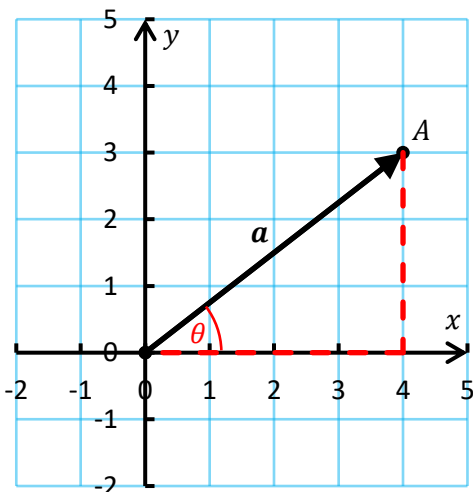
Cyflwyno

Fectorau

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Fectorau yw'r iaith sy'n disgrifio lleoliad a symudiad.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Cyfesurynnau; cymhareb; Theorem Pythagoras; trigonometreg; anhafaleddau.

I ble mae'n arwain?

Uned 2: Gweithio efo grymoedd.
Uned 4: Mudiant mewn dau ddimensiwn.
Cymwysiadau: Graffeg cyfrifiadurol; peirianeg; ffiseg; hedfan.

Theori



Theori

Mae mesur **sgalar** efo maint yn unig, gyda'r cyfeiriad ddim yn bwysig. Er enghraifft, mae *buanedd* yn fesur sgalar. Os yw person yn rhedeg ar fuanedd 10 mya, yna nid ydym yn gwybod i ba gyfeiriad y mae'n rhedeg.

Mae **fector** yn fesur sydd efo maint **a** chyfeiriad. Er enghraifft, mae *cyflymder* yn fesur sy'n fector. Os yw person yn rhedeg ar gyflymder 10 mya, yna rhaid nodi hefyd i ba gyfeiriad y mae'n rhedeg. Gallwn wneud hyn gan ddefnyddio cyfeiriant (e.e. 053°), ond hefyd gallwn ysgrifennu'r fector yn ei **ffurf cydran**.

Enghraifft

Mae $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ yn enghraifft o fector wedi'i ysgrifennu yn ei ffurf cydran.

Mae \mathbf{i} yn cynrychioli symud un uned ar hyd yr echelin- x .

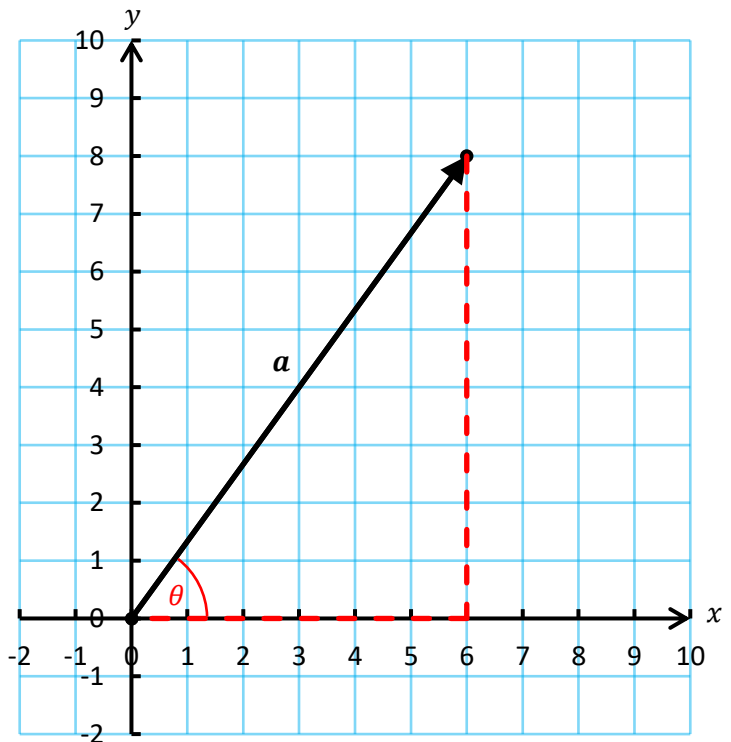
Mae \mathbf{j} yn cynrychioli symud un uned ar hyd yr echelin- y .

Yn y fector \mathbf{a} , 6 yw'r gydran x ac 8 yw'r gydran y .

Mae'r diagram ar y dde yn dangos y fector \mathbf{a} fel saeth sy'n mynd o'r tarddbwynt i'r cyfesuryn (6, 8).

Gallwn ddefnyddio Theorem Pythagoras i gyfrifo **maint** $|\mathbf{a}|$ y fector, sef yr hyd o'r tarddbwynt i'r pwynt (6, 8):

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &= \sqrt{6^2 + 8^2} \\ |\mathbf{a}| &= \sqrt{100} \\ |\mathbf{a}| &= 10 \end{aligned}$$



Gallwn ddefnyddio trigonometreg i gyfrifo'r ongl θ y mae'r fector yn ei wneud efo'r echelin- x :

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{8}{6} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \\ \theta &= 53.13^\circ \text{ i 2 le degol.} \end{aligned}$$

Nodiant

Ar gyfrifiadur, mae factor yn cael ei ysgrifennu gan ddefnyddio print trwm:

$$\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Efo papur a phensil, mae factor yn cael ei ysgrifennu gan ddefnyddio tanlinellu:

$$\underline{a} = 6\underline{i} + 8\underline{j}$$

Os yw factor yn cynrychioli'r daith sy'n mynd o'r pwynt A i'r pwynt B , yna mae'r factor yn cael ei ysgrifennu fel \overrightarrow{AB} neu \overline{AB} .

Enghraifft

Yn y diagram ar y dde, y factorau $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ yw **factorau safle** y pwyntiau $A = (5, 3)$ a $B = (6, -5)$.

Gwelwn o'r diagram mai'r **factor** sy'n mynd o'r pwynt A i'r pwynt B yw $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} - 8\mathbf{j}$.

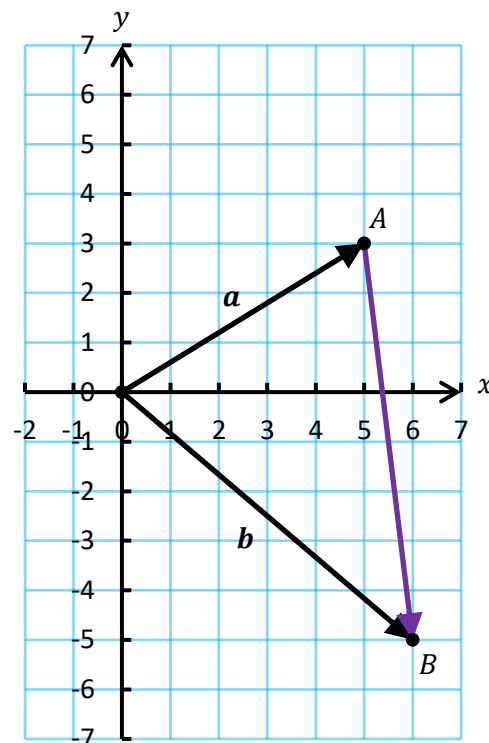
I ddarganfod y factor \overrightarrow{AB} o'r factorau \mathbf{a} a \mathbf{b} , gallwn ddefnyddio'r hafaliad

$$\overrightarrow{AB} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Mae hwn yn cynrychioli'r llwybr canlynol i fynd o'r pwynt A i'r pwynt B : cychwyn yn y pwynt A ; mynd yn ôl i'r tarddbwynt (mynd yn erbyn y factor \mathbf{a}); ac yna dilyn y factor \mathbf{b} i gyrraedd y pwynt B .

Yn yr enghraifft,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= -(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) \\ \overrightarrow{AB} &= -5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} \\ \overrightarrow{AB} &= \mathbf{i} - 8\mathbf{j} \end{aligned}$$



Factorau Paralel

Mae dau factor yn baralel os yw $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ ar gyfer rhyw rif $\alpha \neq 0$.

Er enghraifft, mae'r ddau factor $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 21\mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ yn baralel gan fod $\mathbf{a} = 3\mathbf{b}$.

Ymarfer 1

Mae'r diagram ar y dde'n dangos y factor $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

(a) Cyfrifwch $|\mathbf{a}|$.

.....

.....

.....

.....

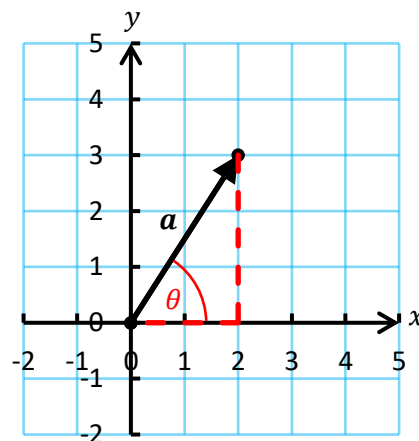
(b) Cyfrifwch faint yr ongl θ y mae'r factor \mathbf{a} yn ei wneud efo'r echelin- x .

.....

.....

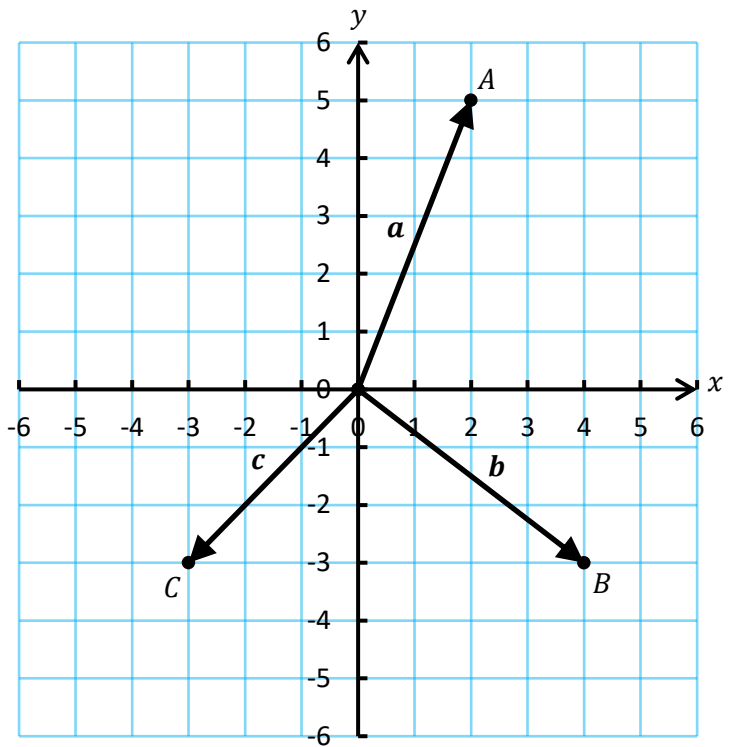
.....

.....



Ymarfer 2

Mae'r diagram ar y dde'n dangos y fectorau $a = 2i + 5j$, $b = 4i - 3j$ ac $c = -3i - 3j$, sy'n fectorau safle ar gyfer y pwyntiau A , B ac C .



(a) Cyfrifwch $|a|$.

.....

.....

.....

(b) Darganfyddwch y fector AB .

.....

.....

.....

(c) Darganfyddwch y fector AC .

.....

.....

.....

(ch) Darganfyddwch y fector BC .

.....

.....

.....

(dd) Cyfrifwch y fector $a + b$.

.....

.....

.....

(f) Cyfrifwch y fector $2a - 4b$.

.....

.....

.....

(g) A yw'r fector a yn baralel i'r fector $6i + 25j$?

.....

.....

.....

(d) Darganfyddwch y fector BA .

.....

.....

.....

(e) Cyfrifwch y fector $3a$.

.....

.....

.....

(ff) Cyfrifwch y fector $3b - 5c$.

.....

.....

.....

(ng) A yw'r fector c yn baralel i'r fector $12i + 12j$?

.....

.....

.....

Fectorau Uned

Gadewch i a gynrychioli fector cyffredinol efo hyd $|a|$. Y fector \hat{a} yw'r **fector uned** sy'n mynd i'r un cyfeiriad â'r fector a , ond sydd efo hyd 1 uned.

$$\hat{a} = \frac{a}{|a|}$$

Enghraifft

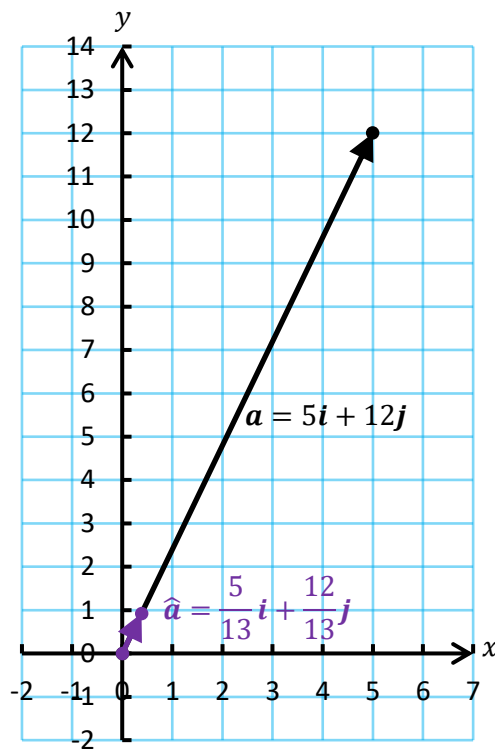
Os yw $a = 5i + 12j$, yna

$$|a| = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$|a| = 13$$

$$\hat{a} = \frac{5i + 12j}{13}$$

$$\hat{a} = \frac{5}{13}i + \frac{12}{13}j$$



Ymarfer 3

(a) Os yw $a = 9i + 12j$, darganfyddwch \hat{a} .

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Os yw $a = 2i + 5j$, darganfyddwch \hat{a} .

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Os yw $a = 4i - 6j$, darganfyddwch \hat{a} .

.....

.....

.....

.....

.....

(ch) Os yw $a = 7i$, darganfyddwch \hat{a} .

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 4

Os yw $a = 10i + 24j$,

(a) Darganfyddwch \hat{a} .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Ysgrifennwch fector i gyfeiriad a sydd efo hyd 5 uned.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Hafaliad Fector AB

Gadewch i fectorau safle'r pwyntiau A a B , mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog O , gael eu rhoi gan \mathbf{a} a \mathbf{b} , yn ôl eu trefn.

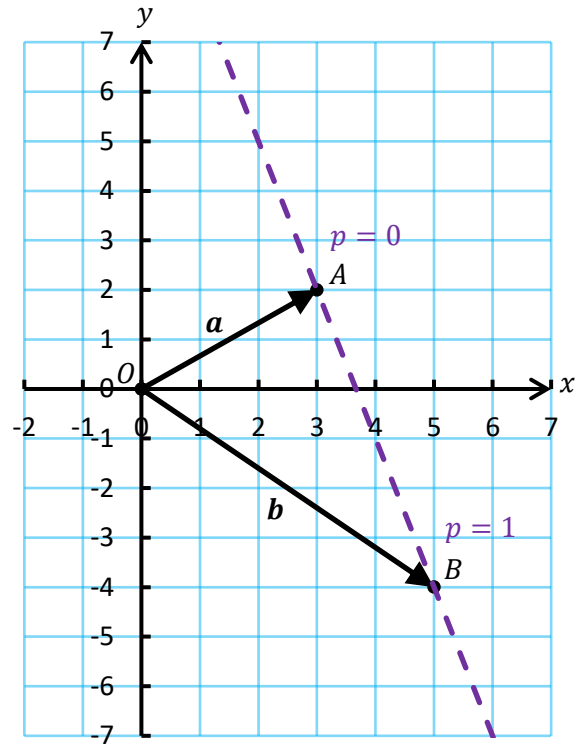
Fel rydym wedi gweld yn barod, y fector sy'n mynd o A i B yw $\mathbf{AB} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Mae'r hafaliad fector

$$\mathbf{a} + p(-\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

yn cynrychioli pwynt cyffredinol ar y llinell sy'n cysylltu A efo B . Mae'r paramedr p yn rhif sy'n rheoli ble rydym ni ar y llinell. Os yw $p = 0$, rydym ar y pwynt A . Os yw $p = 1$, rydym ar y pwynt B . Os yw $0 < p < 1$, rydym rhywle rhwng A a B . Os yw $p < 0$, rydym rhywle cyn A . Ac os yw $p > 1$, rydym rhywle ar ôl B .

Gellid meddwl am yr hafaliad fector fel hyn: cychwynnawch yn y tarddbwynt O , cyn mynd i'r pwynt A gan ddilyn y fector \mathbf{a} . Yna, teithiwch bellter penodol (yn cael ei reoli gan y paramedr p) ar hyd y fector \mathbf{AB} .



Enghraifft

Os yw $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, yna'r hafaliad fector \mathbf{AB} yw

$$\begin{aligned} & 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + p(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \\ &= 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + p(-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \\ &= 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + p(2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) \\ &= (3 + 2p)\mathbf{i} + (2 - 6p)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Ymarfer 5

Darganfyddwch yr hafaliad fector \mathbf{AB} os yw

(a) $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) $\mathbf{a} = -8\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

(ch) $\mathbf{a} = 9\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - \mathbf{j}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ymarfer 6

Gadewch i fectorau safle'r pwyntiau A a B , mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog O , gael eu rhoi gan $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, yn ôl eu trefn.

(a) Darganfyddwch yr hafaliad fector AB .

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Darganfyddwch ganolbwynt AB .

.....

.....

.....

(c) Os yw'r pwynt C yn rhannu'r llinell AB fel bod $AC:CB = 2:1$, darganfyddwch fector safle C .

.....

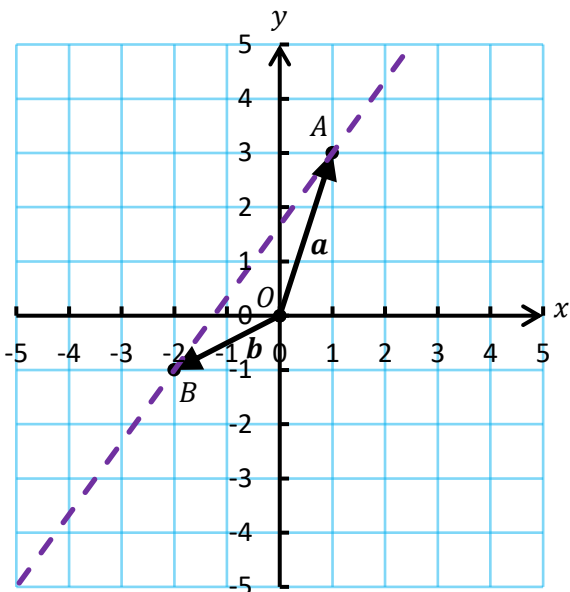
.....

.....

.....

.....

.....



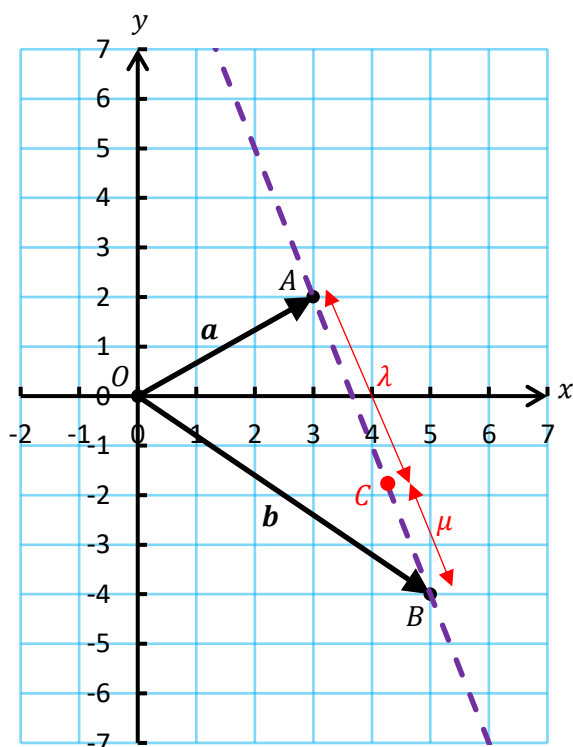
Fformiwla ar gyfer rhannu llinell mewn cymhareb benodol

Gadewch i fectorau safle'r pwyntiau A a B , mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog O , gael eu rhoi gan \mathbf{a} a \mathbf{b} , yn ôl eu trefn.

Gadewch i'r pwynt C rannu'r llinell AB yn y gymhareb $\lambda:\mu$.

$$\begin{aligned} \mathbf{OC} &= \mathbf{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \mathbf{AB} \\ \mathbf{OC} &= \mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (-\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ \mathbf{OC} &= \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu}\right) \mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (-\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ \mathbf{OC} &= \frac{(\lambda + \mu)\mathbf{a} + \lambda(-\mathbf{a} + \mathbf{b})}{\lambda + \mu} \\ \mathbf{OC} &= \frac{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} - \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{\lambda + \mu} \\ \mathbf{OC} &= \frac{\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

Mae'r fformiwla uchod yn cael ei roi yn y llyfryn fformiwlâu.



Enghraifft

Gadewch i fectorau safle'r pwyntiau A a B , mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog O , gael eu rhoi gan $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = 8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, yn ôl eu trefn. Os yw'r pwynt C yn rhannu'r llinell AB yn y gymhareb 2:3, darganfyddwch fector safle C .

$$OC = \frac{3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) + 2(8\mathbf{i} + 3\mathbf{j})}{2 + 3}$$

$$OC = \frac{12\mathbf{i} + 21\mathbf{j} + 16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}}{5}$$

$$OC = \frac{28\mathbf{i} + 27\mathbf{j}}{5}$$

$$OC = \frac{28}{5}\mathbf{i} + \frac{27}{5}\mathbf{j}$$

Yn cymharu efo
 $OC = \frac{\mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{\lambda + \mu}$, ble mae C
 yn rhannu'r llinell AB
 yn y gymhareb $\lambda : \mu$,
 mae $\lambda = 2$ a $\mu = 3$.

Ymarfer 7

(a) Gadewch i fectorau safle'r pwyntiau A a B , mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog O , gael eu rhoi gan $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, yn ôl eu trefn. Os yw'r pwynt C yn rhannu'r llinell AB yn y gymhareb 3:5, darganfyddwch fector safle C .

(b) Gadewch i fectorau safle'r pwyntiau A a B , mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog O , gael eu rhoi gan $\mathbf{a} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, yn ôl eu trefn. Os yw'r pwynt C yn rhannu'r llinell AB yn y gymhareb 4:1, darganfyddwch fector safle C .

(Uned I Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

18. (a) Mae'r fectorau \mathbf{u} a \mathbf{v} wedi'u diffinio gan $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.
- (i) Darganfyddwch y fector $4\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.
- (ii) Mae fectorau \mathbf{u} a \mathbf{v} yn fectorau safle y pwyntiau U a V , yn y drefn honno. Darganfyddwch hyd llinell UV . [4]
- (b) Mae dau bentref A a B 40 km oddi wrth ei gilydd ar ffordd hir syth sy'n pasio drwy ddiffeithdir. Mae fectorau safle A a B yn cael eu dynodi gan \mathbf{a} a \mathbf{b} , yn y drefn honno.
- (i) Mae pentref C ar y ffordd rhwng A a B ar bellter o 4 km oddi wrth B . Darganfyddwch fector safle C yn nhermau \mathbf{a} a \mathbf{b} .
- (ii) Fector safle pentref D yw $\frac{2}{9}\mathbf{a} + \frac{5}{9}\mathbf{b}$. Esboniwch pam nad yw'n bosibl i bentref D fod ar y ffordd syth sy'n pasio drwy A a B . [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2018)

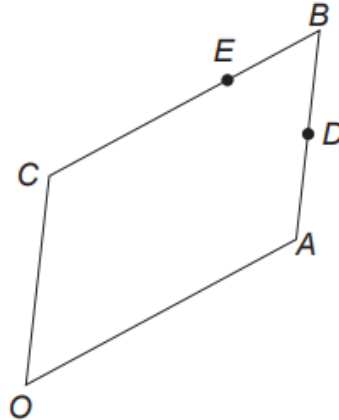
1	1
---	---

a) Mae'r fectorau \mathbf{u} a \mathbf{v} wedi'u diffinio gan $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 40\mathbf{j}$ a $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Darganfyddwch yr amrediad o werthoedd ar gyfer μ fel bod $\mu|\mathbf{v}| > |\mathbf{u}|$. [3]

b) Fector safle'r pwynt A yw $11\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ a fector safle'r pwynt B yw $21\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
Darganfyddwch fector safle'r pwynt C , sydd rhwng A a B , fel bod $AC:CB$ yn $2:3$. [3]

(Uned I Haf 2019)

0	6
---	---

Paralelogram yw $OABC$ gydag O fel tarddbwynt.

Fector safle A yw \mathbf{a} a fector safle C yw \mathbf{c} . Canolbwynt AB yw D . Mae'r pwynt E yn rhannu'r llinell CB fel bod $CE:EB = 2:1$.

a) Darganfyddwch, yn nhermau \mathbf{a} ac \mathbf{c} ,

i) y fector \mathbf{AC} ,

ii) fector safle D ,

iii) fector safle E .

[3]

b) Darganfyddwch a yw DE yn baralel i AC neu beidio, gan nodi eich rheswm yn glir.

[2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2022)

1	6
---	---

Mae'r fectorau \mathbf{a} a \mathbf{b} wedi'u diffinio gan $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ a $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

- a) Darganfyddwch fector uned i gyfeiriad \mathbf{a} . [2]
- b) Darganfyddwch yr ongl mae \mathbf{b} yn ei gwneud â'r echelin- x . [2]
- c) Mae'r fector $\mu\mathbf{a} + \mathbf{b}$ yn baralel i $4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.
- i) Darganfyddwch y fector $\mu\mathbf{a} + \mathbf{b}$ yn nhermau μ , \mathbf{i} a \mathbf{j} . [1]
- ii) Darganfyddwch werth μ . [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2023)

1	2
---	---

Mae fectorau safle'r pwyntiau A a B , mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog O , wedi'u rhoi gan

$$\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 8\mathbf{j},$$

yn y drefn honno.

- a) Darganfyddwch y fector \mathbf{AB} . [2]
- b) i) Darganfyddwch fector uned i gyfeiriad \mathbf{a} . [2]
- ii) Mae'r pwynt C fel bod y fector \mathbf{OC} i gyfeiriad \mathbf{a} .
O wybod mai 7 uned yw hyd \mathbf{OC} , ysgrifennwch fector safle C . [1]
- c) Cyfrifwch yr ongl AOB . [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Edexcel Paper 1 [8MA0/01] Summer 2019)

16. (i) Two non-zero vectors, \mathbf{a} and \mathbf{b} , are such that

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Explain, geometrically, the significance of this statement.

(1)

(ii) Two different vectors, \mathbf{m} and \mathbf{n} , are such that $|\mathbf{m}| = 3$ and $|\mathbf{m} - \mathbf{n}| = 6$
The angle between vector \mathbf{m} and vector \mathbf{n} is 30°

Find the angle between vector \mathbf{m} and vector $\mathbf{m} - \mathbf{n}$, giving your answer, in degrees, to one decimal place.

(4)



Hafaliadau

Cwadratig

$$y = 2x^2 - 6x + 4$$

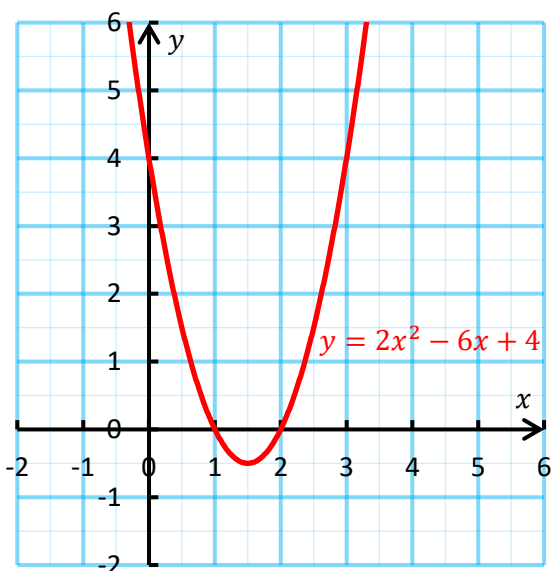
Rhyngdoriad- y (0, 4)

$$y = 2(x - 1.5)^2 - 0.5$$

Pwynt minimwm (1.5, -0.5)

$$y = (2x - 4)(x - 1)$$

Gwreiddiau $x = 2$, $x = 1$



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Ar gyfer hafaliad cwadratig o'r ffurf $ax^2 + bx + c = 0$, ystyried sut i'w ffactorio; datrys a phlotio.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Plotio graffiau; ffactorio mynegiadau cwadratig; datrys hafaliadau cwadratig efo'r fformiwla gwadratig.

I ble mae'n arwain?

Uned 1: Datrys hafaliadau trigonometreg neu esbonyddol.
Uned 2: Datrys hafaliadau mudiant.
Uned 3: Ffwythiannau cyfansawdd a gwrthdro.
Uned 4: Mudiant gwrthrych mewn dau ddimensiwn.

Theori



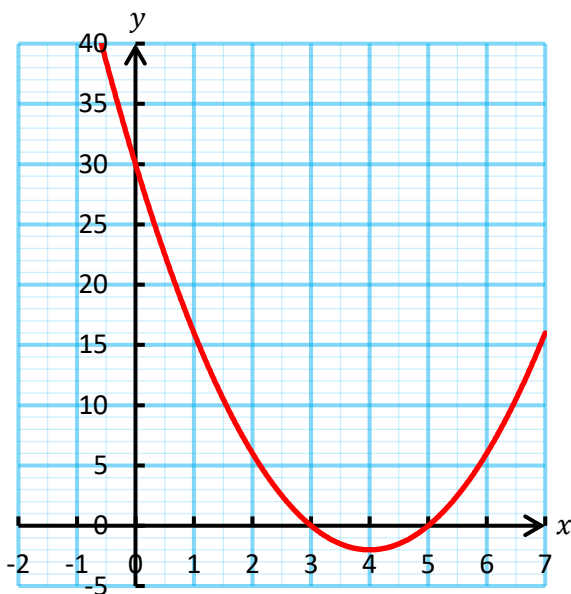
Theori

Mae gan **ffwythiant cwadratig** y ffurf $ax^2 + bx + c$, ble mae a , b ac c yn gysonion gydag $a \neq 0$. Mae gan **hafaliad cwadratig** y ffurf $ax^2 + bx + c = 0$.

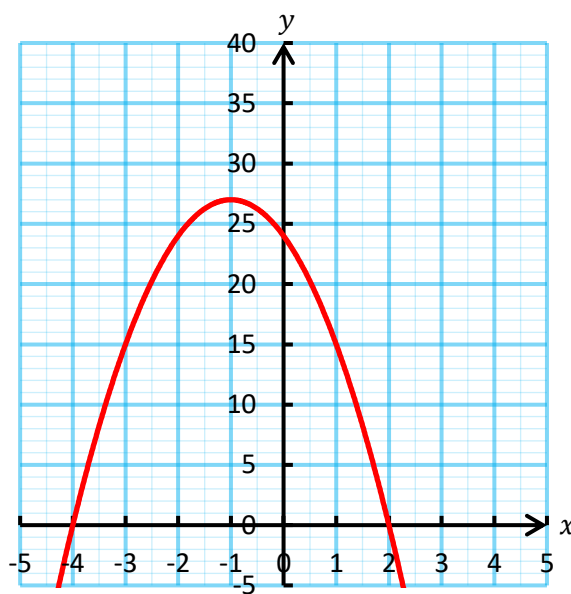
Gallwn blotio ffwythiant cwadratig ar bapur graff, ac mae wastad ar ffurf cromlin siâp 'u' neu siâp 'n'. Os yw $a > 0$, yna mae'r gromlin yn siâp 'u', ac mae ganddi bwynt minimwm. Os yw $a < 0$, yna mae'r gromlin yn siâp 'n', ac mae ganddi bwynt maxsimwm.

Enghraifft 1

$$y = 2x^2 - 16x + 30$$



$$y = -3x^2 - 6x + 24$$



O'r ffwythiannau a'r graffiau, gallwn weld y nodweddion canlynol.

Y rhyngdoriad- y yw $(0, 30)$.

Y gwreiddiau yw $x = 3$ ac $x = 5$.

Y pwynt minimwm yw $(4, -2)$.

Y rhyngdoriad- y yw $(0, 24)$.

Y gwreiddiau yw $x = -4$ ac $x = 2$.

Y pwynt maxsimwm yw $(-1, 27)$.

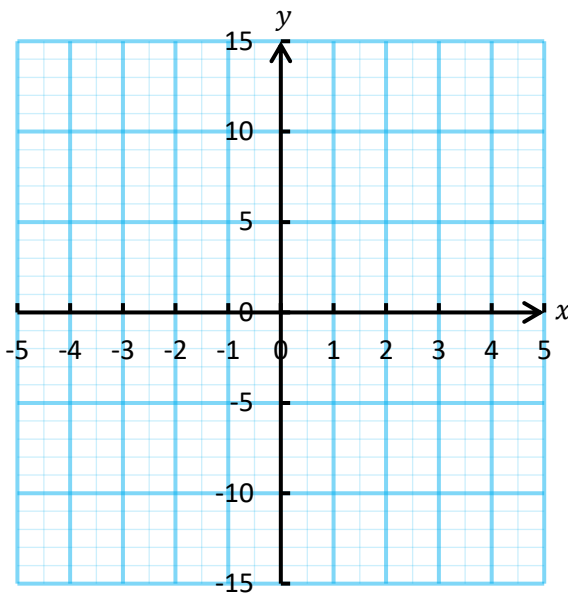
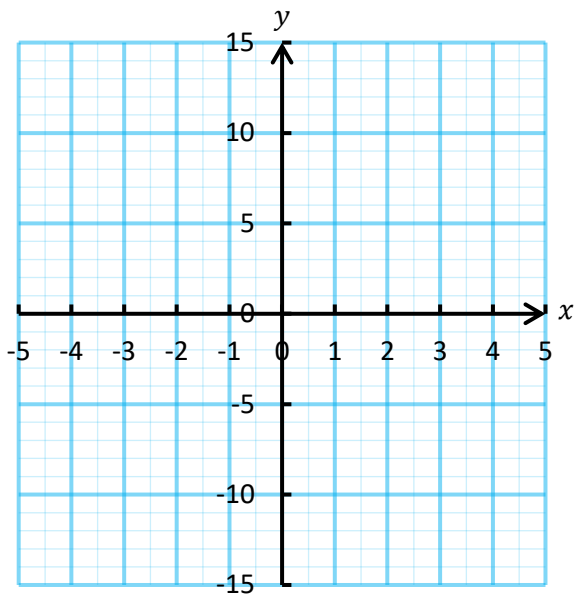
Ymarfer 1

Defnyddiwch eich cyfrifiannell i blotio'r ffwythiannau cwadratig canlynol.

(Ar gyfrifiannell gwyddonol, defnyddiwch y 'table mode' i'ch helpu. Ar gyfrifiannell graffigol, defnyddiwch y cyfleustur plotio graffiau i'ch helpu.)

$y = 2x^2 - 4x - 6$

$y = -3x^2 - 6x + 9$



Cwblhewch y brawddegau canlynol.

Y rhyngdoriad- y yw

Y rhyngdoriad- y yw

Y gwreiddiau yw $x =$ ac $x =$

Y gwreiddiau yw $x =$ ac $x =$

Y pwynt minimwm yw

Y pwynt maxsimwm yw

Ffactorio Mynegiadau Cwadratig

Mae'n bosib ffactorio rhai mynegiadau cwadratig gan ddefnyddio'r dull hollti neu'r dull ditectif o'r gwaith TGAU.

Enghraifft 2

Ffactoriwch y mynegiad cwadratig $3x^2 - 7x - 20$.

Y Dull Hollti

$3 \times -20 = -60$

Y ddau rif sy'n lluosu i roi -60 ag yn adio i roi -7 yw 5 a -12 .

$$\begin{aligned} 3x^2 - 7x - 20 &= 3x^2 + 5x - 12x - 20 \\ &= x(3x + 5) - 4(3x + 5) \\ &= (3x + 5)(x - 4) \end{aligned}$$

Y Dull Ditectif

Mae $3x \times x = 3x^2$, felly mae'n bosib ffactorio $3x^2 - 7x - 20$ yn y ffurf $(3x + ?)(x + ?)$.

Trwy geisio parau o rifau gwahanol sy'n lluosu i roi -20 , gwelwn fod $3x^2 - 7x - 20 = (3x + 5)(x - 4)$.

Ymarfer 2

Ffactoriwch: (a) $2x^2 + 11x + 15$

(b) $3x^2 - 5x - 12$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) $4x^2 + 12x + 5$

(ch) $8x^2 - 19x + 6$

Ffactorio Mynegiadau efo Pwerau Uwch

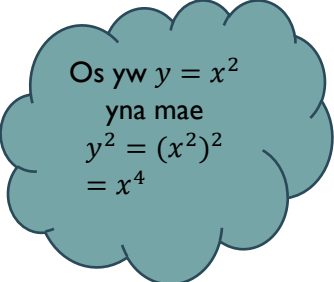
Mae'n bosib defnyddio'r technegau uchod i ffactorio **rhai** mynegiadau efo indecsau sy'n uwch na 2.

Enghraifft 3

Ffactoriwch y mynegiad cwartig $2x^4 + 9x^2 + 4$.

Gallwn ddefnyddio'r amnewid $y = x^2$ i newid y mynegiad i fod yn un cwadratig:

$$\begin{aligned} 2x^4 + 9x^2 + 4 &= 2y^2 + 9y + 4 \\ &= 2y^2 + 8y + y + 4 \\ &= 2y(y + 4) + 1(y + 4) \\ &= (y + 4)(2y + 1) \\ &= (x^2 + 4)(2x^2 + 1) \end{aligned}$$



Os yw $y = x^2$
yna mae
 $y^2 = (x^2)^2$
 $= x^4$

Ymarfer 3

Defnyddiwch amnewid priodol i ffactorio'r mynegiadau canlynol.

(a) $2x^4 + 7x^2 + 6$

(b) $5x^4 + 18x^2 + 9$

(c) $3x^6 + 13x^3 + 4$

(ch) $4x^8 + 21x^4 - 18$

(d) $2x^{24} - 21x^{12} + 40$

(dd) $x + 3\sqrt{x} + 2$

Datrys Hafaliadau

Gallwn ddefnyddio'r gwaith ffactorio uchod i ddatrys rhai hafaliadau.

Enghraifft 4

(a) Datrysych yr hafaliad $x^2 + 2x - 8 = 0$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

Naill ai $x + 4 = 0$ neu $x - 2 = 0$

$$x = -4 \quad \text{neu} \quad x = 2$$

(b) Datrysych yr hafaliad $2x^2 + 3x - 20 = 0$

$$2 \times -20 = -40$$

$$2x^2 + 8x - 5x - 20 = 0$$

$$2x(x + 4) - 5(x + 4) = 0$$

$$(x + 4)(2x - 5) = 0$$

Naill ai $x + 4 = 0$ neu $2x - 5 = 0$

$$x = -4 \quad \text{neu} \quad x = \frac{5}{2}$$

Ymarfer 4

Datrysych yr hafaliadau canlynol trwy ffactorio.

(a) $x^2 + 12x + 32 = 0$

(b) $2x^2 - 13x + 20 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Cwblhau'r Sgwâr

Nid yw'n bosib datrys bob hafaliad cwadratig gan ddefnyddio'r technegau ffactorio uchod.

Ar gyfer y rhain, gallwn geisio **chwblhau'r sgwâr** er mwyn eu datrys.

Enghraifft 5

(a) Datrysych yr hafaliad $x^2 + 6x + 7 = 0$ trwy gwblhau'r sgwâr.

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 3^2 + 7 = 0 \quad \text{[Hanner 6 yw 3]}$$

$$(x + 3)^2 - 9 + 7 = 0$$

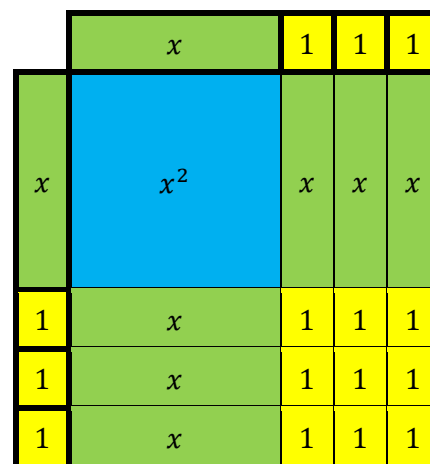
$$(x + 3)^2 - 2 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 2$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{2}$$

$$x = -3 \pm\sqrt{2}$$

Naill ai $x = -3 + \sqrt{2}$ neu $x = -3 - \sqrt{2}$



Mae'r *teiliau algebra* ar y dde'n egluro beth sy'n cymryd lle'n y datrysiaid.

Mae'r diagram yn dangos y swm $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Wrth gymharu efo $x^2 + 6x + 7$, gwelwn ein bod yn cytuno efo'r x^2 a'r $6x$, ond nid efo'r cysonion. Rhaid **tynnu 9** (sef 3^2) i ffwrdd ac **adio 7** i gael beth rydym angen:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(x + 3)^2 - 9 = x^2 + 6x + 9 - 9$$

$$(x + 3)^2 - 9 = x^2 + 6x$$

$$(x + 3)^2 - 9 + 7 = x^2 + 6x + 7$$

$$(x + 3)^2 - 2 = x^2 + 6x + 7$$

Enghraifft 6

Datrysych yr hafaliad $3x^2 + 24x + 5 = 0$ trwy gwblhau'r sgwâr.

Dull 1

$$3x^2 + 24x + 5 = 0$$

$$3(x^2 + 8x) + 5 = 0$$

$$3((x + 4)^2 - 4^2) + 5 = 0$$

$$3((x + 4)^2 - 16) + 5 = 0$$

$$3(x + 4)^2 - 48 + 5 = 0$$

$$3(x + 4)^2 - 43 = 0$$

$$3(x + 4)^2 = 43$$

$$(x + 4)^2 = \frac{43}{3}$$

$$x + 4 = \pm \sqrt{\frac{43}{3}}$$

$$x = -4 \pm \sqrt{\frac{43}{3}}$$

Naill ai $x = -4 + \sqrt{\frac{43}{3}}$ neu $x = -4 - \sqrt{\frac{43}{3}}$

Dull 2

$$3x^2 + 24x + 5 = 0$$

$$3\left(x^2 + 8x + \frac{5}{3}\right) = 0$$

$$x^2 + 8x + \frac{5}{3} = 0$$

$$(x + 4)^2 - 4^2 + \frac{5}{3} = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 + \frac{5}{3} = 0$$

$$(x + 4)^2 - \frac{48}{3} + \frac{5}{3} = 0$$

$$(x + 4)^2 - \frac{43}{3} = 0$$

$$(x + 4)^2 = \frac{43}{3}$$

$$x + 4 = \pm \sqrt{\frac{43}{3}}$$

$$x = -4 \pm \sqrt{\frac{43}{3}}$$

Naill ai $x = -4 + \sqrt{\frac{43}{3}}$ neu $x = -4 - \sqrt{\frac{43}{3}}$

	x	1	1	1	1
x	x^2	x	x	x	x
1	x	1	1	1	1
1	x	1	1	1	1
1	x	1	1	1	1
1	x	1	1	1	1

Ymarfer 5

Datrysych yr hafaliadau canlynol trwy gwblhau'r sgwâr.

(a) $x^2 + 10x + 3 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) $x^2 - 8x + 9 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) $2x^2 + 12x + 1 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(ch) $3x^2 + 6x - 5 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

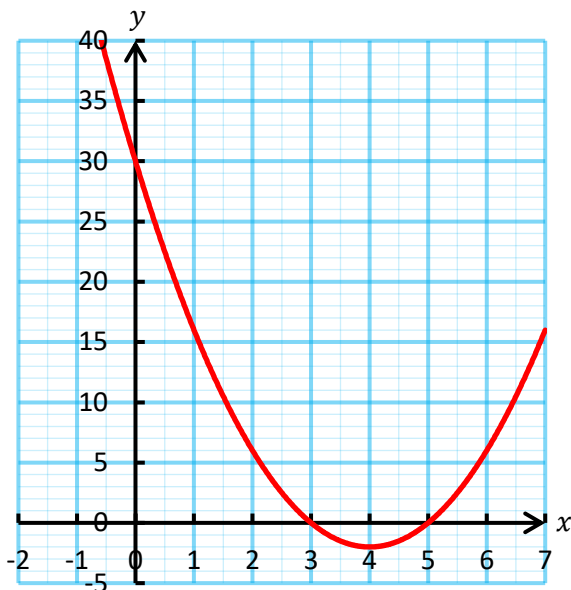
.....

.....

