



## Ffracsiynau

## Rhannol

| Ffwythiant Cymarebol                             | Ffracsiynau Rhannol  |
|--|--|
| $\frac{px + q}{(ax + b)(cx + d)}$                | $\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d}$                        |
| $\frac{px + q}{(ax + b)^2}$                      | $\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2}$                    |
| $\frac{px^2 + qx + r}{(ax + b)(cx + d)(ex + f)}$ | $\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d} + \frac{C}{ex + f}$     |
| $\frac{px^2 + qx + r}{(ax + b)^2(cx + d)}$       | $\frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2} + \frac{C}{cx + d}$ |

Enw:

## Cefndir

### Beth yw'r gwaith?

Gwahanu ffracsiwn algebraidd i roi swm ffracsiynau efo enwaduron llinol. Defnyddio'r gwaith yma i integru ffracsiynau algebraidd.

### Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

**Lefel A Uned 1:** Differu ac integru.  
**Lefel A Uned 3:** Integru pellach.

### I ble mae'n arwain?

**Cymwysiadau:** Lleihau'r sŵn cefndirol mewn clip sain; cywasgu ffeiliau cyfrifiadurol; astudio sut mae cyffur yn dadfeilio yn y corff.

## Theori

### Symleiddio Mynegiadau Cymarebol

Cyn defnyddio'r technegau ar gyfer ffracsiynau algebraidd sy'n dilyn, mae'n bwysig gwirio i weld os yw'n bosib symleiddio mynegiad algebraidd gan ddefnyddio technegau blaenorol.



#### Enghraifft 1

Symleiddiwch  $\frac{15x+20}{(3x+4)(2x-3)}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ateb: } \frac{15x+20}{(3x+4)(2x-3)} &= \frac{5(\cancel{3x+4})}{(\cancel{3x+4})(2x-3)} \\ &= \frac{5}{(2x-3)} \end{aligned}$$

#### Enghraifft 3

Symleiddiwch  $\frac{6x^3-5x^2+2x+3}{2x+1}$ .

Ateb: Trwy ddefnyddio ffrâm rannu,

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 3 \\ 2x + 1 \overline{) 6x^3 - 5x^2 + 2x + 3} \\ \underline{6x^3 + 3x^2} \phantom{+ 3} \\ -8x^2 + 2x + 3 \\ \underline{-8x^2 - 4x} \phantom{+ 3} \\ 6x + 3 \\ \underline{6x + 3} \\ 0 \end{array}$$

Felly  $\frac{6x^3-5x^2+2x+3}{2x+1} = 3x^2 - 4x + 3$ .

#### Enghraifft 2

Symleiddiwch  $\frac{x^2+8x+15}{x^2+2x-15}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ateb: } \frac{x^2+8x+15}{x^2+2x-15} &= \frac{(x+5)(x+3)}{(x+5)(x-3)} \\ &= \frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

#### Enghraifft 4

Symleiddiwch  $\frac{6x^3-5x^2+2x+5}{2x+1}$ .

Ateb: Trwy ddefnyddio ffrâm rannu,

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 3 \\ 2x + 1 \overline{) 6x^3 - 5x^2 + 2x + 5} \\ \underline{6x^3 + 3x^2} \phantom{+ 5} \\ -8x^2 + 2x + 5 \\ \underline{-8x^2 - 4x} \phantom{+ 5} \\ 6x + 5 \\ \underline{6x + 3} \\ 2 \end{array}$$

Felly  $\frac{6x^3-5x^2+2x+5}{2x+1} = 3x^2 - 4x + 3 + \frac{2}{2x+1}$ .





Os yw enwadur yn cynnwys ffactor wedi'i sgwario, rhaid ystyried y ffactor yn unigol ac wedi'i sgwario.

### Enghraifft 6 (C4 Haf 2005)

(a) Mynegwch y ffracsiwn  $\frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)}$  yn nhermau ffracsiyanu rhannol.

(b) Darganfyddwch  $\int \frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)} dx$ .

