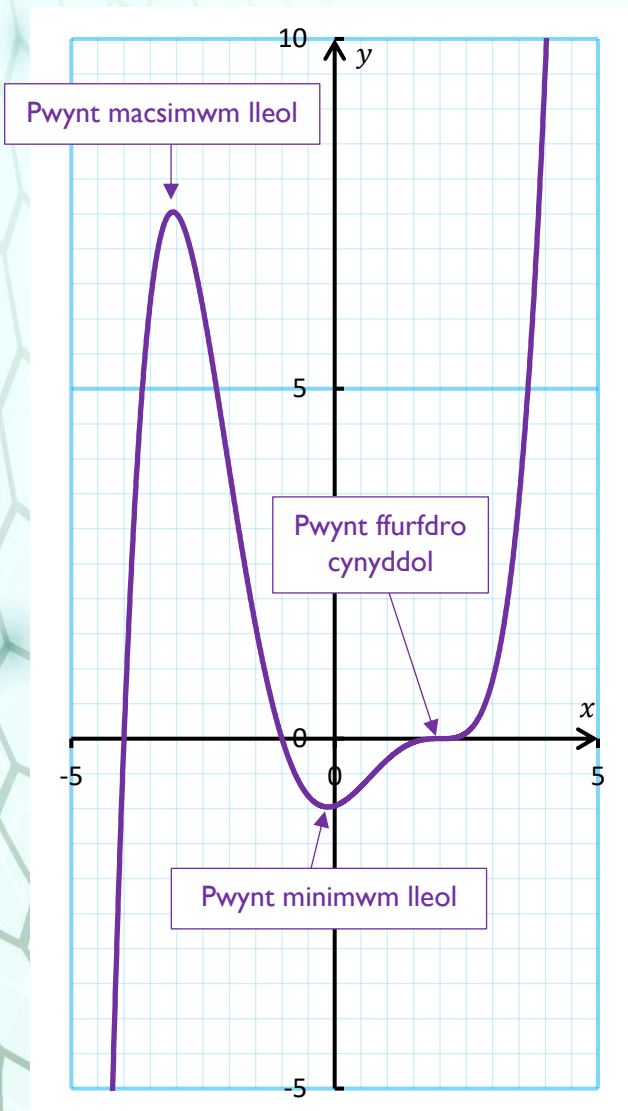




Pwyntiau

Arhosol



Enw:

Cefndir

Beth yw'r gwaith?

Sut i ffeindio pwyntiau minimwm, macsimwm a ffurfdro ar gyfer ffwythiant benodol.

Beth sydd ei angen cyn cychwyn?

Gwaith TGAU: Datrys hafaliadau llinol.
Lefel A Uned 1: Differu; datrys hafaliadau cwadratig.

I ble mae'n arwain?

Uned 3: Darganfod pwyntiau ffurfdro nad ydynt yn bwyntiau arhosol.
Cymwysiadau: Darganfod yr elw mwyaf neu'r gost lleiaf ym myd busnes.

