



Uned 3, Pecyn 18

13

Integru

Pellach 2

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Dadwneud rheol y gadwyn a rheol y lluoswm i allu **integru trwy amnewid** ag **integru fesul rhan**.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Lefel A Uned 1: Differu ac integru.
Lefel A Uned 3: Differu ac integru pellach.

I ble mae'n arwain?

Gall integru fesul rhan gael ei ymestyn at ddefnyddio fformiwlâu gostwng sy'n gallu integru mynegiadau fel $\cos^n x$.

Theori

Mewn achosion ble rydym yn ceisio integru rhywbeth sy'n cynnwys **ffwythiant a'i ddeilliad**, gallwn geisio ffeindio'r ateb gan **integru trwy amnewid**. Dangoswn sut mae hyn yn gweithio trwy ystyried yr enghraifft ganlynol.

Enghraifft 1

$$\int (24x^2 + 9)e^{8x^3+9x} dx$$

Rydym yn adnabod yn gyntaf bod yr integryn yn cynnwys y ffwythiant $f(x) = 8x^3 + 9x$ a'i ddeilliad $f'(x) = 24x^2 + 9$. Rydym yn dewis yr amnewid i'w ddefnyddio yn seiliedig ar y ffwythiant hwn: $u = 8x^3 + 9x$.

Trwy ddifferu u , rydym yn cael

$$\frac{du}{dx} = 24x^2 + 9$$

Gallwn ail-drefnu'r uchod i wneud dx yn destun:

$$\begin{aligned} du &= (24x^2 + 9) dx \\ \frac{du}{24x^2 + 9} &= dx \end{aligned}$$

Rydym nawr yn amnewid u yn lle $8x^3 + 9x$ a $\frac{du}{24x^2+9}$ yn lle dx yn yr integryn gwreiddiol:

$$\begin{aligned} &\int (24x^2 + 9)e^{8x^3+9x} dx \\ &= \int \cancel{(24x^2 + 9)} e^u \frac{du}{\cancel{24x^2 + 9}} \\ &= \int e^u du \end{aligned}$$

Mae e^u yn integru (mewn perthynas ag u) i roi e^u . Felly mae

$$\int e^u du = e^u + c$$



Theori

I orffen, rydym yn amnewid yn ôl ar gyfer u :

$$\int e^u du = e^{8x^3+9x} + c$$

Felly mae

$$\int (24x^2 + 9)e^{8x^3+9x} dx = e^{8x^3+9x} + c$$

Ymarfer 1

Defnyddiwch integru trwy amnewid i ddangos bod

$$\int 12x \cos(6x^2 - 4) dx = \sin(6x^2 - 4) + c$$

Yn gyffredinol, gallwn **integru trwy amnewid** pan rydym yn integru mynegiad o'r ffurf $f'(g(x))g'(x)$.

$$\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$$

I ddangos pam fod yr uchod yn wir, gallwn ddefnyddio rheol y gadwyn i ddifferu $y = f(g(x)) + c$.

Gadewch i $u = g(x)$ fel bod $y = f(u) + c$.

Trwy ddifferu, $\frac{du}{dx} = g'(x)$ a $\frac{dy}{du} = f'(u)$.

Rheol y gadwyn:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= f'(u) \times g'(x) \\ \frac{dy}{dx} &= f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

Felly, mae $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + c$, a gallwn feddwl am integru trwy amnewid fel y **gwrthdro** i reol y gadwyn.

Enghraifft 2

Enrhifwch $\int_0^{0.5} x \cos(3x^2 + 5) dx$.

Rydym yn adnabod yn gyntaf bod yr integryn yn cynnwys y ffwythiant $f(x) = 3x^2 + 5$ a **lluosrif** o'i ddeilliad $f'(x) = 6x$. Rydym yn dewis yr amnewid i'w ddefnyddio yn seiliedig ar y ffwythiant hwn: $u = 3x^2 + 5$.

Trwy ddifferu u , rydym yn cael

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

Gallwn ail-drefnu'r uchod i wneud dx yn destun:

$$\begin{aligned} du &= 6x dx \\ \frac{du}{6x} &= dx \end{aligned}$$

Rydym nawr yn amnewid u yn lle $3x^2 + 5$ a $\frac{du}{6x}$ yn lle dx yn yr integryn gwreiddiol:

$$\begin{aligned} &\int_0^{0.5} x \cos(3x^2 + 5) dx \\ &= \int_0^{0.5} \cancel{x} \cos(u) \frac{du}{\cancel{6x}} \\ &= \int_0^{0.5} \frac{1}{6} \cos(u) du \end{aligned}$$