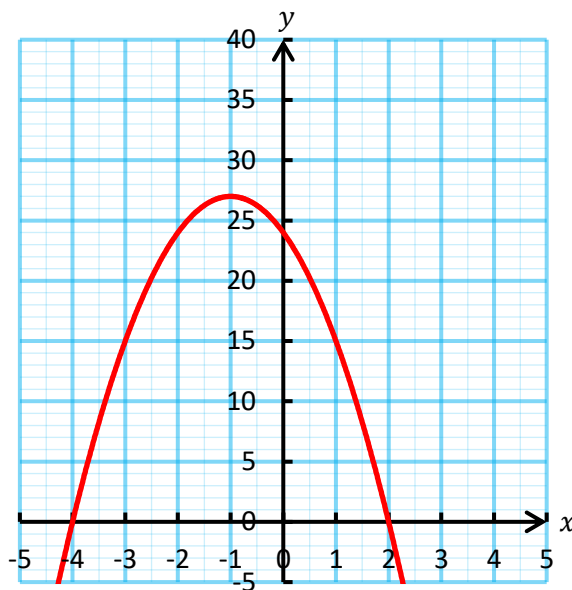
Darganfod pwynt minimwm neu bwynt maccsimwm trwy gwblhau'r sgwâr

Gadewch i ni ddychwelyd at y ffwythiannau cwadratig a welsom gyntaf yn Enghraifft 1.

$$y = 2x^2 - 16x + 30$$



$$y = -3x^2 - 6x + 24$$



Trwy gwblhau'r sgwâr, mae'n bosib i ni ddarganfod y gwreiddiau a'r pwynt minimwm / maccsimwm.

Darganfod y gwreiddiau:

$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$

$$2(x^2 - 8x) + 30 = 0$$

$$2((x - 4)^2 - (-4)^2) + 30 = 0$$

$$2((x - 4)^2 - 16) + 30 = 0$$

$$2(x - 4)^2 - 32 + 30 = 0$$

$$2(x - 4)^2 - 2 = 0$$

$$2(x - 4)^2 = 2$$

$$(x - 4)^2 = 1$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{1}$$

$$x - 4 = \pm 1$$

$$x = 4 \pm 1$$

Naill ai $x = 4 + 1$ neu $x = 4 - 1$

Naill ai $x = 5$ neu $x = 3$

$$-3x^2 - 6x + 24 = 0$$

$$-3(x^2 + 2x) + 24 = 0$$

$$-3((x + 1)^2 - 1^2) + 24 = 0$$

$$-3((x + 1)^2 - 1) + 24 = 0$$

$$-3(x + 1)^2 + 3 + 24 = 0$$

$$-3(x + 1)^2 + 27 = 0$$

$$-3(x + 1)^2 = -27$$

$$(x + 1)^2 = 9$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{9}$$

$$x + 1 = \pm 3$$

$$x = -1 \pm 3$$

Naill ai $x = -1 + 3$ neu $x = -1 - 3$

Naill ai $x = 2$ neu $x = -4$

Pwynt minimwm / maccsimwm:

Trwy gwblhau'r sgwâr, gallwn ysgrifennu

$$y = 2x^2 - 16x \text{ fel } y = 2(x - 4)^2 - 2.$$

Beth bynnag yw gwerth x , bydd $(x - 4)^2 \geq 0$.

Felly gwerth minimwm y ffwythiant yw -2 .

Mae hyn yn digwydd pan fo'r gromfach $x - 4 = 0$
 $x = 4$

Felly'r pwynt minimwm yw $(4, -2)$.

Trwy gwblhau'r sgwâr, gallwn ysgrifennu

$$y = -3x^2 - 6x + 24 \text{ fel } y = -3(x + 1)^2 + 27, \\ \text{neu } y = 27 - 3(x + 1)^2.$$

Beth bynnag yw gwerth x , bydd $(x + 1)^2 \geq 0$.

Felly gwerth maccsimwm y ffwythiant yw 27 .

Mae hyn yn digwydd pan fo'r gromfach $x + 1 = 0$
 $x = -1$

Felly'r pwynt maccsimwm yw $(-1, 27)$.

Ymarfer 6

Defnyddiwch eich gwaith cyfrifo o Ymarfer 5 i'ch helpu darganfod y pwynt minimwm / macsimwm ar gyfer y ffwythiannau canlynol.

(a) $y = x^2 + 10x + 3$

(b) $y = x^2 - 8x + 9$

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

(c) $y = 2x^2 + 12x + 1$

(ch) $y = 3x^2 + 6x - 5$

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Ymarfer 7

Darganfyddwch wreiddiau a phwynt minimwm / macsimwm y ffwythiannau canlynol.

(a) $y = 2x^2 - 4x - 6$

(b) $y = -3x^2 - 6x + 9$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ymarfer 8

Gwiriwch eich atebion i Ymarfer 7 gan ddefnyddio eich atebion blaenorol i Ymarfer 1.

Y Fformiwla Gwadratig

Yr hafaliad cwadratig gyffredinol yw $ax^2 + bx + c = 0$, gydag $a \neq 0$.

Os yw $b = 0$ neu $c = 0$, yna mae'r hafaliad yn eithaf hawdd i'w datrys.

$b = 0$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$\text{Naill ai } x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ neu } x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$c = 0$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$\text{Naill ai } x = 0 \text{ neu } ax + b = 0$$

$$\text{Naill ai } x = 0 \text{ neu } ax = -b$$

$$\text{Naill ai } x = 0 \text{ neu } x = -\frac{b}{a}$$

Os yw $b \neq 0$ ac hefyd $c \neq 0$, yna gallwn gwblhau'r sgwâr i geisio datrys yr hafaliad cyffredinol.

Cwblhau'r sgwâr

Lluosi top a gwaelod y ffracsiwn $\frac{c}{a}$ efo $4a$

Defnyddio $\sqrt{4a^2} = 2a$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Rhannu pob term efo a

Sgwario'r ail gromfach

Ail israddio bob ochr

Hwn yw'r fformiwla gwadratig

Ymarfer 9

Datrysych yr hafaliadau cwadratig canlynol.

(a) $4x^2 - 9 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) $4x^2 - 9x = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) $4x^2 + 9x - 6 = 0$

(ch) $4x^2 - 5x - 6 = 0$

A series of horizontal dotted lines for working out solutions to the quadratic equations.

Y Gwahanolyn

Ystyriwch y graffiau isod, sy'n plotio tri ffwythiant cwadratig.

$y = 2x^2 - 16x + 30$

$y = 2x^2 - 16x + 32$

$y = 2x^2 - 16x + 34$



Mae'r graff cyntaf, ar gyfer $y = 2x^2 - 16x + 30$, yn torri trwy'r echelin- x dwywaith, yn y pwyntiau (3, 0) a (5, 0). Rydym yn dweud bod gan y ffwythiant **ddau wreiddyn real**.

Mae'r ail graff, ar gyfer $y = 2x^2 - 16x + 32$, yn cyffwrdd yr echelin- x mewn un pwynt, sef (4, 0). Rydym yn dweud bod gan y ffwythiant **un gwreiddyn real sy'n ailadrodd**.

Nid yw'r trydydd graff, ar gyfer $y = 2x^2 - 16x + 34$, yn torri'r echelin- x o gwbl. Rydym yn dweud bod gan y ffwythiant **ddim gwreiddiau real**.

Byddai modd ffeindio'r gwreiddiau uchod gan ddefnyddio'r fformiwla gwadratig.

$y = 2x^2 - 16x + 30$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 2, b = -16, c = 30$

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 2 \times 30}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{4}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{4}$$

$$x = \frac{16 \pm 4}{4}$$

Naill ai $x = \frac{16+4}{4}$ neu $x = \frac{16-4}{4}$

Naill ai $x = 5$ neu $x = 3$

$y = 2x^2 - 16x + 32$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 2, b = -16, c = 32$

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 2 \times 32}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{4}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{0}}{4}$$

$$x = \frac{16 \pm 0}{4}$$

Naill ai $x = \frac{16+0}{4}$ neu $x = \frac{16-0}{4}$

Naill ai $x = 4$ neu $x = 4$

$y = 2x^2 - 16x + 34$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 2, b = -16, c = 34$

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 2 \times 34}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 272}}{4}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{-16}}{4}$$

'Math Error' wrth ffeindio $\sqrt{-16}$

Y rhan o'r fformiwla gwadratig sy'n rheoli faint o wreiddiau real y cawn yw'r mynegiad $b^2 - 4ac$, sy'n ymddangos o fewn yr ail isradd. Mae'r mynegiad hwn yn cael ei adnabod fel y **gwahanolyn**.

Os yw $b^2 - 4ac > 0$ yna cawn ddau wreiddyn real.

Os yw $b^2 - 4ac = 0$ yna cawn un gwreiddyn real sy'n ailadrodd.

Os yw $b^2 - 4ac < 0$ nid oes unrhyw wreiddiau real.

Ymarfer 10

Faint o wreiddiau real sydd gan yr hafaliadau cwadratig canlynol?

(a) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

(b) $9x^2 + 12x - 4 = 0$

(c) $9x^2 + 4x + 12 = 0$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ymarfer 11

Ystyriwch yr hafaliad cwadratig $2x^2 + 8x + k = 0$. Ar gyfer pa werthoedd o k mae gan yr hafaliad

(a) ddau wreiddyn real?

(b) un gwreiddyn real sy'n ailadrodd?

(c) dim gwreiddiau real?

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Ymarfer 12

Ystyriwch yr hafaliad cwadratig $2x^2 + kx + 8 = 0$. Ar gyfer pa werthoedd o k mae gan yr hafaliad

- (a) ddau wreiddyn real?
- (b) un gwreiddyn real sy'n ailadrodd?
- (c) dim gwreiddiau real?

Anhafaleddau Cwadratig

Mae anhafaledd cwadratig yn anhafaledd sy'n cynnwys ffwythiant cwadratig.
 Mae $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$ a $3x^2 - 25x + 32 < 2 - 4x$ yn enghreifftiau o anhafaleddau cwadratig.

Er mwyn datrys anhafaledd cwadratig:

- Ad-drefnwch yr anhafaledd i gael ffwythiant cwadratig $f(x)$ ar yr ochr chwith a sero ar yr ochr dde.
- Datrysych yr hafaliad cwadratig $f(x) = 0$ i ddarganfod y **pwntiau critigol**.
- Brasluniwch y ffwythiant $f(x)$ ar set o echelinau addas, gan ddangos unrhyw bwyntiau critigol.
- Ysgrifennwch y datrysiad terfynol.

Enghraifft 7

Datrysych yr anhafaleddau cwadratig $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$ a $3x^2 - 25x + 32 < 2 - 4x$.

$2x^2 - 7x - 15 \geq 0$

Dim angen ail-drefnu.

Mae $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$

Datrys $f(x) = 0$:

$2x^2 - 7x - 15 = 0$

$2 \times -15 = -30$

$2x^2 - 10x + 3x - 15 = 0$

$2x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$

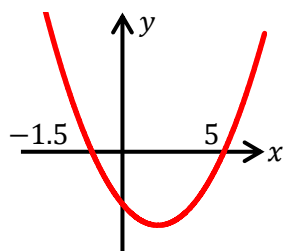
$(x - 5)(2x + 3) = 0$

Naill ai $x - 5 = 0$ neu $2x + 3 = 0$

Naill ai $x = 5$ neu $2x = -3$

Naill ai $x = 5$ neu $x = -1.5$ (pwntiau critigol)

Braslon:



Ateb terfynol: $x \leq -1.5$ neu $x \geq 5$
 Mewn nodiant set: $\{x: x \leq -1.5\} \cup \{x: x \geq 5\}$

$3x^2 - 25x + 32 < 2 - 4x$

Ail-drefnu: $3x^2 - 21x + 30 < 0$

Mae $f(x) = 3x^2 - 21x + 30$

Datrys $f(x) = 0$:

$3x^2 - 21x + 30 = 0$

$3 \times 30 = 90$

$3x^2 - 15x - 6x + 30 = 0$

$3x(x - 5) - 6(x - 5) = 0$

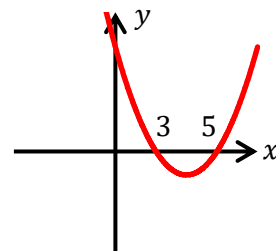
$(x - 5)(3x - 6) = 0$

Naill ai $x - 5 = 0$ neu $3x - 6 = 0$

Naill ai $x = 5$ neu $2x = 6$

Naill ai $x = 5$ neu $x = 3$ (pwntiau critigol)

Braslon:



Ateb terfynol: $3 < x < 5$
 Mewn nodiant set: $\{x: x > 3\} \cap \{x: x < 5\}$

Ymarfer 13

Datrysych yr anhafaleddau cwadratig canlynol. Ysgrifennwch eich atebion gan ddefnyddio nodiant set.

(a) $2x^2 + 4x - 30 > 0$

(b) $3x^2 + 9x \leq 2(2 - x)$

(c) $-2x^2 + 6x - 4 > 0$

(ch) $x^2 < x - 1$

(CI Haf 2018)

6. Darganfyddwch amrediad gwerthoedd x sy'n bodloni'r anhafaledd

$$9x^2 + 16x - 4 > 0.$$

[3]

(Uned I Haf 2022)

0	4
---	---

 Datrysych yr anhafaledd $x^2 + 3x - 6 > 4x - 4$.

[4]

(CI Gaeaf 2007)

7. O wybod bod i'r hafaliad

$$kx^2 - 4x + (k - 3) = 0$$

wreiddiau real, dangoswch fod

$$k^2 - 3k - 4 \leq 0.$$

Darganfyddwch amrediad gwerthoedd k sy'n bodloni'r anhafaledd hwn.

[7]

(CI Gaeaf 2009)

5. O wybod nad oes i'r hafaliad cwadratig

$$(3k - 2)x^2 + 8x + k = 0$$

wreiddiau real, dangoswch fod

$$3k^2 - 2k - 16 > 0.$$

Darganfyddwch amrediad gwerthoedd k sy'n bodloni'r anhafaledd hwn.

[7]

(CI Haf 2016)

6. (a) Darganfyddwch amrediad gwerthoedd k fel bod i'r hafaliad cwadratig

$$9x^2 + 8x - 2k = 0$$

ddau wreiddyn real gwahanadwy.

[4]

- (b) Datrysych yr anhafaledd $x(5x - 7) \geq 6$.

[4]

(CI Haf 2011)

5. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = x^2 + (4k + 3)x + 7,$$

a hafaliad y llinell L yw

$$y = x + k,$$

lle mae k yn gysonyn.O wybod bod L ac C yn croestorri mewn dau bwynt gwahanadwy,

(a) dangoswch fod $4k^2 + 5k - 6 > 0$, [6]

(b) darganfyddwch amrediad gwerthoedd k sy'n bodloni'r anhafaledd hwn. [3]

(CI Haf 2015)

5. (a) Darganfyddwch amrediad gwerthoedd k fel **nad oes** i'r hafaliad cwadratig

$$kx^2 + (2k - 5)x + (k - 6) = 0$$

wreiddiau real.

[4]

- (b) Heb wneud unrhyw waith cyfrifo pellach, ysgrifennwch y gwerth ar gyfer k fel bod i'r hafaliad cwadratig

$$kx^2 + (2k - 5)x + (k - 6) = 0$$

ddau wreiddyn hafal.

[1]

(CI Gaeaf 2014)

6. O wybod nad oes i'r hafaliad cwadratig

$$(2k - 3)x^2 + 8x + (2k + 3) = 0$$

wreiddiau real, dangoswch fod k yn bodloni anhafaledd o'r ffurf

$$m - nk^2 < 0,$$

lle mae m, n yn gyfanrifau y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd.Trwy hyn darganfyddwch amrediad gwerthoedd k fel nad oes i'r hafaliad cwadratig

$$(2k - 3)x^2 + 8x + (2k + 3) = 0$$

wreiddiau real.

[6]

(CI Haf 2013)

6. (a) (i) Gan dybio bod i'r hafaliad cwadratig

$$(k + 1)x^2 + (4k + 1)x + (k - 5) = 0$$

ddau wreiddyn **hafal**, dangoswch fod

$$4k^2 + 8k + 7 = 0.$$

- (ii) Trwy hyn dangoswch
- nad**
- oes unrhyw werthoedd
- real**
- o
- k
- fel bod i'r hafaliad cwadratig

$$(k + 1)x^2 + (4k + 1)x + (k - 5) = 0$$

ddau wreiddyn hafal.

[6]

- (b) Darganfyddwch amrediad gwerthoedd
- x
- sy'n bodloni'r anhafaledd

$$4x^2 - 9x - 9 \geq 0.$$

[3]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned I Haf 2023)

0	7
---	---

Hafaliad y gromlin C yw $y = 2x^2 + 5x - 12$ a hafaliad y llinell L yw $y = mx - 14$, lle mae m yn gysonyn real.

a) O wybod mai tangiad i C yw L ,

i) dangoswch fod m yn bodloni'r hafaliad

$$m^2 - 10m + 9 = 0, \quad [5]$$

ii) darganfyddwch gyfesurynnau dau bwynt cyffwrdd posibl C ac L . [6]

b) O wybod yn lle hynny bod L yn croestorri C mewn dau bwynt gwahanol (*distinct*), darganfyddwch amrediad gwerthoedd m . [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned I Haf 2024)

13. Mae fectorau safle'r pwyntiau A a B , mewn perthynas â tharddbwynt sefydlog O , yn cael eu rhoi gan

$$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$

yn y drefn honno.

(a) Darganfyddwch y fector \mathbf{AB} .

[2]

(b) Darganfyddwch y pellter rhwng y pwyntiau A a B .

[2]

- (c) Mae fector safle'r pwynt C yn cael ei roi gan $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Mae'r pwynt D fel bod y pellter rhwng C a D yn hafal i'r pellter rhwng A a B , ac mae CD yn baralel i AB .
Darganfyddwch fectorau safle posibl y pwynt D . [4]



Differu o

Egwyddorion

Sylfaenol



Isaac Newton



Gottfried Wilhelm Leibniz

Yn y 18fed ganrif datblygodd dadl anferthol rhwng Leibniz a Newton ynghylch pwy oedd y person cyntaf i ddatblygu'r syniad o ddifferu.

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Darganfod graddiant cromlin gan ddefnyddio technegau algebraidd.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Ehangu cromfachau; symleiddio; darganfod graddiant cromlin.

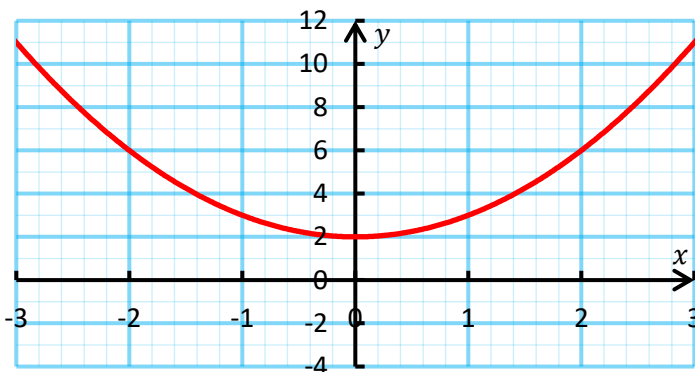
I ble mae'n arwain?

Unedau 1-4: Differu ac integru amrywiaeth o ffwythiannau.

Theori

Ystyriwch y ffwythiant $y = x^2 + 2$. Mae'n bosib llunio graff o'r ffwythiant yma trwy lunio tabl o werthoedd a'u plotio ar bapur graff.

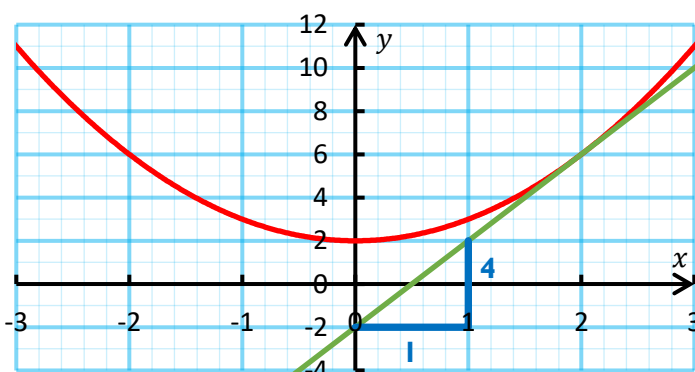
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	6	3	2	3	6	11



Mae graddiant graff yn gallu bod yn ddefnyddiol iawn. Er enghraifft, mewn graff dadleoliad-amser, mae graddiant y graff yn rhoi'r cyflymder.

Gwelwn fod **graddiant** y gromlin (pa mor serth yw'r gromlin) yn newid wrth i ni symud ar hyd y gromlin. Os yw $x = 0$, yna mae'r graddiant yn sero. Os yw x yn negatiff, yna mae'r graddiant yn negatiff, ac os yw x yn positif, yna mae'r graddiant yn positif.

Beth yw graddiant y graff os yw $x = 2$? Un ffordd o ddarganfod hyn yw trwy lunio tangiad i'r graff ar y pwynt (2, 6) a darganfod graddiant y tangiad trwy lunio triongl.

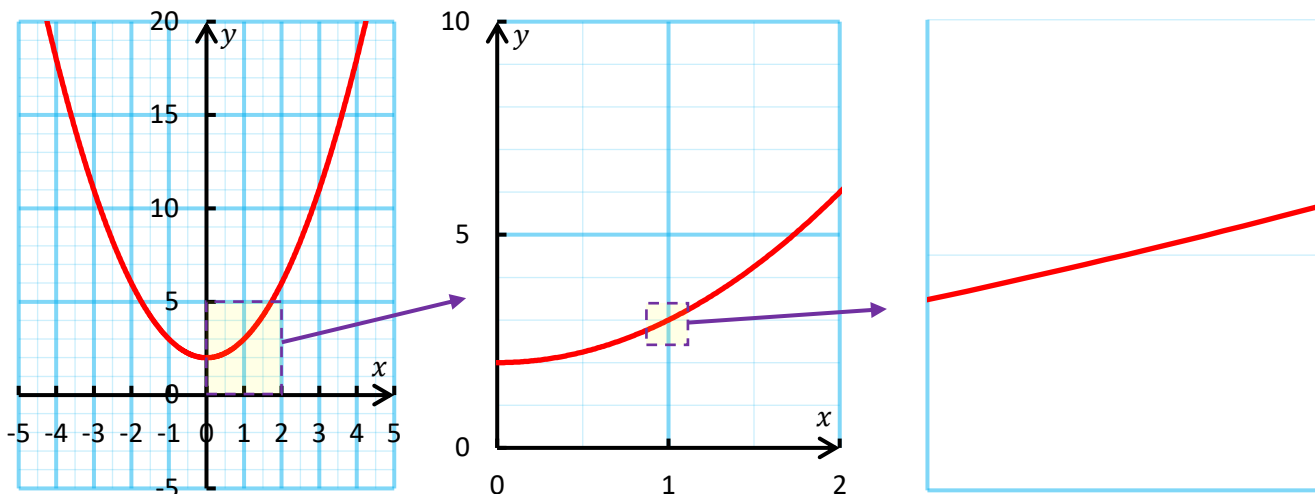


O'r diagram ar y chwith gwelwn mai 4 yw graddiant y graff os yw $x = 2$.

Mae **differu** yn ffordd fathemategol o ddarganfod y graddiant i unrhyw gromlin ar unrhyw bwynt **heb** orfod llunio tangiad a darganfod ei raddiant trwy lunio triongl. Rydym yn defnyddio nodiant arbennig i gynrychioli'r graddiant yma: os yw y yn cynrychioli unrhyw ffwythiant, yna mae $\frac{dy}{dx}$ neu y' yn cynrychioli graddiant y ffwythiant.

Differu o egwyddorion sylfaenol

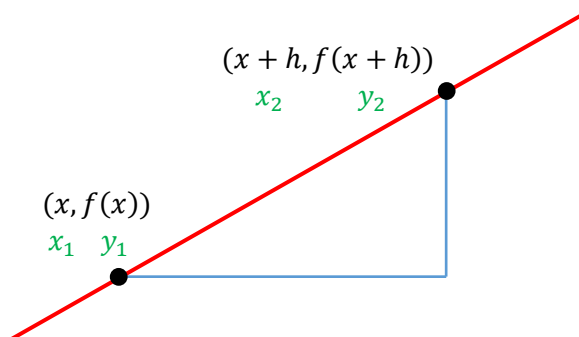
Ystyriwch eto'r ffwythiant $y = x^2 + 2$ o'r dudalen flaenorol. Os ydym yn chwyddo i mewn i'r graff ddigon, yna mae'r graff yn edrych fel llinell syth. (Ceisiwch hyn eich hun ar y wefan www.desmos.com/calculator.)



Mae hyn yn wir ar gyfer unrhyw ddarn o'r graff, felly i ddarganfod graddiant y graff ar unrhyw bwynt,

- Chwyddwch i mewn at y pwynt – digon fel eich bod yn gallu gweld llinell syth;
- Darganfyddwch raddiant y llinell syth trwy ychwanegu triongl ongl sgwâr i'r llinell.

Gadewch i $(x, f(x))$ gynrychioli cyfesuryn y pwynt rydym yn chwyddo i mewn ato. (Yn yr enghraifft uchod, rydym yn chwyddo i mewn at y pwynt $(1, 3)$, ble mae $f(1) = 1^2 + 2 = 3$.) Ystyriwch ein bod wedi chwyddo i mewn digon fel ein gallu bod yn gweld y **llinell syth** ganlyniol.



Theori

Gadewch i h gynrychioli pellter bach iawn ar hyd yr echelin- x . Gallwn symud i'r dde o'r pwynt $(x, f(x))$ i gyrraedd pellter $x + h$ ar hyd yr echelin- x . Y pwynt ar y ffwythiant sy'n cyfateb i $x + h$ yw $(x + h, f(x + h))$. O ystyried bod h ddigon bach fel bod y ffwythiant yn ymddwyn fel llinell syth rhwng x ag $x + h$, gallwn ddefnyddio'r ffracsiwn $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ i gyfrifo graddiant y llinell syth.

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} \\ &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Y broblem nawr yw sicrhau fod h ddigon bach i roi llinell syth i ni bob tro. Er mwyn gwneud yn siŵr o hyn, rydym yn defnyddio'r syniad o **derfan** ("limit") fel bod h mor agos at sero ac y dymunwn. Felly, graddiant $\frac{dy}{dx}$ y ffwythiant ar y pwynt $(x, f(x))$ yw

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Nodyn: Mae rhai gwerslyfrau a thafenni gwaith yn defnyddio δx yn lle h i gynrychioli'r pellter bach ar hyd yr echelin- x .

Enghraifft 1

Trwy egwyddorion sylfaenol, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ os yw $y = x^2 + 2$.

Rydym angen adeiladu $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cam-wrth-gam.

Mae $f(x) = x^2 + 2$

Felly $f(x+h) = (x+h)^2 + 2$

$$f(x+h) = (x+h)(x+h) + 2$$

$$f(x+h) = x^2 + xh + xh + h^2 + 2$$

$$f(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 + 2$$

Nawr $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 + 2 - (x^2 + 2)$

$$f(x+h) - f(x) = \cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{2} - \cancel{x^2} - \cancel{2}$$

$$f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2$$

Nesaf $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2}{h}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x + h$$

Olaf $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Gallwn ddefnyddio CAMO i ehangu'r cromfachau.

Mae'r x^2 yn canslo'r $-x^2$ ac mae'r $+2$ yn canslo'r -2 .

Ar ôl symleiddio gymaint ag y gallwn, rydym nawr yn defnyddio'r derfan trwy amnewid $h = 0$.

Enghraifft 2

Trwy egwyddorion sylfaenol, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ os yw $y = x^2 + 4x$.

Rydym angen adeiladu $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cam-wrth-gam.

Mae $f(x) = x^2 + 4x$

Felly $f(x+h) = (x+h)^2 + 4(x+h)$

$$f(x+h) = (x+h)(x+h) + 4(x+h)$$

$$f(x+h) = x^2 + xh + xh + h^2 + 4x + 4h$$

$$f(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h$$

Nawr $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h - (x^2 + 4x)$

$$f(x+h) - f(x) = \cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{4x} + 4h - \cancel{x^2} - \cancel{4x}$$

$$f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2 + 4h$$

Nesaf $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2+4h}{h}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x + h + 4$$

Olaf $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 4$$

Enghraifft 3

Trwy egwyddorion sylfaenol, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ os yw $y = 2x^2 - 6x + 9$.

Rydym angen adeiladu $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cam-wrth-gam.

Mae $f(x) = 2x^2 - 6x + 9$

Felly $f(x + h) = 2(x + h)^2 - 6(x + h) + 9$
 $f(x + h) = 2(x + h)(x + h) - 6(x + h) + 9$
 $f(x + h) = 2(x^2 + xh + xh + h^2) - 6x - 6h + 9$
 $f(x + h) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 6x - 6h + 9$

Nawr $f(x + h) - f(x) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 6x - 6h + 9 - (2x^2 - 6x + 9)$
 $f(x + h) - f(x) = \cancel{2x^2} + 4xh + 2h^2 - \cancel{6x} - 6h + \cancel{9} - \cancel{2x^2} + \cancel{6x} - \cancel{9}$
 $f(x + h) - f(x) = 4xh + 2h^2 - 6h$

Nesaf $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{4xh+2h^2-6h}{h}$
 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 4x + 2h - 6$

Olaf $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
 $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h - 6$
 $\frac{dy}{dx} = 4x - 6$

Ymarfer 1

Trwy egwyddorion sylfaenol, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ os yw $y = x^2 + 7x$.



(Uned I Haf 2023)

0	9
---	---

a) O wybod bod $y = x^2 - 3x$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol.

[5]

A series of horizontal dotted lines for writing the answer.

(Uned I Haf 2019)

0	8
---	---

 a) O wybod bod $y = 2x^2 - 5x$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol. [5]

(CI Gaeaf 2005)

7. Differwch $x^2 + 4x + 3$ o egwyddorion sylfaenol.

[5]

A series of horizontal dotted lines for writing the answer.

(CI Haf 2005)

5. O wybod bod $y = x^2 - 7x + 2$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol.

[5]

(CI Gaeaf 2009)

8. (a) O wybod bod $y = 7x^2 + 5x - 2$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol. [5]

(CI Haf 2012)

7. (a) O wybod bod $y = 3x^2 - 7x + 5$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol. [5]

(CI Haf 2015)

7. (a) O wybod bod $y = 9x^2 - 8x - 3$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol. [5]

(CI Gaeaf 2013)

6. (a) O wybod bod $y = -x^2 + 4x - 6$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol. [5]

(CI Haf 2017)

9. (a) O wybod bod $y = -5x^2 - 7x + 13$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol. [5]

Dotted lines for working.

(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

3. O wybod bod $y = x^3$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol. [6]



Cwestiwn Adolygu

(CI Haf 2018)

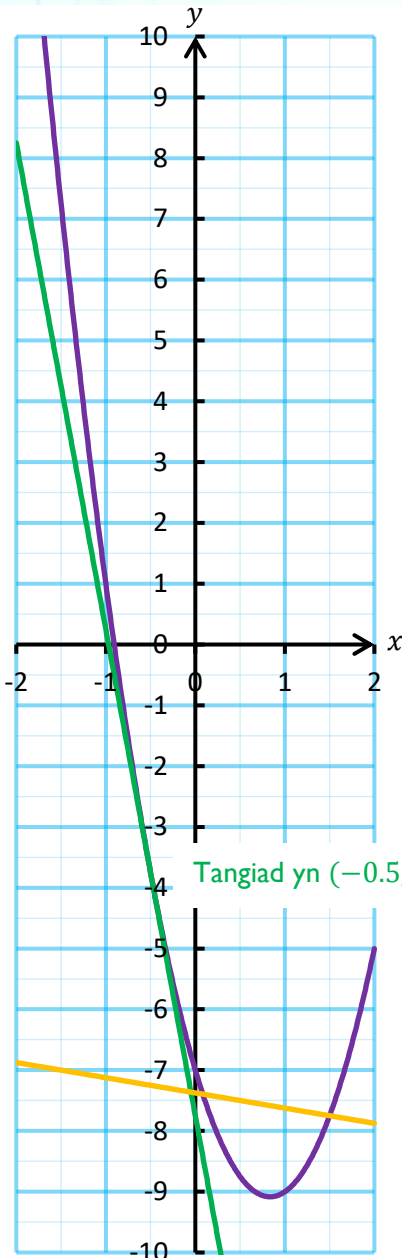
7. (a) O wybod bod $y = 9x^2 - 7x - 8$, darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ o egwyddorion sylfaenol. [5]

Area with horizontal dotted lines for writing the answer.



Differu

Sydyn



$$y = 3x^2 - 5x - 7$$

Normal yn $(1.5, -7.75)$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Differu ffwythiant heb fynd o egwyddorion sylfaenol, a defnyddio'r dechneg i ddarganfod hafaliad tangiadau a normalau.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Datrys hafaliadau llinol.
Lefel A Uned I: Datrys hafaliadau cwadratig.

I ble mae'n arwain?

Unedau I-4: Differu amrywiaeth o ffwythiannau.

Theori

Yn y pecyn gynt, cyflwynwyd y dechneg o ddifferu o egwyddorion sylfaenol. Tybed o wneud y gwaith yma os ydych wedi sylwi ar gysylltiad rhwng pob cwestiwn a'i ateb? Er enghraifft, byddai modd differu o egwyddorion sylfaenol i ddarganfod yr atebion canlynol.



Theori

y	$\frac{dy}{dx}$
$3x^2 + 8x$	$6x + 8$
$5x^2 - 9x$	$10x - 9$
$4x^2 + 11x + 3$	$8x + 11$
$7x^3$	$21x^2$
$26x + 18$	26

Mae'n bosib defnyddio'r rheol ganlynol i ddifferu ffwythiant yn sydyn heb orfod mynd o egwyddorion sylfaenol:

Os yw $y = ax^n$, yna $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$.

Enghraifft I

y	a	n	$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$
$6x^2$	6	2	$2 \times 6 \times x^1 = 12x$
$4x^3$	4	3	$3 \times 4 \times x^2 = 12x^2$
$-14x$	-14	1	$1 \times -14 \times x^0 = -14$
23	23	0	$0 \times 23 \times x^{-1} = 0$
$4x^{-6}$	4	-6	$-6 \times 4 \times x^{-7} = -24x^{-7}$
$-643x^{215}$	-643	215	$215 \times -643 \times x^{214} = -138245x^{214}$

O gael ffwythiant sy'n swm neu'n wahaniaeth cyfres o dermau, gallwn ddifferu'r termau unigol i ddifferu'r ffwythiant.

Enghraifft 2

y	$\frac{dy}{dx}$
$7x^4 + 8x^2 - 4$	$28x^3 + 16x$
$10x^5 + 8x^{\frac{1}{2}} - 7x^{-3}$	$50x^4 + 4x^{-\frac{1}{2}} + 21x^{-4}$

Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl canlynol.

y	$\frac{dy}{dx}$
$11x^3$	
$5x^2 + 3$	
$18x^3 - 24x^2 + 18x - 2$	
$28x^{\frac{1}{2}}$	
$6 + 2x^{-1}$	
$19x^3 - 3 + 4x^2 - 19x$	
$24x^{-\frac{3}{4}}$	
8	
$\sqrt{x} + \frac{4}{x^2}$	

Gallwn ddefnyddio'r broses o ddifferu i ddarganfod hafaliad y **tangiad** neu'r **normal** i gromlin mewn pwynt penodol.



Theori

Enghraifft 3

Mae'r gromlin ar gyfer $y = 2x^3 - 3x$ yn cael ei ddangos ar y dde.

(a) Darganfyddwch hafaliad y tangiad i'r gromlin yn y pwynt ble mae $x = 1$.

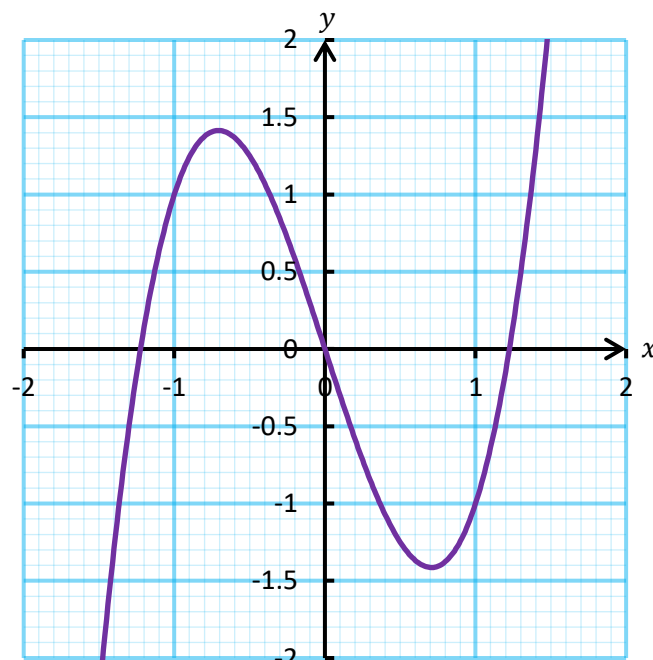
(b) Darganfyddwch hafaliad y normal i'r gromlin yn y pwynt ble mae $x = -1$.

Ateb: (a) Os yw $y = 2x^3 - 3x$, yna $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 3$.

Pan fo $x = 1$, mae $y = 2(1^3) - 3(1) = -1$, ac mae $\frac{dy}{dx} = 6(1^2) - 3 = 3$.

Gallwn ddefnyddio $y - y_1 = m(x - x_1)$ i ddarganfod hafaliad y tangiad i'r gromlin:

$$\begin{aligned} y - (-1) &= 3(x - 1) \\ y + 1 &= 3x - 3 \\ y &= 3x - 4 \end{aligned}$$



(b) Pan fo $x = -1$, mae $y = 2(-1)^3 - 3(-1) = 1$, ac mae $\frac{dy}{dx} = 6(-1)^2 - 3 = 3$. O wybod bod y **normal** o hyd yn **berpendicwlar** i'r tangiad, gallwn ddweud mai graddiant y normal yw $-\frac{1}{3}$ (sef negatif cilydd 3). Gallwn ddefnyddio $y - y_1 = m(x - x_1)$ i ddarganfod hafaliad y normal i'r gromlin:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - (-1))$$
$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$$
$$y - 1 = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$
$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Ymarfer 2

Mae'r gromlin ar gyfer $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ yn cael ei ddangos ar y dde.

(a) Darganfyddwch hafaliad y tangiad i'r gromlin yn y pwynt ble mae $x = -1$.

(b) Darganfyddwch hafaliad y normal i'r gromlin yn y pwynt ble mae $x = 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

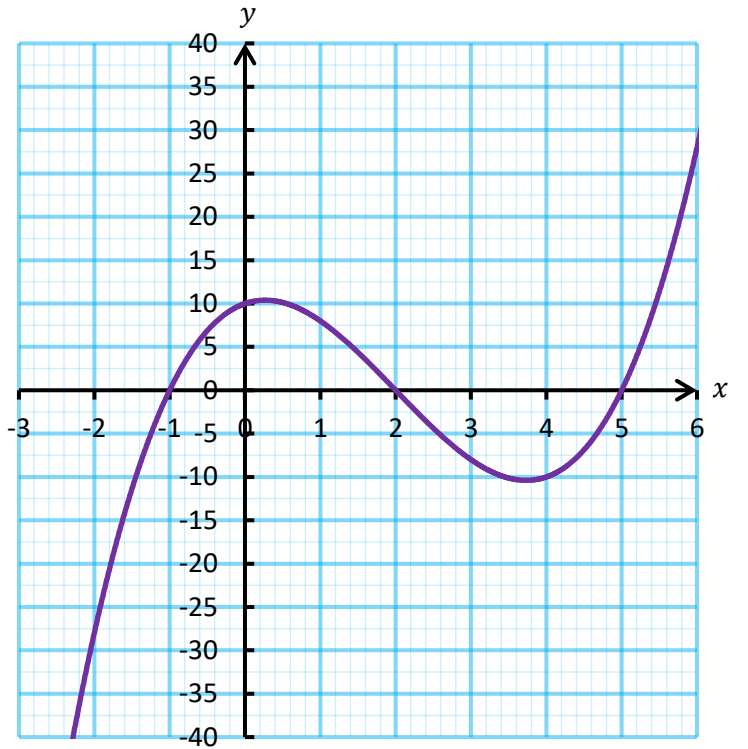
.....

.....

.....

.....

.....



(CI Haf 2016, Cwestiwn 8)

- (b) O wybod bod $y = 4\sqrt{x} + \frac{45}{x}$, darganfyddwch werth $\frac{dy}{dx}$ pan mae $x = 9$. [4]

(CI Gaeaf 2008)

3. Hafaliad y gromlin C yw $y = 2x^2 - 10x + 16$. Mae gan y pwynt P gyfesurynnau (3, 4) ac mae ar C . Darganfyddwch hafaliad y tangiad i C yn P . [4]

(CI Gaeaf 2005)

8. Hafaliad y gromlin C yw $y = 3x^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{x}$.

(a) Darganfyddwch hafaliad y tangiad i C yn y pwynt lle mae $x = 4$. [7]

(b) Darganfyddwch hafaliad y normal i C yn y pwynt lle mae $x = 4$. [2]

(CI Gaeaf 2009)

3. Hafaliad y gromlin C yw $y = x^2 - 9x + 13$.

(a) Mae gan y pwynt P gyfesurynnau $(6, -5)$ ac mae ar C . Darganfyddwch hafaliad y **tangiad** i C yn P . [4]

(b) Mae'r pwynt Q ar C ac mae fel mai $\frac{1}{7}$ yw graddiant y **normal** i C yn Q .

Darganfyddwch gyfesuryn- x Q . [3]

(CI Haf 2013)

3. Hafaliad y gromlin C yw $y = 2x^2 - 10x + 7$.

- (a) Cyfesurynnau'r pwynt P yw $(3, -5)$ ac mae P ar C . Darganfyddwch hafaliad y **normal** i C yn P . [5]
- (b) Mae'r pwynt Q ar C ac mae fel bod y **tangiad** i C yn Q yn baralel i'r echelin- x . Darganfyddwch gyfesuryn- x Q . [2]

(CI Gaeaf 2011)

8. Hafaliad y gromlin C yw $y = x^2 - 6x + 7$.

- (a) Cyfesuryn- x y pwynt P yw 5 ac mae P ar y gromlin C . Darganfyddwch hafaliad y tangiad i C yn P . [5]

Hafaliad y llinell L yw $y = \frac{1}{2}x - 2$.

- (b) (i) Darganfyddwch gyfesurynnau dau groestorfan C ac L .
(ii) Gwireddwch mai L mewn gwirionedd yw'r normal i C yn un o'r croestorfannau hyn. [8]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2023, Cwestiwn 9)

b) Mae'r ffwythiant f wedi'i ddiffinio gan $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{\sqrt{x}}$ ar gyfer $x > 0$.

i) Darganfyddwch $f'(x)$. [2]

ii) Pan mae $x > k$, mae $f(x)$ yn ffwythiant cynyddol. Darganfyddwch y gwerth lleiaf posibl ar gyfer k . Rhwch eich ateb yn gywir i ddau le degol. [4]



Cwestiwn Adolygu

(Uned I Haf 2018)

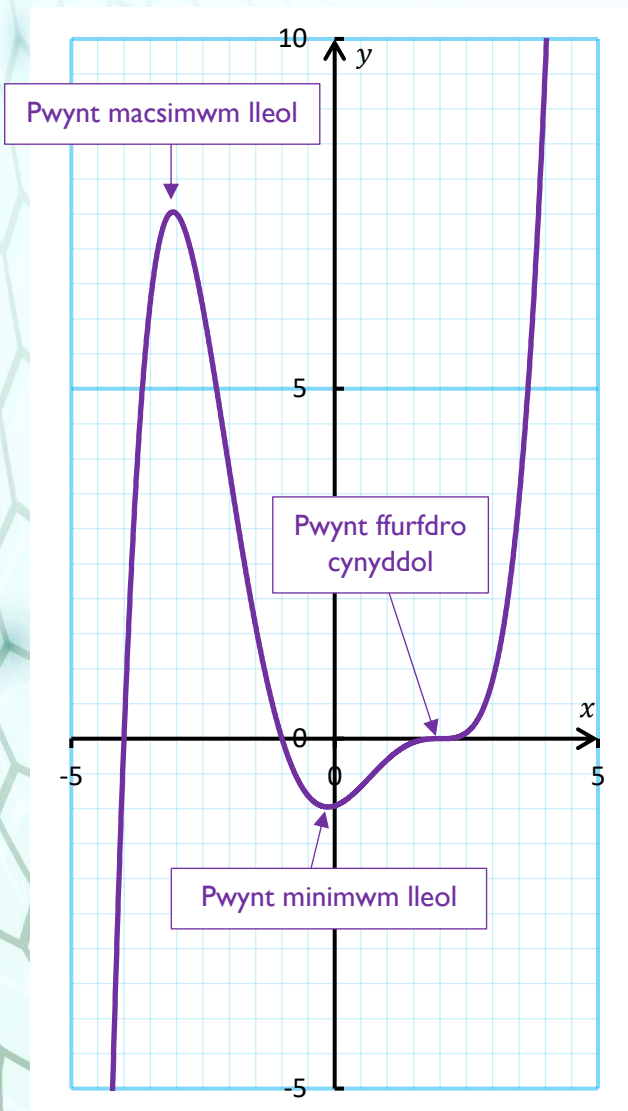
1	6
---	---

Hafaliad y gromlin C yw $y = 7 + 13x - 2x^2$. Mae'r pwynt P ar C ac mae fel bod gan y tangiad i C yn P yr hafaliad $y = x + c$, lle mae c yn gysonyn. Darganfyddwch gyfesurynnau P a gwerth c . [5]



Pwyntiau

Arhosol



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Sut i ffeindio pwyntiau minimwm, macsimwm a ffurfdro ar gyfer ffwythiant benodol.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Datrys hafaliadau llinol.
Lefel A Uned 1: Differu; datrys hafaliadau cwadratig.

I ble mae'n arwain?

Uned 3: Darganfod pwyntiau ffurfdro nad ydynt yn bwyntiau arhosol.
Cymwysiadau: Darganfod yr elw mwyaf neu'r gost lleiaf ym myd busnes.