Ateb: (a) Mae'n bosib ysgrifennu'r ffracsiwn yn y ffurf  $\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$ , ble mae  $A$ ,  $B$  ac  $C$  yn rhifau mae angen eu darganfod.

$$\begin{aligned} \frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)} &\equiv \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \\ 8x^2+x-5 &\equiv \frac{A(2x-1)^2(x+2)}{2x-1} + \frac{B(2x-1)^2(x+2)}{(2x-1)^2} + \frac{C(2x-1)^2(x+2)}{x+2} \\ 8x^2+x-5 &\equiv A(2x-1)(x+2) + B(x+2) + C(2x-1)^2 \end{aligned}$$

Lluosi efo  
 $(2x-1)^2(x+2)$

Trwy amnewid  $x = -2$  i mewn i'r unfathiant, bydd y termau efo'r  $A$  a'r  $B$  yn diflannu, a gallwn gyfrifo gwerth  $C$ .

$$\begin{aligned} 8(-2)^2 + (-2) - 5 &\equiv A(2(-2) - 1)(-2 + 2) + B(-2 + 2) + C(2(-2) - 1)^2 \\ 32 - 2 - 5 &\equiv A(0) + B(0) + C(25) \\ 25 &\equiv 25C \\ C &\equiv 1 \end{aligned}$$

Trwy amnewid  $x = 0.5$  i mewn i'r unfathiant, bydd y termau efo'r  $A$  a'r  $C$  yn diflannu, a gallwn gyfrifo gwerth  $B$ .

$$\begin{aligned} 8(0.5)^2 + 0.5 - 5 &\equiv A(2(0.5) - 1)(0.5 + 2) + B(0.5 + 2) + C(2(0.5) - 1)^2 \\ 2 + 0.5 - 5 &\equiv A(0) + B(2.5) + C(0) \\ -2.5 &\equiv 2.5B \\ B &\equiv -1 \end{aligned}$$

Trwy gymharu cyfernodau  $x^2$ , gallwn gyfrifo gwerth  $A$ .

$$\begin{aligned} 8 &\equiv 2A + 0B + 4C \\ 8 &\equiv 2A + 4(1) \\ 4 &\equiv 2A \\ A &\equiv 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x-1)(x+2) &= \\ 2x^2 + 3x - 2, \\ (2x-1)^2 &= \\ 4x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

Felly  $\frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x+2}$ .

$$\begin{aligned} (b) \int \frac{8x^2+x-5}{(2x-1)^2(x+2)} dx &= \int \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x+2} dx \\ &= \int \frac{2}{2x-1} dx - \int (2x-1)^{-2} dx + \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \ln|2x-1| + \frac{1}{2}(2x-1)^{-1} + \ln|x+2| + c \\ &= \ln|(2x-1)(x+2)| + \frac{1}{2(2x-1)} + c \end{aligned}$$

Pa ddulliau eraill y byddai'n bosib eu defnyddio i ddarganfod gwerth  $A$ ?



A series of horizontal dotted lines for writing.



A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2007)

1. (a) Mynegwch  $\frac{x+3}{x^2(x-1)}$  yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

(b) Darganfyddwch  $\int \frac{x+3}{x^2(x-1)} dx$  . [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.



A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2010)

1. Mae'r ffwythiant  $f$  wedi'i ddiffinio gan

$$f(x) = \frac{8 - x - x^2}{x(x-2)^2}.$$

(a) Mynegwch  $f(x)$  yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

(b) Defnyddiwch eich canlyniad i ran (a) i ddarganfod gwerth  $f'(1)$ . [3]

A series of horizontal dotted lines for writing.



A series of horizontal dotted lines for writing.

(C4 Haf 2014)

2. (a) Mynegwch  $\frac{5x^2 + 7x + 17}{(x + 1)^2(x - 4)}$  yn nhermau ffracsiynau rhannol. [4]

(b) Defnyddiwch eich ateb i ran (a) i fynegi  $\frac{5x^2 + 9x + 9}{(x + 1)^2(x - 4)}$  yn nhermau ffracsiynau rhannol. [2]

A series of horizontal dotted lines for writing.



A series of horizontal dotted lines for writing.