Cyn integru mewn perthynas ag u , rhaid sicrhau fod y **terfannau** hefyd yn nhermau u , nid x . Ar hyn o bryd, rydym yn integru rhwng $x = 0$ ac $x = 0.5$. O gofio bod $u = 3x^2 + 5$,

$$\begin{aligned} \text{Os yw } x = 0 \text{ mae } u &= 3 \times 0^2 + 5 \\ u &= 5 \end{aligned}$$

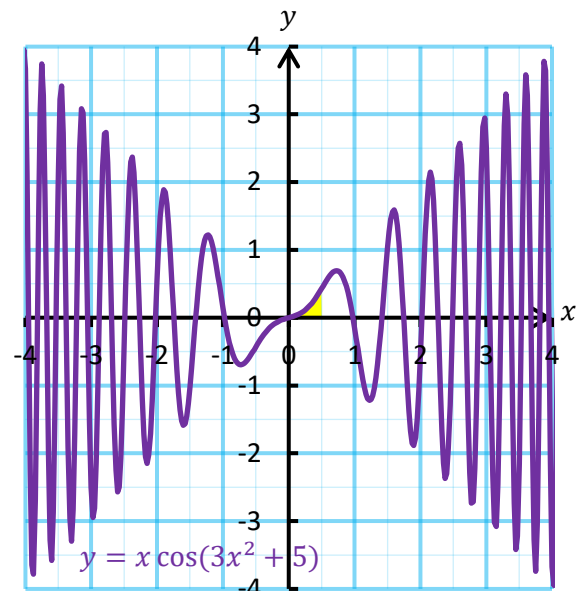
$$\begin{aligned} \text{Os yw } x = 0.5 \text{ mae } u &= 3 \times 0.5^2 + 5 \\ u &= 5.75 \end{aligned}$$

Felly'r integryn yn nhermau u yw

$$\int_5^{5.75} \frac{1}{6} \cos(u) du$$

Mae $\cos(u)$ yn integru (mewn perthynas ag u) i roi $\sin(u)$. Felly mae

$$\begin{aligned} &\int_5^{5.75} \frac{1}{6} \cos(u) du \\ &= \left[\frac{1}{6} \sin(u) \right]_5^{5.75} \\ &= \left(\frac{1}{6} \times \sin(5.75) \right) - \left(\frac{1}{6} \times \sin(5) \right) \\ &= -0.08471317958 - -0.1598207124 \\ &= 0.07510753282 \\ &= 0.075 \text{ uned sgwâr, i 3 lle degol} \end{aligned}$$



Ymarfer 2Enrhifwch $\int_1^2 12x e^{3x^2-4} dx$.**Integru $\sin^2(\theta)$ a $\cos^2(\theta)$**

Fe gofiwn o waith gynt bod

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$$

neu

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$$

Trwy ail-drefnu, mae

$$\frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \cos^2(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

Felly

$$\begin{aligned}
 & \int \cos^2(\theta) d\theta \\
 &= \int \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta \\
 &= \int \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{2} d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \sin(2\theta) + \frac{\theta}{2} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \sin^2(\theta) d\theta \\
 &= \int \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta \\
 &= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) d\theta \\
 &= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta) + c
 \end{aligned}$$

Enghraifft 3(a) Defnyddiwch yr amnewid $x = 4 \sin(\theta)$ i ddangos bod

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)}} dx = \int_0^a b \sin^2 \theta d\theta$$

Ile mae a a b yn gysonion y mae eu gwerthoedd i'w darganfod.(b) **Trwy hyn**, enrhifwch

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)}} dx$$

Rhowch eich ateb yn y ffurf $c\pi + d$, lle mae c a d yn gyfanrifau y mae eu gwerthoedd i'w darganfod.

(a) Os yw $x = 4 \sin(\theta)$ yna $\frac{dx}{d\theta} = 4 \cos(\theta)$ ac mae $x^2 = 16 \sin^2(\theta)$
 $dx = 4 \cos(\theta) d\theta$

Terfannau: Os yw $x = 0$ mae $0 = 4 \sin(\theta)$ Os yw $x = 2\sqrt{2}$ mae $2\sqrt{2} = 4 \sin(\theta)$
 $0 = \sin(\theta)$ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\theta)$
 $\theta = \sin^{-1}(0)$ $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 $\theta = 0$ $\theta = \frac{\pi}{4}$

Felly

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16 \sin^2(\theta)}{\sqrt{(16-16 \sin^2(\theta))}} \times 4 \cos(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16 \sin^2(\theta)}{\sqrt{16(1-\sin^2(\theta))}} \times 4 \cos(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16 \sin^2(\theta)}{\sqrt{16 \cos^2(\theta)}} \times 4 \cos(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16 \sin^2(\theta)}{\cancel{4 \cos(\theta)}} \times \cancel{4 \cos(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \sin^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Felly $a = \frac{\pi}{4}$, $b = 16$.