Theori

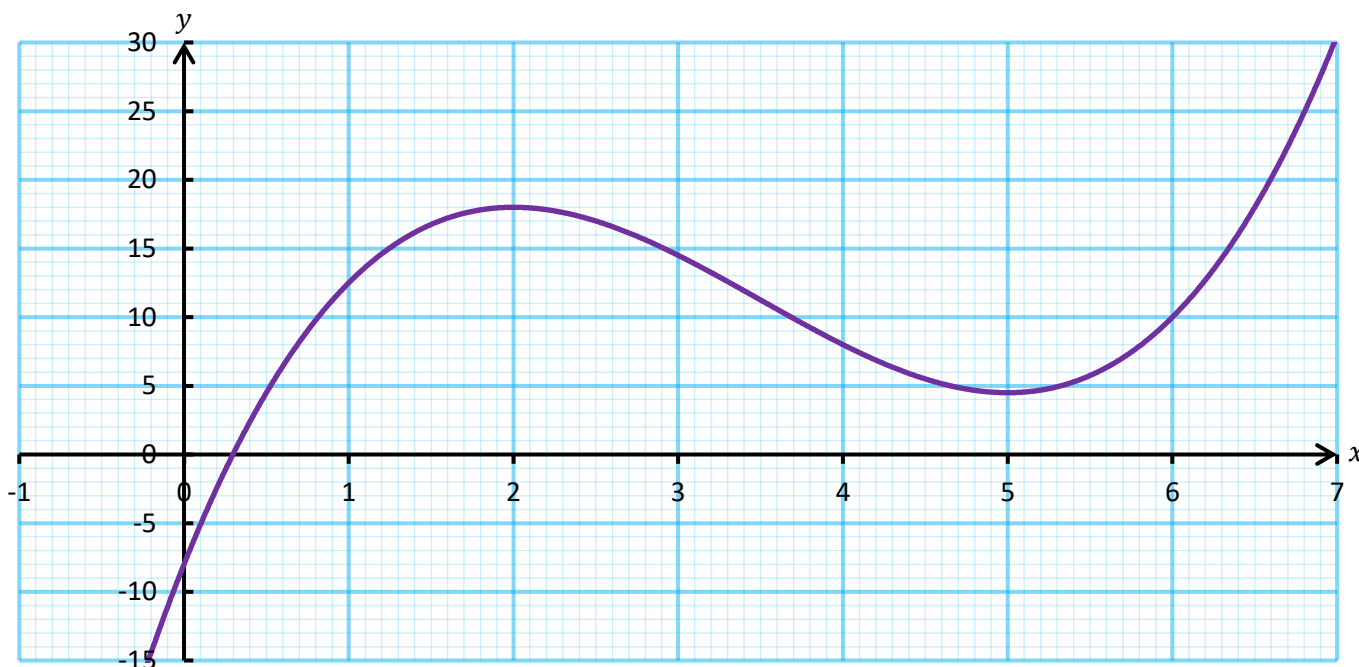
Yr Ail Ddeilliad

O gael ffwythiant o'r ffurf $y = f(x)$, mae'r graddiant $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ yn dweud wrthym beth yw **cyfradd newid** y ar gyfer gwerth penodol o x . Mae hyn yn cynrychioli faint y byddai y yn newid wrth symud un uned ar draws i'r dde.



Theori

Er enghraifft, ystyriwch y graff isod sy'n dangos y ffwythiant $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$.



Gallwn ddifferu'r ffwythiant i roi $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$. Mae'r tabl isod yn dangos rhai o werthoedd $\frac{dy}{dx}$ ar gyfer gwerthoedd penodol o x .

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$\frac{dy}{dx}$	54	41.25	30	20.25	12	5.25	0	-3.75	-6	-6.75	-6	-3.75	0	5.25	12	20.25	30

Gwelwn fod $\frac{dy}{dx}$ weithiau'n bositif, sy'n golygu bod cyfradd newid y yn bositif, ac felly mae'r gromlin yn **cynyddu**.
Mewn nodiant set, mae'r gromlin yn cynyddu ar gyfer y gwerthoedd canlynol o x :

$$\{x: x < 2\} \cup \{x: x > 5\}.$$

Ar adegau eraill, mae $\frac{dy}{dx}$ yn negatif, sy'n golygu bod cyfradd newid y yn negatif, ac felly mae'r gromlin yn **gostwng**.
Mewn nodiant set, mae'r gromlin yn lleihau ar gyfer y gwerthoedd canlynol o x :

$$\{x: x > 2\} \cap \{x: x < 5\}.$$

Mae'r **ail ddeilliad** $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn cynrychioli **cyfradd newid** $\frac{dy}{dx}$, sef faint mae'r graddiant yn newid ar adeg benodol.

Gallwn ei ddarganfod trwy ddifferu $\frac{dy}{dx}$, ac rydym yn defnyddio'r nodiant $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ ar ei gyfer.

Yn yr achos uchod ble mae $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$, yr ail ddeilliad yw $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 21$. Mae'r tabl isod yn dangos rhai o werthoedd $\frac{d^2y}{dx^2}$ ar gyfer gwerthoedd penodol o x .

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-27	-24	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21

Hyd at 3.5, mae gwerth $\frac{dy}{dx}$ yn gostwng, ac yna ar ôl 3.5, mae gwerth $\frac{dy}{dx}$ yn cynyddu.

Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl canlynol.

y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
$8x^3$		
$20x^5$		
$x^3 + 4x^2 - 3x + 5$		
\sqrt{x}		
$\frac{4}{x^2}$		

Ymarfer 2

Ar gyfer y ffwythiant $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$, darganfyddwch pryd mae'r ffwythiant yn cynyddu, a phryd mae'n gostwng. Ysgrifennwch eich atebion mewn nodiant set.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

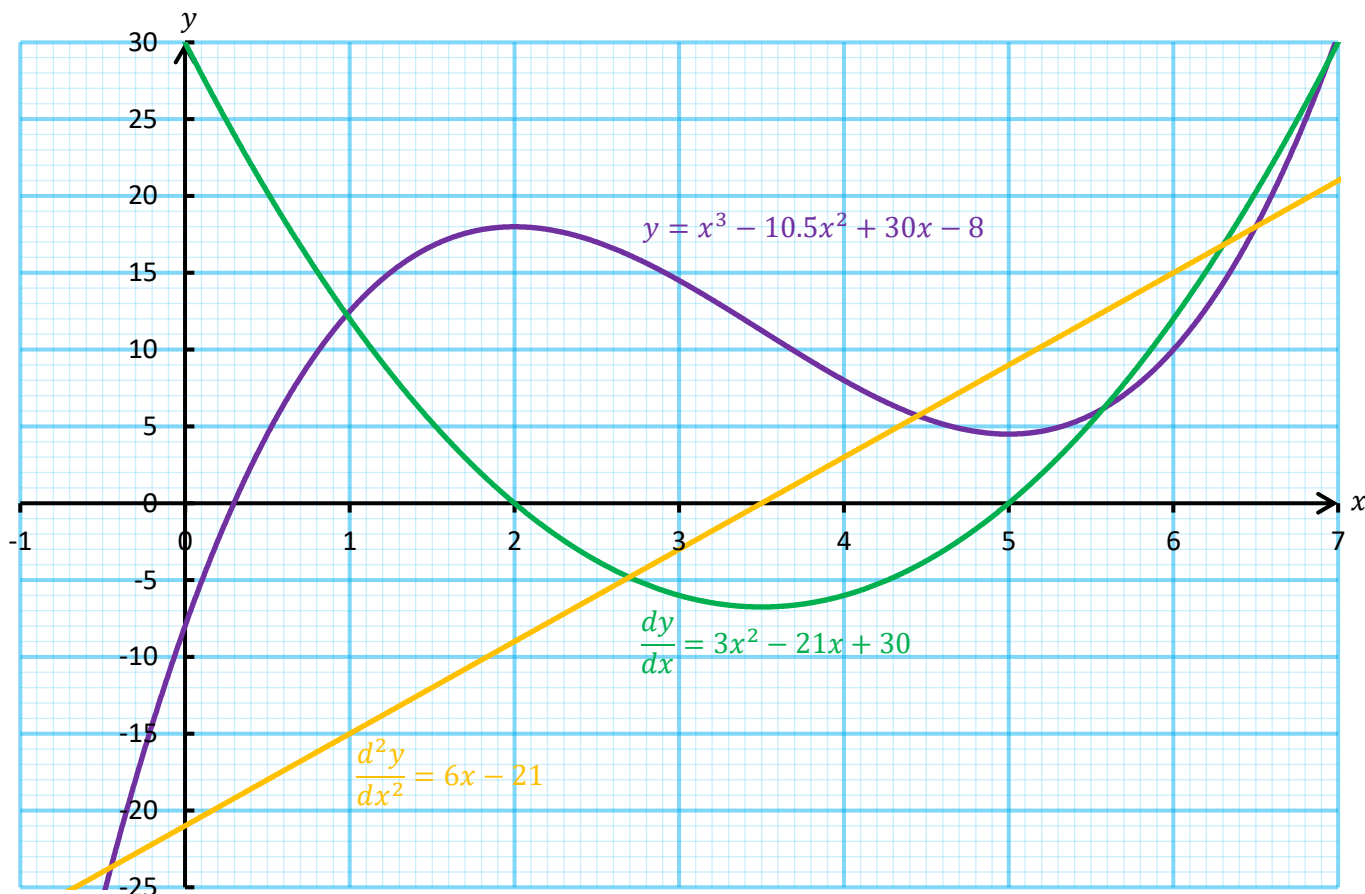
.....

.....

Pwyntiau Arhosol

Gadewch i ni eto ystyried yr enghraifft o'r tudalennau blaenorol, ble'r oedd $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$,

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$, a $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 21$. Mae'r graff isod yn dangos y tri ffwythiant hyn, a'r cysylltiadau rhyngddynt.



Mae unhryw bwynt ble mae $\frac{dy}{dx} = 0$ yn cael ei alw'n **bwynt arhosol**. Ar y pwyntiau hyn, mae'r tangiad i'r gromlin yn llorweddol, ac nid yw'r gromlin yn cynyddu neu'n lleihau. Ar gyfer y gromlin $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$, gwelwn o'r graff uchod fod dau bwynt arhosol, sef ble mae $x = 2$ a ble mae $x = 5$. Ar gyfer y pwynt arhosol cyntaf, ble mae $x = 2$,

- mae'r **gromlin biws** yn cyrraedd mocsimwm lleol;
- gwerth y **gromlin werdd** yw sero;
- mae gwerth y **linell oren** yn negatif.

Ar gyfer yr ail bwynt arhosol, ble mae $x = 5$,

- mae'r **gromlin biws** yn cyrraedd minimwm lleol;
- gwerth y **gromlin werdd** yw sero;
- mae gwerth y **linell oren** yn positif.

Gallwn ddefnyddio'r wybodaeth uchod i ffurfio strategaeth gychwynnol i ddarganfod cyfesurynnau a natur pwyntiau arhosol cromlin:

- Datrysych $\frac{dy}{dx} = 0$ i ddarganfod cyfesurynnau- x y pwyntiau arhosol.
- Amnewidiwch yn ôl i mewn i y i ddarganfod y cyfesurynnau- y .
- Amewidiwch i mewn i $\frac{d^2y}{dx^2}$ i ddarganfod natur y pwyntiau arhosol. Os yw $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, yna mae'r pwynt arhosol yn bwynt minimwm lleol. Os yw $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, yna mae'r pwynt arhosol yn bwynt mocsimwm lleol.

Enghraifft 1

Darganfyddwch gyfesurynnau a natur pwyntiau arhosol y gromlin $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$.

Differu: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$.

Datrys $\frac{dy}{dx} = 0$:

$3x^2 - 21x + 30 = 0$

$3 \times 30 = 90$

$3x^2 - 15x - 6x + 30 = 0$

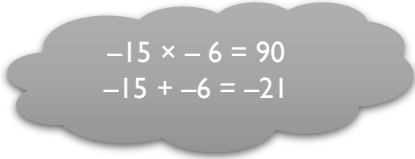
$3x(x - 5) - 6(x - 5) = 0$

$(x - 5)(3x - 6) = 0$

Naill ai $x - 5 = 0$ neu $3x - 6 = 0$

$x = 5$ $3x = 6$

$x = 2$



Amnewid yn ôl i y:

Os yw $x = 5$ mae $y = 5^3 - 10.5 \times 5^2 + 30 \times 5 - 8$

$y = 4.5$

Os yw $x = 2$ mae $y = 2^3 - 10.5 \times 2^2 + 30 \times 2 - 8$

$y = 18$

Differu eto: $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 21$.

Amnewid i mewn i $\frac{d^2y}{dx^2}$: Os yw $x = 5$ mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 5 - 21$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 9$

Mae $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn positif felly mae (5, 4.5) yn bwynt minimwm lleol.

Os yw $x = 2$ mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 2 - 21$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -9$

Mae $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn negatif felly mae (2, 18) yn bwynt macsmimwm lleol.

Ymarfer 3

Darganfyddwch gyfesurynnau a natur pwyntiau arhosol y gromlin $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

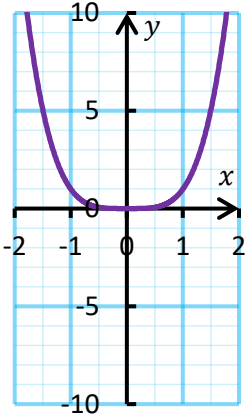
A series of horizontal dotted lines for writing.

Ail Ddeilliad Sero

Mewn achos ble mae $\frac{dy}{dx} = 0$ a $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, nid yw'n bosib dod i gasgliad yn syth ynghylch pa fath o bwynt arhosol sydd gennym. Yn hytrach, mae angen edrych ar arwydd $\frac{dy}{dx}$ bob ochr i'r pwynt arhosol.

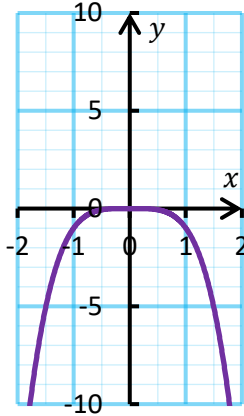
Enghraifft 2

(a) $y = x^4$



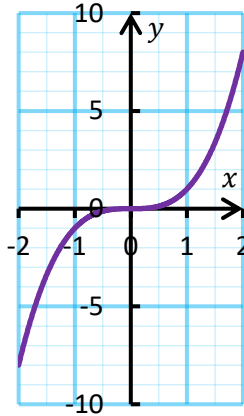
$\frac{dy}{dx} = 4x^3$

(b) $y = -x^4$



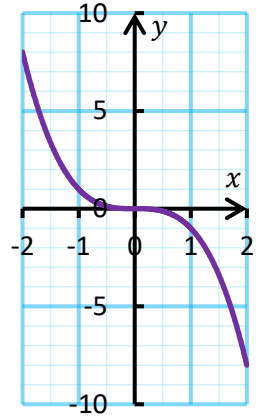
$\frac{dy}{dx} = -4x^3$

(c) $y = x^3$



$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

(ch) $y = -x^3$



$\frac{dy}{dx} = -3x^2$

Mae pwyntiau arhosol yn digwydd pan fo $\frac{dy}{dx} = 0$.

$4x^3 = 0$
 $x^3 = 0$
 $x = \sqrt[3]{0}$
 $x = 0$

$-4x^3 = 0$
 $x^3 = 0$
 $x = \sqrt[3]{0}$
 $x = 0$

$3x^2 = 0$
 $x^2 = 0$
 $x = \pm\sqrt{0}$
 $x = 0$

$-3x^2 = 0$
 $x^2 = 0$
 $x = \pm\sqrt{0}$
 $x = 0$

Ym mhob achos, mae pwynt arhosol ar y gromlin ble mae $x = 0$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2$

Os yw $x = 0$, mae

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12 \times 0^2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -12x^2$

Os yw $x = 0$, mae

$\frac{d^2y}{dx^2} = -12 \times 0^2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

Os yw $x = 0$, mae

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$

Os yw $x = 0$, mae

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6 \times 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Ym mhob achos, mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Nid yw hyn yn bositif (pwynt minimwm) neu'n negatiff (pwynt macsimwm), felly mae angen i ni edrych ar arwydd $\frac{dy}{dx}$ bob ochr i'r pwynt arhosol, er mwyn i ni adnabod y math o bwynt arhosol.

Os yw $x = -1$, mae

$\frac{dy}{dx} = 4 \times (-1)^3$

$\frac{dy}{dx} = -4$ (negatiff)

Os yw $x = 1$, mae

$\frac{dy}{dx} = 4 \times 1^3$

$\frac{dy}{dx} = 4$ (positiff)

Graddiant negatiff gynt a phositiff wedyn felly pwynt **minimwm** yw (0, 0).

Os yw $x = -1$, mae

$\frac{dy}{dx} = -4 \times (-1)^3$

$\frac{dy}{dx} = 4$ (positiff)

Os yw $x = 1$, mae

$\frac{dy}{dx} = -4 \times 1^3$

$\frac{dy}{dx} = -4$ (negatiff)

Graddiant positiff gynt a negatiff wedyn felly pwynt **macsimwm** yw (0, 0).

Os yw $x = -1$, mae

$\frac{dy}{dx} = 3 \times (-1)^2$

$\frac{dy}{dx} = 3$ (positiff)

Os yw $x = 1$, mae

$\frac{dy}{dx} = 3 \times 1^2$

$\frac{dy}{dx} = 3$ (positiff)

Graddiant positiff gynt a phositiff wedyn felly pwynt **ffurfdro cynyddol** yw (0, 0).

Os yw $x = -1$, mae

$\frac{dy}{dx} = -3 \times (-1)^2$

$\frac{dy}{dx} = -3$ (negatiff)

Os yw $x = 1$, mae

$\frac{dy}{dx} = -3 \times 1^2$

$\frac{dy}{dx} = -3$ (negatiff)

Graddiant negatiff gynt a negatiff wedyn felly pwynt **ffurfdro gostyngol** yw (0, 0).

Gallwn nawr ffurfio strategaeth derfynol ar gyfer darganfod cyfesurynnau a natur pwyntiau arhosol cromlin $y = f(x)$:

- Datrysych $\frac{dy}{dx} = 0$ i ddarganfod cyfesurynnau- x y pwyntiau arhosol.
- Amnewidiwch yn ôl i mewn i y i ddarganfod y cyfesurynnau- y .
- Amewidiwch i mewn i $\frac{d^2y}{dx^2}$ i ddarganfod natur y pwyntiau arhosol.
 - Os yw $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, yna mae'r pwynt arhosol yn **bwynt minimwm lleol**.
 - Os yw $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, yna mae'r pwynt arhosol yn **bwynt maccsimwm lleol**.
 - Os yw $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, yna rhaid edrych ar arwydd $\frac{dy}{dx}$ bob ochr i'r pwynt arhosol.
 - Os yw $\frac{dy}{dx} < 0$ gynt a $\frac{dy}{dx} > 0$ wedyn, yna mae'r pwynt arhosol yn **bwynt minimwm lleol**.
 - Os yw $\frac{dy}{dx} > 0$ gynt a $\frac{dy}{dx} < 0$ wedyn, yna mae'r pwynt arhosol yn **bwynt maccsimwm lleol**.
 - Os yw $\frac{dy}{dx} > 0$ gynt a $\frac{dy}{dx} > 0$ wedyn, yna mae'r pwynt arhosol yn **bwynt ffurfdro cynyddol**.
 - Os yw $\frac{dy}{dx} < 0$ gynt a $\frac{dy}{dx} < 0$ wedyn, yna mae'r pwynt arhosol yn **bwynt ffurfdro gostyngol**.



Theori

Ymarfer 4

Darganfyddwch gyfesuryn a natur pwynt arhosol y gromlin $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

A series of horizontal dotted lines provided for writing the solution to the problem.



(CI Haf 2007)

10. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = x^3 - x^2 - x + 2.$$

Darganfyddwch gyfesurynnau pwyntiau arhosol C a darganfyddwch natur pob un o'r pwyntiau arhosol hyn. [7]

(CI Haf 2008)

9. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5.$$

Darganfyddwch gyfesurynnau a natur pob un o bwyntiau arhosol C .

[7]

(CI Haf 2010)

10. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = \frac{1}{2}x^3 - 6x + 3.$$

Darganfyddwch gyfesurynnau a natur pob un o bwyntiau arhosol C .

[6]

(CI Gaeaf 2011)

10. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = x^3 + kx^2 - 9x - 10,$$

lle mae k yn gysonyn. Mae'r ddau bwynt arhosol ar graff C wedi'u dynodi gan Q ac R . Cyfesuryn- x Q yw -1 .

- (a) Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ a thrwy hyn, dangoswch fod $k = -3$. [3]
- (b) Darganfyddwch gyfesuryn- x R . [2]
- (c) Darganfyddwch natur pob un o'r pwyntiau arhosol Q ac R . [2]

(CI Gaeaf 2005)

3. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 12.$$

- (a) Darganfyddwch gyfesurynnau pwyntiau arhosol C a darganfyddwch natur pob un o'r pwyntiau hyn. [7]
- (b) Brasluniwch C . [3]
- (c) Nodwch, gan roi rheswm, nifer gwreiddiau real yr hafaliad

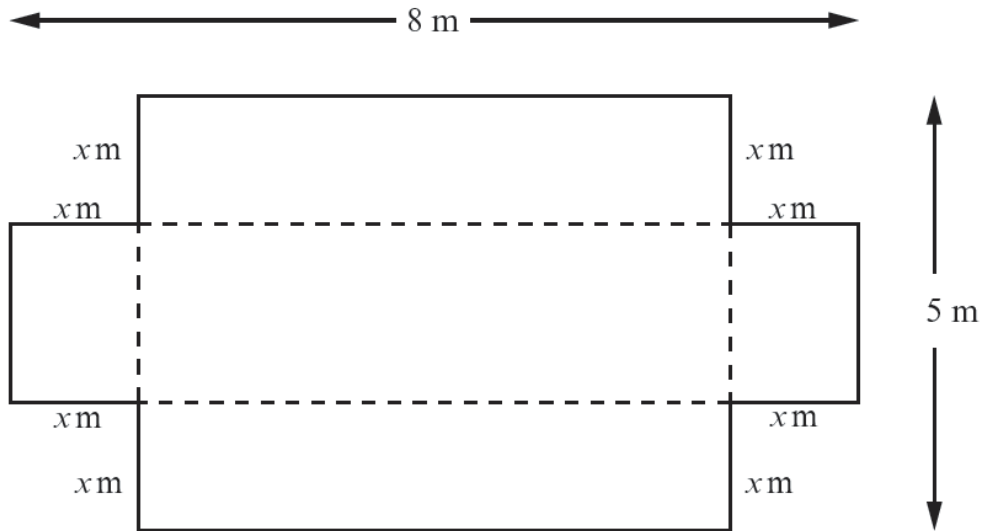
$$2x^3 - 6x^2 + 12 = 0. \quad [2]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2011)

10. Hyd llen (*sheet*) betryal o fetel yw 8 m a'i lled yw 5 m. Mae pedwar sgwâr, pob un ag iddo ochrau x m, lle mae $x < 2.5$, wedi'u torri o gorneli'r llen betryal, fel yn y diagram isod. Mae gweddill y llen fetel yn awr yn cael ei blygu ar hyd y llinellau toredig i ffurfio tanc agored ar ffurf ciwboid.



- (a) Dangoswch fod cyfaint $V\text{m}^3$ y tanc hwn wedi'i roi gan

$$V = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

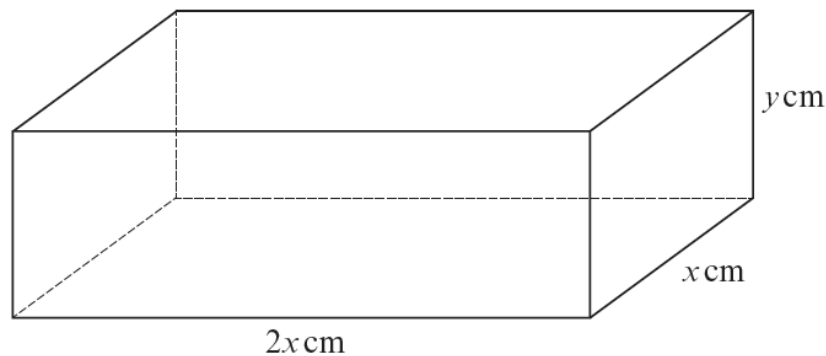
[2]

- (b) Darganfyddwch werth mawrwm V , gan ddangos mai gwerth mawrwm yw'r gwerth yr ydych wedi'i ddarganfod. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2013)

10. Mae'r diagram yn dangos bocs **caeëdig** ar ffurf ciwboid. Hyd y bocs yw $2x$ cm, ei led yw x cm a'i uchder yw y cm.



Cyfanswm arwynebedd arwyneb y bocs yw 108 cm^2 .

- (a) (i) Ysgrifennwch hafaliad yn cynnwys x ac y a thrwy hyn dangoswch fod

$$xy = 18 - \frac{2}{3}x^2.$$

- (ii) Trwy hyn dangoswch fod cyfaint $V \text{ cm}^3$ y bocs wedi'i roi gan

$$V = 36x - \frac{4}{3}x^3.$$

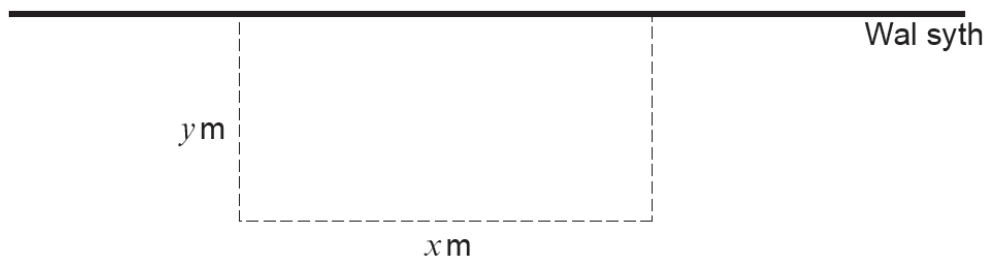
[3]

- (b) Darganfyddwch werth macsimwm V , gan ddangos mai gwerth macsimwm yw'r gwerth yr ydych wedi'i ddarganfod. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2015)

10. Mae ffermwr defaid eisiau adeiladu corlan (*enclosure*) betryal ar gyfer ei anifeiliaid. Mae e'n penderfynu defnyddio wal syth ar gyfer un ochr o'r gorlan a ffens ar gyfer y tair ochr arall. Mae ef eisiau i arwynebedd y gorlan fod yn 800m^2 . Hydoedd ochrau'r gorlan betryal yw $x\text{ m}$ ac $y\text{ m}$, fel yn y diagram, a chyfanswm hyd y **ffens** yw $L\text{ m}$.



- (a) Dangoswch fod $L = x + \frac{1600}{x}$. [2]
- (b) Darganfyddwch werth minimwm L , gan ddangos mai gwerth minimwm yw'r gwerth rydych wedi'i ddarganfod. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned I Haf 2024)

12. Mae gan gromlin C yr hafaliad $y = -x^3 + 12x - 20$.

- (a) Darganfyddwch gyfesurynnau pwyntiau arhosol (*stationary points*) C a darganfyddwch eu natur. [7]

Area for student response with horizontal dotted lines.

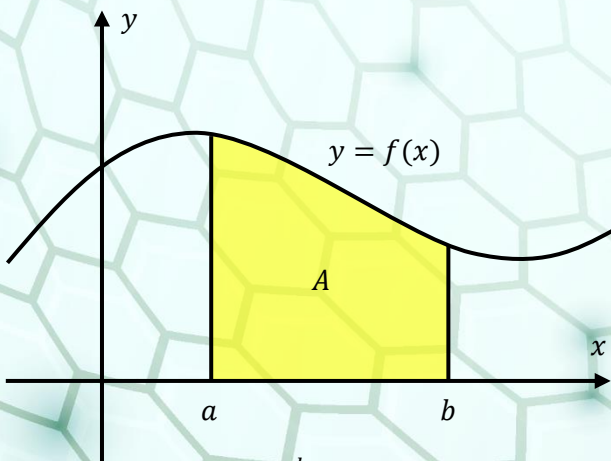
- (b) Darganfyddwch amrediad y gwerthoedd x lle mae'r gromlin yn lleihau.
Rhowch eich ateb mewn nodiant set.

[3]



Cyflwyno

Integru



$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$A = [F(x)]_a^b$$

$$A = F(b) - F(a)$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Cyflwyno'r broses o integru fel gwrthdro differu, a'i ddefnyddio i ddarganfod yr arwynebedd o dan cromlinau.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Rheolau indecsau; hafaliadau cydamserol.
Lefel A Uned 1: Differu.

I ble mae'n arwain?

Uned 3: Integru pellach.
Cymwysiadau: Darganfod arwynebedd; cyfaint; màs; lleoliad; ffwythiant dosraniad cronus tebygolrwydd.

Theori

Integru Amhendant

Integru yw'r broses sy'n dadwneud y broses o ddifferu.

Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl canlynol.



Theori

y	$\frac{dy}{dx}$
$5x^2 + 9x + 3$	
$5x^2 + 9x + 4$	
$5x^2 + 9x - 3$	
$5x^2 + 9x + \frac{3}{4}$	
$5x^2 + 9x + \pi$	

Wrth gwblhau'r ymarfer uchod, fe welwch y broblem fydd yn ein wybebu wrth geisio integru: tra bod differu wastad yn rhoi ateb unigryw, ni fydd yr un peth yn wir am integru. Uchod, mae pob ffwythiant y yn y golofn gyntaf yn differu i roi'r un ateb. Mae hyn yn arwain at y cwestiwn: os ydym yn integru $10x + 9$, beth ddylai'r ateb fod? I ddelio efo'r broblem yma, rydym yn defnyddio **cysonyn integru**. Mae gwerslyfrau gwahanol yn defnyddio llythrennau gwahanol ar gyfer y cysonyn integru: weithiau c , weithiau k , weithiau rhywbeth arall. Bydd y pecyn gwaith hwn yn defnyddio c fel y cysonyn integru.

Wrth integru $10x + 9$, rydym yn dweud mai'r ateb yw $5x^2 + 9x + c$, ble mae c yn cynrychioli unrhyw rif, gan y byddai unrhyw fynegiad o'r ffurf $5x^2 + 9x + c$ yn differu i roi $10x + 9$. Y nodiant ffurfiol ar gyfer y broses hon yw

$$\int 10x + 9 dx = 5x^2 + 9x + c$$

ble mae dx yn dynodi ein bod yn integru mewn perthynas â'r newidyn x , a \int yw'r symbol ar gyfer integru.

Y rheol ar gyfer integru term o'r ffurf ax^n yw'r canlynol:

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$$

Mewn geiriau, rydym yn adio un i'r pŵer n , ac yna'n rhannu efo'r pŵer newydd $n + 1$.

Enghraifft 1

Cwestiwn	Ateb
$\int 28x^3 dx$	$\frac{28x^4}{4} + c = 7x^4 + c$
$\int 35x^4 - 6x + 2 dx$	$\frac{35x^5}{5} - \frac{6x^2}{2} + 2x + c = 7x^5 - 3x^2 + 2x + c$

Ymarfer 2

Llenwch y tabl canlynol.

Cwestiwn	Ateb
$\int 15x^2 dx$	
$\int 12x - 9 dx$	
$\int 24x^5 - 20x^3 + 10x dx$	

Yn aml, bydd angen defnyddio rheolau indecsau i ail-ysgrifennu cwestiwn cyn gallu ei integru.

Enghraifft 2

Cwestiwn	Ail-ysgrifennu'r cwestiwn gan ddefnyddio rheolau indecsau	Ateb
$\int \sqrt[3]{x} dx$	$\int x^{\frac{1}{3}} dx$	$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c$
$\int \frac{6}{x^3} dx$	$\int 6x^{-3} dx$	$\frac{6x^{-2}}{-2} + c = -3x^{-2} + c$
$\int \sqrt{x} + \frac{2}{x^2} dx$	$\int x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-2} dx$	$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{2x^{-1}}{-1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-1} + c$

Ymarfer 3

Llenwch y tabl canlynol.

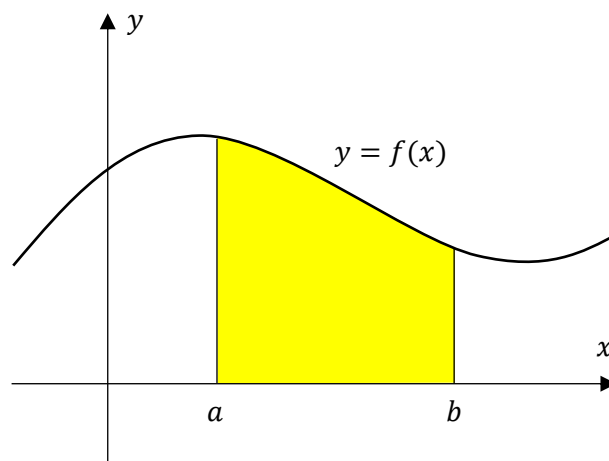
Cwestiwn	Ail-ysgrifennu'r cwestiwn gan ddefnyddio rheolau indecsau	Ateb
$\int \frac{8}{x^2} dx$		
$\int \sqrt[4]{x} dx$		
$\int 9\sqrt{x} + \frac{14}{x^4} dx$		

Integru Pendant

Mae'n bosib defnyddio integru i ddarganfod yr arwynebedd rhwng cromlin a'r echelin- x .

Gadewch i ni ystyried cromlin gyffredinol o'r ffurf $y = f(x)$. Mae'r **arwynebedd melyn** ar y dde wedi'i ffinio gan y gromlin, yr echelin- x a'r llinellau $x = a$, $x = b$. Er mwyn darganfod maint yr arwynebedd, rydym yn integru rhwng a a b gan ddefnyddio'r nodiant

$$\int_a^b f(x) dx$$



Rydym yn dweud mai a yw'r **terfan isaf** a b yw'r **terfan uchaf**.

Mae **Theorem Sylfaenol Calcwlws** yn dweud wrthym sut i gyfrifo'r integryn uchod:

Os yw $\int f(x) dx = F(x) + c$, yna

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x) + c]_a^b \\ &= [F(b) + c] - [F(a) + c] \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



Theori

Sylwch bod y cysonion integru yn canslo allan, felly gallwn ysgrifennu

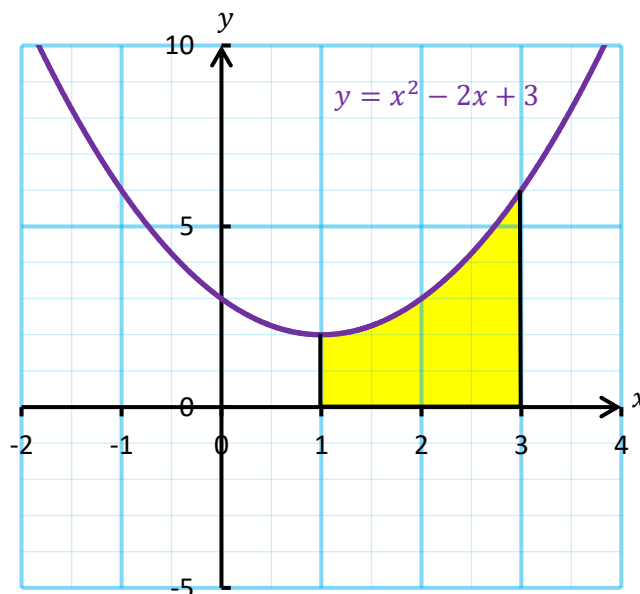
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Enghraifft 3

Darganfyddwch yr arwynebedd o dan y gromlin $y = x^2 - 2x + 3$ rhwng $x = 1$ ac $x = 3$.

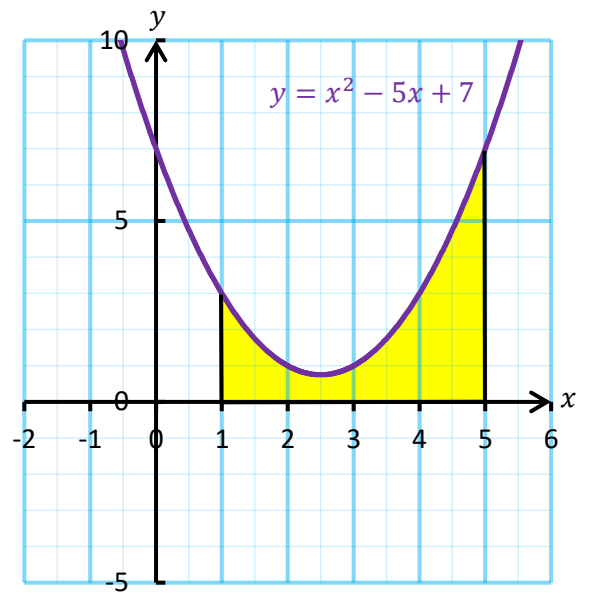
Ateb: Rydym angen darganfod gwerth

$$\begin{aligned} &\int_1^3 x^2 - 2x + 3 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x \right]_1^3 \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3 \times 3 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \times 1 \right] \\ &= [9 - 9 + 9] - \left[\frac{1}{3} - 1 + 3 \right] \\ &= 9 - \frac{7}{3} \\ &= \frac{20}{3} \text{ uned sgwâr} \end{aligned}$$



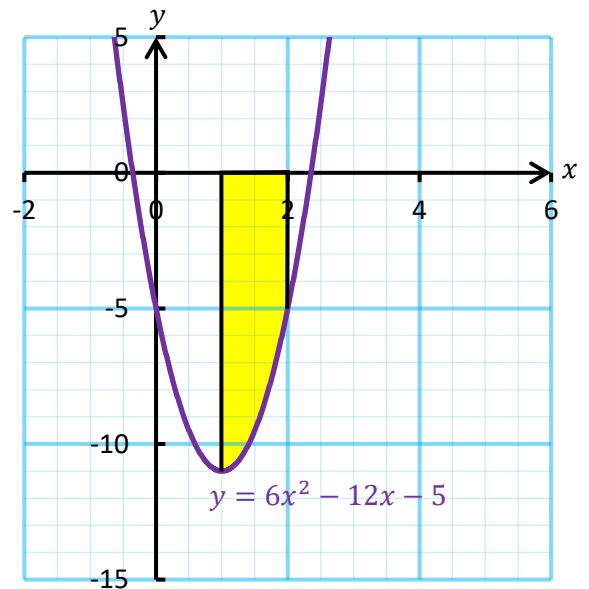
Ymarfer 4

Darganfyddwch yr arwynebedd o dan y gromlin $y = x^2 - 5x + 7$ rhwng $x = 1$ ac $x = 5$.



Ymarfer 5

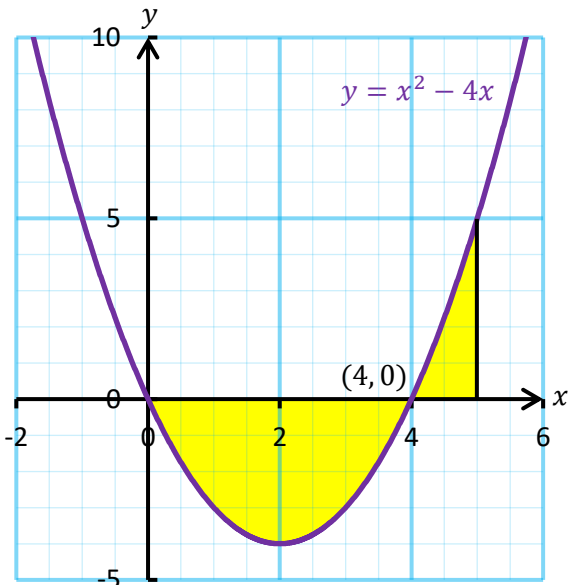
Darganfyddwch yr arwynebedd uwchben y gromlin $y = 6x^2 - 12x - 5$ rhwng $x = 1$ ac $x = 2$.



Ymarfer 6

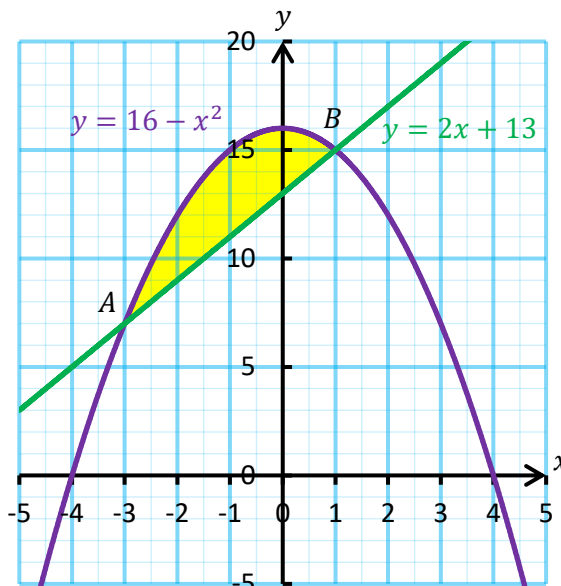
Darganfyddwch gyfanswm yr arwynebedd rhwng y gromlin $y = x^2 - 4x$ a'r echelin- x rhwng $x = 0$ ac $x = 5$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



Enghraifft 4

Mae'r diagram yn dangos braslun o'r gromlin $y = 16 - x^2$ a'r llinell $y = 2x + 13$. Mae'r llinell a'r gromlin yn croestorri yn y pwyntiau A a B.



- (a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a B.
- (b) Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu.

Ateb: (a) I ddarganfod cyfesurynnau A a B, rhaid darganfod ble mae $y = 16 - x^2$ ag $y = 2x + 13$ yn croestorri (ac felly ble maent yn hafal).

$$\begin{aligned}
 16 - x^2 &= 2x + 13 \\
 0 &= x^2 + 2x + 13 - 16 \\
 0 &= x^2 + 2x - 3 \\
 0 &= (x + 3)(x - 1)
 \end{aligned}$$

Naill ai $x + 3 = 0$ neu $x - 1 = 0$
 $x = -3$ $x = 1$

Amnewid yn ôl i'r llinell: Naill ai $y = 2 \times -3 + 13$ neu $y = 2 \times 1 + 13$
 $y = 7$ $y = 15$

Felly $A = (-3, 7)$ a $B = (1, 15)$.

(b) Rhaid ystyried sut mae'r rhanbarth melyn wedi'i ffurfio. Rydym yn cychwyn efo'r arwynebedd o dan y gromlin biws rhwng $x = -3$ ag $x = 1$, ac yna'n tynnu'r arwynebedd o dan y llinell werdd rhwng $x = -3$ ag $x = 1$.

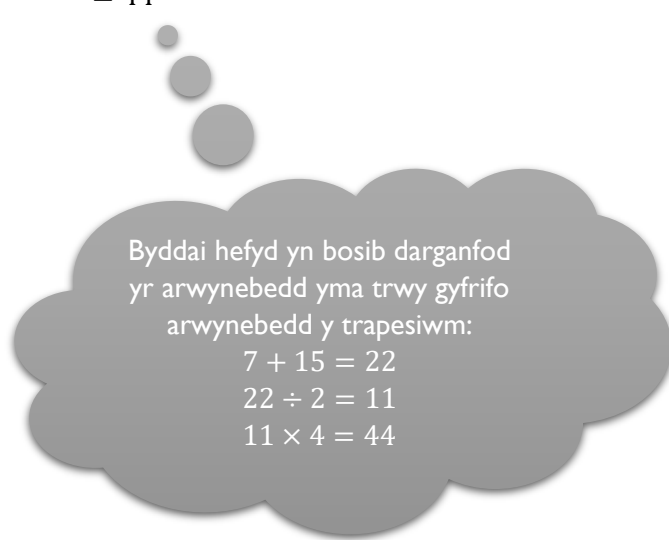
Arwynebedd o dan y gromlin biws:

Arwynebedd o dan y llinell werdd:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-3}^1 16 - x^2 \, dx \\
 &= \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^1 \\
 &= \left[16 \times 1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[16 \times -3 - \frac{(-3)^3}{3} \right] \\
 &= \left[16 - \frac{1}{3} \right] - [-48 + 9] \\
 &= \frac{47}{3} - -39 \\
 &= \frac{164}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{-3}^1 2x + 13 \, dx \\
 &= \left[\frac{2x^2}{2} + 13x \right]_{-3}^1 \\
 &= [x^2 + 13x]_{-3}^1 \\
 &= [1^2 + 13 \times 1] - [(-3)^2 + 13 \times -3] \\
 &= [1 + 13] - [9 - 39] \\
 &= 14 - -30 \\
 &= 44
 \end{aligned}$$

Felly arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu yw $\frac{164}{3} - 44 = \frac{32}{3}$ uned sgwâr.



Byddai hefyd yn bosib darganfod yr arwynebedd yma trwy gyfrifo arwynebedd y trapesiwm:
 $7 + 15 = 22$
 $22 \div 2 = 11$
 $11 \times 4 = 44$



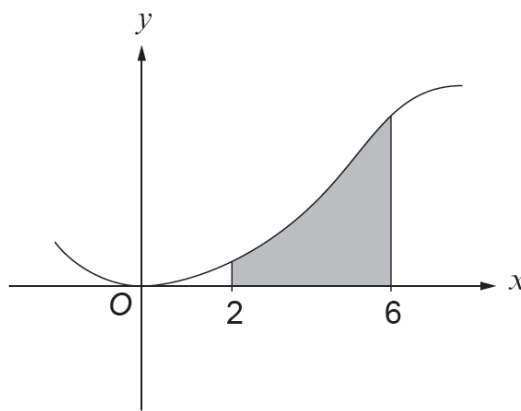
(C2 Gaeaf 2014)

6. (a) Darganfyddwch $\int \left(\frac{5}{x^3} - 2x^{\frac{1}{3}} - 4 \right) dx$. [3]

(b) Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r gromlin â hafaliad $y = 3x^2 - \frac{1}{4}x^3$.