(Uned 3 Haf 2022)

|   |   |
|---|---|
| 1 | 0 |
|---|---|

 Datrysych yr hafaliad

$$\frac{6x^5 - 17x^4 - 5x^3 + 6x^2}{(3x + 2)} = 0. \quad [5]$$



A series of horizontal dotted lines for writing.



- (b) Dangoswch fod  $\int_1^2 f(x) dx = -\ln P$ , lle mae  $P$  yn gyfanrif y mae ei gwerth i'w ddarganfod.

[5]

- (c) Dangoswch fod arwydd  $f(x)$  yn newid yn y cyfwng (*interval*)  $x = 2$  i  $x = 3$ . Esboniwch pam mae'r dull newid arwydd yn methu lleoli un o wreiddiau'r hafaliad  $f(x) = 0$  yn yr achos hwn.

[2]

## Integru fel Terfan Swm

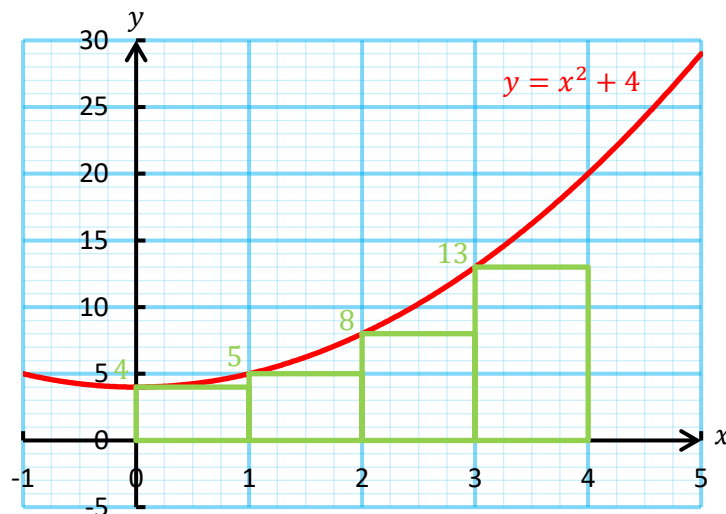
Gallwn ddefnyddio integru i ddarganfod yr arwynebedd wedi'i ffinio gan y gromlin  $y = f(x)$ , yr echelin- $x$ , y llinell  $x = a$  a'r llinell  $x = b$ .

$$\int_a^b y \, dx$$

Byddai'n bosib amcangyfrif yr arwynebedd yma trwy ei hollti i mewn i betryalau o led gyson  $\delta x$ .

### Enghraifft 7

Mae'r diagram isod yn dangos y gromlin  $y = x^2 + 4$  rhwng  $x = -1$  ac  $x = 5$ .



Gallwn amcangyfrif gwerth  $\int_0^4 x^2 + 4 \, dx$  trwy ddefnyddio'r petryalau gwyrdd uchod, i gyd o led 1 uned. Uchder bob petryal yw gwerth y ffwythiant ar ochr chwith y petryal.

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx \approx (1 \times 4) + (1 \times 5) + (1 \times 8) + (1 \times 13)$$

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx \approx 30$$

Gwelwn o'r diagram bod yr amcangyfrif yn tanamcangyfrif, gan fod y gromlin goch yn gorwedd uwchben y petryalau. Go wir, mae

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^4$$

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx = \left[ \frac{4^3}{3} + 4 \times 4 \right] - \left[ \frac{0^3}{3} + 4 \times 0 \right]$$

$$\int_0^4 x^2 + 4 \, dx = \frac{112}{3}$$

Felly, mae ein hamcangyfrif  $\frac{112}{3} - 30 = \frac{22}{3}$  uned sgwâr yn rhy fach. Byddai'n bosib gwella'r amcangyfrif trwy ddefnyddio mwy o betryalau, o led llai.

Yn gyffredinol, os oes gennym  $n$  petryal, i gyd o led  $\delta x$ , yna'r amcangyfrif o'r arwynebedd  $A$  yw

$$A \approx y_1 \delta x + y_2 \delta x + \dots + y_n \delta x$$