(b)

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(16-x^2)}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \sin^2(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8(1 - \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8 - 8 \cos(2\theta) d\theta \\ &= [8\theta - 4 \sin(2\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(8 \times \frac{\pi}{4} - 4 \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) \right) - (8 \times 0 - 4 \times \sin(2 \times 0)) \\ &= (2\pi - 4 \times 1) - (0 - 4 \times 0) \\ &= (2\pi - 4) - (0 - 0) \\ &= 2\pi - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= 1 - 2 \sin^2(\theta) \\ \sin^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{aligned}$$

Felly $c = 2$, $d = -4$.

Defnyddiwch amnewidiad priodol i ddangos bod

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Defnyddiwch yr amnewid $u = 3x - 2$ i enrhifo

Y tro yma ni fydd yr x ar ben y ffracsiwn yn canslo.

$$\int_1^2 \frac{x}{(3x-2)^4} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Os } yw u &= 3x - 2 \text{ yna} \quad \frac{du}{dx} = 3 \\ &\quad du = 3 dx \\ &\quad \frac{du}{3} = dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Os } yw \ u = 3x - 2 \text{ yna } u + 2 &= 3x \\ \frac{u+2}{3} &= x \end{aligned}$$

Terfannau: Os yw $x = 1$ mae $u = 3 \times 1 - 2$
 $u = 1$

Os $yw\ x = 2$ mae $u = 3 \times 2 - 2$
 $u = 4$

Felly

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{x}{(3x-2)^4} dx \\ &= \int_1^4 \frac{\left(\frac{u+2}{3}\right)}{u^4} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 \frac{u+2}{u^4} du \\ &= \frac{1}{9} \int_1^4 u^{-3} + 2u^{-4} du \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{u^{-2}}{-2} + \frac{2u^{-3}}{-3} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{9} \left[\left(\frac{4^{-2}}{-2} + \frac{2 \times 4^{-3}}{-3} \right) - \left(\frac{1^{-2}}{-2} + \frac{2 \times 1^{-3}}{-3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[\left(\frac{1}{-32} + \frac{2}{-192} \right) - \left(\frac{1}{-2} + \frac{2}{-3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[-\frac{1}{24} - -\frac{7}{6} \right] \\ &= \frac{1}{9} \times \frac{9}{8} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Defnyddiwch yr amnewid $u = 2x - 3$ i enrhifo

$$\int_2^3 \frac{x}{(2x-3)^3} dx.$$

Dewis amnewidiad priodol

Nid yw'r amnewid yn cael ei roi bob tro mewn cwestiwn arholiad. Dyma **rai** amnewidiadau addas.

Integryn	Amnewid
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$	$x = a \sin \theta$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$	$x = a \sin \theta$
$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$	$x = a \tan \theta$

Fel arall, ceisiwch ddewis amnewid ar gyfer u fel bod

- u a'i ddeilliad yn ymddangos yn yr integryn
- u yn ymddangos mewn cromfach
- u yn ymddangos yn yr enwadur
- u yn ffwythiant sydd wedi'i godi i'r pŵer uchaf

Integru Fesul Rhan

Yn y pecyn gynt ar ddifferu pellach, fe welsom **reol y lluoswm**, sef y dechneg ar gyfer differu mynegiad o'r ffurf $y = uv$.

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Gallwn integru'r uchod mewn perthynas as x i roi'r canlynol.

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$y = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$uv - \int v \frac{du}{dx} dx = \int u \frac{dv}{dx} dx$$

Mae hwn yn cael ei roi yn y llyfryn fformiwlâu.

Trwy gyfnwio ochrau, cawn y fformiwla ar gyfer **integru fesul rhan**:

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

Defnyddiwn y dechneg hon i integru mynegiad sy'n lluoswm o ddau ddarn, u a $\frac{dv}{dx}$.

Fel rheol, dewiswch u fel y ffwythiant sy'n ymddangos **uchaf** yn y rhestr 'LIATE' ganlynol.

L	Ffwythiannau L ogarithmig, e.e. $\ln(3x)$
I	Ffwythiannau Trigonometrig Gwrthdro (I nverse), e.e. $\tan^{-1}(2x)$
A	Ffwythiannau A lgebraidd (polynomialau syml), e.e. $3x^2 - 5x + 8$
T	Ffwythiannau T rigonometrig, e.e. $\sin(5x)$
E	Ffwythiannau E sbonyddol, e.e. e^{7x}

Enghraifft 5

Darganfyddwch

$$\int 5x \cos x \, dx.$$

Ateb: Mae'r integryn yn lluoswm dau fynegiad, felly gallwn geisio defnyddio integru fesul rhan i'w dacio.