Mae'r rhanbarth sydd wedi'i dywyllu wedi'i ffinio gan y gromlin, yr echelin- x a'r llinellau $x = 2$, $x = 6$.

Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth hwn sydd wedi'i dywyllu. [4]



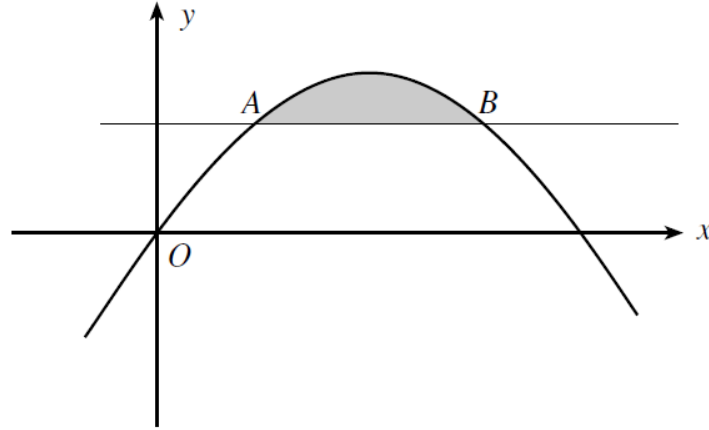
(C2 Haf 2016)

6. (a) Darganfyddwch $\int \left(\frac{3}{\sqrt[4]{x}} - 9x^{\frac{5}{2}} \right) dx$. [2]

(b) Mae rhanbarth R wedi ei ffinio â chromlin $y = 2x^2 + \frac{6}{x^2}$, yr echelin- x a'r llinellau $x = 1$, $x = 4$. Darganfyddwch arwynebedd R . [5]

(C2 Haf 2005)

7. (a) Darganfyddwch $\int \left(2x^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx$. [2]
 (b)



Mae'r diagram yn dangos braslun o'r gromlin $y = 6x - x^2$ a'r llinell $y = 5$. Mae'r llinell a'r gromlin yn croestorri yn y pwyntiau A a B .

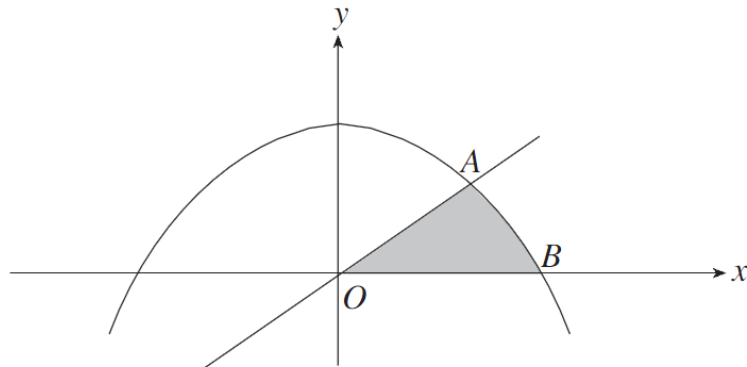
- (i) Gan ddangos eich gwaith cyfrifo, darganfyddwch gyfesurynnau A a B .
 (ii) Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. [10]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2006)

6. Integrwch $5x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-3}$ mewn perthynas ag x . [2]

7.



Mae'r diagram yn dangos y gromlin $y = 4 - x^2$ a'r llinell $y = 3x$ yn croestorri yn y pwynt A . Mae'r gromlin $y = 4 - x^2$ yn croestorri'r echelin- x yn B .

(a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a B . Dangoswch eich gwaith cyfrifo. [5]

(b) Enrhifwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. [7]

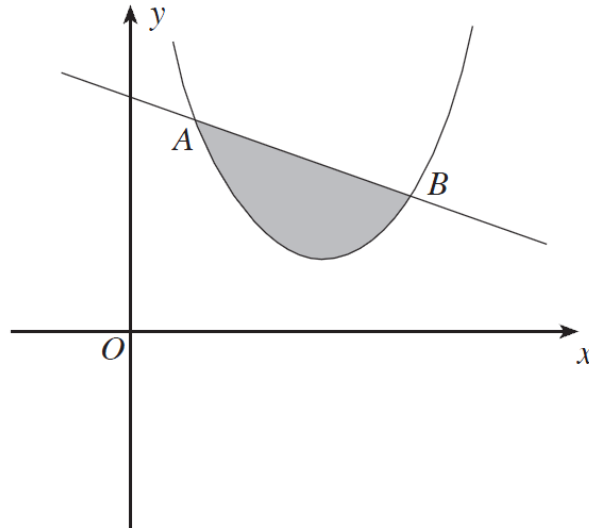
A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2008)

7. (a) Darganfyddwch $\int \left(4x^{\frac{2}{3}} - \frac{7}{\sqrt{x}} \right) dx$.

[2]

(b)



Mae'r diagram yn dangos braslun o'r gromlin $y = x^2 - 6x + 11$ a'r llinell $y = -x + 7$. Mae'r llinell a'r gromlin yn croestorri yn y pwyntiau A a B.

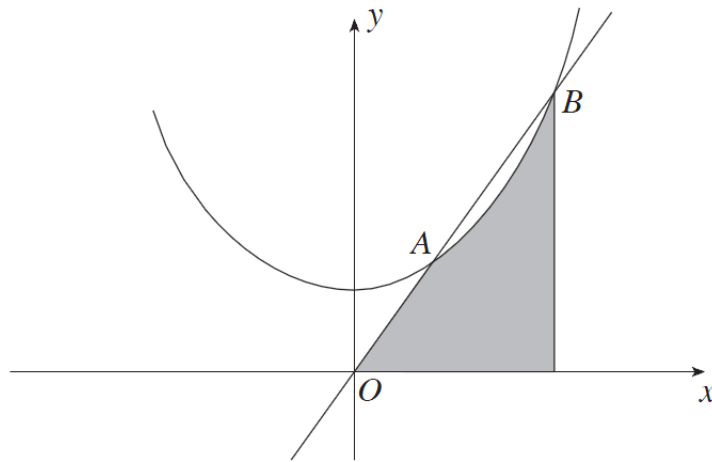
- (i) Gan ddangos eich gwaith cyfrifo, darganfyddwch gyfesurynnau A a B.
 (ii) Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu.

[11]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2007)

6. (a) Darganfyddwch $\int \left(2x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{x^4} \right) dx$. [2]
- (b)



Mae'r diagram yn dangos braslun o'r gromlin $y = x^2 + 2$ a'r llinell $y = 3x$.
Mae'r llinell a'r gromlin yn croestorri yn y pwyntiau A a B.

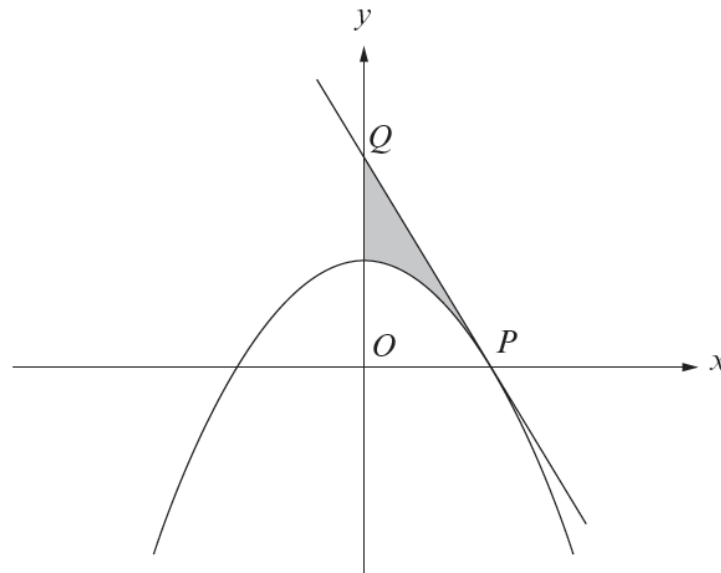
- (i) Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwyntiau A a B. [4]
- (ii) Enrhifwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. [7]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2013)

6. (a) Darganfyddwch $\int \left(\frac{5}{x^4} - 7x^{\frac{2}{3}} \right) dx$. [2]
 (b)



Mae'r diagram yn dangos braslun o'r gromlin $y = 9 - x^2$ sy'n croestorri'r echelin- x bositif yn y pwynt $P(a, 0)$.

- (i) Darganfyddwch werth a .

Mae'r tangiad i'r gromlin yn P yn croestorri'r echelin- y yn y pwynt $Q(0, b)$.

- (ii) Dangoswch fod $b = 18$.
 (iii) Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. [10]

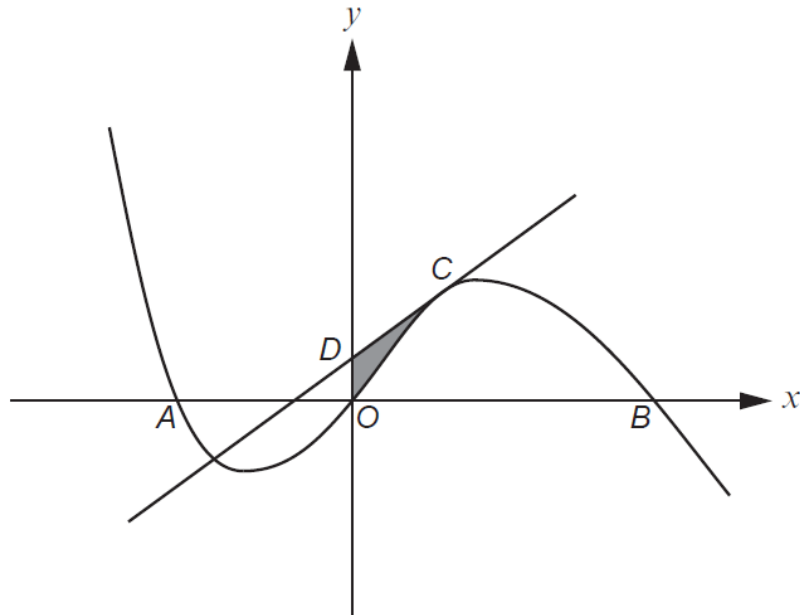
A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2022)

1 | 1

Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r gromlin $y = f(x)$, lle mae $f(x) = 10x + 3x^2 - x^3$. Mae'r gromlin yn croestorri'r echelin- x yn y tarddbwynt O ac yn y pwyntiau $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$. Mae'r tangiad i'r gromlin yn y pwynt $C(2, 24)$ yn croestorri'r echelin- y yn y pwynt D .



- a) Darganfyddwch gyfesurynnau D . [5]
- b) Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. [6]
- c) Darganfyddwch ar gyfer pa amrediad o werthoedd x mae $f(x)$ yn ffwythiant cynyddol. [4]

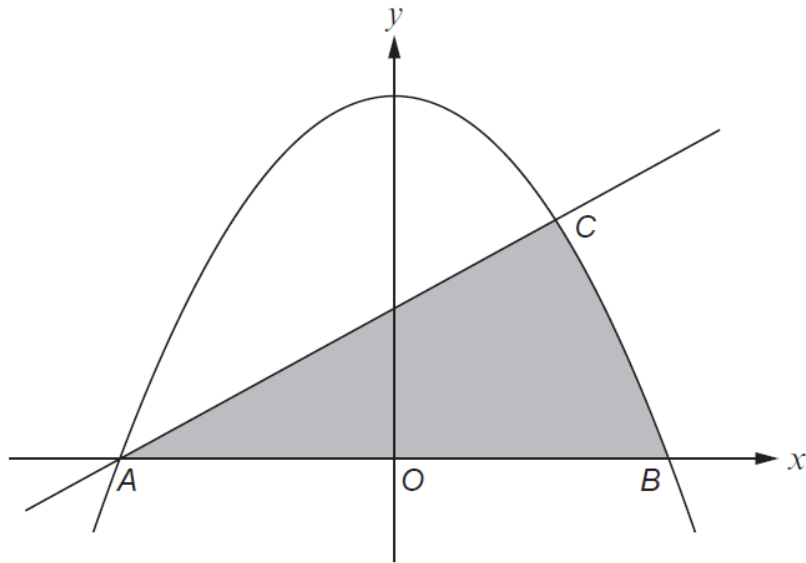
A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2018)

6. (a) Darganfyddwch $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx$. [2]

(b)



Mae'r diagram yn dangos braslun o'r gromlin $y = 25 - x^2$ a'r llinell $y = 2x + 10$. Mae'r gromlin a'r llinell yn croestorri yn y pwyntiau A ac C. Mae'r gromlin yn croestorri'r echelin-x yn y pwyntiau A a B. Cyfesurynnau A, B ac C yw $(-5, 0)$, $(5, 0)$ a $(3, 16)$ yn ôl eu trefn. Darganfyddwch arwynebedd y rhanbarth sydd wedi'i dywyllu. [6]

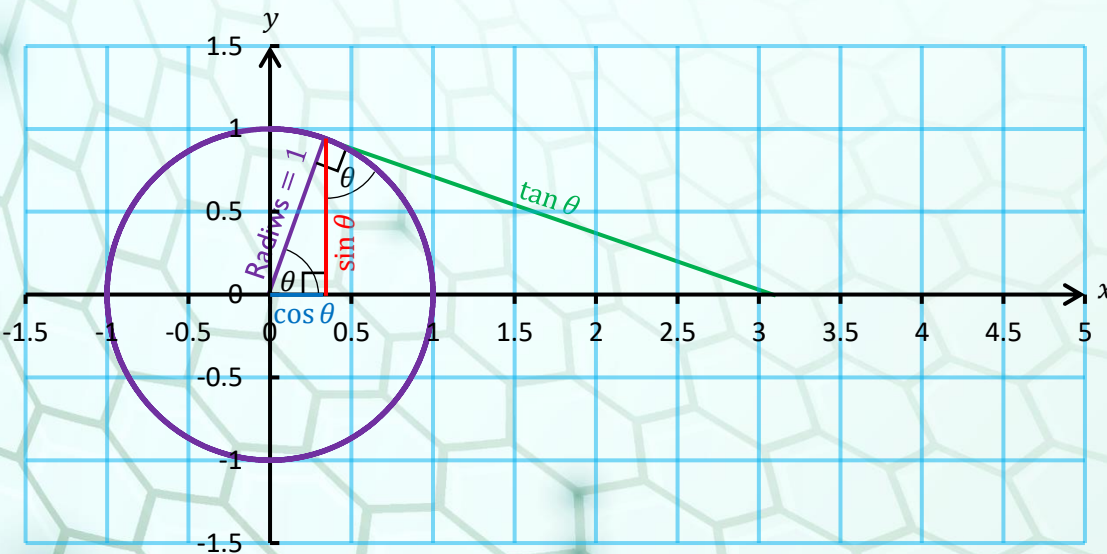


Uned 1, Pecyn 9

12

Trigonometreg

Rhan 1



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Ystyried ystyr y cymarebau trigonometrig sin, cos a tan, a'r cysylltiadau rhyngdynt. Datrys hafaliadau trigonometrig.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Trigonometreg, datrys hafaliadau cwadratig.

I ble mae'n arwain?

Uned 3: Datrys hafaliadau'n cynnwys y cymarebau trigonometrig sec, cosec a cot.

Cymwysiadau: Darganfod hafaliad llwybr taflegryn; mudiant harmonig syml.

Theori

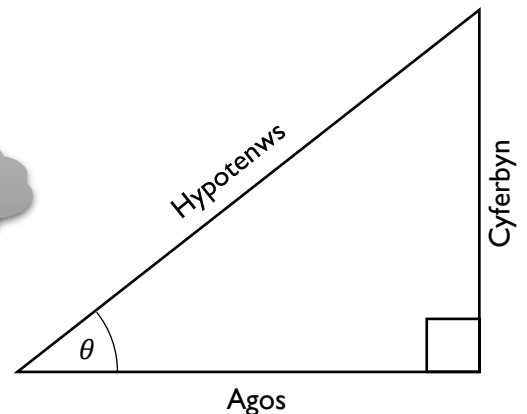
Trigonometreg yw'r rhan o fathemateg sy'n astudio'r perthnasau rhwng ochrau ag onglau mewn trionglau. Mae'r gair yn deillio o'r Groegaidd am "triongl" a "mesur".

Dyma'r cymarebau trigonometrig ar gyfer trionglau ongl sgwâr.

$$\sin \theta = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}}$$

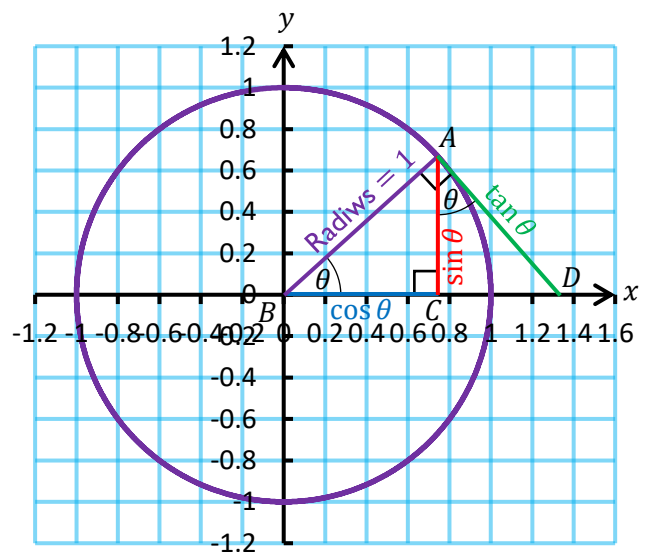


Diffiniadau

Ystyriwch y [cyloch unedol](#) a ddangosir ar y dde.

Yn ystyried y triongl ongl sgwâr ABC,

- Hyd yr hypotenws yw 1 uned (gan fod radiws y cyloch unedol yn 1 uned).
- $\sin \theta = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}}$
 $\sin \theta = \frac{\text{uchder y triongl}}{1}$
 uchder y triongl = $\sin \theta$
- $\cos \theta = \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}}$
 $\cos \theta = \frac{\text{sail y triongl}}{1}$
 sail y triongl = $\cos \theta$
- $\tan \theta = \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}}$
 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$



Felly, gallwn feddwl am $\sin \theta$ fel uchder y triongl ongl sgwâr mewn cyloch unedol, a gallwn feddwl am $\cos \theta$ fel hyd sail y triongl ongl sgwâr mewn cyloch unedol.

Yn ystyried y triogl ongl sgwâr ACD ,

- $\cos \theta = \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}}$

$$\cos \theta = \frac{\sin \theta}{\text{hypotenws}}$$

$$\text{hypotenws} \times \cos \theta = \sin \theta$$

$$\text{hypotenws} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{hypotenws} = \tan \theta$$

O'r triogl ABC

O'r pedwerydd pwynt bwled uchod

Felly, gallwn feddwl am $\tan \theta$ fel hyd y tangiad yn mesur o'r pwynt A ar y cylch i'r echelin- x .

Yn defnyddio Theorem Pythagoras ar y triogl ongl sgwâr ABC ,

- $BC^2 + AC^2 = AB^2$
- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1^2$
- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

I grynhoi, dyma'r ddau unfathiant fydd o ddefnydd i ni yn y gwaith sy'n dilyn.



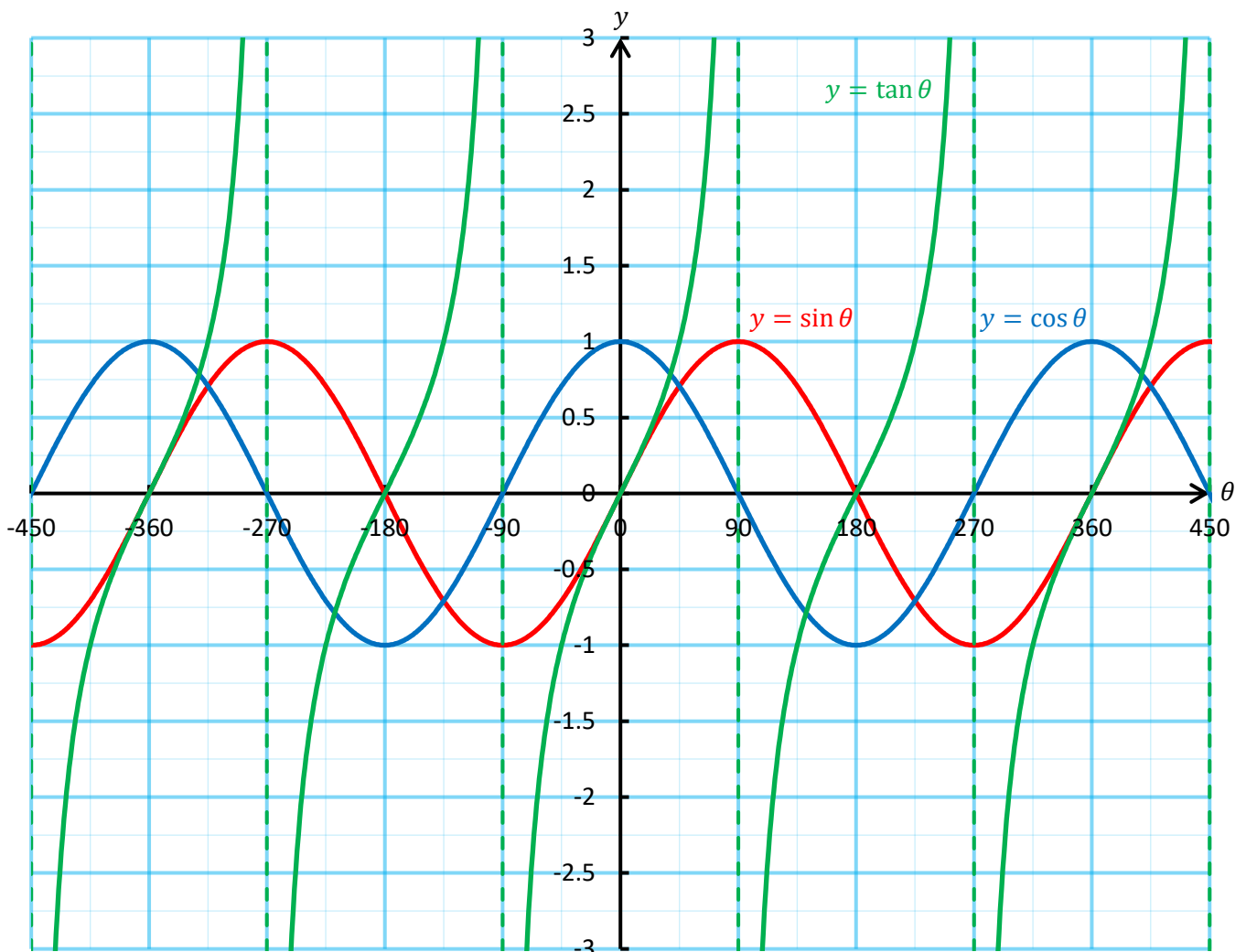
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

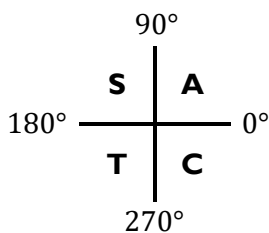


Graffiau Trigonometrig

Edrychwch eto ar y cylch unedol ar y dudalen flaenorol. O lusgo'r pwynt A o gwmpas y cylch, gan symud yn wrthglocwedd, bydd y gwerthoedd $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ yn dilyn y llwybrau canlynol.



Y Diagram CAST



Mae'r diagram **CAST** yn crynhoi beth yw arwydd $\sin \theta$, $\cos \theta$ a $\tan \theta$ wrth i'r ongl θ amrywio rhwng 0° a 360° .

- Rhwng 0° a 90° , mae **pob un** ('all') o'r gwerthoedd $\sin \theta$, $\cos \theta$ a $\tan \theta$ yn bositif.
- Rhwng 90° a 180° , dim ond gwerth **sin** θ sydd yn bositif. (Mae $\cos \theta$ a $\tan \theta$ yn negatif.)
- Rhwng 180° a 270° , dim ond gwerth **tan** θ sydd yn bositif. (Mae $\sin \theta$ a $\cos \theta$ yn negatif.)
- Rhwng 270° a 360° , dim ond gwerth **cos** θ sydd yn bositif. (Mae $\sin \theta$ a $\tan \theta$ yn negatif.)

Gallwn ddefnyddio'r diagram CAST i ddarganfod yr holl onglau sy'n bodloni hafaliad trigonometrig.

Enghraifft 1

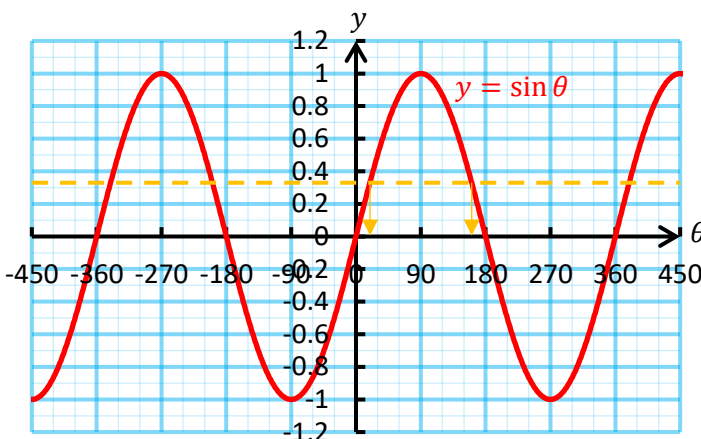
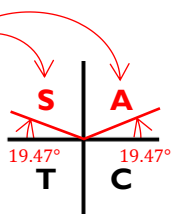
Datrysych $3 \sin \theta = 1$ rhwng 0° a 360° .

$$3 \sin \theta = 1$$

$$\sin \theta = \frac{1}{3} \quad (\text{sin yn bositif})$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\theta = 19.47^\circ \text{ i 2 le degol.}$$



Hefyd, o ystyried graff $\sin \theta$ neu'r diagram CAST (ble mae'r echelin fertigol yn llinell cymesuredd),

$$\theta = 180^\circ - 19.47^\circ$$

$$\theta = 160.53^\circ \text{ i 2 le degol.}$$

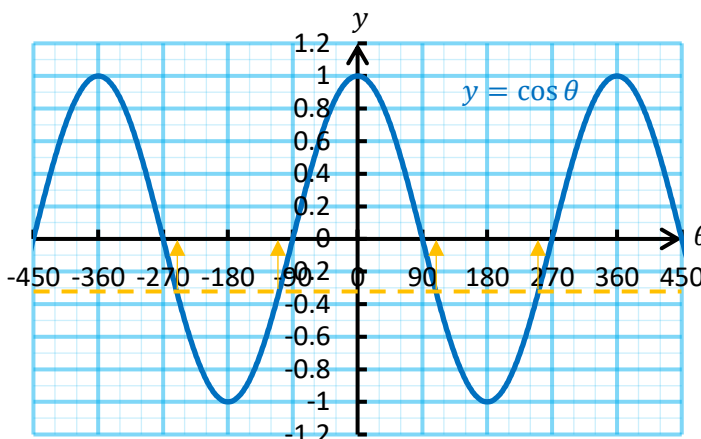
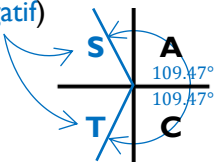
Enghraifft 2

Datrysych $3 \cos 2\theta = -1$ rhwng -180° a 180° .

$$\cos 2\theta = -\frac{1}{3} \quad (\text{cos yn negatif})$$

$$2\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$2\theta = 109.47^\circ \text{ i 2 le degol.}$$



Hefyd, o ystyried graff $\cos \theta$ neu'r diagram CAST (ble mae'r echelin llorweddol yn llinell cymesuredd),

$$2\theta = -250.53^\circ, -109.47^\circ, 109.47^\circ, 250.53^\circ \text{ i 2 le degol.}$$

$$\theta = -125.26^\circ, -54.74^\circ, 54.74^\circ, 125.26^\circ \text{ i 2 le degol.}$$

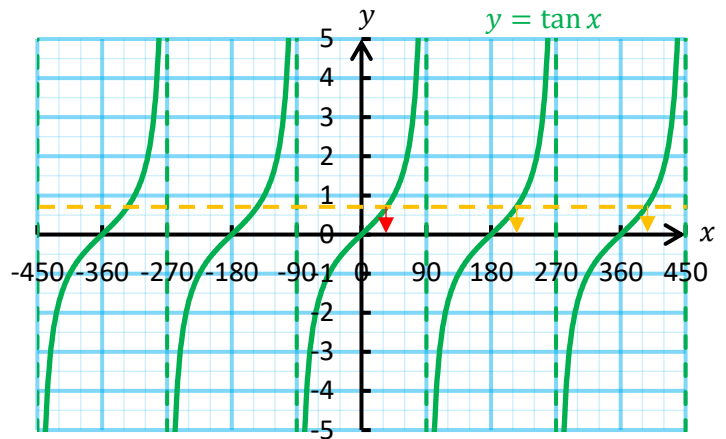
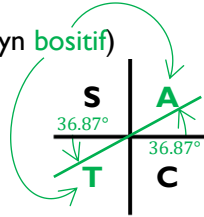
Nodyn: Bydd eich cyfrifiannell, wrth gyfrifo \sin^{-1} , \cos^{-1} a \tan^{-1} , yn darganfod yr ongl agosaf at sero, boed yn bositif neu'n negatif.

Gan fod raid i θ fod rhwng -180° a 180° , rhaid ystyried gwerthoedd 2θ rhwng -360° a 360° .

Enghraifft 3

Datrysych $4 \tan(2x + 40^\circ) = 3$ rhwng 0° a 180° .

$$\begin{aligned} \tan(2x + 40^\circ) &= 0.75 \quad (\text{tan yn bositif}) \\ 2x + 40^\circ &= \tan^{-1}(0.75) \\ 2x + 40^\circ &= 36.87^\circ \\ &\text{i 2 le degol.} \end{aligned}$$



Hefyd, o ystyried graff $\tan x$ neu'r diagram CAST (ble mae angen adlewyrchu yn yr echelinau fertigol a llorweddol, neu gylchdroi trwy 180°),

$$2x + 40^\circ = 36.87^\circ, 216.87^\circ, 396.87^\circ \text{ i 2 le degol.}$$

$$2x = -3.13^\circ, 176.87^\circ, 356.87^\circ \text{ i 2 le degol.}$$

$$x = 88.43^\circ, 178.43^\circ \text{ i 2 le degol.}$$

Gan fod raid i x fod rhwng 0° a 180° , rhaid ystyried gwerthoedd $2x + 40^\circ$ rhwng 40° a 400° .

Enghraifft 4

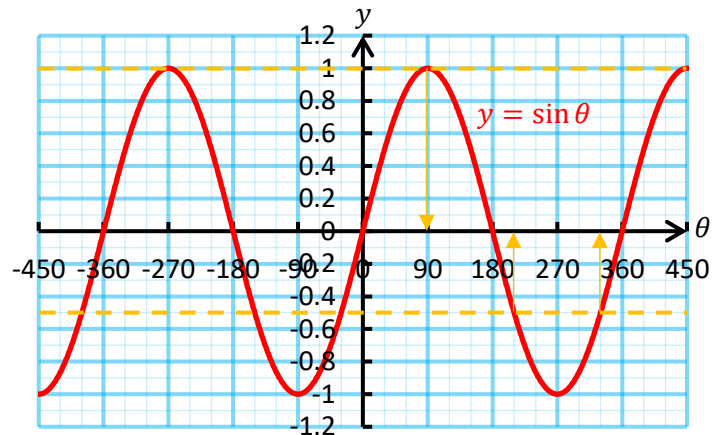
Datrysych $2\cos^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$ rhwng 0° a 360° .

Mae $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ felly gallwn ddefnyddio $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ i newid yr hafaliad i fod mewn $\sin \theta$ yn unig.

$$\begin{aligned} 2(1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 1 &= 0 \\ 2 - 2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 &= 0 \\ -2\sin^2 \theta + \sin \theta + 1 &= 0 \\ 2\sin^2 \theta - \sin \theta - 1 &= 0 \end{aligned}$$

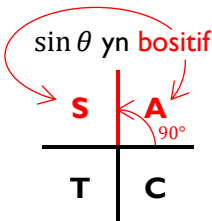
$$\begin{aligned} \text{Ffactorio: } 2 \times -1 &= -2 \\ 2\sin^2 \theta - 2\sin \theta + \sin \theta - 1 &= 0 \\ 2\sin \theta (\sin \theta - 1) + 1(\sin \theta - 1) &= 0 \\ (\sin \theta - 1)(2\sin \theta + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Naill ai } \sin \theta - 1 = 0 \quad \text{neu} \quad 2\sin \theta + 1 = 0 \\ \sin \theta = 1 \quad \quad \quad 2\sin \theta = -1 \\ \theta = \sin^{-1}(1) \quad \quad \quad \sin \theta = -\frac{1}{2} \\ \theta = 90^\circ \quad \quad \quad \theta = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \theta = -30^\circ \end{aligned}$$

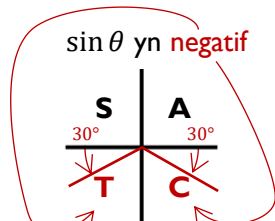


Os hoffwch, gallwch amnewid $x = \sin \theta$ i newid hwn i $2x^2 - x - 1 = 0$, ffactorio fel $(x - 1)(2x + 1) = 0$, ac yna newid yn ôl i $(\sin \theta - 1)(2\sin \theta + 1) = 0$

Hefyd, o ystyried graff $\sin \theta$ neu'r diagram CAST (ble mae'r echelin fertigol yn llinell cymesured),



Dim mwy o ddatrysiadau.



$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ + 30^\circ \text{ neu } \theta = 360^\circ - 30^\circ \\ \theta &= 210^\circ, 330^\circ \end{aligned}$$

Atebion terfynol: $\theta = 90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.




 Y 10 Uchaf

(C2 Haf 2006)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$\tan x = -0.4. \quad [2]$$

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 180° sy'n bodloni

$$\cos 3x = \frac{1}{2}. \quad [4]$$

- (c) Darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta = 0. \quad [5]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2009)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ rhwng 0° a 360° sy'n bodloni

$$5 \cos^2 \theta + 2 = 3 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta. \quad [6]$$

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd x rhwng 0° a 180° sy'n bodloni

$$\sin (2x + 12^\circ) = -0.53. \quad [3]$$

(C2 Gaeaf 2007)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$10 \sin^2 x - 3 \sin x = 4 \cos^2 x + 1. \quad [6]$$

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ sy'n bodloni

$$\tan (2x + 30^\circ) = \sqrt{3}. \quad [3]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2010)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$3 - 7 \cos \theta = 6 \sin^2 \theta. \quad [5]$$

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ sy'n bodloni

$$\tan(2x + 45^\circ) = 0.7. \quad [3]$$

- (c) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$4 \tan \theta \cos \theta + 1 = 0. \quad [3]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2012)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$10 \sin^2 \theta + 7 \cos \theta = 5 \cos^2 \theta + 8. \quad [6]$$

(b) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\sin(x - 50^\circ) = -0.682. \quad [3]$$

(c) Heb wneud unrhyw waith cyfrifo, eglurwch pam nad oes unrhyw werthoedd ϕ sy'n bodloni'r hafaliad

$$\sin \phi + \cos \phi = 3. \quad [1]$$

Handwritten solution area with horizontal dotted lines.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2014)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$4\cos^2\theta + 1 = 4\sin^2\theta - 2\cos\theta. \quad [6]$$

- (b) Mae'r ongl α yn bodloni

$$\sin(\alpha + 40^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a $\sin(\alpha - 35^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

O wybod bod $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, darganfyddwch werth α . [3]

- (c) Darganfyddwch holl werthoedd ϕ yn yr amrediad $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\frac{7}{\cos\phi} - \frac{10}{\sin\phi} = 0. \quad [3]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2017)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\sin^2\theta + 6\cos^2\theta + 13\sin\theta = 0. \quad [5]$$

- (b) Tair ongl triongl yw A , B ac C . O wybod bod $\cos A = -0.342$ a bod $\tan(B - C) = 0.404$, darganfyddwch werthoedd A , B ac C . Rhowch bob ongl yn gywir i'r radd agosaf. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2018)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$10 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta = 4 \cos^2 \theta - 2. \quad [6]$$

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd ϕ yn yr amrediad $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\frac{3}{\cos \phi} - \frac{5}{\sin \phi} = 0. \quad [3]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned I Haf 2019)

0	1
---	---

Datrysych yr hafaliad canlynol ar gyfer gwerthoedd θ rhwng 0° a 360° .

$$3\tan\theta + 2\cos\theta = 0$$

[6]

(C2 Haf 2012)

2. (a) Darganfyddwch holl werthoedd θ yn yr amrediad $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$10\cos^2 \theta + 3\cos \theta = 4\sin^2 \theta - 2. \quad [6]$$

- (b) Darganfyddwch holl werthoedd x yn yr amrediad $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ sy'n bodloni

$$\sin(3x - 21^\circ) = -0.809. \quad [3]$$

- (c) Darganfyddwch holl werthoedd ϕ yn yr amrediad $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ sy'n bodloni

$$\cos \phi - 5 \sin \phi = 0. \quad [3]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.



Trigonometreg

Rhan 2

Rheol Sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Rheol Cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{Arwynebedd Triangl} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Heb ei ddiffinio

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?	Cyflwyno union werthoedd sin, cos a tan ar gyfer onglau penodol. Defnyddio rheol sin, rheol cosin a'r fformiwla ar gyfer arwynebedd triongl i ddatrys problemau.
Beth sydd ei angen cyn cychwyn?	Gwaith TGAU: Trigonometreg, datrys hafaliadau cwadratig. Lefel A Uned I: Syrddiau; Trigonometreg Rhan I.
I ble mae'n arwain?	Cymwysiadau: Mordwyo; peirianeg; rhaglennu gemau cyfrifiadurol.

Theori

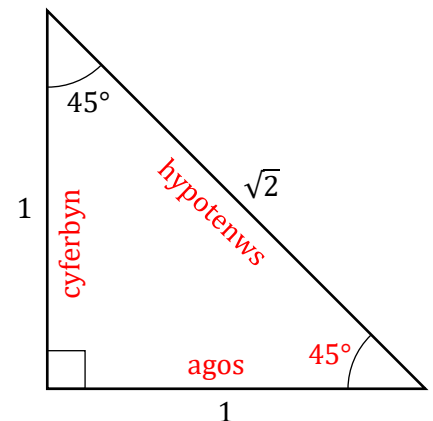
Union Werthoedd

Mewn cwestiwn sy'n cynnwys triongl ongl sgwâr efo'r onglau 30°, 45° neu 60°, mae disgwyl i chi ddefnyddio'r union werthoedd ar gyfer sin, cos a tan yr onglau hyn.

Yn gyntaf ystyriwch driongl ongl sgwâr ble mae hyd yr ochrau byrraf yn 1 uned.

Mae'n bosib defnyddio'r triongl yma i gyfrifo union werthoedd sin, cos a tan ar gyfer yr ongl 45°.

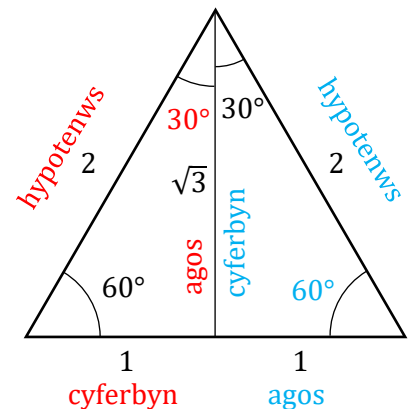
$$\begin{aligned} \sin(45^\circ) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} & \cos(45^\circ) &= \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} & \tan(45^\circ) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}} \\ \sin(45^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(45^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \tan(45^\circ) &= 1 \end{aligned}$$



Nesaf ystyriwch driongl hafalochrog ble mae hyd yr ochrau yn 2 uned.

Trwy hollti'r triongl yma yn ei hanner, mae'n bosib cyfrifo union werthoedd sin, cos a tan ar gyfer yr onglau 30° a 60°.

$$\begin{aligned} \sin(30^\circ) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} & \cos(30^\circ) &= \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} & \tan(30^\circ) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}} \\ \sin(30^\circ) &= \frac{1}{2} & \cos(30^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan(30^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin(60^\circ) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{hypotenws}} & \cos(60^\circ) &= \frac{\text{agos}}{\text{hypotenws}} & \tan(60^\circ) &= \frac{\text{cyferbyn}}{\text{agos}} \\ \sin(60^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos(60^\circ) &= \frac{1}{2} & \tan(60^\circ) &= \sqrt{3} \end{aligned}$$



Crynodeb

	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Heb ei ddiffinio

Gellir ffeindio gwerth sin, cos a tan ar gyfer lluosrifau gwahanol o'r onglau uchod trwy ddefnyddio **cymesuredd graffiau** sin, cos a tan.

Nodwch fod y gwerthoedd yn y **celloedd melyn** yn wahanol i'r rhai mae eich cyfrifiannell yn ei roi. (Pam?)

Ymarfer 1

Mae'r diagram ar y dde yn dangos dau driongl yn sOWNd efo'i gilydd. Os yw hyd cyffredin y ddau driongl yn 10 cm, cyfrifwch uchder cyfunol y ddau driongl. Ysgrifennwch eich ateb fel swrd.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

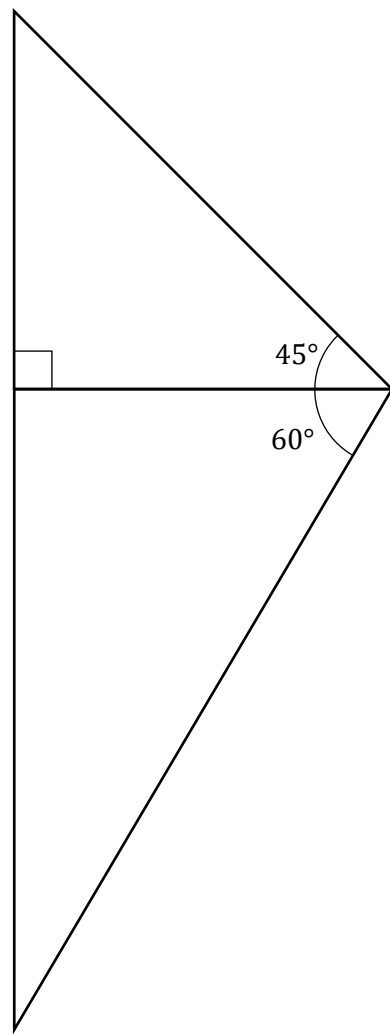
.....

.....

.....

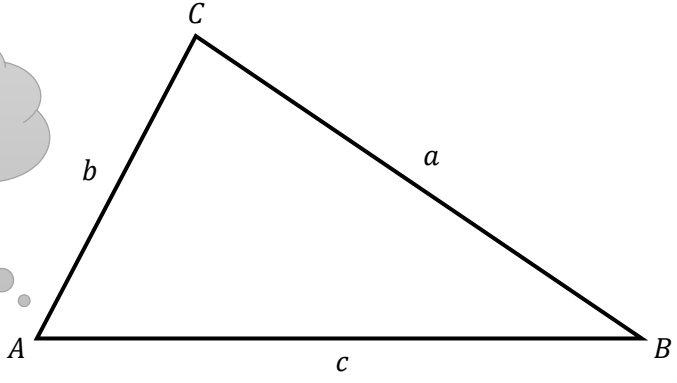
.....

.....



Mae'r **Rheol Sin** a'r **Rheol Cosin** yn cael eu defnyddio i gyfrifo maint ochrau ag onglau mewn trionglau nad yw'n drionglau ongl sgwâr.

Triongl cyffredinol efo ochrau a, b, c ag onglau A, B, C .



Rheol Sin ar gyfer darganfod hydoedd:

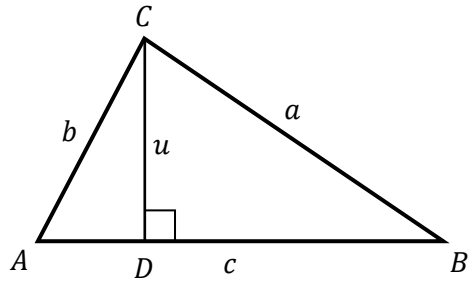
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Rheol Sin ar gyfer darganfod onglau:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad [\text{Cymryd y cilydd}]$$

Prawfl (ar gyfer triongl heb ongl aflem²)

Lluniwch y perpendicwlar o'r fertig C i'r sail AB.



Gan ddefnyddio'r triongl CDB, $\sin B = \frac{u}{a}$ fel bod $u = a \sin B$.

Gan ddefnyddio'r triongl CAD, $\sin A = \frac{u}{b}$ fel bod $u = b \sin A$.

Gan ddefnyddio'r ddau fynegiad ar gyfer uchder y triongl u, rhaid bod $a \sin B = b \sin A$.

Felly $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ [Rhannu efo $\sin A$ a $\sin B$]

Byddai'n bosib ail-adrodd yr uchod ("Lluniwch y perpendicwlar o'r fertig A i'r sail BC...") i gael $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Gallwn gyfuno'r ddwy fformiwla sy'n defnyddio ffracsiau i gael y Rheol Sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Rheol Cosin ar gyfer darganfod hydoedd:

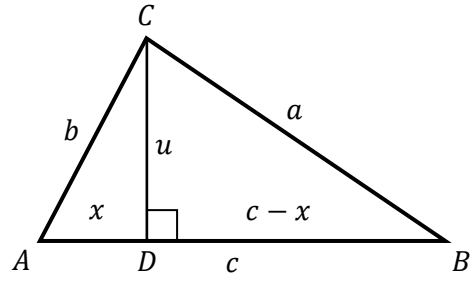
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Rheol Cosin ar gyfer darganfod onglau:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad [\text{Ail-drefnu'r fformiwla}]$$

Prawfl (ar gyfer triongl heb ongl aflem²)

Lluniwch y perpendicwlar o'r fertig C i'r sail AB.



Theorem Pythagoras ar gyfer triongl BCD: $a^2 = (c - x)^2 + u^2$ fel bod $u^2 = a^2 - (c - x)^2$.

Theorem Pythagoras ar gyfer triongl ACD: $b^2 = x^2 + u^2$ fel bod $u^2 = b^2 - x^2$.

Gan ddefnyddio'r ddau fynegiad ar gyfer u^2 :

$$\begin{aligned} a^2 - (c - x)^2 &= b^2 - x^2 \\ a^2 - (c - x)(c - x) &= b^2 - x^2 \\ a^2 - (c^2 - cx - cx + x^2) &= b^2 - x^2 \\ a^2 - c^2 + 2cx - x^2 &= b^2 - x^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

Gan ddefnyddio'r triongl ACD, $\cos A = \frac{x}{b}$ fel bod $x = b \cos A$.

Felly $a^2 = b^2 + c^2 - 2c(b \cos A)$ sy'n rhoi'r Rheol Cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

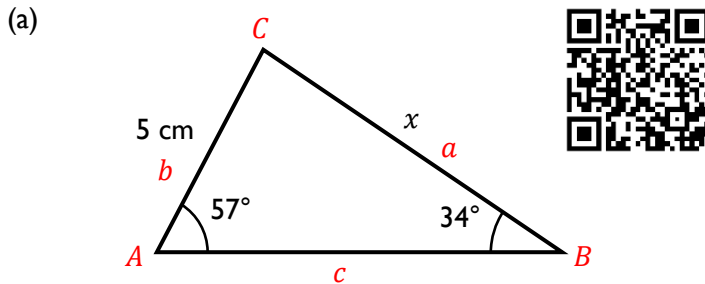
¹ Nid oes angen dysgu'r prawf yma.

² Chwiliwch ar y we ar gyfer prawf ar gyfer triongl sy'n cynnwys ongl aflem.

Y Rheol Sin

Enghraifft 1

Cyfrifwch yr ochr coll x neu'r ongl goll θ . (Nid yw'r diagramau wedi'u lluniadu wrth raddfa.)



Ateb: I gychwyn, rydym yn **labelu'r onglau** ac yna'n **labelu'r ochrau cyfatebol**. Gan ein bod eisiau darganfod hyd yr ochr x , rydym yn ysgrifennu'r Rheol Sin ar gyfer darganfod hydoedd:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Nid ydym yn gwybod hyd yr ochr c na chwaith maint yr ongl C , felly rydym yn croesi i ffwrdd y ffracsiwn yma o'r fformiwla:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \cancel{\frac{c}{\sin C}}$$

Trwy amnewid i mewn i'r ddau ffracsiwn sydd ar ôl, cawn

$$\frac{x}{\sin 57^\circ} = \frac{5}{\sin 34^\circ}$$

Gallwn ddatrys yr hafaliad yma trwy luosi bob ochr efo $\sin 57^\circ$:

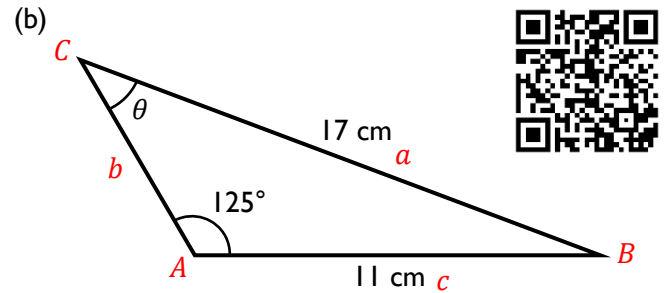
$$x = \left(\frac{5}{\sin 34^\circ}\right) \times \sin 57^\circ$$

$$x = 7.50 \text{ cm i 2 le degol.}$$

Ymarfer 2

Cyfrifwch hyd yr ochr x yn y triogl ar y dde.

.....



Ateb: I gychwyn, rydym yn **labelu'r onglau** ac yna'n **labelu'r ochrau cyfatebol**. Gan ein bod eisiau darganfod maint yr ongl θ , rydym yn ysgrifennu'r Rheol Sin ar gyfer darganfod onglau:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Nid ydym yn gwybod hyd yr ochr b na chwaith maint yr ongl B , felly rydym yn croesi i ffwrdd y ffracsiwn yma o'r fformiwla:

$$\frac{\sin A}{a} = \cancel{\frac{\sin B}{b}} = \frac{\sin C}{c}$$

Trwy amnewid i mewn i'r ddau ffracsiwn sydd ar ôl, cawn

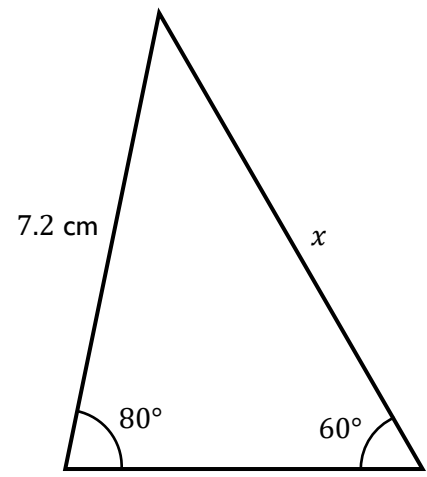
$$\frac{\sin 125^\circ}{17} = \frac{\sin \theta}{11}$$

Gallwn ddatrys yr hafaliad yma trwy luosi bob ochr efo 11:

$$\sin \theta = \left(\frac{\sin 125^\circ}{17}\right) \times 11$$

$$\theta = \sin^{-1} \left(\left(\frac{\sin 125^\circ}{17}\right) \times 11\right)$$

$$\theta = 32.01^\circ \text{ i 2 le degol.}$$

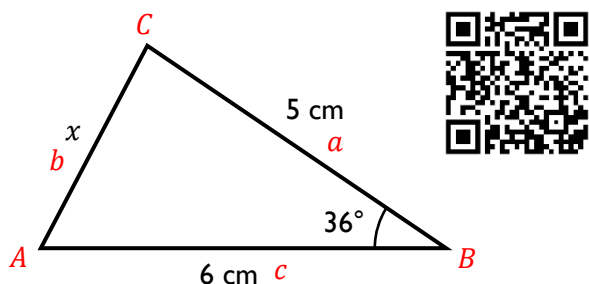


Y Rheol Cosin

Enghraifft 2

Cyfrifwch yr ochr coll x neu'r ongl goll θ . (Nid yw'r diagramau wedi'u lluniadu wrth raddfa.)

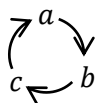
(a)



Ateb: I gychwyn, rydym yn **labelu'r onglau** ac yna'n **labelu'r ochrau cyfatebol**. Gan ein bod eisiau darganfod hyd yr ochr x , rydym yn ysgrifennu'r Rheol Cosin ar gyfer darganfod hydroedd:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Nid yw'r fformiwla'n ffitio'r labeli rydym wedi'u dewis, felly rydym yn newid y newidynnau yn y Rheol Cosin trwy fynd o amgylch y cylch isod unwaith.



$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

Gallwn nawr amnewid i mewn y gwerthoedd o'r triongl:

$$x^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos 36^\circ$$

$$x = \sqrt{12.45898034}$$

$$x = 3.53 \text{ cm i 2 le degol.}$$

Ymarfer 3

Cyfrifwch faint yr ongl θ yn y triongl ar y dde.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

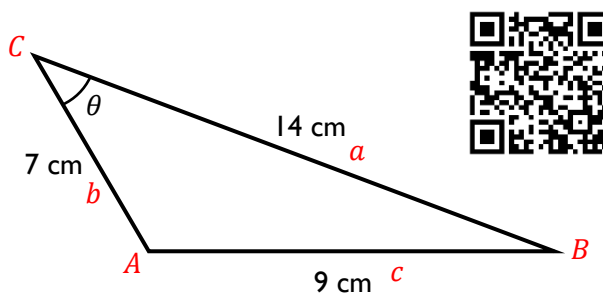
.....

.....

.....

.....

(b)



Ateb: I gychwyn, rydym yn **labelu'r onglau** ac yna'n **labelu'r ochrau cyfatebol**. Gan ein bod eisiau darganfod maint yr ongl θ , rydym yn ysgrifennu'r Rheol Cosin ar gyfer darganfod onglau:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Nid yw'r fformiwla'n ffitio'r labeli rydym wedi'u dewis, felly rydym yn newid y newidynnau yn y Rheol Cosin trwy fynd o amgylch y cylch isod dwywaith.



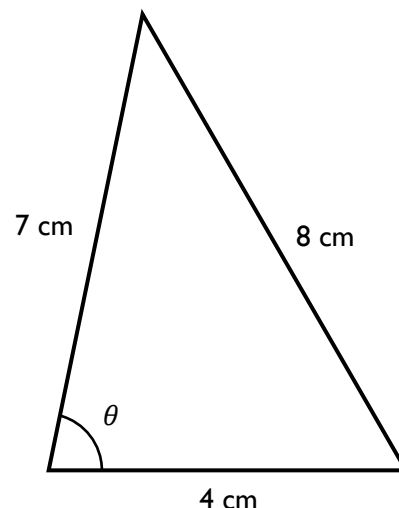
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Gallwn nawr amnewid i mewn y gwerthoedd o'r triongl:

$$\cos \theta = \frac{14^2 + 7^2 - 9^2}{2 \times 14 \times 7}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{41}{49} \right)$$

$$\theta = 33.20^\circ \text{ i 2 le degol.}$$



Rheol Sin neu Rheol Cosin?

Yn gwybod:	Eisiau ffeindio:	Rheol Sin neu Rheol Cosin?	Enghreifftiau
<p>Tri o'r gwerthoedd mewn dau bâr o ochrau/onglau cyferbyn.</p>	<p>Yr ongl neu'r ochr coll yn y ddau bâr.</p>	<p>Rheol Sin.</p>	
<p>Dwy ochr a'r ongl rhwng yr ochrau.</p>	<p>Yr ochr gyferbyn yr ongl hysbys.</p>	<p>Rheol Cosin.</p>	
<p>Yr ochrau i gyd.</p>	<p>Unrhyw ongl.</p>	<p>Rheol Cosin.</p>	
<p>Dwy ochr ag ongl nad yw rhwng yr ochrau.</p>	<p>Yr ochr arall.</p>	<p>Rheol Sin dwywaith (haws), neu'r Rheol Cosin (anoddach).</p>	

Ymarfer 4

Cyfrifwch yr ochr goll x neu'r ongl goll θ yn y trionglau uchod.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

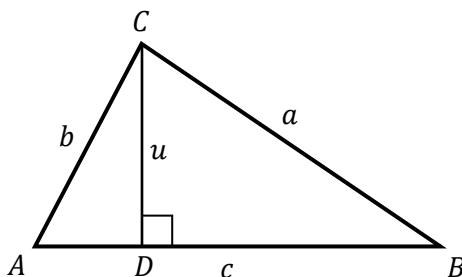
.....

.....

A series of horizontal dotted lines for writing.

Arwynebedd Triongl

Mae'r diagram isod yn dangos triongl cyffredinol efo ochrau a , b , c ag onglau A , B , C .

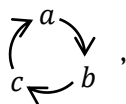


Gadewch i ni lunio'r perpendicwlar o'r fertig C i'r sail AB . Gan ddefnyddio'r triongl ongl sgwâr CAD sy'n cael ei ffurfio, gwelwn fod $\sin A = \frac{u}{b}$, ac felly $u = b \sin A$. Gan ddefnyddio'r fformiwla Arwynebedd Triongl = $\frac{\text{sail} \times \text{uchder}}{2}$,

$$\text{Arwynebedd Triongl} = \frac{c \times b \sin A}{2}$$

$$\text{Arwynebedd Triongl} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Neu, gan newid y newidynnau efo

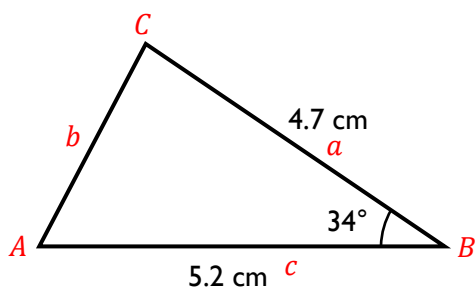


$$\text{Arwynebedd Triongl} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$\text{Arwynebedd Triongl} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Enghraifft 4

(a) Cyfrifwch arwynebedd y triongl isod.



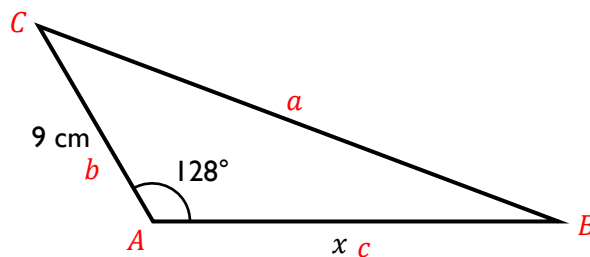
Ateb: I gychwyn, rydym yn **labelu'r onglau** ac yna'n **labelu'r ochrau cyfatebol**. Gan ddefnyddio'r fformiwla

$$\text{Arwynebedd Triongl} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$\text{Arwynebedd Triongl} = \frac{1}{2} \times 4.7 \times 5.2 \times \sin 34^\circ$$

$$\text{Arwynebedd Triongl} = 6.83 \text{ cm}^2 \text{ i 2 le degol.}$$

(b) O wybod bod arwynebedd y triongl isod yn 27 cm^2 , cyfrifwch hyd sail y triongl x .



Ateb: I gychwyn, rydym yn **labelu'r onglau** ac yna'n **labelu'r ochrau cyfatebol**. Gan ddefnyddio'r fformiwla

$$\text{Arwynebedd Triongl} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$27 = \frac{1}{2} \times 9 \times x \times \sin 128^\circ$$

$$27 \times 2 = 9 \times x \times \sin 128^\circ$$

$$\frac{54}{9 \times \sin 128^\circ} = x$$

$$x = 7.61 \text{ cm i 2 le degol.}$$

Gallwn ddefnyddio'r fformiwla

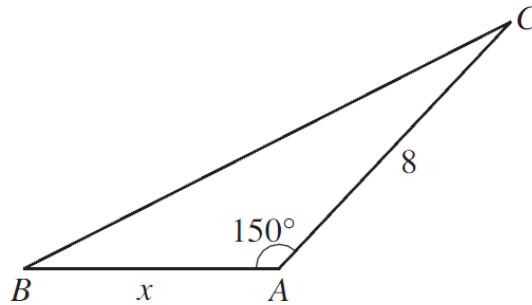
$$\text{Arwynebedd Triongl} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

os ydym yn gwybod hydoedd dwy o ochrau triongl a maint yr ongl sydd **rhwng** yr ochrau.



(C2 Haf 2006)

3. Mae'r diagram isod yn dangos y triongl ABC , gydag $AB = x$ cm, $AC = 8$ cm a $\widehat{BAC} = 150^\circ$.



O wybod mai arwynebedd y triongl ABC yw 10 cm^2 ,

- (a) darganfyddwch x , [3]
- (b) cyfrifwch hyd ochr hwyaf (*longest*) y triongl ABC , gan roi eich ateb yn gywir i ddau le degol. [3]

(C2 Gaeaf 2007)

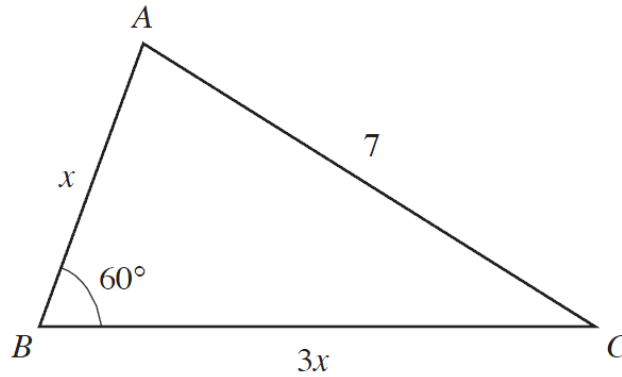
6. Mae'r triongl ABC fel bod $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm ac ongl **aflem** yw \widehat{BAC} . Arwynebedd y triongl ABC yw $15\sqrt{3}$ cm².

(a) Darganfyddwch faint \widehat{BAC} . [3]

(b) Cyfrifwch hyd BC . [3]

(C2 Haf 2007)

3. Mae'r diagram isod yn dangos y triongl ABC , gydag $AB = x$ cm, $BC = 3x$ cm, $AC = 7$ cm ac $\widehat{ABC} = 60^\circ$.



- (a) Dangoswch fod $x = \sqrt{7}$. [3]
- (b) Darganfyddwch \widehat{ACB} . [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2008)

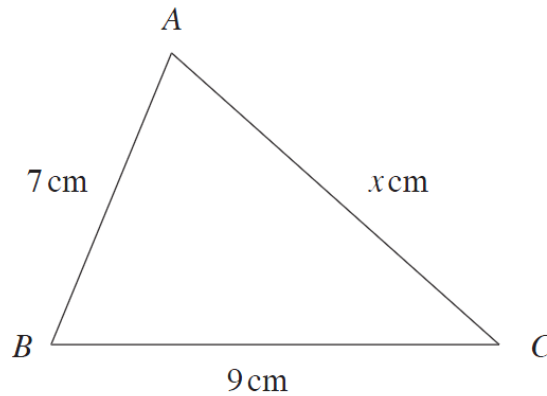
5. Yn y triongl ABC , mae $AB = 6$ cm, $BC = 13$ cm a $CA = 9$ cm.

(a) Darganfyddwch werth $\cos \widehat{BAC}$ fel ffracsiwn yn ei ffurf symlaf. [3]

(b) Dangoswch mai arwynebedd triongl ABC yw $4\sqrt{35}\text{cm}^2$. [3]

(C2 Gaeaf 2009)

3. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r triongl ABC gydag $AB = 7$ cm, $AC = x$ cm, $BC = 9$ cm a $\cos \hat{BAC} = \frac{2}{7}$.



- (a) Ysgrifennwch a symleiddiwch hafaliad cwadratig y mae x yn ei fodloni. Trwy hyn, enrhwfych x . [3]
- (b) (i) Mynegwch $\sin \hat{BAC}$ yn y ffurf $\frac{\sqrt{m}}{n}$, lle mae m, n yn gyfanrifau y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd.
- (ii) Mynegwch $\sin \hat{ACB}$ yn y ffurf $\frac{\sqrt{p}}{3}$, lle mae p yn gyfanrif y mae'n rhaid darganfod ei werth. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

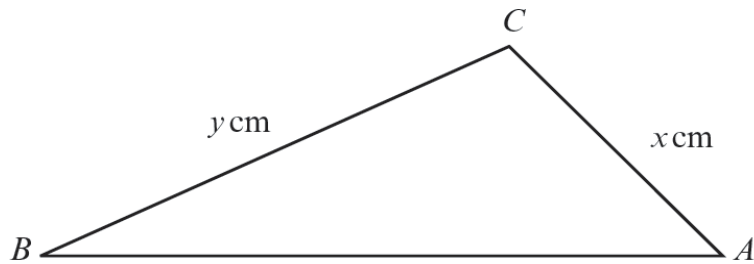
(C2 Haf 2010)

3. (a) Mae'r triongl ABC fel bod $AB = 11$ cm, a $\widehat{BAC} = 110^\circ$. O wybod mai arwynebedd y triongl ABC yw 31 cm^2 , darganfyddwch hyd BC . [4]
- (b) Mae'r triongl XYZ fel bod $XY = 2$ cm, $YZ = (2\sqrt{3} - 1)$ cm ac $\widehat{YXZ} = 60^\circ$. Darganfyddwch fynegiad ar gyfer $\sin \widehat{XZY}$ yn y ffurf $\frac{m + \sqrt{3}}{n}$, lle mae m, n yn gyfanrifau y mae'n rhaid darganfod eu gwerthoedd. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2011)

3. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r triongl ABC , lle mae $\sin A = \frac{3}{5}$, $\sin B = \frac{5}{13}$, $\sin C = \frac{56}{65}$, $AC = x$ cm a $BC = y$ cm.

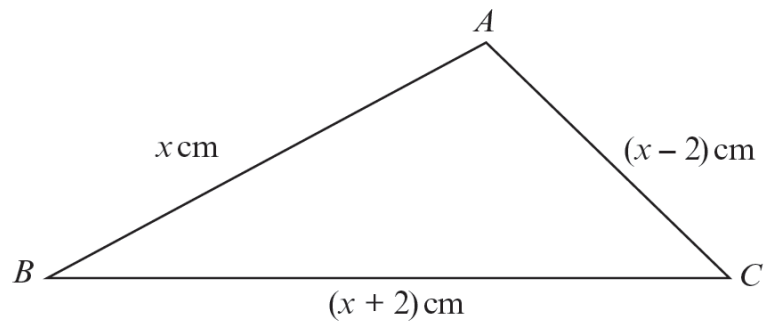


- (a) Dangoswch fod $y = 1.56x$. [2]
- (b) O wybod mai arwynebedd y triongl ABC yw 4.2 cm^2 , darganfyddwch werth x a gwerth y . [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2013)

3. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r triongl ABC , lle mae $AB = x$ cm, $AC = (x - 2)$ cm a $BC = (x + 2)$ cm.



(a) Dangoswch fod $\cos \widehat{BAC} = \frac{x-8}{2x-4}$. [3]

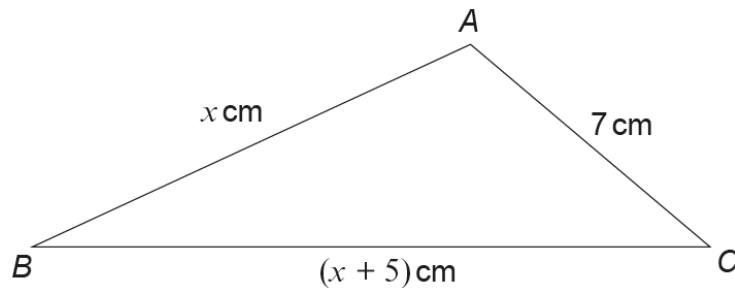
(b) O wybod bod $\widehat{BAC} = 120^\circ$,

- (i) darganfyddwch werth x ,
 (ii) darganfyddwch faint \widehat{ABC} . [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2016)

3. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o driongl ABC gydag $AB = x$ cm, $BC = (x + 5)$ cm, $AC = 7$ cm a $\cos \hat{BAC} = -\frac{3}{5}$.

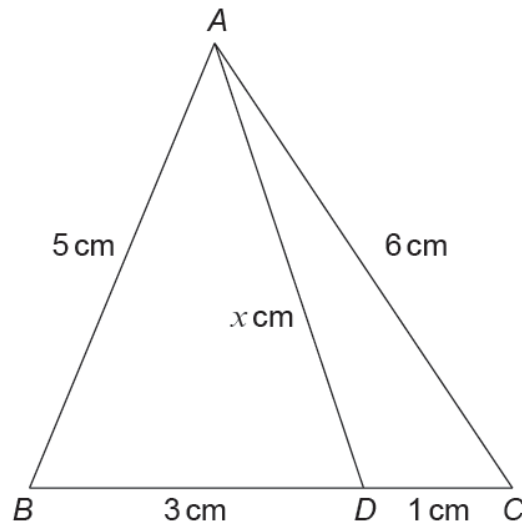


- (a) Ysgrifennwch hafaliad sy'n cael ei fodloni gan x . Trwy hyn dangoswch fod $x = 15$. [3]
- (b) Darganfyddwch union werth arwynebedd triongl ABC . [3]
- (c) Mae'r pwynt D ar BC fel bod AD yn berpendicwlar i BC . Darganfyddwch hyd AD . [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2014)

5. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r triogl ABC gydag $AB = 5\text{ cm}$ ac $AC = 6\text{ cm}$. Mae'r pwynt D ar BC fel bod $BD = 3\text{ cm}$, $DC = 1\text{ cm}$ ac $AD = x\text{ cm}$.



- (a) (i) Trwy gymhwyso'r rheol cos ym mhob un o'r trioglau ADB ac ADC , dangoswch fod $\cos \hat{ADB} = \frac{x^2 - 16}{6x}$ a darganfyddwch fynegiad tebyg ar gyfer $\cos \hat{ADC}$.
- (ii) Gan nodi bod \hat{ADB} ac \hat{ADC} yn onglau ar linell syth, defnyddiwch y mynegiadau sydd wedi'u holrhain (*derived*) yn rhan (i) i ysgrifennu hafaliad y mae x yn ei fodloni. Trwy hyn, dangoswch fod $x = 5.5$. [6]
- (b) Darganfyddwch arwynebedd y triogl ADB . Rhowch eich ateb yn gywir i ddau le degol. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned I Haf 2018)

0	9
---	---

Mae'r triongl ABC fel bod $AC = 16$ cm, $AB = 25$ cm ac $\widehat{ABC} = 32^\circ$. Darganfyddwch ddau werth posibl ar gyfer arwynebedd y triongl ABC .

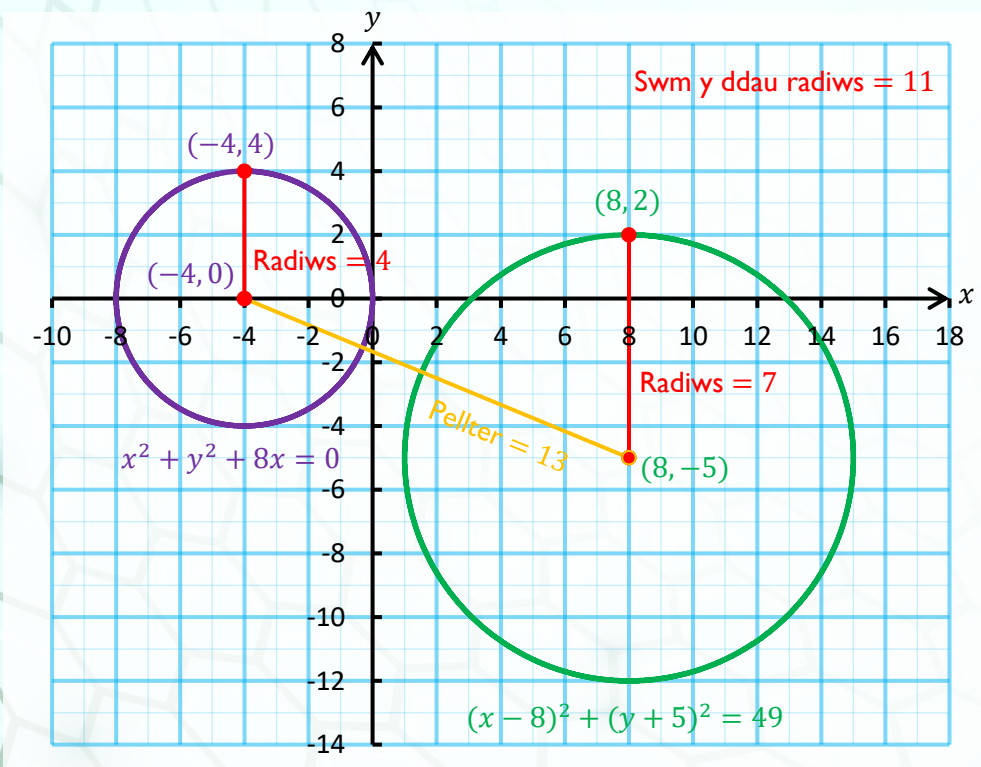
[5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



Hafaliad

Cylch



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Deall a defnyddio'r ddwy ffurf ar gyfer hafaliad cylch.
Darganfod yr hafaliad ar gyfer tangiad penodol i gylch.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Theorem Pythagoras; trigonometreg.
Lefel A Uned I: Geometreg cyfesurynnau Cartesaidd; cwblhau'r sgwâr.

I ble mae'n arwain?

Uned I Mathemateg Bellach: Trawsffurfiau cymhlyg.
Cymwysiaidau: Peirianeg fecanyddol; seryddiaeth; pensaernïaeth.

Theori

Hafaliad Cylch

Mae dwy ffordd o ysgrifennu [hafaliad cylch](#).

(1) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Hafaliad cylch efo radiws r a chanol (a, b) .
Mae hwn yn achos arbennig o Theorem Pythagoras.

(2) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
Hafaliad cyffredinol cylch efo canol $(-g, -f)$ a radiws $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

Mae'n bosib dangos bod y ddwy ffordd yn gyfwerth:

Cychwyn efo dull (2):
 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

Cwblhau'r sgwâr:
 $(x + g)^2 - g^2 + (y + f)^2 - f^2 + c = 0$

Ail-drefnu:
 $(x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$

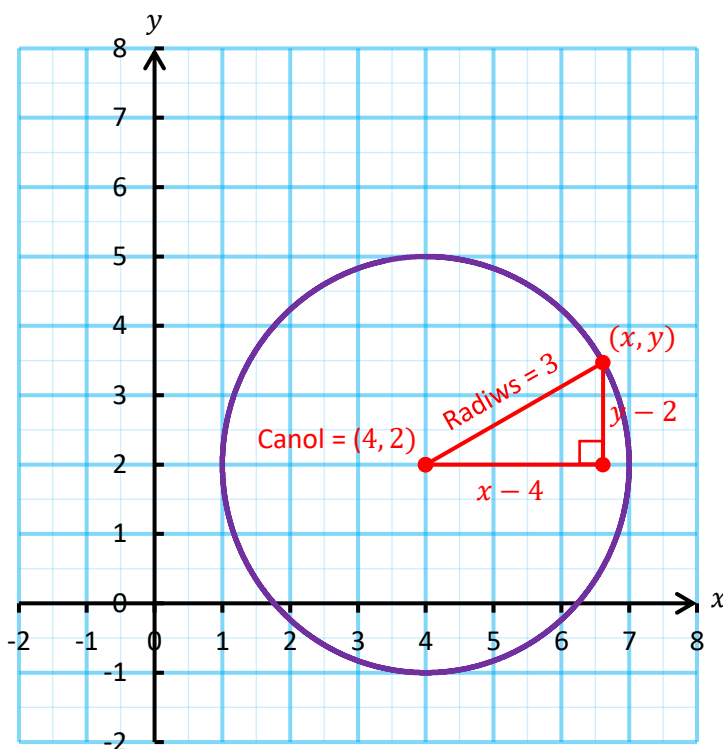
Yn cymharu efo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$:

$$\begin{aligned} g &= -a \\ -a &= g \\ a &= -g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= -b \\ -b &= f \\ b &= -f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^2 + f^2 - c &= r^2 \\ r^2 &= g^2 + f^2 - c \\ r &= \sqrt{g^2 + f^2 - c} \end{aligned}$$

(cymryd y gwreiddyn positif gan mai radiws sydd yma)



Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl canlynol i ddarganfod canol a radiws y cylchoedd.

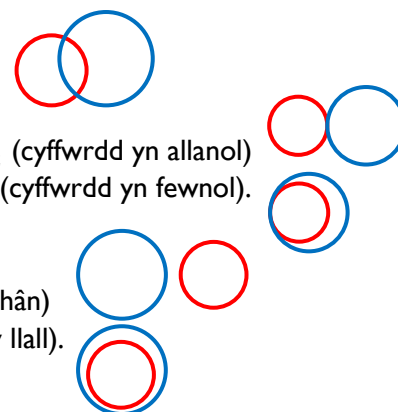
Cylch	Canol	Radiws
$(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 25$		
$(x + 8)^2 + (y - 4)^2 = 20$		
$(x - 2)^2 + (y + 11)^2 = 49$		
$x^2 + y^2 = 144$		
$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$		
$x^2 + y^2 + 14x - 4y - 5 = 0$		
$2x^2 + 2y^2 - 24x + 16y + 6 = 0$		
$x^2 + y^2 + 7y + 3.25 = 0$		

Cylchoedd yn croestorri

Ystyriwch ddau gylch C_1 ag C_2 , efo radiwsau r_1 ag r_2 , yn ôl eu trefn.

Gadewch i p gynrychioli'r pellter rhwng canol C_1 a chanol C_2 .

- Os yw C_1 ag C_2 yn croestorri mewn dau bwynt gwahanol, yna $p < r_1 + r_2$.
- Os yw C_1 ag C_2 yn cyfarfod mewn un pwynt yn unig, yna naill ai $p = r_1 + r_2$ (cyffwrdd yn allanol) neu $p = |r_1 - r_2|$ (cyffwrdd yn fewnol). ($|r_1 - r_2|$ yw'r gwahaniaeth positif rhwng y ddau radiws.)
- Os nad yw C_1 ag C_2 yn croestorri, yna naill ai $p > r_1 + r_2$ (cylchoedd ar wahân) neu $p < |r_1 - r_2|$ (un cylch o fewn y llall).

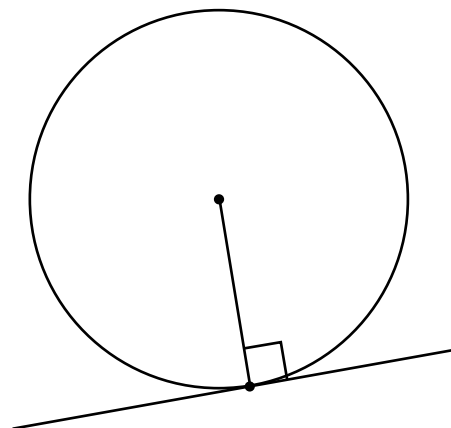
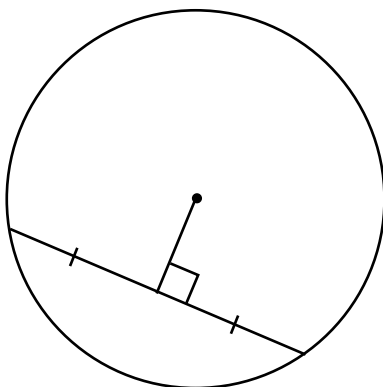
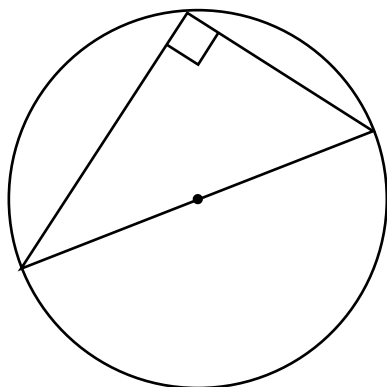


Gallwch archwilio'r perthnasau hyn [ar wefan GeoGebra](#).

Theoremau Cylchoedd

Gall y [theoremau cylchoedd canlynol](#) (o waith TGAU) ymddangos yn y gwaith ar hafaliad y cylch.

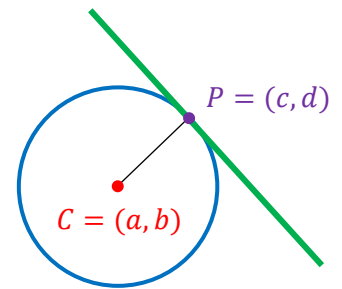
- Mae'r ongl mewn hanner cylch yn ongl sgwâr.
- Mae'r perpendicwlar o'r canol i gord yn haneru'r cord.
- Mae radiws cylch ar bwynt penodol ar ei gylchyn yn berpendicwlar i'r tangiad i'r cylch ar y pwynt hwnnw.



Hafaliad y tangiad

Gadewch i $P = (c, d)$ fod yn bwynt ar gylch efo canol $C = (a, b)$.

- Graddiant y radiws PC yw $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b - d}{a - c}$.
- Mae radiws a thangiad yn cyfarfod ar ongl sgwâr, felly graddiant y tangiad i'r cylch yn y pwynt P yw $-\frac{a - c}{b - d}$.
- **Hafaliad y tangiad** i'r cylch yn y pwynt P yw $y - y_1 = m(x - x_1)$
 $y - d = -\frac{a - c}{b - d}(x - c)$.

**Enghraifft (C2 Haf 2005)**

Rhoddir y cylch C gan yr hafaliad

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0.$$

(a) Darganfyddwch radiws C a chyfesurynnau canol C .

(b) (i) Dangoswch fod $P(1, -6)$ ar C .

(ii) Darganfyddwch hafaliad y tangiad i C yn P .

Ateb: (a) **Dull 1:** Cwblhau'r sgwâr.

$$(x - 4)^2 - 4^2 + (y + 2)^2 - 2^2 - 5 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 2)^2 - 4 - 5 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4 + 5 + 16$$

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

Yn cymharu efo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,

$$\begin{aligned} \text{Radiws } C &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cyfesurynnau canol } C &= (a, b) \\ &= (4, -2) \end{aligned}$$

Dull 2: Cymharu efo $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

$$2g = -8, \quad 2f = 4, \quad c = -5$$

$$g = -4 \quad f = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Radiws } C &= \sqrt{g^2 + f^2 - c} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + 2^2 - (-5)} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 5} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cyfesurynnau canol } C &= (-g, -f) \\ &= (4, -2) \end{aligned}$$

(b) (i) Yn amnewid $x = 1, y = -6$ i mewn i ochr chwith hafaliad y cylch:

$$\begin{aligned} 1^2 + (-6)^2 - 8(1) + 4(-6) - 5 \\ = 1 + 36 - 8 - 24 - 5 \\ = 0 \end{aligned}$$

Felly mae $(1, -6)$ ar C .

(ii) Graddiant y radiws o $(4, -2)$ i $(1, -6)$:

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{-6 - (-2)}{1 - 4} \\ &= \frac{-4}{-3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Felly graddiant y tangiad yw $-\frac{3}{4}$ (sef negatif y cilydd).

$$\begin{aligned} \text{Hafaliad y tangiad: } & y - y_1 = m(x - x_1) \\ & y - (-6) = -\frac{3}{4}(x - 1) \\ & y + 6 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \\ & y = -\frac{3}{4}x - \frac{21}{4} \end{aligned}$$



Theori



(C2 Gaeaf 2005)

6. Rhoddir y cylchoedd C_1 ac C_2

gan $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

a $x^2 + y^2 - 10x - 5y + 25 = 0$, yn ôl eu trefn.

(a) Ysgrifennwch radiws C_1 a chyfesurynnau canol C_1 . [2]

(b) Darganfyddwch radiws C_2 a chyfesurynnau canol C_2 . [3]

(c) Dangoswch fod C_1 ac C_2 yn cyffwrdd â'i gilydd. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2006)

8. (a) Darganfyddwch ganol a radiws y cylch C a roddir gan

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0. \quad [3]$$

(b) O wybod bod y cylch

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$$

yn cyffwrdd â C yn allanol, darganfyddwch werth a . Rhowch eich ateb yn gywir i ddau le degol. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2006)

9. Mae gan gylch C ganol D a'i hafaliad yw

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0.$$

(a) Darganfyddwch gyfesurynnau D a radiws C . [3]

(b) Tynnir llinell trwy'r pwynt $P(4, 6)$ fel ei bod yn cyffwrdd â'r cylch C yn y pwynt T .

(i) Dangoswch fod $PT = \sqrt{20}$.

(ii) Darganfyddwch hafaliad y cylch â chanol P sy'n mynd trwy'r pwynt T . [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2007)

8. Mae gan y cylch $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 18 = 0$ ganol A a radiws r .

(a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a gwerth r . [3]

(b) Mae'r llinell $y = x + 2$ a'r cylch $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 18 = 0$ yn croestorri yn y pwyntiau B a C . Darganfyddwch gyfesurynnau B a C . [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2008)

8. Mae gan y cylch C ganol A a'i hafaliad yw

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0.$$

- (a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a radiws C . [3]
- (b) Mae gan y pwynt P gyfesurynnau $(5, 1)$ ac mae ar C . Darganfyddwch hafaliad y tangiad i C yn P . [4]
- (c) Hafaliad y llinell L yw $y = x + 3$. Dangoswch nad yw L ac C yn croestorri. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Gaeaf 2010)

8. Mae gan y cylch C ganol A a'i hafaliad yw

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0.$$

(a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a radiws C . [3]

(b) Hafaliad y llinell L yw

$$x - 3y + 4 = 0.$$

Dangoswch fod L yn dangiad i'r cylch C . [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2008)

8. Mae gan y cylch C ganol A a radiws r . Mae'r pwyntiau $P(1, -4)$ a $Q(9, 10)$ ar naill ben a llall diamedr o C .
- (a) (i) Ysgrifennwch gyfesurynnau A .
(ii) Dangoswch fod $r = \sqrt{65}$.
(iii) Ysgrifennwch hafaliad C . [4]
- (b) Gwireddwch fod y pwynt $R(4, 11)$ ar C . [2]
- (c) Darganfyddwch \widehat{QPR} . [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2009)

8. Mae gan y cylch C_1 ganol A a'i hafaliad yw

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0.$$

(a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a radiws C_1 . [3]

(b) Cyfesurynnau'r pwynt P yw $(7, 2)$ ac mae P ar C_1 . Darganfyddwch hafaliad y tangiad i C_1 yn P . [4]

(c) Mae gan y cylch C_2 ganol $B(11, 14)$ a'i radiws yw 8. Mae pwynt Q ar C_1 ac mae pwynt R ar C_2 . Darganfyddwch y gwerth lleiaf posibl ar gyfer hyd y llinell QR . [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2014)

8. (a) Mae gan y cylch C_1 ganol $A(-2, 9)$ a'i radiws yw 5. Mae gan y cylch C_2 ganol $B(10, -7)$ a'i radiws yw 15.

(i) Dangoswch fod C_1 a C_2 yn cyffwrdd â'i gilydd a chyfiawnhewch eich ateb.

(ii) O wybod bod y cylchoedd yn cyffwrdd â'i gilydd yn y pwynt $P(1, 5)$, darganfyddwch hafaliad y tangiad cyffredin yn P . [7]

(b) Mae athrawes Gareth wedi gofyn iddo ymchwilio i briodweddau (*properties*) cylch arall C_3 . Mae Gareth yn honni mai hafaliad y cylch C_3 hwn yw

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 20 = 0.$$

Dangoswch nad yw'n bosibl bod honiad Gareth yn gywir. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2018)

1	8
---	---

 Cyfesurynnau tri phwynt A , B , C yw $(4, 6)$, $(-3, 5)$ a $(5, -1)$ yn ôl eu trefn.

- a) Dangoswch fod \hat{BAC} yn ongl sgwâr. [3]
- b) Mae cylch yn mynd trwy bob un o'r tri phwynt A , B , C . Darganfyddwch hafaliad y cylch. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned I Haf 2019)

0 9

Mae'r pwyntiau $A(-2, 4)$ a $B(6, 10)$ fel bod AB yn ddiamedr cylch.

- a) Dangoswch mai cyfesurynnau canol y cylch yw $(2, 7)$. [1]

- b) Hafaliad y cylch yw $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Darganfyddwch werthoedd a, b, c . [3]

Mae llinell syth, sydd â'r hafaliad $y = x + 6$, yn mynd trwy'r pwynt A ac mae'n torri'r cylch eto yn y pwynt C .

- c) Darganfyddwch gyfesurynnau C . [5]

- ch) Cyfrifwch union arwynebedd y triongl ABC . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2024)

18. (a) Canol cylch C yw $(-3, -1)$ a'r radiws yw $\sqrt{5}$. Dangoswch ein bod ni'n gallu ysgrifennu hafaliad C fel $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$. [2]

- (b) (i) Darganfyddwch hafaliadau'r tangiadau i C sy'n mynd drwy'r tarddbwynt O . [6]

- (ii) Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwyntiau lle mae'r tangiadau'n cyffwrdd â'r cylch. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

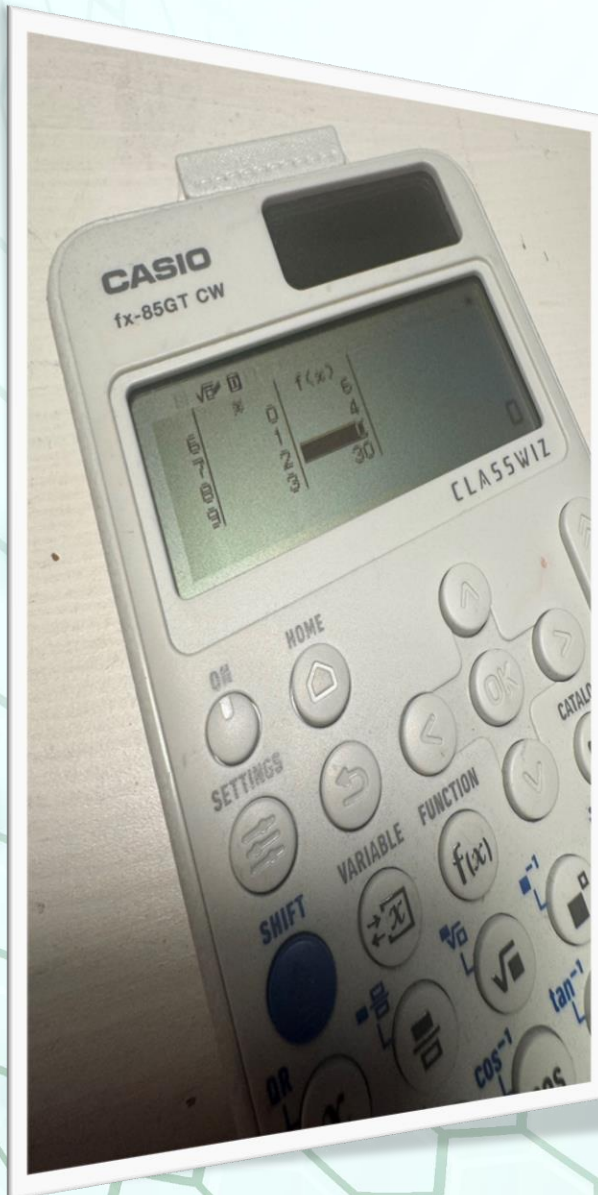


Uned 1, Pecyn 12

12

Theorem y

Ffactor



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Ffactorio a datrys hafaliadau ciwbig trwy rannu allan ffactor hysbys.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Amnewid; datrys hafaliadau cwadratig.