Gadewch i

$$u = 5x \quad \frac{dv}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = 5 \quad v = \sin x$$

Yna

$$\begin{aligned} \int u \frac{dv}{dx} dx &= uv - \int v \frac{du}{dx} dx \\ \int 5x \cos x \, dx &= 5x \times \sin x - \int \sin x \times 5 \, dx \\ \int 5x \cos x \, dx &= 5x \sin x - \int 5 \sin x \, dx \\ \int 5x \cos x \, dx &= 5x \sin x - -5 \cos x + c \\ \int 5x \cos x \, dx &= 5x \sin x + 5 \cos x + c \\ \int 5x \cos x \, dx &= 5(x \sin x + \cos x) + c \end{aligned}$$



Theori

Ymarfer 5

Darganfyddwch

$$\int 7xe^{3x} dx.$$

Enghraifft 6

Darganfyddwch

$$\int x^2 e^x dx.$$

Ateb: Gadewch i

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dv}{dx} = e^x$$

$$v = e^x$$

Yna

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 \times e^x - \int e^x \times 2x dx$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

Nawr ar gyfer $\int 2xe^x dx$ rhaid integru fesul rhan eto.

Gadewch i

$$u = 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dv}{dx} = e^x$$

$$v = e^x$$

Yna

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$\int 2x e^x dx = 2x \times e^x - \int e^x \times 2 dx$$

Felly

Gallwn barhau i
adio'r cysonyn
integru (Pam?)

Darganfyddwch

Y 10 Uchaf

(C4 Haf 2010)

7. (a) Darganfyddwch $\int x^3 \ln x \, dx$. [4]

(b) Defnyddiwch yr amnewid $u = 2x - 3$ i enrhifo $\int_1^2 x(2x - 3)^4 \, dx$. [5]

Handwriting practice area with 30 horizontal dotted lines.

7. (a) Defnyddiwch yr amnewid $u = 2x - 1$ i enrhifo

$$\int_0^1 x(2x-1)^9 dx \quad . \quad [5]$$

(b) (i) Darganfyddwch $\int x \cos 2x \, dx$. [4]

(ii) Defnyddiwch y canlyniad yn (b)(i) i ddarganfod

$$\int x \cos^2 x \, dx \quad . \quad [3]$$

Handwriting practice area consisting of 30 horizontal dotted lines.

7. (a) Darganfyddwch $\int x \sin 2x \, dx$. [4]

$$\int_0^2 \frac{x}{(5-x^2)^3} dx. \quad [4]$$

7. (a) Darganfyddwch $\int x e^{-2x} dx$. [4]

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+3\ln x)} dx.$$

Rhowch eich ateb yn gywir i bedwar lle degol. [4]

6. (a) Darganfyddwch $\int (2x+1)e^{-3x}dx$. [4]

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{4+5\tan x}}{\cos^2 x} dx. \quad [4]$$

7. (a) Darganfyddwch $\int x^4 \ln 2x \, dx$. [4]

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(10 \cos x - 1)} \sin x \, dx. \quad [4]$$

(C4 Haf 2008)

6. (a) Darganfyddwch $\int (3x + 1) e^{2x} dx$. [4]

(b) Defnyddiwch yr amnewid $x = 3\sin\theta$ i ddangos bod

$$\int_{1.5}^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \int_a^b k \cos^2 \theta d\theta \quad ,$$

lle mae gwerthoedd y cysonion a , b a k i'w darganfod.

Trwy hyn, enrhifwch $\int_{1.5}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$. [8]

Handwriting practice area with 30 horizontal dotted lines.

(C4 Haf 2007)

7. (a) Darganfyddwch $\int x^2 \ln x \, dx$. [4]

(b) Defnyddiwch yr amnewid $x = 2\sin\theta$ i ddangos bod

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = \int_0^a k \sin^2 \theta \, d\theta ,$$

lle mae gwerthoedd a a k i'w darganfod.

Trwy hyn, neu fel arall, enrhifwch $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$. [8]

1	8
---	---

$$\int \frac{x^2}{(x+3)^4} dx. \quad [5]$$

b) Trwy hyn enrhifwch $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+3)^4} dx$. [2]

1	4	Enrhifwch
---	---	-----------

b) $\int_0^1 \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} dx$. [6]

Handwriting practice area with 30 horizontal dotted lines.

(Uned 3 Haf 2019)

a) Darganfyddwch $\int (e^{2x} + 6\sin 3x) dx$. [2]

b) Darganfyddwch $\int 7(x^2 + \sin x)^6(2x + \cos x) dx$. [1]

c) Darganfyddwch $\int \frac{1}{x^2} \ln x dx$. [4]

ch) Defnyddiwch yr amnewid $u = 2\cos x + 1$ i enrhifo

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(2 \cos x + 1)^2} dx . \quad [4]$$