I ble mae'n arwain?

Uned 3: Symleiddio mynegiadau cymarebol.
Cymwysiadau: Cromliniau Bezier i lunio siapiau ar gyfrifiaduron.

Theori

Rhannu Algebraidd

Beth yw $14 \div 5$? Un ffordd o ysgrifennu'r ateb yw $14 \div 5 = 2$ gweddill 4, gan fod $14 = (2 \times 5) + 4$.

Gallwn fynegi symiau rhannu algebraidd mewn ffordd debyg, gyda'r rhannu'n cael ei wneud gan ddefnyddio ffrâm rannu.

Enghraifft 1

$$(5x^3 + 8x^2 - 6x + 3) \div (x - 2)$$

$$\begin{array}{r}
 \overline{5x^2 + 18x + 30} \\
 x-2 \overline{) 5x^3 + 8x^2 - 6x + 3} \\
 \underline{5x^3 - 10x^2} \\
 18x^2 - 6x + 3 \\
 \underline{18x^2 - 36x} \\
 30x + 3 \\
 \underline{30x - 60} \\
 63
 \end{array}$$



Eglurhad

Felly $(5x^3 + 8x^2 - 6x + 3) \div (x - 2) = 5x^2 + 18x + 30$ gweddill 63, neu

$$5x^3 + 8x^2 - 6x + 3 = (5x^2 + 18x + 30)(x - 2) + 63$$

Gallwn ddefnyddio **Theorem y Gweddill** i ddarganfod y gweddill yn sydyn.

Pan gaiff polynomial $f(x)$ ei rannu efo mynegiad o'r ffurf $x - a$, ble mae a yn gysonyn, yna'r gweddill yw $f(a)$.

Felly, yn yr enghraifft uchod, y gweddill pan gaiff $f(x) = 5x^3 + 8x^2 - 6x + 3$ ei rannu efo $x - 2$ yw $f(2)$, sef

$$5 \times 2^3 + 8 \times 2^2 - 6 \times 2 + 3 = 63$$

Ymarfer 1

Darganfyddwch y gweddill pan gaiff $4x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ ei rannu efo $x + 3$,

- (a) gan ddefnyddio ffrâm rannu;
 (b) gan ddefnyddio Theorem y Gweddill.

Theorem y Ffactor

- (a) Mae'r polynomial $x - a$ yn ffactor o'r polynomial $f(x)$ os yw $f(a) = 0$.
 (b) Os yw $f(a) = 0$, yna mae'r polynomial $x - a$ yn ffactor o'r polynomial $f(x)$.

Enghraifft 2

- (a) Mae'r polynomial $x + 5$ yn ffactor o'r polynomial $2x^2 - 8x - 10$ gan fod

$$f(-5) = 2(-5)^2 - 8(-5) - 10$$

$$f(-5) = 0$$

- (b) Nid yw'r polynomial $x - 3$ yn ffactor o'r polynomial $2x^3 + 9x^2 - 11x - 30$ gan fod

$$f(3) = 2(3)^3 + 9(3)^2 - 11(3) - 30$$

$$f(3) = 72$$

$$f(3) \neq 0$$

Ymarfer 2

- (a) Ydi'r polynomial $x - 4$ yn ffactor o'r polynomial $3x^2 + 5x - 28$?
 (b) Ydi'r polynomial $x + 2$ yn ffactor o'r polynomial $x^3 + 5x^2 + 6x$?

Datrys Hafaliadau Ciwbig

Er mwyn datrys hafaliad ciwbig megis $2x^3 + 3x^2 - 45x + 54 = 0$,

(a) Defnyddiwch Theorem y Ffactor i ddarganfod un ffactor o'r polynomial.

(Gallwch ddefnyddio'r 'table mode' ar eich cyfrifiannell i helpu efo hyn.)

(b) Rhannwch allan y ffactor gan ddefnyddio ffrâm rannu, er mwyn ysgrifennu'r mynegiad ciwbig fel lluoswm mynegiad cwadratig a mynegiad llinol.

(c) Datrysych yr hafaliad sy'n weddill gan ddefnyddio technegau o'r cwrs TGAU.

Enghraifft 3

Datrysych yr hafaliad ciwbig $2x^3 + 3x^2 - 45x + 54 = 0$.

Ateb: I gychwyn, defnyddiwn y 'table mode' ar gyfrifiannell i amnewid gwerthoedd gwahanol i mewn i $2x^3 + 3x^2 - 45x + 54$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2x^3 + 3x^2 - 45x + 54$	104	154	162	140	100	54	14	-8	0	50	154

Gan fod amnewid $x = 3$ i mewn i'r polynomial yn rhoi ateb 0, mae $x - 3$ yn ffactor o'r polynomial.

Gallwn rannu'r ffactor hwn allan o'r polynomial gan ddefnyddio ffrâm rannu:

$$\begin{array}{r}
 \overline{2x^2 + 9x - 18} \\
 x-3 \overline{) 2x^3 + 3x^2 - 45x + 54} \\
 \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 9x^2 - 45x + 54 \\
 \underline{9x^2 - 27x} \\
 -18x + 54 \\
 \underline{-18x + 54} \\
 0
 \end{array}$$

Felly, mae'n bosib ail-ysgrifennu'r hafaliad gwreiddiol $2x^3 + 3x^2 - 45x + 54 = 0$ fel

$$(x - 3)(2x^2 + 9x - 18) = 0.$$

Gallwn ddefnyddio'r technegau o'r cwrs TGAU i ffactorio'r mynegiad cwadratig $2x^2 + 9x - 18$:

$$\begin{aligned}
 2 \times -18 &= -36 \\
 2x^2 + 12x - 3x - 18 \\
 &= 2x(x + 6) - 3(x + 6) \\
 &= (x + 6)(2x - 3)
 \end{aligned}$$

Mae'n bosib yn awr datrys yr hafaliad gwreiddiol:

$$\begin{aligned}
 (x - 3)(2x^2 + 9x - 18) &= 0 \\
 (x - 3)(x + 6)(2x - 3) &= 0
 \end{aligned}$$

Naill ai $x - 3 = 0$ neu $x + 6 = 0$ neu $2x - 3 = 0$

$$\begin{aligned}
 x = 3 & & x = -6 & & 2x = 3 \\
 & & & & x = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$



(Uned I Haf 2019)

0	3
---	---

Defnyddiwch **ddull algebraidd** i ddatrys yr hafaliad $12x^3 - 29x^2 + 7x + 6 = 0$.
Dangoswch eich holl waith cyfrifo.

[6]

Lined writing area for the student's solution.

(Uned I Haf 2023)

- | | |
|---|---|
| 0 | 4 |
|---|---|
- a) Darganfyddwch y gweddill pan mae'r polynomial $3x^3 + 2x^2 + x - 1$ yn cael ei rannu ag $(x - 3)$. [3]
- b) Mae'r polynomial $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 6$ yn rhanadwy (*divisible*) ag $(x + 2)$, lle mae a yn gysonyn real.
- Darganfyddwch werth a . [3]
 - Gan ddangos eich holl waith cyfrifo, datrysych yr hafaliad $f(x) = 0$. [4]

(CI Gaeaf 2007)

3. Pan gaiff $9x^3 + 6x^2 - 5x + p$ ei rannu â $x - 1$, y gweddill yw 8.

(a) Dangoswch fod $p = -2$. [2]

(b) Ffactoriwch $9x^3 + 6x^2 - 5x - 2$. [5]

(CI Gaeaf 2009)

7. (a) Darganfyddwch y gweddill pan gaiff $x^3 - 17$ ei rannu â $x - 3$. [2]

(b) Datryswech yr hafaliad $6x^3 - 7x^2 - 14x + 8 = 0$. [6]

(CI Gaeaf 2010)

8. Mae'r polynomial $f(x)$ wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 + 4x - 5.$$

(a) (i) Enrhifwch $f(-2)$.

(ii) **Gan ddefnyddio eich ateb i ran (i)**, ysgrifennwch **un** ffaith y gallwch ei diddwytho am $f(x)$. [2]

(b) Datryswch yr hafaliad $f(x) = 0$. [6]

A series of horizontal dotted lines provided for writing the answer to question 8.

(CI Haf 2017)

7. (a) O wybod bod $x - 2$ yn ffactor o $kx^3 + 2x^2 - 41x + 10$, ysgrifennwch hafaliad mae k yn ei fodloni. Trwy hyn dangoswch fod $k = 8$. [2]
- (b) Ffactoriwch $8x^3 + 2x^2 - 41x + 10$. [3]
- (c) Darganfyddwch y gweddill pan mae $8x^3 + 2x^2 - 41x + 10$ yn cael ei rannu â $2x + 1$. [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2010)

8. (a) O wybod bod $x + 2$ yn ffactor o $12x^3 + kx^2 - 13x - 6$, ysgrifennwch hafaliad y mae k yn ei fodloni. Trwy hyn, dangoswch fod $k = 19$. [2]
- (b) Ffactoriwch $12x^3 + 19x^2 - 13x - 6$. [3]
- (c) Darganfyddwch y gweddill pan gaiff $12x^3 + 19x^2 - 13x - 6$ ei rannu â $2x - 1$. [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2011)

8. Mae $x + 2$ yn ffactor o'r polynomial $px^3 - x^2 - 31x + q$. Pan gaiff y polynomial ei rannu â $x - 1$, y gweddill yw -36 .

(a) Dangoswch fod $p = 6$ a $q = -10$. [6]

(b) Ffactoriwch $6x^3 - x^2 - 31x - 10$. [3]

(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

4. Mae'r polynomial ciwbig $f(x)$ wedi'i roi gan $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$, lle mae a, b, c yn gysonion. Mae graff $f(x)$ yn croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau sydd â chyfesurynnau $(-3, 0)$, $(2.5, 0)$ a $(4, 0)$. Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwynt lle mae graff $f(x)$ yn croestorri'r echelin- y . [5]



(CI Haf 2013)

8. Datrysych yr hafaliad $8x^3 - 2x^2 - 7x + 3 = 0$.

[6]

(CI Haf 2018)

8. (a) (i) Darganfyddwch un gwreiddyn real yr hafaliad $8x^3 + 7x^2 - 13x + 10 = 0$.
- (ii) Dangoswch mai'r gwreiddyn rydych chi wedi ei ddarganfod yw unig wreiddyn real yr hafaliad

$$8x^3 + 7x^2 - 13x + 10 = 0. \quad [7]$$

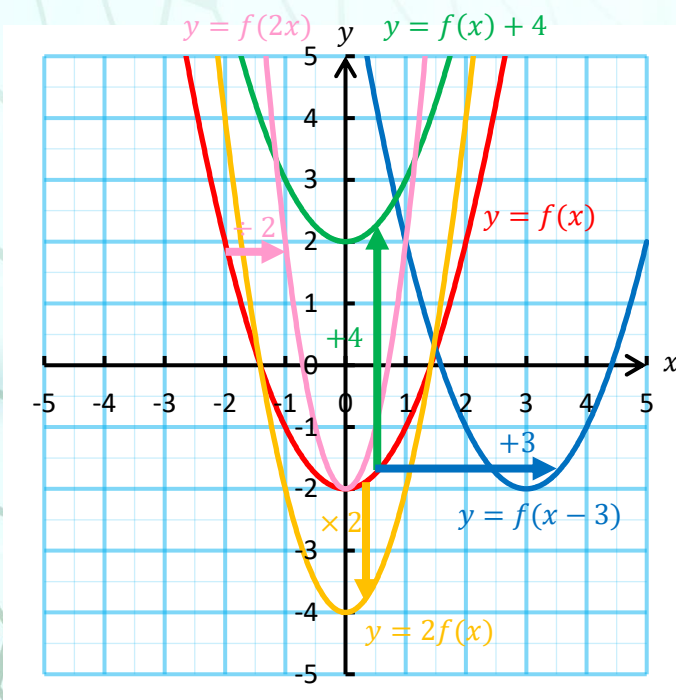
- (b) Pan mae $x^3 - 80$ yn cael ei rannu ag $x - a$, y gweddill yw 45. Darganfyddwch werth y cysonyn a .

[2]



Trawsfurfiadau

Graffiau



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Braslunio cromliniau, llunio anhafaledau a phlotio trawsffurfiadau.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Plotio graffiau, trawsffurfiadau graffiau.

I ble mae'n arwain?

Uned 3: Cyfuno trawsffurfiadau graffiau.

Cymwysiadau: Trawsnewid unedau (e.e. tymheredd mewn Celsius, Fahrenheit a Kelvin); mudiant harmonig syml.

Theori

Braslunio Cromliniau

Wrth lunio braslun ar gyfer graff o ffwythiant, dylech ddangos nodweddion allweddol y ffwythiant:

- Y siâp cyffredinol, yn cynnwys unrhyw gymesuredd.
- Y rhyngdoriadau x ag y .
- Unrhyw asymptotau (llinellau syth sydd ddim yn croestorri'r ffwythiant).

Gallwch ddefnyddio'r 'table mode' ar gyfrifiannell gwyddonol; neu gyfrifiannell graffigol, i'ch helpu braslunio'r graff.

- Efallai bydd ffactorio'r ffwythiant yn eich helpu darganfod y rhyngdoriadau.
- Bydd yn ddefnyddiol cofio siâp ffwythiannau cyffredin.
- Gall datrysiadau pâr o hafaliadau cydamserol gael eu dangos fel croestoriadau'r graffiau.

Ffwythiannau Cyffredin

$$y = x^2$$

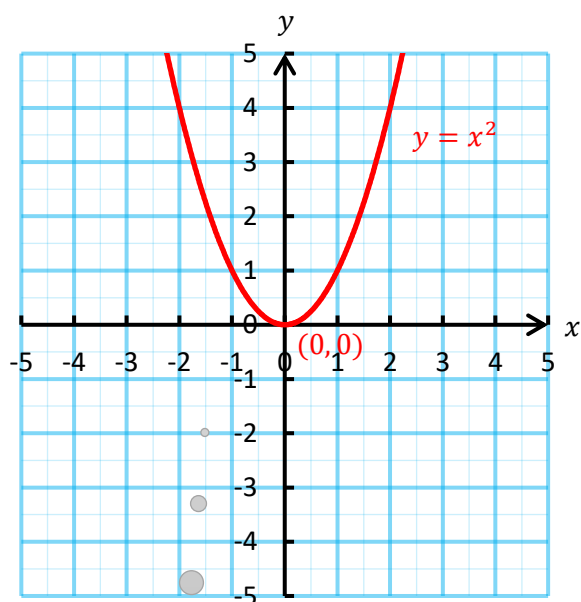
- Ffwythiant cwadratig.
- Siâp U.
- Yn gymesur o amgylch yr echelin- y .

Mae'n bosib trawsffurfio'r ffwythiant $y = x^2$ i roi unrhyw ffwythiant cwadratig arall, o'r ffurf $y = ax^2 + bx + c$.

- Os yw $a > 0$, byddai'r graff efo siâp U.
- Os yw $a < 0$, byddai'r graff efo siâp n.
- Mae'r graff yn gymesur o amgylch y llinell $x = -\frac{b}{2a}$.

Trwy gwblhau'r sgwâr, mae'n bosib ysgrifennu'r hafaliad cwadratig cyffredinol $y = ax^2 + bx + c$ fel $y = a(x + p)^2 + q$.

- Y pwynt arhosol (minimwm neu macsimwm) yw $(-p, q)$.
- Mae'r graff yn gymesur o amgylch y llinell $x = -p$.



Mae graff $y = x^4$ efo siâp tebyg.

$$y = x^3$$

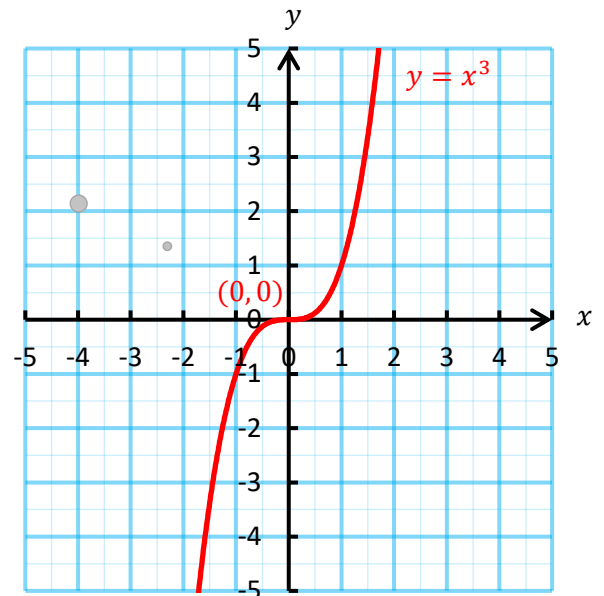
- Ffwythiant ciwbig.
- Siâp S.

Mae graff $y = x^5$
efo siâp tebyg.

Mae ffwythiant ciwbig cyffredinol o'r ffurf

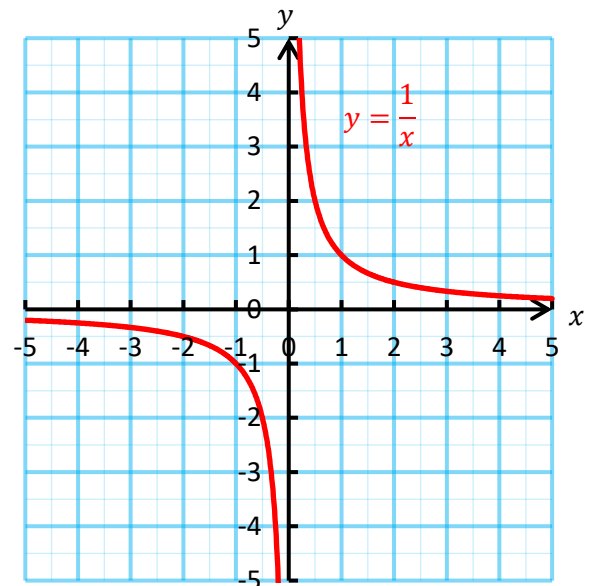
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

- Bydd gan y graff un pwynt ffurfdro, neu un pwynt minimwm ag un pwynt macsimwm.



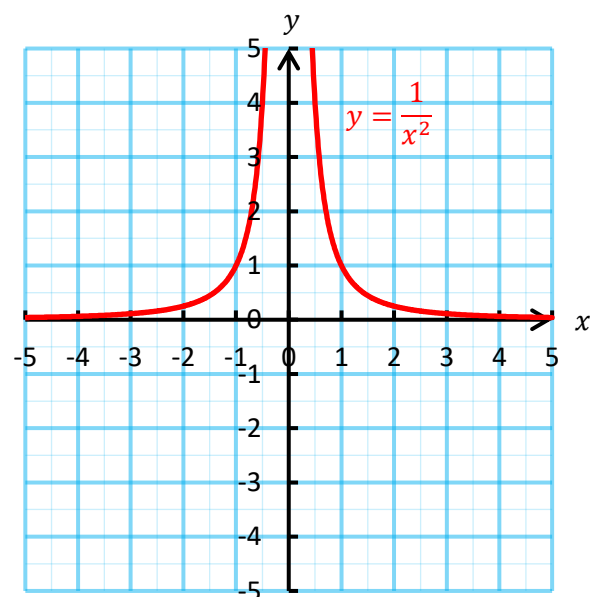
$$y = \frac{1}{x}$$

- Ffwythiant cilyddol.
- Heb ei ddiffinio ar gyfer $x = 0$.
- Mae'r echelinau x ag y yn asymptotau.



$$y = \frac{1}{x^2}$$

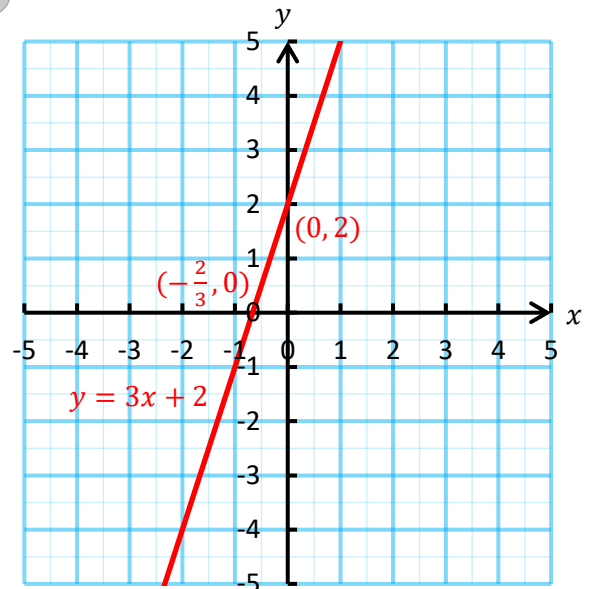
- Ffwythiant cilyddol.
- Heb ei ddiffinio ar gyfer $x = 0$.
- Mae'r echelinau x ag y yn asymptotau.



I uned i'r dde, m
uned i fyny/lawr.

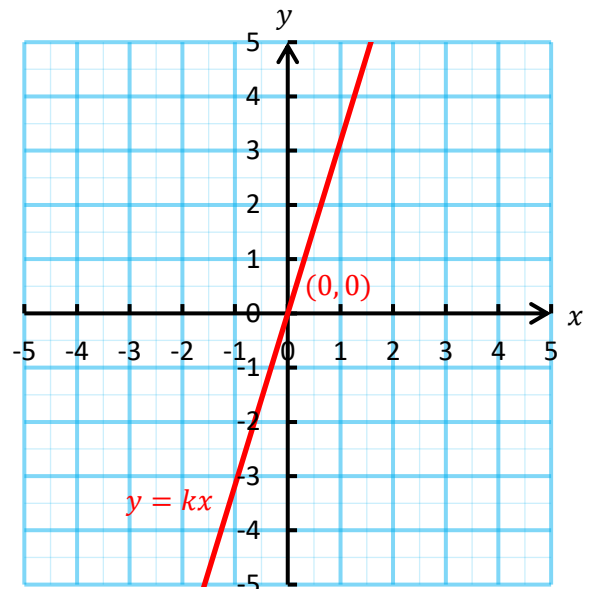
$y = mx + c$

- Ffwythiant llinol.
- Graddiant y llinell yw m .
- Rhyngdoriad- y y llinell yw $(0, c)$.



$y \propto x$
 $y = kx$

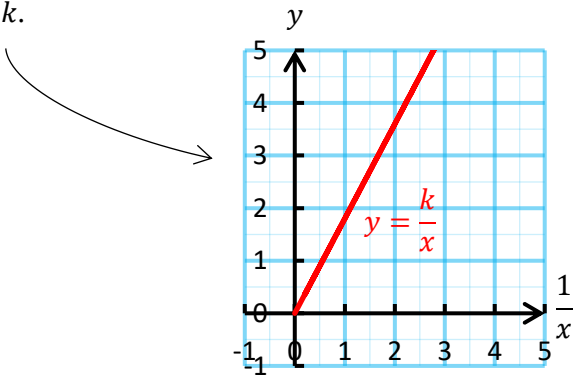
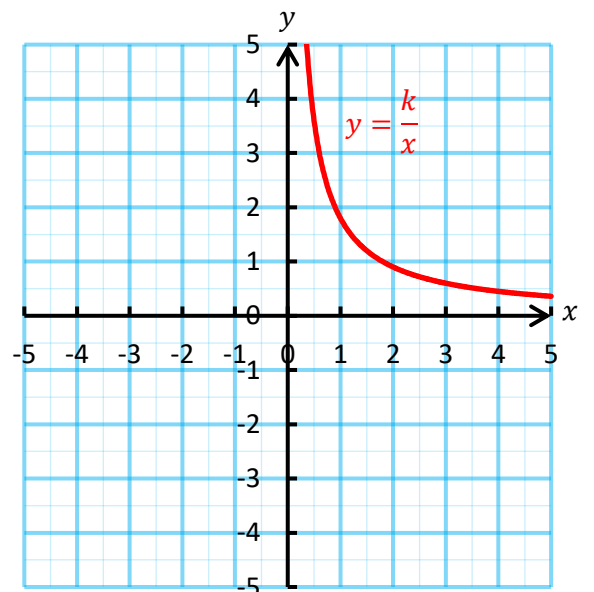
- Ffwythiant llinol (cyfrannedd union).
- Graddiant y llinell yw k .
- Rhyngdoriad- y y llinell yw $(0, 0)$.



$y \propto \frac{1}{x}$
 $y = \frac{k}{x}$

- Ffwythiant cilyddol (cyfrannedd gwrthdro).
- Mae'r echelinau x ag y yn asymptotau.

Trwy blotio y yn erbyn $\frac{1}{x}$, cawn ffwythiant llinol sydd efo graddiant k .

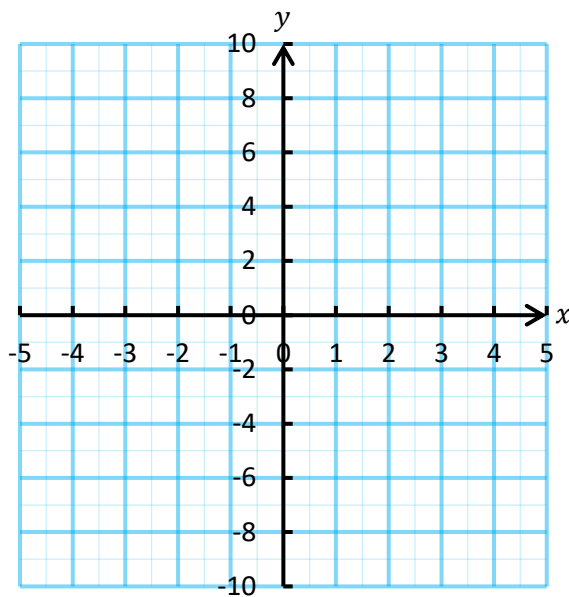
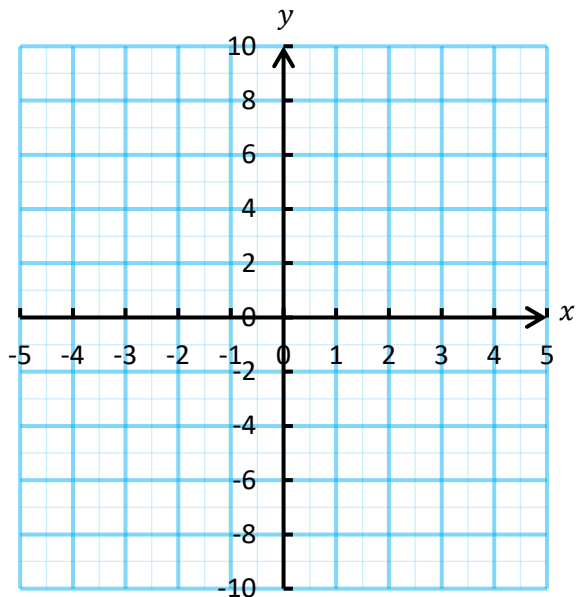


Ymarfer 1

Plotiwch y graffiau canlynol.

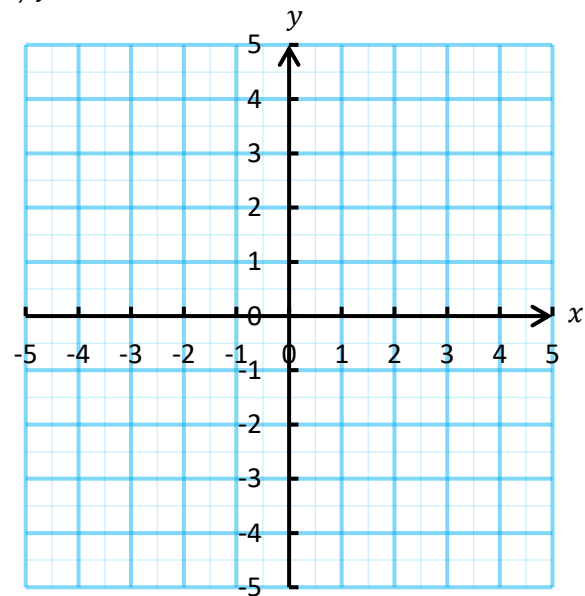
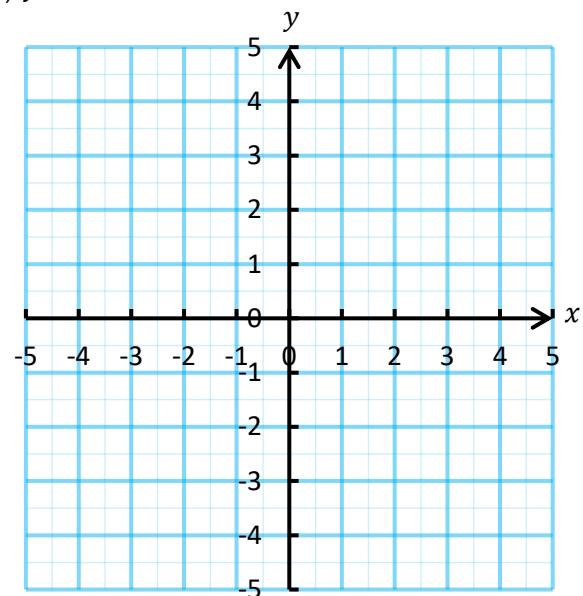
(a) $y = (x - 2)^2 - 3$

(b) $y = \frac{2}{x} + 4$



(c) $y = 3x - 4$

(ch) $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$



Plotio Anhafaleddau

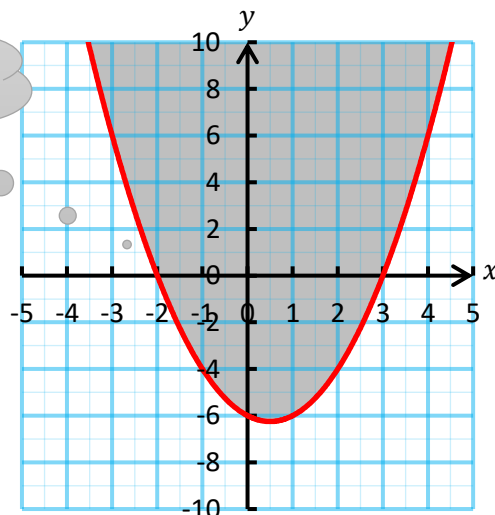
I blotio anhafaledd fel $y \geq x^2 - x - 6$,

- Plotiwch yr hafaliad $y = x^2 - x - 6$.
- Dewiswch bwynt sydd ddim yn gorwedd ar y gromlin (fel $(0, 0)$ yn achos $y = x^2 - x - 6$). Annewidiwch y gwerthoedd i mewn i'r anhafaledd, i weld os yw'r anhafaledd yn wir (angen lliwio'r pwynt) ai peidio.

Yn amnewid $x = 0, y = 0$: $0 \geq 0^2 - 0 - 6$
 $0 \geq -6$

Mae hyn yn wir felly mae angen lliwio'r rhanbarth sy'n cynnwys y pwynt $(0, 0)$.

\leq, \geq : Llinell solet
 $<, >$: Llinell doredig



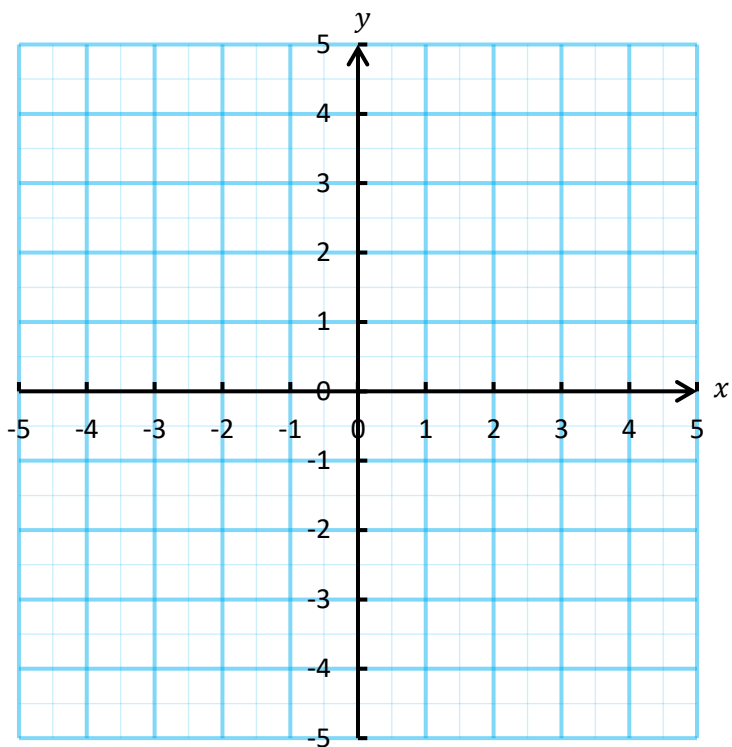
Ymarfer 2

(a) Plotiwch $y = 4 - 2(x - 1)^2$.

(b) Defnyddiwch y graff o ran (a) i ddatrys yr hafaliad $4 - 2(x - 1)^2 = -4$.

(c) Lliwiwch y rhanbarth sy'n bodloni'r anhafaleddau canlynol.

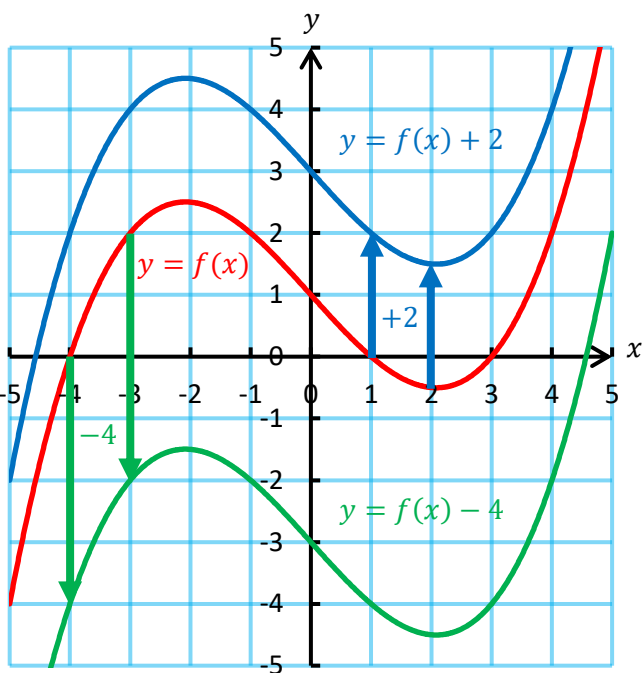
$$\begin{aligned} y &\leq 4 - 2(x - 1)^2 \\ y &\geq -4 \\ y &< 1 \end{aligned}$$



Trawsffurfiadau Graffiau

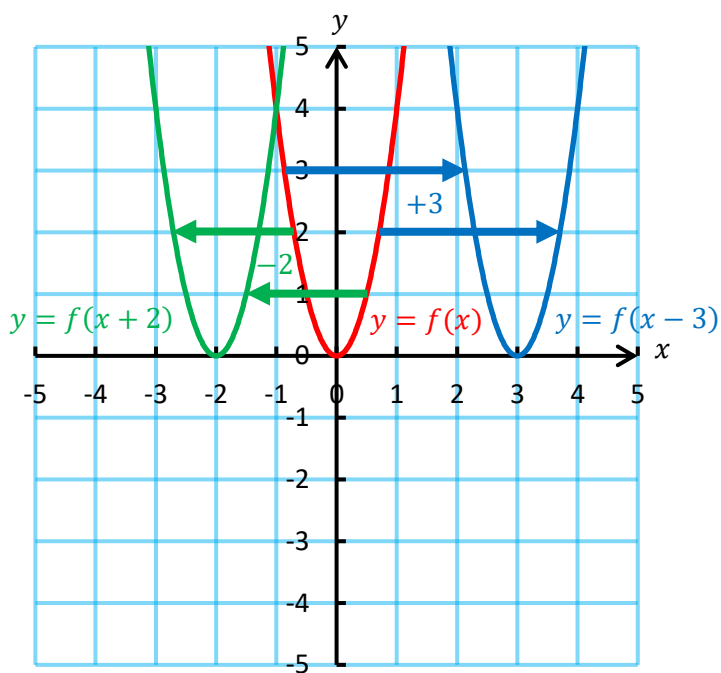
Gallwn drawsffurfio graff y ffwythiant $y = f(x)$ gan ddefnyddio'r technegau canlynol.

$y = f(x) + a$



Mae'r trawsffurfiad $y = f(x) + a$ yn symud y graff a uned i fyny (os yw a yn bositif) neu a uned i lawr (os yw a yn negatiff).

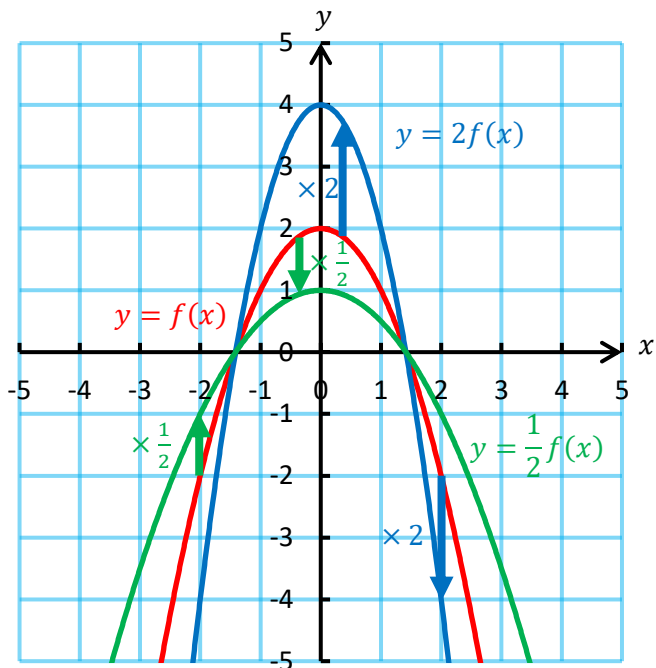
$y = f(x + a)$



Mae'r trawsffurfiad $y = f(x + a)$ yn symud y graff a uned i'r chwith (os yw a yn bositif) neu a uned i'r dde (os yw a yn negatiff).



$y = af(x)$

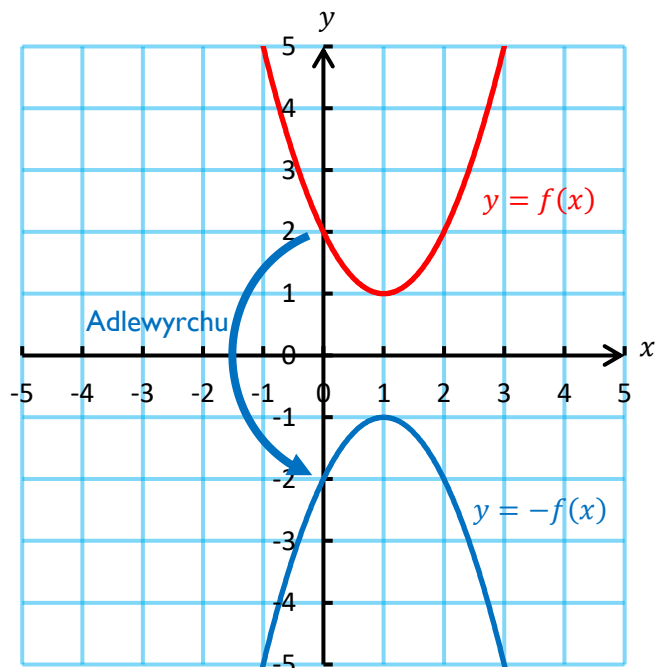


Mae'r trawsffurfiad $y = af(x)$ yn ymestyn y graff yng nghyfeiriad yr echelin-y (os yw $a > 1$) neu yn cywasgu y graff yng nghyfeiriad yr echelin-y (os yw $0 < a < 1$).

Fel canllaw cyffredinol, mae angen **dilyn** beth sy'n digwydd **y tu allan** i gromfach, a **dadwneud** unrhyw beth sy'n digwydd **y tu mewn** i gromfach. Felly, er enghraifft, rydym yn dilyn $y = f(x) + 3$ ac yn symud y graff 3 uned i fyny; ond rydym yn dadwneud $y = f(x + 3)$ gan symud y graff 3 uned i'r chwith.

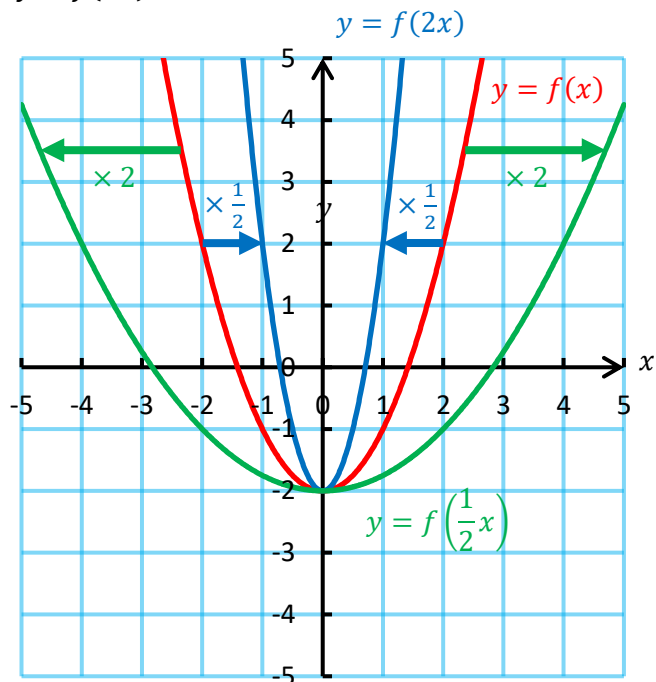
Achosion arbennig

$y = -f(x)$



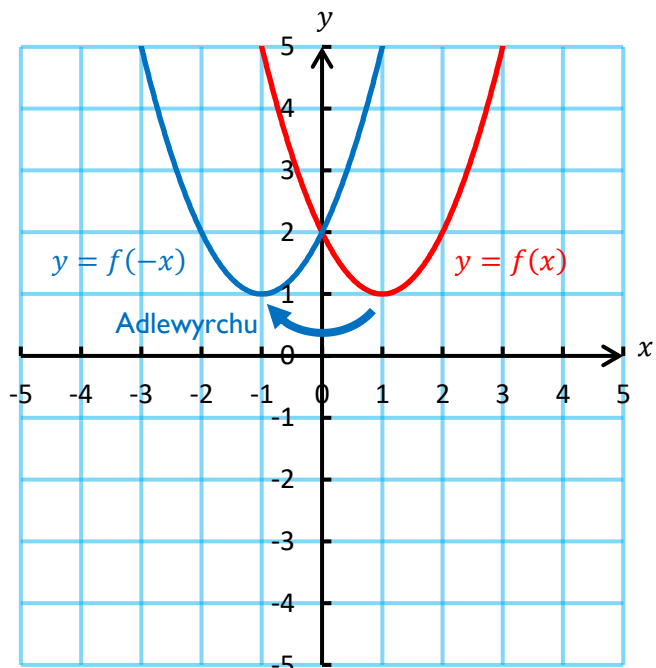
Mae'r trawsffurfiad $y = -f(x)$ yn adlewyrchu graff $y = f(x)$ yn yr echelin-x.

$y = f(ax)$



Mae'r trawsffurfiad $y = f(ax)$ yn cywasgu y graff yng nghyfeiriad yr echelin-x (os yw $a > 1$) neu yn ymestyn y graff yng nghyfeiriad yr echelin-x (os yw $0 < a < 1$).

$y = f(-x)$

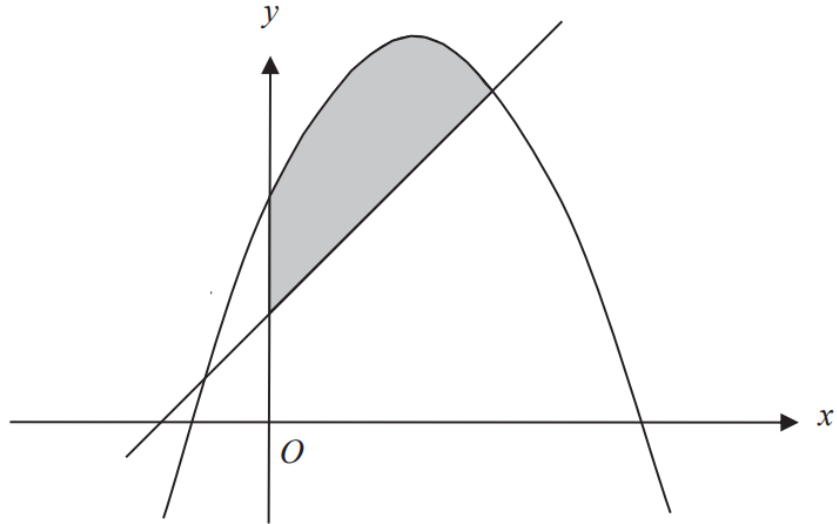


Mae'r trawsffurfiad $y = f(-x)$ yn adlewyrchu graff $y = f(x)$ yn yr echelin-y.

Y 10 Uchaf

(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

11.



Mae'r diagram yn dangos braslun o gromlin $y = 6 + 4x - x^2$ a'r llinell $y = x + 2$.
Cyfesurynnau pwynt P yw (a, b) . Ysgrifennwch y tri anhafaledd sy'n cynnwys a a b ,
fel bod pwynt P wedi'i amgáu'n gyfan gwbl o fewn yr ardal sydd wedi'i thywyllu
uchod, ac os, a dim ond os, yw'r tri anhafaledd wedi'u bodloni. [3]

(Uned I Haf 2022)

0	5
---	---

Hafaliad y gromlin C_1 yw $y = -x^2 + 2x + 3$ a hafaliad y gromlin C_2 yw $y = x^2 - x - 6$. Mae'r ddwy gromlin yn croestorri yn y pwyntiau A a B .

- a) Darganfyddwch gyfesurynnau A a B . [4]
- b) Ar yr un set o echelinau, brasluniwch graffiau C_1 ac C_2 . Labelwch yn glir y pwyntiau lle mae'r ddwy gromlin yn croestorri. [3]
- c) Yn y diagram rydych chi wedi ei luniadu yn rhan (b), tywyllwch y rhanbarth sy'n bodloni'r anhafaleddau canlynol: [2]

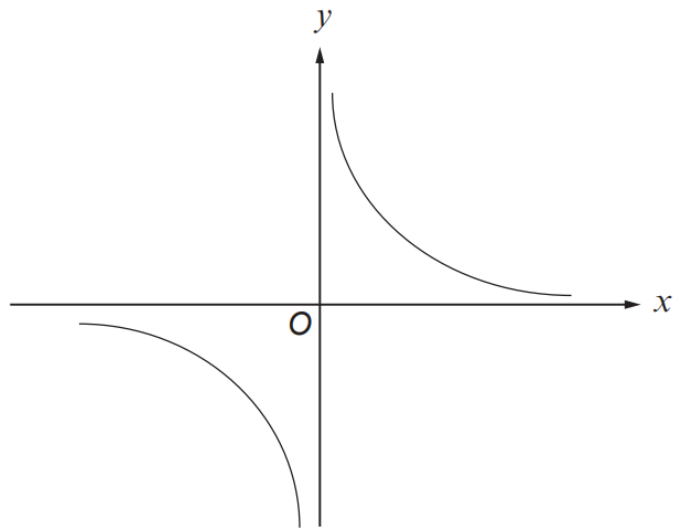
$$x > 0,$$

$$y < -x^2 + 2x + 3,$$

$$y > x^2 - x - 6.$$

(Uned I Haf 2018)

0	5
---	---

 Mae'r diagram isod yn dangos braslun o $y = f(x)$.

- a) Brasluniwch graff $y = 4 + f(x)$, gan ddangos yn glir unrhyw asymptotau. [2]
- b) Brasluniwch graff $y = f(x - 3)$, gan ddangos yn glir unrhyw asymptotau. [2]

(Uned I Haf 2023)

1	1
---	---

 Mae'r ffwythiant f wedi'i ddiffinio gan $f(x) = \frac{8}{x^2}$.

a) Brasluniwch graff $y = f(x)$. [2]

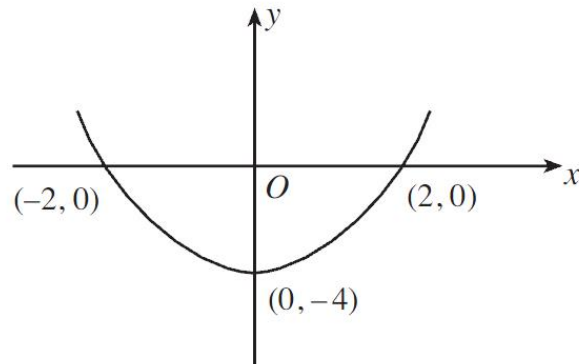
b) Ar set wahanol o echelinau, brasluniwch graff $y = f(x-2)$. Dangoswch yr asymptot fertigol a'r pwynt lle mae'r gromlin yn croesi'r echelin- y . [3]

c) Brasluniwch graffiau $y = \frac{8}{x}$ ac $y = \frac{8}{(x-2)^2}$ ar yr un set o echelinau.

Drwy hyn, nodwch nifer y gwreiddiau sydd gan yr hafaliad $\frac{8}{(x-2)^2} = \frac{8}{x}$. [2]

(CI Haf 2006)

9.



Mae'r diagram yn dangos graff $y = f(x)$. Mae'r gromlin yn mynd trwy'r pwyntiau $(2, 0)$ a $(-2, 0)$, ac mae ganddi bwynt minimwm yn $(0, -4)$.

Ar ddiagramau gwahanol, brasluniwch graffiau

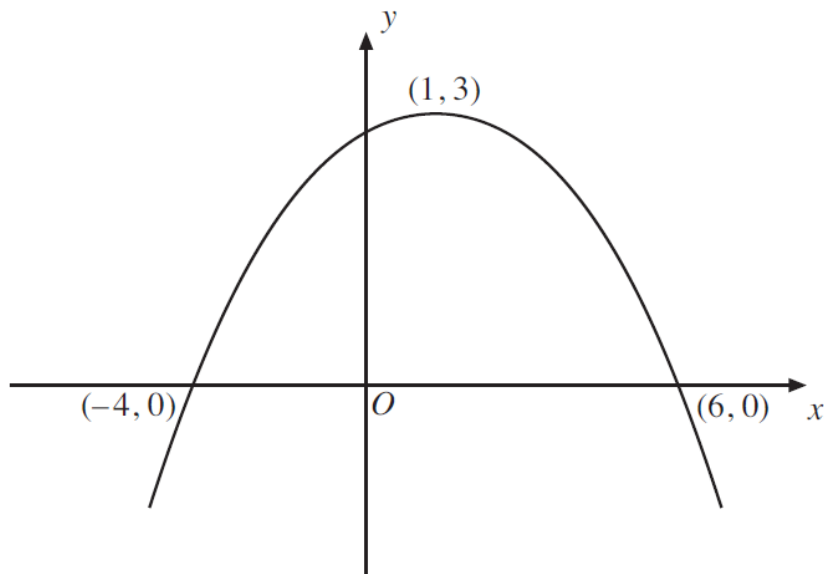
(a) $y = f(x) + 4$, [2]

(b) $y = f(x + 2)$, [3]

gan nodi cyfesurynnau'r croestorfannau â'r echelin- x a chyfesurynnau'r pwyntiau arhosol.

(CI Haf 2010)

9. Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r pwyntiau $(-4, 0)$ a $(6, 0)$ ac mae ganddo bwynt maccsimwm (uchafbwynt) yn $(1, 3)$.



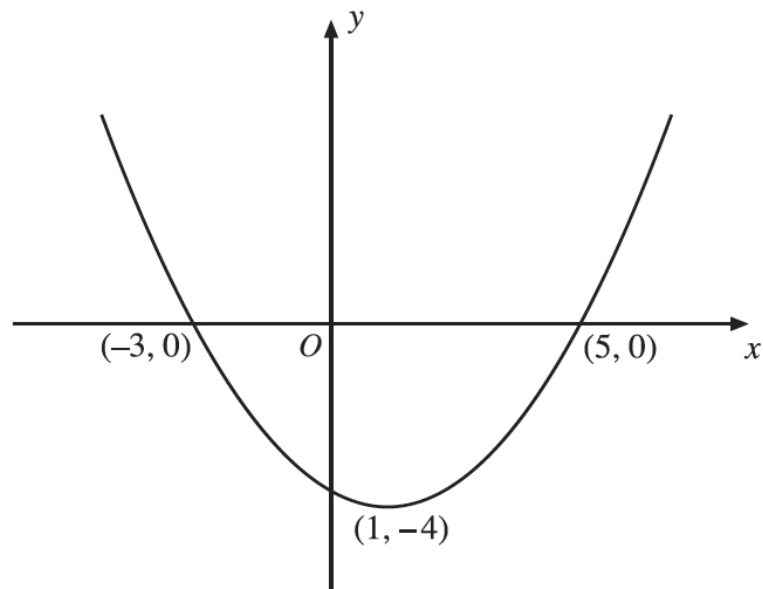
Brasluniwch y graffiau canlynol, gan ddefnyddio set wahanol o echelinau ar gyfer pob graff. Ym mhob achos, dylech nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau'r graff â'r echelin- x .

(a) $y = 2f(x)$ [3]

(b) $y = f(-x)$ [3]

(CI Gaeaf 2011)

9. Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r pwyntiau $(-3, 0)$ a $(5, 0)$ ac mae ganddo bwynt minimwm (isafbwynt) yn $(1, -4)$.



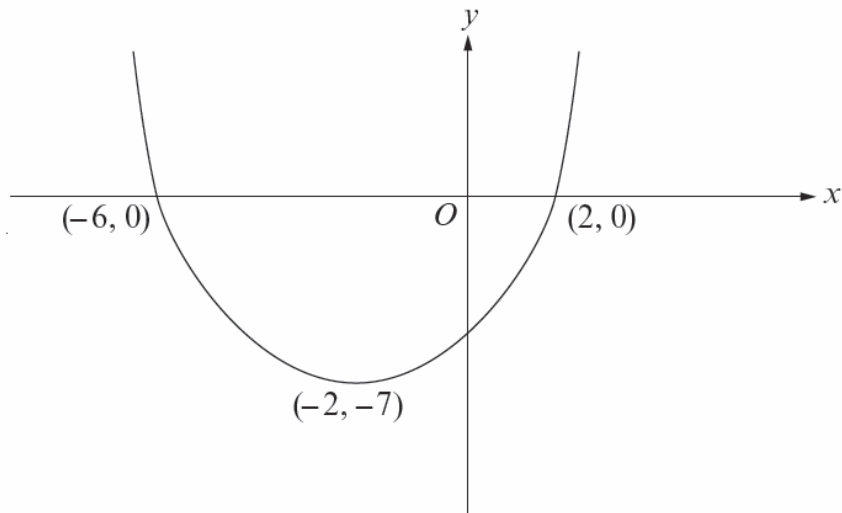
Brasluniwch y graffiau canlynol, gan ddefnyddio gwahanol set o echelinau ar gyfer pob graff. Ym mhob achos, dylech nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau'r graff â'r echelin- x .

(a) $y = f(x + 3)$, [3]

(b) $y = -f(x)$. [3]

(CI Haf 2012)

9. Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r pwyntiau $(-6, 0)$ a $(2, 0)$ ac mae ganddo bwynt minimwm (isafbwynt) yn $(-2, -7)$.



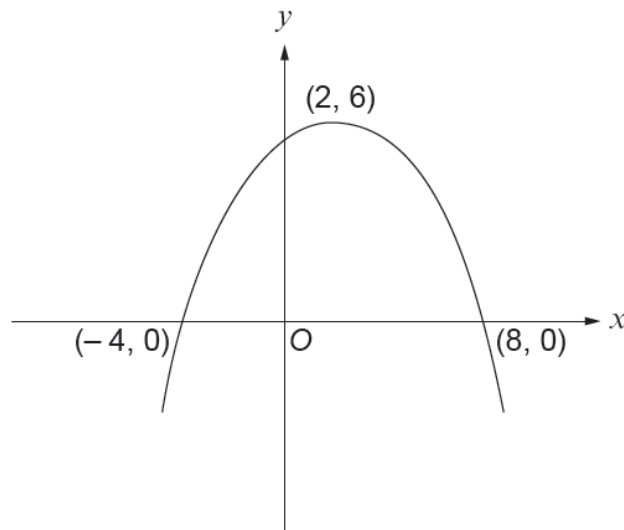
Brasluniwch y graffiau canlynol, gan ddefnyddio gwahanol set o echelinau ar gyfer pob graff. Ym mhob achos, dylech nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau'r graff â'r echelin- x .

(a) $y = f(x - 5)$ [3]

(b) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ [3]

(CI Gaeaf 2014)

7. Mae **Ffigur 1** yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae gan y graff bwynt maxsimwm (uchafbwynt) yn $(2, 6)$ ac mae'n croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau $(-4, 0)$ a $(8, 0)$.

**Ffigur 1**

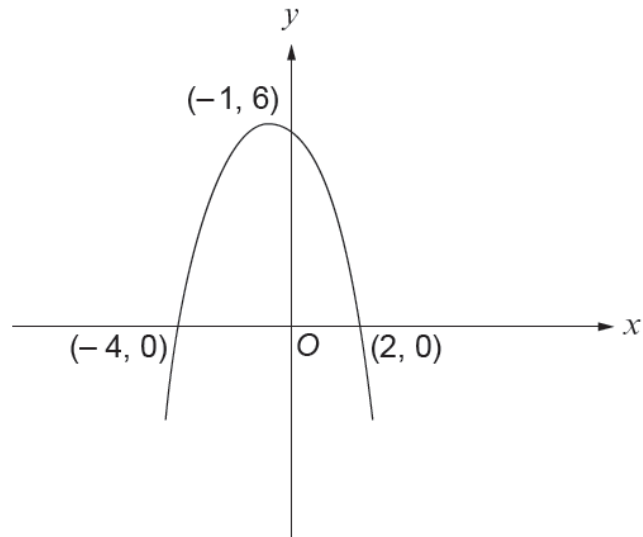
- (a) Brasluniwch graff $y = f(x - 3)$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau'r graff â'r echelin- x . [3]

- (b) Mae **Ffigur 2** yn dangos braslun o'r graff sydd ag **un** o'r hafaliadau canlynol gyda gwerth priodol ar gyfer p , q neu r .

$$y = f(x) + p, \text{ lle mae } p \text{ yn gysonyn}$$

$$y = f(qx), \text{ lle mae } q \text{ yn gysonyn}$$

$$y = rf(x), \text{ lle mae } r \text{ yn gysonyn}$$

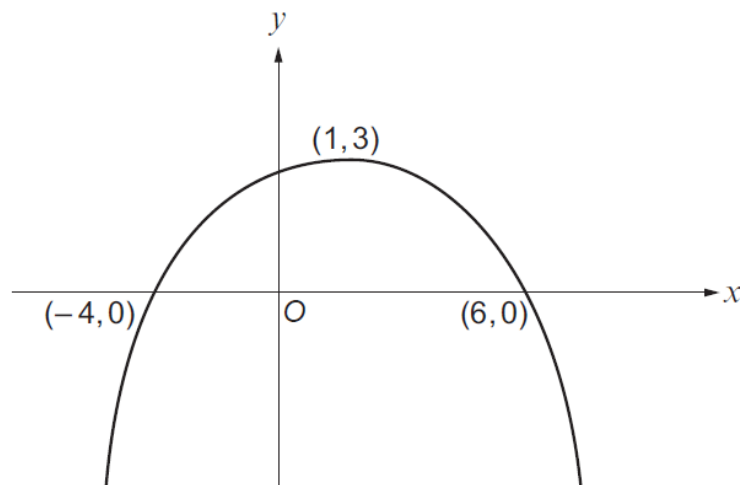


Ffigur 2

Ysgrifennwch hafaliad y graff sydd wedi'i fraslunio yn **Ffigur 2**, ynghyd â gwerth y cysonyn cyfatebol. [2]

(CI Haf 2018)

9. Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae'r graff yn mynd trwy'r pwyntiau $(-4, 0)$ a $(6, 0)$ ac mae ganddo bwynt maxsimwm (uchafbwynt) yn $(1, 3)$.

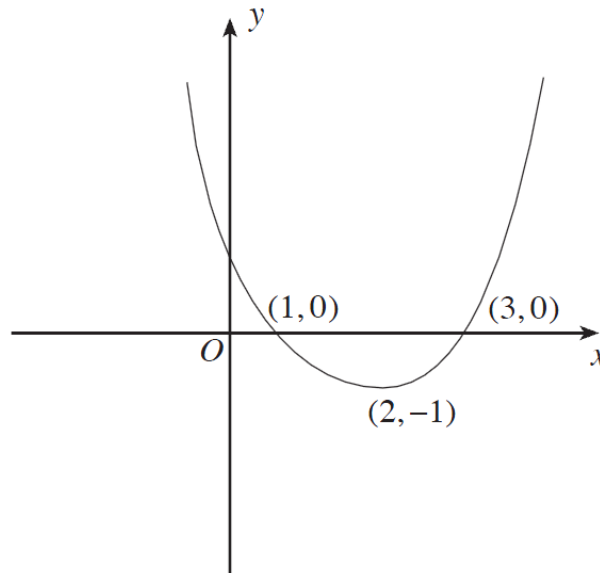


- (a) Brasluniwch graff $y = f(x + 3)$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau (pwyntiau croestoriad) y graff â'r echelin- x . [3]
- (b) Mae athrawes Gwen yn gofyn iddi luniadu graff $y = f(ax)$ ar gyfer gwahanol werthoedd y cysonyn a . Mae dau o graffiau Gwen yn mynd trwy'r pwynt $(2, 0)$. Darganfyddwch werth a sy'n cyfateb i bob un o'r ddau graff hyn. [2]

Cwestiynau Adolygu

(CI Gaeaf 2008)

9. Mae'r diagram yn dangos graff $y = f(x)$. Mae gan y graff bwynt minimwm (isafbwynt) yn $(2, -1)$ ac mae'n croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau $(1, 0)$ a $(3, 0)$.



Brasluniwch y graffiau canlynol, gan ddefnyddio gwahanol set o echelinau ar gyfer pob graff. Ymhob achos, dylid nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau'r graff â'r echelin- x .

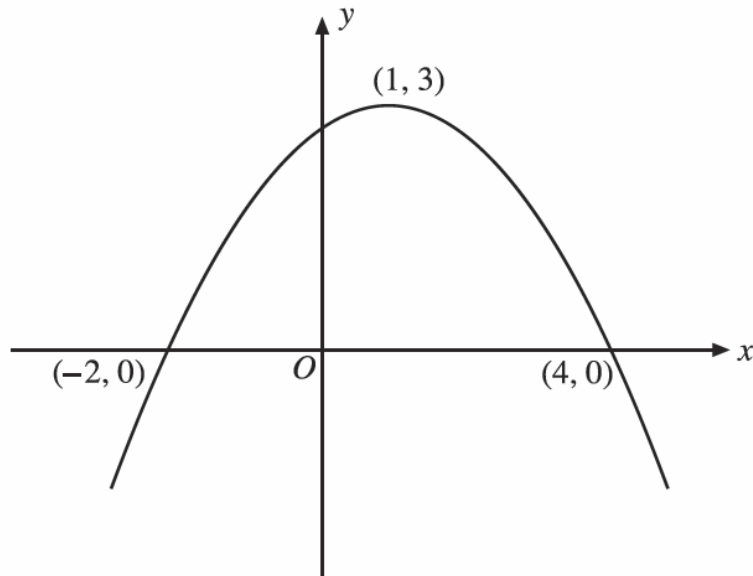
(a) $y = 3f(x)$

(b) $y = f(x + 5)$

[3], [3]

(CI Gaeaf 2012)

9. Mae'r diagram yn dangos braslun o graff $y = f(x)$. Mae gan y graff bwynt maccsimwm (uchafbwynt) yn $(1, 3)$ ac mae'n croestorri'r echelin- x yn y pwyntiau $(-2, 0)$ a $(4, 0)$.



- (a) Brasluniwch graff $y = f(2x)$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol a chyfesurynnau croestorfannau'r graff â'r echelin- x . [3]
- (b) (i) Brasluniwch graff $y = f(x) - 5$, gan nodi cyfesurynnau'r pwynt arhosol.
- (ii) O wybod mai ffwythiant cwadratig yw f , defnyddiwch y graff rydych chi wedi'i lunio yn rhan (i) i ysgrifennu nifer gwreiddiau real yr hafaliad

$$f(x) - 5 = 0. \quad [3]$$



Uned 1, Pecyn 14

12

Cyflwyno

Logarithmau

$$\log \left(\text{😊} \cdot \text{😄} \right) = \text{💧}$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Deall pwrpas logarithmau, a'u defnyddio i ddatrys hafaliadau.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Datrys hafaliadau; rheolau indecsau.

I ble mae'n arwain?

Uned 1: Ffitio cromliniau.

Cymwysiadau: Mesur maint daeargrynfeydd; cyfrifo'r amser i ad-dalu benthyciad; darganfod twf poblogaeth.

Theori

Ystyr Logarithm

Ystyriwch y swm $2^3 = 8$. I ddadwneud y swm yma, ar lefel TGAU rydym wedi bod yn cymryd trydydd isradd 8, i fynd yn ôl at y **bôn** 2. Nawr yn y cwrs Lefel A, rydym yn cyflwyno ffordd arall o ddadwneud y swm, i fynd yn ôl at y **pŵer** 3. Y dechneg i fynd yn ôl at y pŵer 3 yw cymryd **logarithm bôn 2** o 8.

$$\log_2(8) = 3$$

I gymryd logarithm bôn 2 o 8, rydym yn ystyried: "2 i ba bŵer sy'n rhoi'r ateb 8?"

$$2^? = 8$$

Dim ond 2 i'r pŵer 3 sy'n rhoi'r ateb 8, felly mae $\log_2(8) = 3$.

Yn gyffredinol,



os yw $b^y = x$, yna mae $y = \log_b(x)$.



Dywedwn mai b yw bôn y logarithm.

Logarithmau pwysig

- Bôn 10: Ar gyfer $\log_{10}(x)$, nid ydym fel arfer yn ysgrifennu'r 10, ac yn ysgrifennu $\log(x)$ yn unig.
- Bôn e : Cyn bo hir, fe ddawn ar draws y rhif pwysig $e = 2.71828 \dots$, sy'n ymddangos mor aml ym mathemateg mae gan $\log_e(x)$ ei nodiant arbennig ei hun, sef $\ln(x)$.

Ymarfer 1

Llenwch y tabl canlynol.

$\log_2(16)$	$\log_3(9)$	$\log(100)$	$\log_3(81)$	$\log_4(16)$	$\log_{16}(16)$	$\log_5(1)$	$\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$	$\log_4(2)$	$\log_2\left(\frac{1}{64}\right)$



Theori

Datrys Hafaliadau

Mae'n bosib defnyddio logarithmau i ddatrys hafaliadau ble mae'r newidyn yn ymddangos yn y pŵer.

Enghraifft 1

Datrysych yr hafaliad $5^{2x+1} = 8$.

Ateb: Gan fod yr hafaliad efo'r bôn 5 ar yr ochr chwith, rhaid cymryd logarithm bôn 5 o bob ochr er mwyn gallu gweithio efo'r pŵer $2x + 1$.

$$\log_5(5^{2x+1}) = \log_5(8)$$

$$2x + 1 = \log_5(8)$$

$$2x = \log_5(8) - 1$$

$$x = \frac{\log_5(8) - 1}{2}$$

$$x = 0.146 \text{ i } 3 \text{ lle degol}$$

Ymarfer 2

Datrysych yr hafaliad $7^{3x-2} = 18$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Enghraifft 2

Defnyddiwch yr amnewid $2^x = u$ i ddatrys yr hafaliad $2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$.

Ateb: Os yw $2^x = u$, yna mae $2^{2x} = (2^x)^2 = u^2$, ac mae $2^{x+3} = 2^x \times 2^3 = 8 \times 2^x = 8u$.

Felly mae angen datrys yr hafaliad

$$u^2 - 8u + 16 = 0$$

$$(u - 4)(u - 4) = 0$$

$$\text{Naill ai } u - 4 = 0 \text{ neu } u - 4 = 0$$

$$u = 4$$

$$2^x = 4$$

$$\log_2(2^x) = \log_2(4)$$

$$x = 2$$

Ymarfer 3

Defnyddiwch yr amnewid $5^x = u$ i ddatrys yr hafaliad $5^{2x} - 5^{x+2} + 100 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Rheolau Logarithmau

Mae angen i chi ddysgu'r rheolau canlynol, gan gynnwys dysgu'r **prawf** ar gyfer bob rheol.

(1) Y rheol luosi

O wybod bod $x > 0$, $y > 0$, mae

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Prawf

Gadewch i $m = \log_a(x)$, $n = \log_a(y)$.

Yna, trwy ddiffiniad logarithm, $a^m = x$, $a^n = y$.

Felly $xy = a^m \times a^n$.

$$xy = a^{m+n} \text{ (rheolau indecsau).}$$

$$\log_a(xy) = m + n.$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

• • •
QED

Hwn yw'r **minimwm** sydd angen ei ddysgu. Peidiwch â dileu dim byd o'r prawf!

(2) Y rheol rannu

O wybod bod $x > 0$, $y > 0$, mae

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Prawf

Gadewch i $m = \log_a(x)$, $n = \log_a(y)$.

Yna, trwy ddiffiniad logarithm, $a^m = x$, $a^n = y$.

Felly $\frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n}$.

$$\frac{x}{y} = a^{m-n} \text{ (rheolau indecsau).}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = m - n.$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

• • •
QED

Sylwch pa mor debyg yw'r profion ar gyfer rheolau (1) a (2).

(3) Rheol y pŵer

O wybod bod $x > 0$, mae

$$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$$

Prawf

Gadewch i $y = \log_a(x)$.

Yna, trwy ddiffiniad logarithm, $a^y = x$.

Felly $(a^y)^n = x^n$.

$$a^{yn} = x^n \text{ (rheolau indecsau).}$$

$$yn = \log_a(x^n).$$

$$ny = \log_a(x^n).$$

Felly $n \log_a(x) = \log_a(x^n)$

$$\text{neu } \log_a(x^n) = n \log_a(x).$$

• • •
QED

Ar gyfer y profion ar y dudalen hon, rhaid i x ag y fod yn bositif oherwydd (e.e.) os yw x yn negatif, nid oes gwerth posib ar gyfer $\log_a x$. Pam? Cymerwch $a = 2$ fel enghraifft. Nid oes unrhyw werth ar gyfer y fel bod 2^y yn gallu bod yn negatif.

(C2 Haf 2008)

7. (a) O wybod bod $x > 0$, dangoswch fod

$$\log_a x^n = n \log_a x . \quad [3]$$

(b) Datrysych yr hafaliad

$$\log_a(3x + 4) - \log_a x = 3 \log_a 2 . \quad [4]$$

(c) Datrysych yr hafaliad

$$4^{3y+2} = 7 ,$$

gan roi eich ateb yn gywir i dri lle degol. [3]

(C2 Gaeaf 2012)

7. (a) O wybod bod $x > 0, y > 0$, dangoswch fod

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y. \quad [3]$$

(b) Datrysych yr hafaliad

$$2^{3-5x} = 12.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [3]

(c) (i) Mynegwch

$$\log_9(3x - 1) + \log_9(x + 4) - 2\log_9(x + 1)$$

fel logarithm sengl.

(ii) Trwy hyn, datrysych yr hafaliad

$$\log_9(3x - 1) + \log_9(x + 4) - 2\log_9(x + 1) = \frac{1}{2}. \quad [5]$$

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2010)

8. (a) O wybod bod $x > 0$, dangoswch fod

$$\log_a x^n = n \log_a x. \quad [3]$$

- (b) Datrysych yr hafaliad

$$6^{2y-1} = 4.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [3]

- (c) O wybod bod $\log_a 4 = \frac{1}{2}$, darganfyddwch werth a . [2]

(C2 Gaeaf 2005)

2. Defnyddiwch yr amnewid $3^x = u$ i ddatrys yr hafaliad

$$3^{2x} - 3^{x+2} + 14 = 0,$$

gan roi eich atebion yn gywir i dri lle degol.

[6]

(C2 Gaeaf 2006)

10. (a) O wybod bod $x > 0, y > 0$, dangoswch fod

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y. \quad [3]$$

(b) O wybod mai bras werth $\int_1^3 \log_{10} x \, dx$ yw 0.5628, darganfyddwch fras werth ar gyfer

$$\int_1^3 \log_{10}(10x) \, dx. \text{ Rhowch eich ateb yn gywir i bedwar lle degol.} \quad [4]$$

(C2 Gaeaf 2010)

7. (a) O wybod bod $x > 0$, dangoswch fod

$$\log_a x^n = n \log_a x. \quad [3]$$

(b) Mynegwch $\frac{1}{2} \log_a 324 + \log_a 56 - 2 \log_a 12$ yn y ffurf $\log_a b$, lle mae b yn gysonyn y mae'n rhaid darganfod ei werth. [4]

(c) (i) Ailysgrifennwch yr hafaliad

$$3^x = 2^{x+1}$$

yn y ffurf

$$c^x = d,$$

lle mae gwerthoedd y cysonion c a d i'w darganfod.

(ii) Trwy hyn, neu fel arall, datrysych yr hafaliad

$$3^x = 2^{x+1},$$

gan roi eich ateb yn gywir i ddau le degol. [4]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(C2 Haf 2014)

7. (a) Datrysych yr hafaliad

$$3^{\frac{5x-2}{4}} = 7.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [3]

(b) Mae'r rhifau positif a a b fel bod

$$\log_a b = 5.$$

(i) Mynegwch b fel pŵer o a .(ii) **Gan ddefnyddio eich ateb i ran (i), enrhifwch $\log_b a$.** [3]

(Uned I Haf 2018)

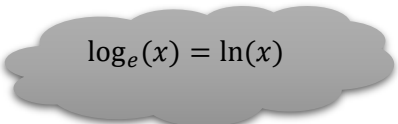
1	7
---	---

a) Datrysych $2\log_{10}x = 1 + \log_{10}5 - \log_{10}2$.

[4]

b) Datrysych $3 = 2e^{0.5x}$.

[2]


$$\log_e(x) = \ln(x)$$

c) Mynegwch $4^x - 10 \times 2^x$ yn nhermau y , lle mae $y = 2^x$.

Trwy hyn datrysych yr hafaliad $4^x - 10 \times 2^x = -16$.

[5]

(Uned I Haf 2019)

1	0
---	---

a) Datrysych yr hafaliadau cydamserol canlynol.

$$3^{3x} \times 9^y = 27$$

$$2^{-3x} \times 8^{-y} = \frac{1}{64}$$

[6]

b) Darganfyddwch werth x sy'n bodloni'r hafaliad

$$\log_a 3 + 2\log_a x - \log_a(x - 1) = \log_a(5x + 2).$$

[7]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(C2 Gaeaf 2014)

7. (a) O wybod bod $x > 0$, dangoswch fod

$$\log_a x^n = n \log_a x. \quad [3]$$

- (b) Datrysych yr hafaliad

$$7^{5-4x} = 11.$$

Dangoswch eich gwaith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [3]

- (c) Datrysych yr hafaliad

$$\log_8 x = -\frac{1}{3}. \quad [2]$$

(Uned I Haf 2023)

1	0
---	---

 Datrysych yr hafaliadau canlynol ar gyfer gwerthoedd x .

a) $\ln(2x + 5) = 3$ [2]

b) $5^{2x+1} = 14$ [3]

c) $3\log_7(2x) - \log_7(8x^2) + \log_7 x = \log_3 81$ [6]

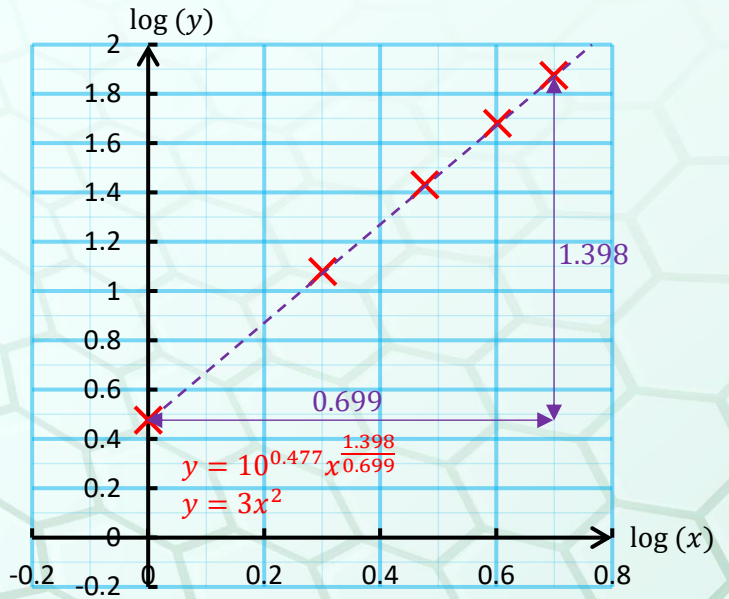
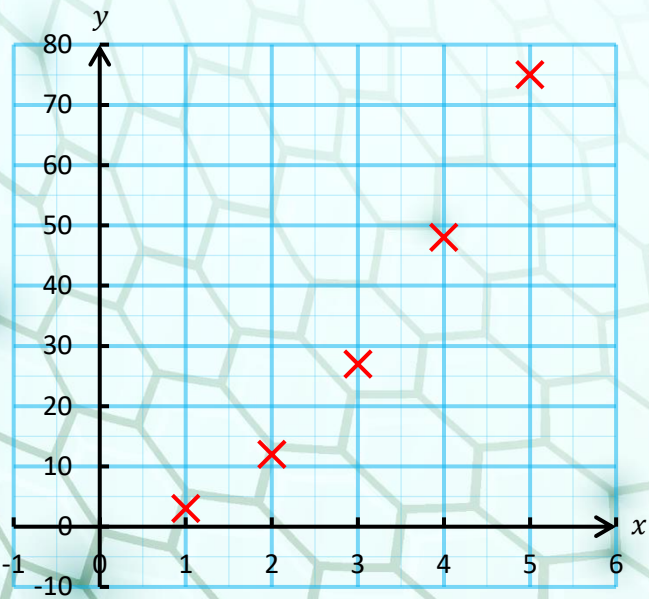


Ffitio

Cromliniau

x	1	2	3	4	5
y	3	12	27	48	75

$\log(x)$	0	0.301	0.477	0.602	0.699
$\log(y)$	0.477	1.079	1.431	1.681	1.875



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Ystyried pryd a sut gallwn ddefnyddio modelau esbonyddol. Ffitio cromlin polynomial neu esbonyddol i ddata.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Nfed term; plotio graffiau; rheolau indecsau.
Lefel A Uned I: Cyflwyno logarithmau.

I ble mae'n arwain?

Cymwysiadau: Cyfrifo'r adlog ar fenthyciad; dadfeiliad ymbelydrol; dadfeiliad cyffur yn y corff; modelu twf poblogaeth.

Theori

Ystyriwch y dilyniant rhif canlynol.

4, 7, 10, 13, 16, 19, ...

Gwelwn ein bod yn **adidio tri** i gael y rhif nesaf bob tro. O waith TGAU, yr *n*fed term yw

$$3n + 1$$

neu

$$4 + 3(n - 1)$$

Nawr ystyriwch y dilyniant rhif canlynol.

4, 12, 36, 108, 324, 972, ...

Gwelwn ein bod yn **lluosi efo tri** i gael y rhif nesaf bob tro. Yr *n*fed term yw

$$4 \times 3^{n-1}$$

Mae hwn yn enghraifft o **ffwythiant esbonyddol**. Rydym yn defnyddio'r rhain mewn dilyniannau ble rydym yn lluosio efo'r un rhif bob tro, i gael y rhif nesaf yn y dilyniant.

Enghraifft I

Ystyriwch fuddsoddi £1,000 mewn banc sy'n talu adlog blynyddol ar gyfradd 3%. Ar ôl blwyddyn, yr arian sydd gennym yw

$$£1,000 \times 1.03 = £1,030$$

Ar ôl dwy flynedd:

$$£1,000 \times 1.03^2 = £1,060.90$$

Ar ôl *n* mlynedd:

$$£1,000 \times 1.03^n$$

Neu gallwn
luosi efo
103%



Plotio graffiau esbonyddol

Rhaid i chi wybod sut i blotio graff o'r ffwythiant esbonyddol $y = a^x$, ble mae a yn bositif.

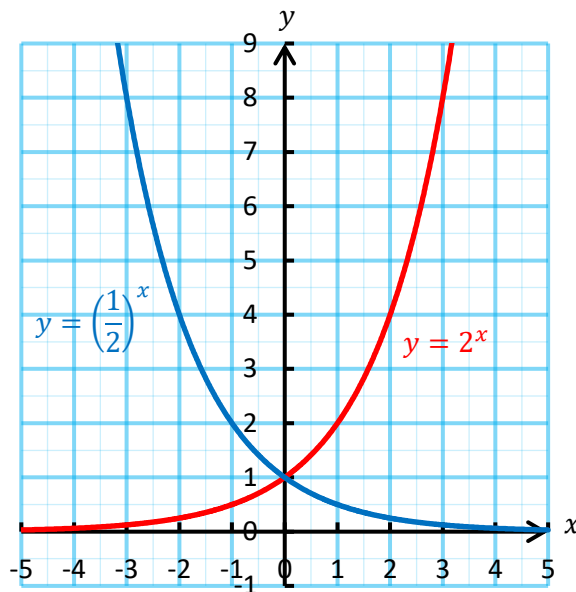
Beth sy'n digwydd os yw a yn negatiff?

Enghraifft 2

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 2^x$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Sylwch fod $y = 2^x$ yn dyblu bob tro, tra bod $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ yn haneru bob tro.

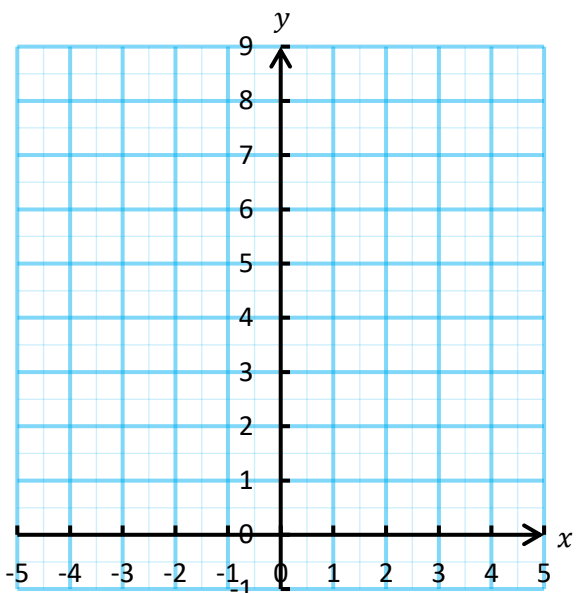
Nodyn: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$. Yn gyffredinol, $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.



Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl isod, cyn plotio'r graffiau ar gyfer $y = 3^x$ ac $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 3^x$											
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$											



Arbrofwch efo cyfrifiannell graffigol, neu wefan Desmos, i ymchwilio i siâp $y = a^x$ ar gyfer gwerthoedd gwahanol o a . Beth sy'n digwydd ar gyfer $a = 1$?

Rhif Euler

Ystyriwch fuddsoddi £1 mewn banc sy'n talu adlog ar gyfradd 100% dros flwyddyn. Faint o arian fydd gennych ar ddiwedd y flwyddyn? Bydd hyn yn dibynnu ar y nifer o randaliadau yn ystod y flwyddyn.

Rhandaliadau	Arian ar ôl blwyddyn
1 (100% ar ôl blwyddyn)	$1 \times 2^1 = \text{£}2$
2 (50% bob chwe mis)	$1 \times 1.5^2 = \text{£}2.25$
3 (33.3% bob pedwar mis)	$1 \times 1.3^3 = \text{£}2.37$
4 (25% bob tri mis)	$1 \times 1.25^4 = \text{£}2.44$
n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$



Fel mae n yn cynyddu, mae'r arian yn cynyddu, ond nid am byth. Wrth fodelu (er enghraifft efo taenlen Excel), gwelwn fod yr arian yn setlo lawr i'r gwerth £2.71 ... Mae'r rhif yma'n arbennig mewn mathemateg, ac yn cael ei adnabod fel rhif Euler, e . I bum lle degol, $e = 2.71828$.

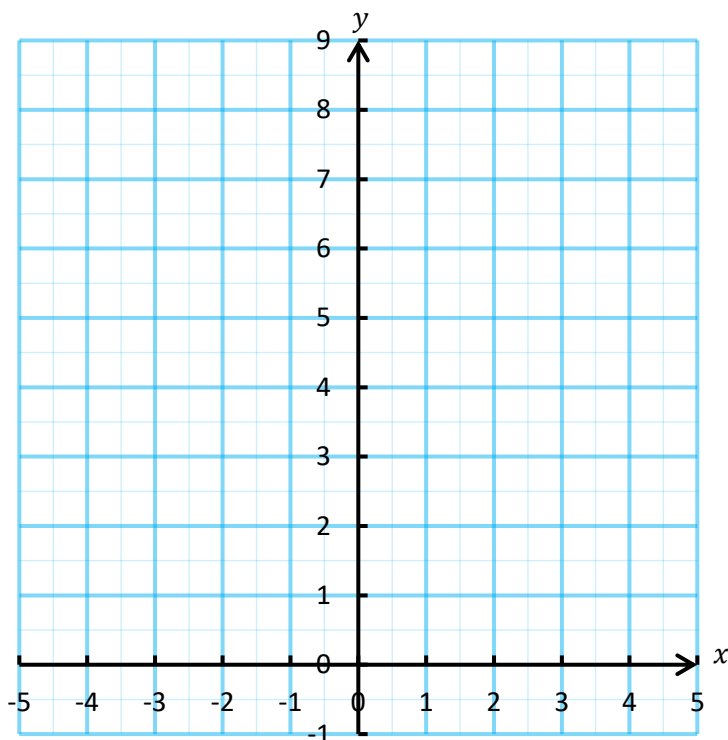
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Mae'r ffwythiant esbonyddol $y = e^x$ yn arbennig: mae graddiant y graff yn hafal i werth e^x ar unrhyw bwynt ar y graff. Hynny yw, mae $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

Ymarfer 2

Cwblhewch y tabl isod, gan roi eich atebion yn gywir i un lle degol, cyn plotio'r graff ar gyfer $y = e^x$.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = e^x$											



Estyniad: O wybod bod $\frac{d}{dx}(a^x) = \ln(a) \times a^x$, arbrofwch efo plotio'r graffiau $y = a^x$ a $y = \ln(a) \times a^x$ ar gyfer gwerthoedd gwahanol o a .

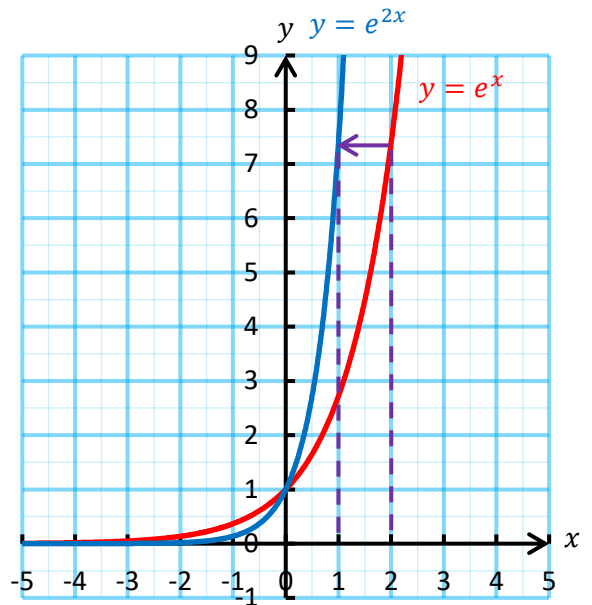
Mae unrhyw ffwythiant o'r ffurf $y = a^x$ yn ffwythiant esbonyddol, ond mae'r ffwythiant $y = e^x$ yn cael ei adnabod fel y ffwythiant esbonyddol.

Modelau Esbonyddol

O gychwyn efo cromlin y ffwythiant $y = e^x$, mae'n bosib ei gywasgu ar hyd yr echelin $-x$, efo ffactor graddfa $\frac{1}{k}$, i roi cromlin y ffwythiant $y = e^{kx}$.

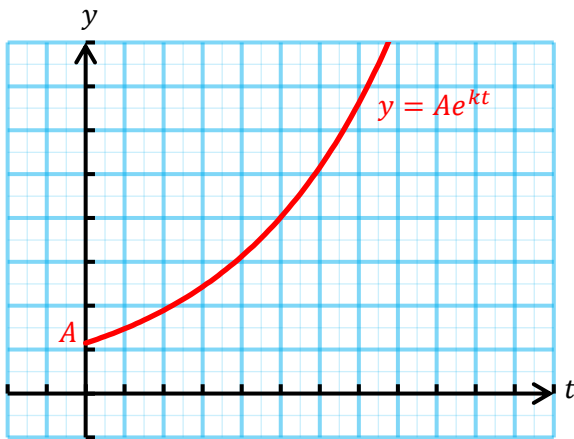
Graddiant y ffwythiant $y = e^{kx}$ yw ke^{kx} . Hynny yw, $\frac{dy}{dx} = ke^{kx}$ neu $\frac{dy}{dx} \propto e^{kx}$. Mae hyn yn fodel da ar gyfer digwyddiadau yn y byd naturiol fel dadfeiliad ymbelydrol neu dwf poblogaeth.

Yn gyffredinol, mae hafaliad o'r ffurf $y = Ae^{kt}$, ble mae t yn cynrychioli amser penodol, yn rhoi model esbonyddol, ble mae A a k yn gysonion.

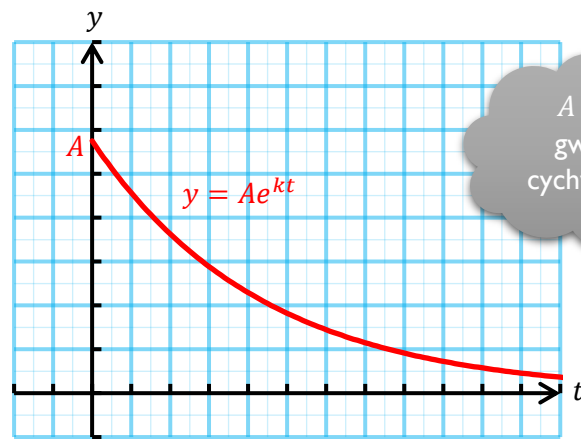


Os yw $y = Ae^{kt}$, yna $\frac{dy}{dt} = kAe^{kt}$.

Twf esbonyddol: k yn positif



Dadfeiliad esbonyddol: k yn negatif



Enghraifft 3

Mae poblogaeth gwlad ar gychwyn blwyddyn benodol, P miliwn, yn tyfu'n esbonyddol fel bod $P = 13e^{0.07t}$, ble mae t yn cynrychioli'r amser mewn blynnyddoedd ar ôl 2020. Cyfrifwch

- (a) Maint y boblogaeth ar gychwyn 2026.
- (b) Cyfradd cynnydd y boblogaeth ar gychwyn 2026.
- (c) Y gyfradd cynnydd cyfartalog rhwng cychwyn 2020 a chychwyn 2026.

Ateb: (a) Ar gychwyn 2026, mae $t = 6$. Felly, $P = 13e^{0.07 \times 6} = 19.79$ miliwn, i 2 le degol.
 (b) Mae $\frac{dP}{dt} = 0.07 \times 13e^{0.07t} = 0.91e^{0.07t}$. Pan fo $t = 6$, mae $\frac{dP}{dt} = 0.91e^{0.07 \times 6} = 1.38$ miliwn y flwyddyn, i 2 le degol.
 (c) Y newid mewn poblogaeth rhwng 2020 a 2026 yw $19.79 - 13 = 6.79$ miliwn, i 2 le degol.
 Y gyfradd cynnydd cyfartalog yw $6.79 \div 6 = 1.13$ miliwn y flwyddyn, i 2 le degol.

Ymarfer 3

Mae cyffur yn dadfeilio'n esbonyddol. Mae ei grynodiad, C mg i bob ml, ar ôl t awr, yn $C = 2 \times e^{-0.35t}$.

- (a) Beth yw ei grynodiad cychwynnol?
- (b) Beth yw'r crynodiad ar ôl 3 awr?
- (c) Beth yw cyfradd newid y cyffur pan fo (i) $t = 0$, (ii) $t = 3$?
- (ch) Beth yw ei gyfradd lleihad cyfartalog yn ystod y 3 awr gyntaf?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

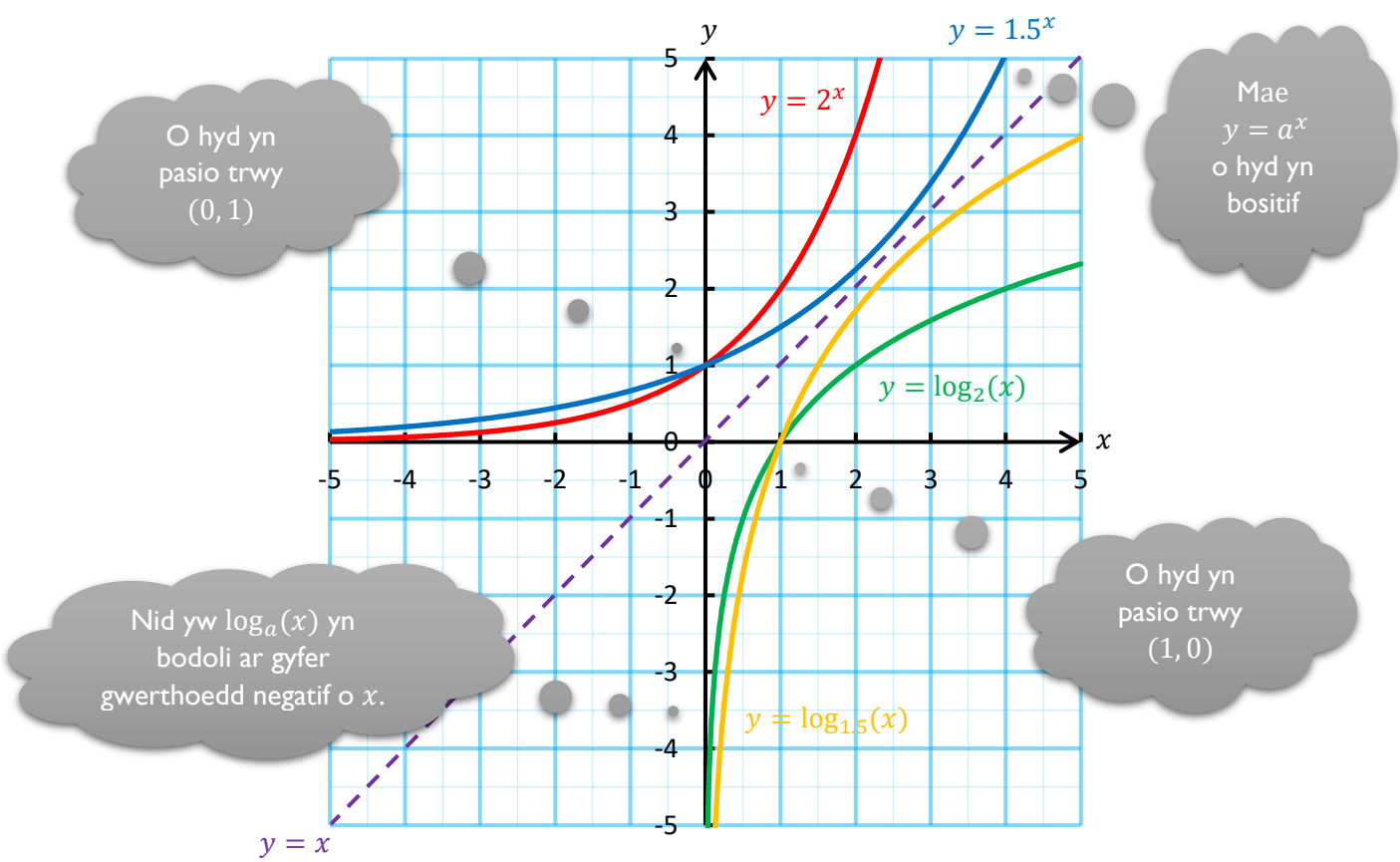
Ffwythiannau Logarithmig

Mae gwrthdro ffwythiant esbonyddol yn ffwythiant logarithmig.



- $y = a^x$
- $\log_a(y) = \log_a(a^x)$ Cymryd logarithm bôn a o bob ochr.
- $\log_a(y) = x \log_a(a)$ Rheol y pŵer.
- $\log_a(y) = x$ Diffiniad logarithm.

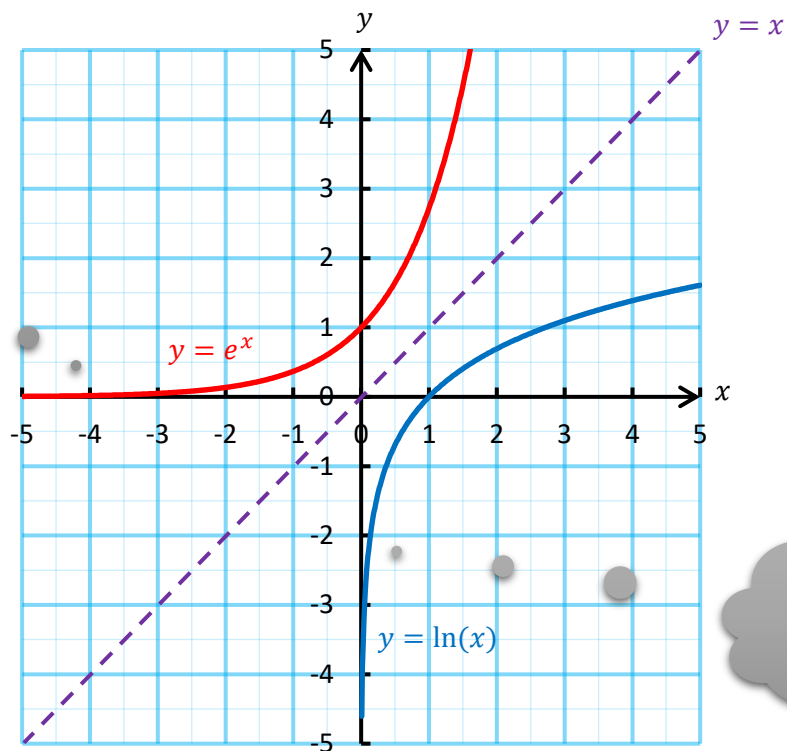
Gwrthdro'r ffwythiant esbonyddol $y = a^x$ yw'r ffwythiant logarithmig $y = \log_a(x)$.



Logarithm Naturiol

Gwrthdro $y = e^x$ yw $y = \log_e(x)$ sydd yn cael ei ysgrifennu fel $y = \ln(x)$.
 Mae'n cael ei adnabod fel y **logarithm naturiol**.

Mae'r echelin-x yn asymptot



Mae'r echelin-y yn asymptot

Enghraifft 4

Datrysych yr hafaliadau canlynol.

(a) $\ln(3x - 1) = 5$

(b) $\log_4(x + 5) = 7$

Ateb: (a) $\ln(3x - 1) = 5$
 $3x - 1 = e^5$
 $3x = e^5 + 1$
 $x = \frac{e^5 + 1}{3}$
 $x = 49.80$ i 2 le degol

(b) $\log_4(x + 5) = 7$
 $x + 5 = 4^7$
 $x = 4^7 - 5$
 $x = 16379$

Gwrthdro $\log_4(x)$ yw 4^x

Gwrthdro $\ln(x)$ yw e^x

Ymarfer 4

Datrysych yr hafaliadau canlynol.

(a) $\ln(2x + 5) = 3$

(b) $\log_8(x - 10) = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

15. Mae'n bosibl modelu maint N poblogaeth ynys fach ar amser t blwyddyn drwy ddefnyddio $N = Ae^{kt}$, lle mae A and k yn gysonion. Rydym yn gwybod bod $N = 100$ pan fydd $t = 2$ a bod $N = 160$ pan fydd $t = 12$.

(a) Dehonglwch gysonyn A yng nghyd-destun y cwestiwn. [1]

(b) Dangoswch fod $k = 0.047$, yn gywir i dri lle degol. [4]

(c) Darganfyddwch faint y boblogaeth pan fydd $t = 20$. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2022)

0	1
---	---

Ysgrifennwch ffwythiant gwrthdro $y = e^x$. Ar yr un set o echelinau, brasluniwch graffiau $y = e^x$ a'i ffwythiant gwrthdro, gan labelu'n glir cyfesurynnau'r pwyntiau lle mae'r graffiau'n croesi'r echelinau x ac y . [3]

(Uned I Haf 2023)

1	4
---	---

a) Mae dau newidyn, x ac y , fel bod cyfradd newid y mewn perthynas ag x mewn cyfrannedd ag (*proportional to*) y . Nodwch fodel all fod yn briodol ar gyfer y yn nhermau x . [1]

b) Mae crynodiad (*concentration*), Y uned, cyffur penodol yng nghorff claf yn lleihau'n esbonyddol (*exponentially*) mewn perthynas ag amser. Ar amser t awr mae'n bosibl modelu'r crynodiad gan $Y = Ae^{-kt}$, lle mae A a k yn gysonion.

Mae claf yn cael dos o'r cyffur sy'n grynodiad cychwynnol o 5 uned.

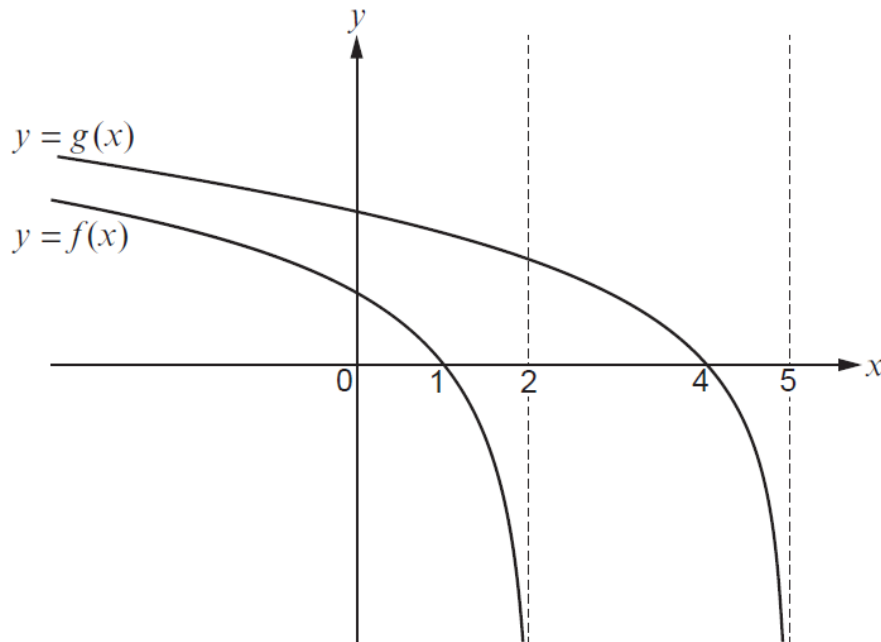
i) Ar ôl 4 awr, mae'r crynodiad wedi gostwng i 1.25 uned. Dangoswch fod $k = 0.3466$, yn gywir i bedwar lle degol. [2]

ii) Crynodiad effeithiol minimwm (*lleiaf*) y cyffur yw 0.6 uned. Faint yn fwy o amser byddai'n ei gymryd i grynodiad y cyffur ostwng i'r lefel effeithiol minimwm? [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned I Haf 2024)

17. Mae ffwythiant f yn cael ei ddiffinio gan $f(x) = \log_{10}(2-x)$. Mae ffwythiant arall g yn cael ei ddiffinio gan $g(x) = \log_{10}(5-x)$. Mae'r diagram isod yn dangos braslun o'r graffiau $y = f(x)$ ac $y = g(x)$.



- (a) Mae'r pwynt $(c, 1)$ ar $y = f(x)$. Darganfyddwch werth c .

[2]

- (b) Mae pwynt P ar $y = f(x)$ a'i gyfesuryn- x yw α . Mae pwynt arall Q ar $y = g(x)$ a chyfesuryn- x hwn hefyd yw α . Y pellter rhwng P a Q yw 1.2 uned. Darganfyddwch werth α , gan roi eich ateb yn gywir i dri lle degol.

[5]

Ffitio Cromliniau



O gael gwerthoedd ar gyfer x ag y , efallai o arbrawf, mae'n bosib defnyddio logarithmau i weld os yw'r data'n ffitio perthynas o'r ffurf $y = ax^n$ neu $y = kb^x$.

(1) Ydi'r data o'r ffurf $y = ax^n$ (model polynomial)?

$$y = ax^n$$

$$\log(y) = \log(ax^n) \quad \text{Cymryd logarithm bôn 10 o bob ochr}$$

$$\log(y) = \log(a) + \log(x^n) \quad \text{Y rheol luosi}$$

$$\log(y) = \log(a) + n \log(x) \quad \text{Rheol y pŵer}$$

$$\log(y) = n \log(x) + \log(a) \quad \text{Ail-drefnu}$$

Yn cymharu efo $y = mx + c$, byddai plotio $\log(x)$ yn erbyn $\log(y)$ yn rhoi llinell syth efo graddiant n a rhyngdoriad- y $\log(a)$.

Enghraifft 5

Casglwyd data mewn arbrawf am newidynnau x ag y .

Defnyddiwch y gwerthoedd data o'r tabl i ysgrifennu'r berthynas rhwng x ag y yn y ffurf $y = ax^n$.

x	10	20	30	40	50
y	158	549	1140	1913	2858

Gallwn ffurfio'r tabl isod i dangos gwerthoedd $\log(x)$ a $\log(y)$, ac yna'u plotio ar ddiagram gwasgariad.

$\log(x)$	1	1.3010	1.4771	1.6021	1.6990
$\log(y)$	2.1987	2.7396	3.0569	3.2817	3.4561

Graddiant y graff yw tua $3.6 \div 2 = 1.8$.

Rhyngdoriad- y y graff yw tua 0.4.

Yn cymharu efo

$$\log(y) = n \log(x) + \log(a)$$

mae gennym

$$\log(y) = 1.8 \log(x) + 0.4.$$

Felly, $a = 10^{0.4}$

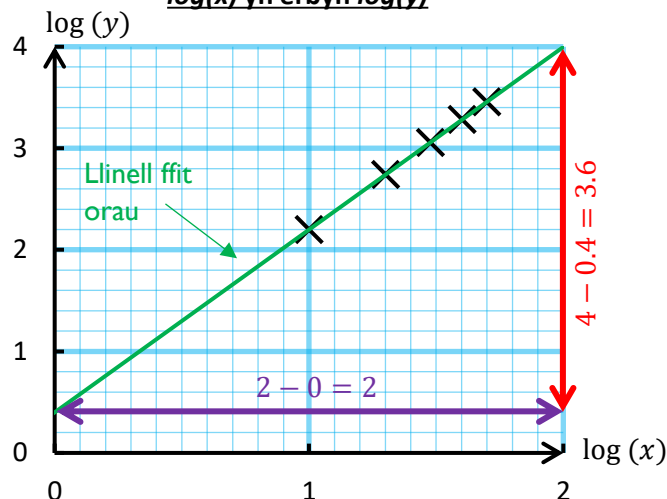
$$a = 2.51 \text{ i } 2 \text{ le degol.}$$

Yn cymharu efo $y = ax^n$, ein model yw

$$y = 2.51x^{1.8}$$

Diagram Gwasgariad

$\log(x)$ yn erbyn $\log(y)$



(2) Ydi'r data o'r ffurf $y = kb^x$ (model esbonyddol)?

$$y = kb^x$$

$$\log(y) = \log(kb^x) \quad \text{Cymryd logarithm bôn 10 o bob ochr}$$

$$\log(y) = \log(k) + \log(b^x) \quad \text{Y rheol luosi}$$

$$\log(y) = \log(k) + x \log(b) \quad \text{Rheol y pŵer}$$

$$\log(y) = \log(b)x + \log(k) \quad \text{Ail-drefnu}$$

Yn cymharu efo $y = mx + c$, byddai plotio x yn erbyn $\log(y)$ yn rhoi llinell syth efo graddiant $\log(b)$ a rhyngdoriad- y $\log(k)$.

Enghraifft 6

Casglwyd data mewn arbrawf am newidynnau x ag y .

Defnyddiwch y gwerthoedd data o'r tabl i ysgrifennu'r berthynas rhwng x ag y yn y ffurf $y = kb^x$.

x	2	4	6	8	10
y	9	53	306	1,761	10,145

Gallwn ffurfio'r tabl isod i dangos gwerthoedd x a $\log(y)$, ac yna'u plotio ar ddiagram gwasgariad.

x	2	4	6	8	10
$\log(y)$	0.9542	1.7243	2.4857	3.2458	4.0063

Graddiant y graff yw tua $3.8 \div 10 = 0.38$.

Rhyngdoriad- y y graff yw tua 0.2.

Yn cymharu efo

$$\log(y) = \log(b)x + \log(k)$$

mae gennym

$$\log(y) = 0.38x + 0.2.$$

Felly, $b = 10^{0.38}$

$$b = 2.40 \text{ i } 2 \text{ le degol}$$

$k = 10^{0.2}$

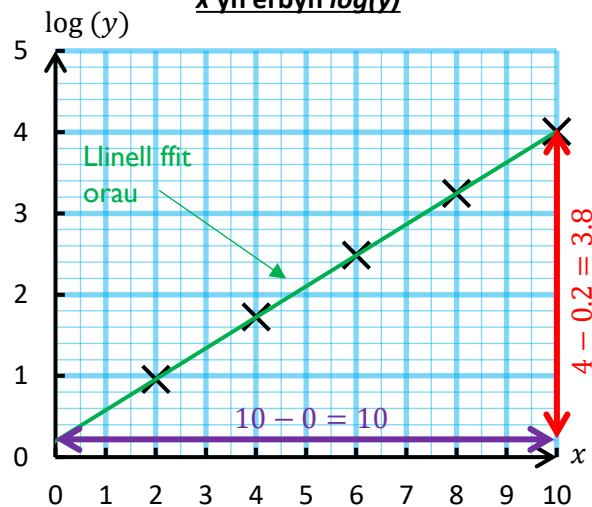
$$k = 1.58 \text{ i } 2 \text{ le degol}$$

Yn cymharu efo $y = kb^x$, ein model yw

$$y = 1.58 \times 2.4^x$$

Diagram Gwasgariad

x yn erbyn $\log(y)$



Ymarfer 5

Mae peipen yn gwagio dŵr i mewn i lyn. Mae'r tabl yn dangos y cyfaint o ddŵr, y m³, sy'n gadael y beipen bob eiliad, ar gyfer dyfnderoedd gwahanol o ddŵr, x m, yn y beipen. Mae peirianwyr yn disgwyl bod perthynas o'r ffurf $y = ax^n$ rhwng x ag y .

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y	4.73	5.78	6.95	8.24	9.66

(a) Dangoswch, trwy lunio llinell ffit orau ar set o echelinau addas, bod y peirianwyr yn gywir.

Darganfyddwch werthoedd ar gyfer y cysonion a ag n .

(b) Pa gyfaint o ddŵr (mewn m³) y byddwch yn disgwyl i adael y beipen bob eiliad pan fo dyfnder y dŵr yn

(i) 1.45 metr; (ii) 3.5 metr?

(c) Pa un o'ch atebion i ran (b) sy'n fwyaf dibynadwy? Eglurwch eich ateb.

✉ @mathemateg

$\log(x)$				
$\log(y)$				

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

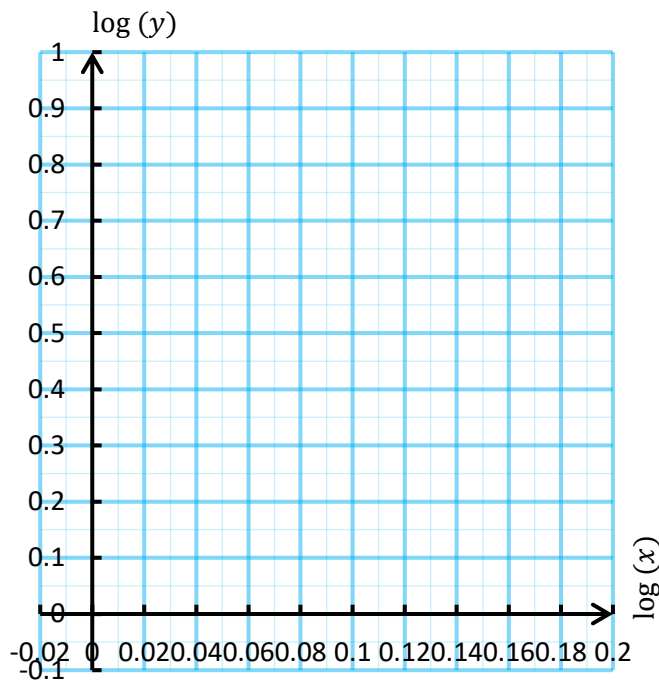
.....

.....

.....

.....

.....



Ymarfer 6

Mae poblogaeth Mathdref wedi bod yn tyfu ers 1990.

Blwyddyn	1990	1995	2005	2010
Amser, t	0	5	15	20
Poblogaeth, p	3170	4242	7597	10167

(a) Dangoswch y gall y boblogaeth ers 1990 gael ei fodelu gan $p = k \times b^t$, ble mae angen i chi ddarganfod gwerth y cysonion k a b .

(b) Amcangyfrifwch boblogaeth Mathdref yn 2000 ac yn 2020. Pa un o'ch dau ateb yw'r amcangyfrif gorau? Eglurwch pam.

t				
$\log(y)$				

.....

.....

.....

.....

.....

.....

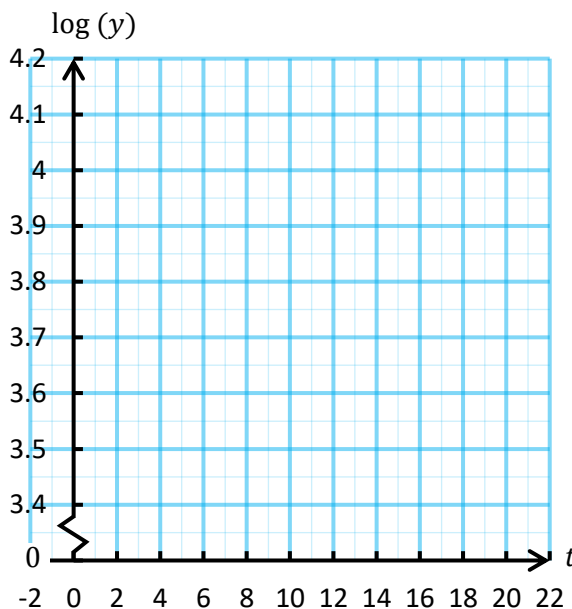
.....

.....

.....

.....

.....



Ymarferion

(Edexcel Papur I Haf 2023 [9MA0/01])

11.

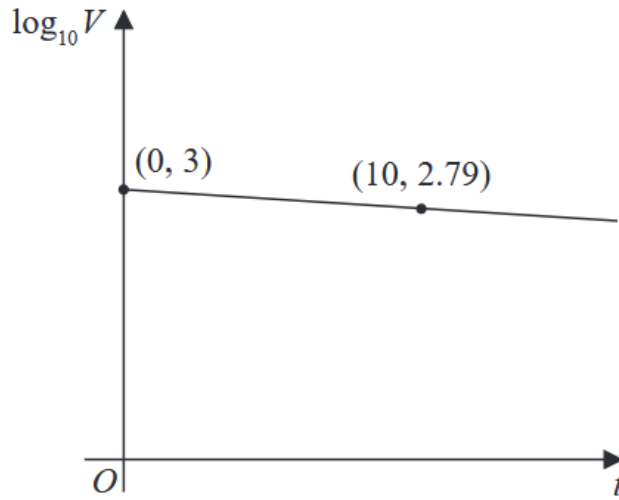


Figure 2

The value, V pounds, of a mobile phone, t months after it was bought, is modelled by

$$V = ab^t$$

where a and b are constants.

Figure 2 shows the linear relationship between $\log_{10} V$ and t .

The line passes through the points $(0, 3)$ and $(10, 2.79)$ as shown.

Using these points,

(a) find the initial value of the phone, (2)

(b) find a complete equation for V in terms of t , giving the exact value of a and giving the value of b to 3 significant figures. (3)

(Uned I Haf 2019)

1	1
---	---

Mae dau faint (*quantities*) wedi'u cysylltu gan yr hafaliad $Q = 1.25P^3$. Esboniwch pam mae graff $\log_{10}Q$ yn erbyn $\log_{10}P$ yn llinell syth. Nodwch raddiant y llinell syth a'r rhyngdoriad ar echelin $\log_{10}Q$ y graff. [4]



Theorem y

Binomial



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Ehangu mynegiadau o'r ffurf $(a + bx)^n$ yn effeithlon.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Ehangu; casglu termau.
Lefel A Uned 1: Cyflwyno logarithmau.
Lefel A Uned 2: Tebygolrwyddau'r dosraniad Binomial.

I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3: Ehangu $(a + bx)^n$ mewn achosion ble nad yw n yn gyfanrif positif.

Theori

Byddai'n bosib ehangu $(1 + x)^5$ gan ddefnyddio technegau TGAU...

$$\begin{aligned} (1 + x)^5 &= (1 + x)(1 + x)(1 + x)(1 + x)(1 + x) \\ (1 + x)^5 &= (1 + x)(1 + x)(1 + x)(1 + x + x + x^2) \\ (1 + x)^5 &= (1 + x)(1 + x)(1 + x)(1 + 2x + x^2) \\ (1 + x)^5 &= (1 + x)(1 + x)(1 + 2x + x^2 + x + 2x^2 + x^3) \\ (1 + x)^5 &= (1 + x)(1 + x)(1 + 3x + 3x^2 + x^3) \\ (1 + x)^5 &= (1 + x)(1 + 3x + 3x^2 + x^3 + x + 3x^2 + 3x^3 + x^4) \\ (1 + x)^5 &= (1 + x)(1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4) \\ (1 + x)^5 &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + x + 4x^2 + 6x^3 + 4x^4 + x^5 \\ (1 + x)^5 &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \end{aligned}$$



Theori

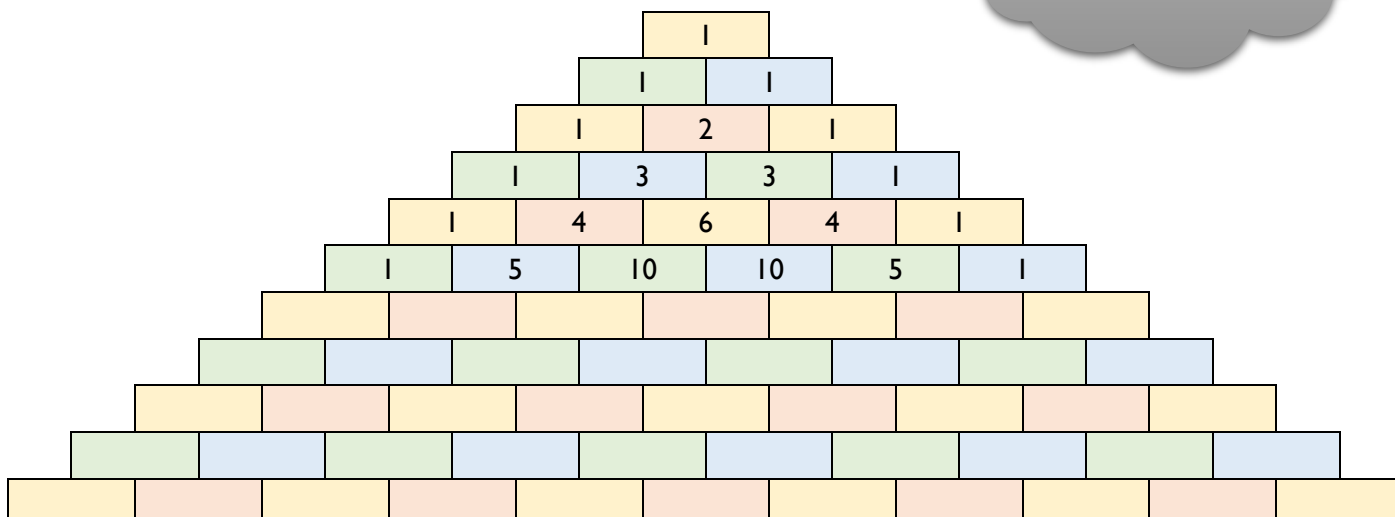
...ond byddai'n broses llafurus! Gwell fyddai sylwi bod patrwm yn y cyfernodau sydd i'w gweld uchod.

Triongl Pascal

Yn nhriongl Pascal, mae bob rhif yn swm y ddau rif uwchben.

Ymarfer 1

Cwblhewch y triongl Pascal canlynol, hyd at y rhes sy'n cychwyn 1, 10, ...



Wedi'i enwi ar ôl y mathemategydd Ffrengig Blaise Pascal.

Mae cysylltiad rhwng y rhifau sy'n ymddangos yn nhriongl Pascal a'r ehangiad ar gyfer $(1 + x)^n$. Er enghraifft, sylwch ar y cysylltiad rhwng yr enghraifft $(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$ ar y dudalen gynt a'r rhes 1, 5, 10, 10, 5, 1 yn nhriongl Pascal.

Ymarfer 2

Ehangwch $(1 + x)^8$ gan ddefnyddio eich triongl Pascal o Ymarfer 1.

Yn ffurfiol, rydym yn galw rhes uchaf triongl Pascal (yr un sy'n cynnwys 1 yn unig) yn rhes 0, ac yna mae rhes 1, rhes 2, rhes 3 ac yn y blaen yn dilyn. Felly, er mwyn ehangu $(1 + x)^5$, rydym yn defnyddio **pumed** rhes y triongl, yr un sy'n cychwyn efo 1 a 5.

Yn *n*fed rhes triongl Pascal, mae'r *r*fed rhif yn cael ei ysgrifennu fel $\binom{n}{r}$. Eto, rydym yn cyfrif o 0, fel bod y rhif cyntaf yn y 4ydd rhes yn $\binom{4}{0}$. Y rheol rydym yn ei ddefnyddio i ffurfio'r triongl yw

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

neu

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$



Gallwn feddwl am $\binom{5}{2}$ fel sawl ffordd sydd o ddewis 2 eitem o 5 eitem. Er enghraifft, mae $\binom{5}{2} = 10$ gan fod 10 ffordd o ddewis 2 eitem allan o 5 eitem:

- 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 2, 3 2, 4 2, 5 3, 4 3, 5 4, 5

Mae'r fformiwla ganlynol yn rhoi ffordd o gyfrifo gwerth $\binom{n}{r}$ heb orfod ffurfio triongl Pascal bob tro.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$



Mae *n!* yn golygu 'ffactorial *n*' ac yn gael ei gyfrifo fel hyn:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Felly, er enghraifft, mae $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Nodiadau

- Mae'n bosib ysgrifennu $\binom{n}{r}$ fel nC_r . Yn wir, mae'n debyg mai dyma sy'n ymddangos ar eich cyfrifiannell er mwyn cyfrifo gwerth $\binom{n}{r}$. (*C* am 'choose' neu 'combination'.)
- $\binom{n}{r}$ sy'n ymddangos yn y fformiwla $P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$ ar gyfer y tebygolrwydd mewn dosraniad Binomial.

Ymarfer 3

(a) Cyfrifwch $6!$

(b) Cyfrifwch $\binom{7}{3}$

(c) Cyfrifwch $\binom{9}{5}$

.....

.....

.....

.....

Dileu'r Cyfuniadau

Gallwn ddefnyddio'r diffiniad cyffredinol

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

i ddileu'r cyfuniadau o'r ehangiad binomaidd ar y dudalen flaenorol. Er enghraifft, mae

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cancel{(n-4)} \times \cancel{(n-5)} \times \dots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{[4 \times 3 \times 2 \times 1] \times [\cancel{(n-4)} \times \cancel{(n-5)} \times \dots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}]}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

Felly, ar gyfer cyfanrif positif n , mae

$$(a + bx)^n = a^n + na^{n-1}(bx) + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} a^{n-2}(bx)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} a^{n-3}(bx)^3 + \dots + (bx)^n$$

Os yw $a = 1$, $b = 1$, yna

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} x^3 + \dots + x^n$$

Mae fersiwn o'r uchod yn cael ei roi yn y llyfryn fformiwlâu i chi:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{1.2 \dots r} x^r + \dots \quad (|x| < 1, n \in \mathbb{R})$$

Enghraifft 2

Yn ehangiad binomaidd $(1 + 2x)^n$, mae cyfernod x^2 ddwywaith cyfernod x .

O wybod bod $n > 0$, darganfyddwch werth n .

Ateb: $(1 + 2x)^n = 1^n + n(1^{n-1})(2x) + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} (2x)^2 + \dots$

$$(1 + 2x)^n = 1 + n(1)(2x) + \frac{n(n-1)}{2} (4x^2) + \dots$$

$$(1 + 2x)^n = 1 + 2nx + 2n(n-1)x^2 + \dots$$

Os yw cyfernod x^2 ddwywaith cyfernod x , yna $2n(n-1) = 2(2n)$

$$2n^2 - 2n = 4n$$

$$2n^2 - 6n = 0$$

$$2n(n-3) = 0$$

Naill ai $2n = 0$ neu $n - 3 = 0$

$$n = 0 \quad n = 3$$

Ond mae $n > 0$, felly $n = 3$.

Mae atalnod llawn yn cynrychioli lluosï yma



(CI Haf 2008)

6. Defnyddiwch y theorem binomial i ehangu $(5 + 2x)^3$ a symleiddiwch bob term yn eich ehangiad. [3]

A series of horizontal dotted lines for writing the solution to the problem.

(CI Gaeaf 2009)

6. (a) Ehangwch $(a + b)^5$. [2]

(b) Defnyddiwch eich ateb i ran (a) i ddarganfod cyfernod x^3 yn ehangiad $\left(\frac{1}{4} + 2x\right)^5$.

Symleiddiwch eich ateb. [2]

(Uned I Haf 2019)

1	2
---	---

Yn ehangiad binomaidd $(2 - 5x)^8$, darganfyddwch

- a) nifer y termau, [1]
- b) y 4^{ydd} term, pan mae'r ehangiad mewn pwerau esgynnol o x , [2]
- c) y cyfernod positif mwyaf. [3]

(Uned I Haf 2023)

0	1
---	---

- a) Gan ddefnyddio'r theorem binomial, ysgrifennwch a symleiddiwch y tri therm cyntaf yn ehangiad $(1 - 3x)^9$ mewn pwerau esgynnol o x . [3]
- b) Drwy hyn, gan ysgrifennu $x = 0.001$ yn eich ehangiad yn rhan (a), darganfyddwch werth bras ar gyfer $(0.997)^9$. Dangoswch eich holl waith cyfrifo a rhowch eich ateb yn gywir i dri lle degol. [3]

(CI Haf 2009)

7. (a) Ehangwch $\left(x + \frac{2}{x}\right)^4$ a symleiddiwch bob term yn yr ehangiad. [4]
- (b) Cyfernod x^2 yn ehangiad $(1 + x)^n$ yw 55. O wybod mai cyfanrif positif yw n , darganfyddwch werth n . [3]

(CI Haf 2015)

6. (a) Gan ddefnyddio'r theorem binomial, ysgrifennwch a symleiddiwch y pedwar term cyntaf yn ehangiad $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^8$ mewn pwerau esgynnol o x . [4]
- (b) Y ddau derm cyntaf yn ehangiad $(2 + ax)^n$ mewn pwerau esgynnol o x yw 32 a $-240x$, yn ôl eu trefn. Darganfyddwch werth n a gwerth a . [4]

(Uned I Haf 2018)

1	0
---	---

a) Defnyddiwch y theorem binomial i ehangu $(a + \sqrt{b})^4$. [2]b) Trwy hyn, diddwythwch fynegiad yn nhermau a a b ar gyfer $(a + \sqrt{b})^4 + (a - \sqrt{b})^4$. [2]



Cwestiwn Adolygu

(CI Gaeaf 2007)

4. (a) Ehangwch $(a + b)^4$, gan symleiddio eich cyfernodau gymaint ag sydd bosibl. [2]

(b) Datrysych $(2 + x)^4 = 14 + 33x + 25x^2 + 8x^3 + x^4$. [4]



Uned 1, Pecyn 17

12

Tri Math o

Brawf

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a - b)(a + b) = b(a - b)$$

$$a + b = b$$

$$2b = b$$

$$2 = 1$$



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Cyflwyno sut i brofi gosodiadau mewn mathemateg.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Ehangu; casglu termau; newid testun.

I ble mae'n arwain?

Lefel A Uned 3: Prawf trwy wrthddywediad.
Cymwysiadau: Profi e.e. theorem Pythagoras.

Theori

Rydych angen gwybod sut i ysgrifennu tri math o brawf yn Uned 1.

- 1) Prawf trwy ddiddwytho.
- 2) Prawf trwy ddisbyddu.
- 3) Gwrthbrawf trwy wrthenghrafft.



Theori

(1) Prawf trwy ddiddwytho

Mae'r math yma o brawf yn defnyddio rhesymu (fel arfer sgiliau algebra) i ddangos bod gosodiad yn gywir.

Enghraifft 1

Profwch fod cyfanswm tri chyfanrif dilynol yn lluosrif 3.

Prawf

Gadewch i'r cyfanrif gyntaf gael ei gynrychioli gan y newidyn n .

Mae'n dilyn mai'r ail gyfanrif yw $n + 1$ a'r trydydd cyfanrif yw $n + 2$.

Swm y tri chyfanrif dilynol yw

$$\begin{aligned} n + (n + 1) + (n + 2) &= 3n + 3 \\ &= 3(n + 1) \end{aligned}$$

Mae'r swm yma wedi ei ysgrifennu fel lluosrif tri (3 llusoi efo $n + 1$) felly mae'r gosodiad yn wir.

QED.

Quod Erat Demonstrandum:
O'r Lladin: "Rwyf wedi dangos beth sydd angen ei ddangos".

(2) Prawf trwy ddisbyddu

Mae'r math yma o brawf yn edrych ar bob achos posib, yn ei dro, ac yn profi bob un. Mae'n gweithio dim ond os oes nifer fach o achosion i ystyried.

Enghraifft 2

Profwch, os yw n yn gyfanrif rhwng 1 a 5, bod $n^2 + 3n + 1$ o hyd yn rhif cysefin.

Prawf

Gadewch i ni ffurfio tabl i ystyried pob achos, yn ei dro.

n	$n^2 + 3n + 1$
1	$1^2 + 3 \times 1 + 1 = 5$
2	$2^2 + 3 \times 2 + 1 = 11$
3	$3^2 + 3 \times 3 + 1 = 19$
4	$4^2 + 3 \times 4 + 1 = 29$
5	$5^2 + 3 \times 5 + 1 = 41$

Mae'r rhifau 5, 11, 19, 29 a 41 i gyd yn rhifau cysefin (eu hunig ffactorau yw 1 a'u hunain), felly rydym wedi profi'r gosodiad.

QED.**(3) Gwrthbrawf trwy wrthenghraifft**

Mae'r math yma o brawf yn profi bod rhywbeth ddim yn wir trwy roi enghraifft lle nad yw'n wir.

Enghraifft 3

Gadewch i'r newidyn n gynrychioli cyfanrif. Mae Twm yn meddwl bod $n^2 + 3n + 1$ o hyd yn rhif cysefin. Profwch, trwy roi gwrthenghraifft briodol, fod hyn yn anghywir.

Prawf

Gadewch i ni ystyried yr achos $n = 6$.

$$\text{Mae } 6^2 + 3 \times 6 + 1 = 55.$$

Nid yw 55 yn rhif cysefin (mae ganddo mwy na 2 ffactor, sef 1, 5, 11 a 55), felly nid yw'r gosodiad yn wir.

QED.



(Uned I Haf 2019)

0	5
---	---

 O wybod bod n yn gyfanrif fel bod $1 \leq n \leq 4$, profwch fod $2n^2 + 5$ yn rhif cysefin. [3]

(Uned I Haf 2018)

0	7
---	---

 Profwch fod

$$\frac{\sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta}{\cos \theta} \equiv \tan \theta. \quad [3]$$

(Deunyddiau Asesu Enghreifftiol)

6. Yn y ddau osodiad isod, mae c a d yn rhifau real. Mae un o'r gosodiadau'n gywir a'r llall yn anghywir.

A O wybod bod $(2c + 1)^2 = (2d + 1)^2$, yna mae $c = d$.

B O wybod bod $(2c + 1)^3 = (2d + 1)^3$, yna mae $c = d$.

(a) Dewiswch y gosodiad sy'n anghywir. Darganfyddwch wrthenghraifft i ddangos bod y gosodiad hwn yn anghywir.

(b) Dewiswch y gosodiad sy'n gywir. Rhowch dystiolaeth i ddangos bod y gosodiad hwn yn gywir.

[5]

(Uned I Haf 2018)

1	4
---	---

Ym mhob un o'r ddau osodiad isod, mae c a d yn rhifau real. Mae un o'r gosodiadau yn gywir, ond mae'r llall yn anghywir.

A : $(2c - d)^2 = 4c^2 - d^2$, ar gyfer holl werthoedd c a d .

B : $8c^3 - d^3 = (2c - d)(4c^2 + 2cd + d^2)$, ar gyfer holl werthoedd c a d .

- a) Nodwch y gosodiad sy'n anghywir. Dangoswch, drwy wrthenghraifft, fod y gosodiad hwn mewn gwirionedd yn anghywir. [2]
- b) Nodwch y gosodiad sy'n gywir. Rhowch brawf (*proof*) i ddangos bod y gosodiad hwn mewn gwirionedd yn gywir. [2]

(Uned I Haf 2022)

0	6
---	---

Ym mhob un o'r ddau osodiad isod, mae x ac y yn rhifau real. Mae un o'r gosodiadau yn gywir ond mae'r llall yn anghywir.

$$A: \quad x^2 + y^2 \geq 2xy, \text{ ar gyfer holl werthoedd real } x \text{ ac } y.$$

$$B: \quad x + y \geq 2\sqrt{xy}, \text{ ar gyfer holl werthoedd real } x \text{ ac } y.$$

- a) Nodwch y gosodiad sy'n anghywir. Darganfyddwch wrthenghraifft i ddangos bod y gosodiad hwn mewn gwirionedd yn anghywir. [3]
- b) Nodwch y gosodiad sy'n gywir. Rhowch brawf (*a proof*) i ddangos bod y gosodiad hwn mewn gwirionedd yn gywir. [2]



(Uned I Haf 2023)

0	8
---	---

Dangoswch, drwy wrthenghraifft, bod y gosodiad canlynol yn anghywir.

“Ar gyfer pob gwerth cyfanrif positif n , mae $n^2 + 1$ yn rhif cysefin.”

[3]

(Uned I Haf 2024)

4. O wybod bod n yn gyfanrif fel bod $1 \leq n \leq 6$, defnyddiwch brawf drwy ddisbyddu (*proof by exhaustion*) i ddangos nad yw $n^2 - 2$ yn rhanadwy â 3. [3]