Theori

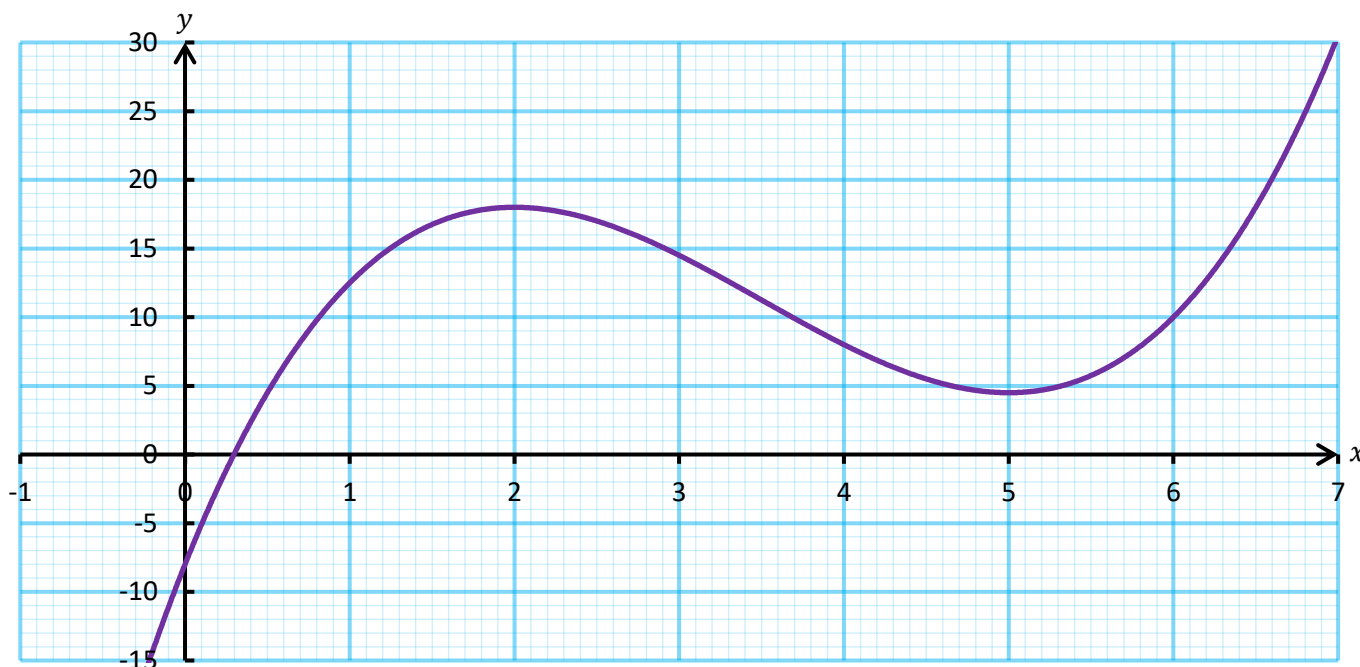
Yr Ail Ddeilliad

O gael ffwythiant o'r ffurf $y = f(x)$, mae'r graddiant $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ yn dweud wrthym beth yw **cyfradd newid** y ar gyfer gwerth penodol o x . Mae hyn yn cynrychioli faint y byddai y yn newid wrth symud un uned ar draws i'r dde.



Theori

Er enghraifft, ystyriwch y graff isod sy'n dangos y ffwythiant $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$.



Gallwn ddifferu'r ffwythiant i roi $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$. Mae'r tabl isod yn dangos rhai o werthoedd $\frac{dy}{dx}$ ar gyfer gwerthoedd penodol o x .

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$\frac{dy}{dx}$	54	41.25	30	20.25	12	5.25	0	-3.75	-6	-6.75	-6	-3.75	0	5.25	12	20.25	30

Gwelwn fod $\frac{dy}{dx}$ weithiau'n bositif, sy'n golygu bod cyfradd newid y yn bositif, ac felly mae'r gromlin yn **cynyddu**.
Mewn nodiant set, mae'r gromlin yn cynyddu ar gyfer y gwerthoedd canlynol o x :

$$\{x: x < 2\} \cup \{x: x > 5\}.$$

Ar adegau eraill, mae $\frac{dy}{dx}$ yn negatif, sy'n golygu bod cyfradd newid y yn negatif, ac felly mae'r gromlin yn **gostwng**.
Mewn nodiant set, mae'r gromlin yn lleihau ar gyfer y gwerthoedd canlynol o x :

$$\{x: x > 2\} \cap \{x: x < 5\}.$$

Mae'r **ail ddeilliad** $\frac{d^2y}{dx^2}$ yn cynrychioli **cyfradd newid** $\frac{dy}{dx}$, sef faint mae'r graddiant yn newid ar adeg benodol.

Gallwn ei ddarganfod trwy ddifferu $\frac{dy}{dx}$, ac rydym yn defnyddio'r nodiant $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ ar ei gyfer.

Yn yr achos uchod ble mae $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$, yr ail ddeilliad yw $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 21$. Mae'r tabl isod yn dangos rhai o werthoedd $\frac{d^2y}{dx^2}$ ar gyfer gwerthoedd penodol o x .

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-27	-24	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21

Hyd at 3.5, mae gwerth $\frac{dy}{dx}$ yn gostwng, ac yna ar ôl 3.5, mae gwerth $\frac{dy}{dx}$ yn cynyddu.

Ymarfer 1

Cwblhewch y tabl canlynol.

y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
$8x^3$		
$20x^5$		
$x^3 + 4x^2 - 3x + 5$		
\sqrt{x}		
$\frac{4}{x^2}$		

Ymarfer 2

Ar gyfer y ffwythiant $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$, darganfyddwch pryd mae'r ffwythiant yn cynyddu, a phryd mae'n gostwng. Ysgrifennwch eich atebion mewn nodiant set.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

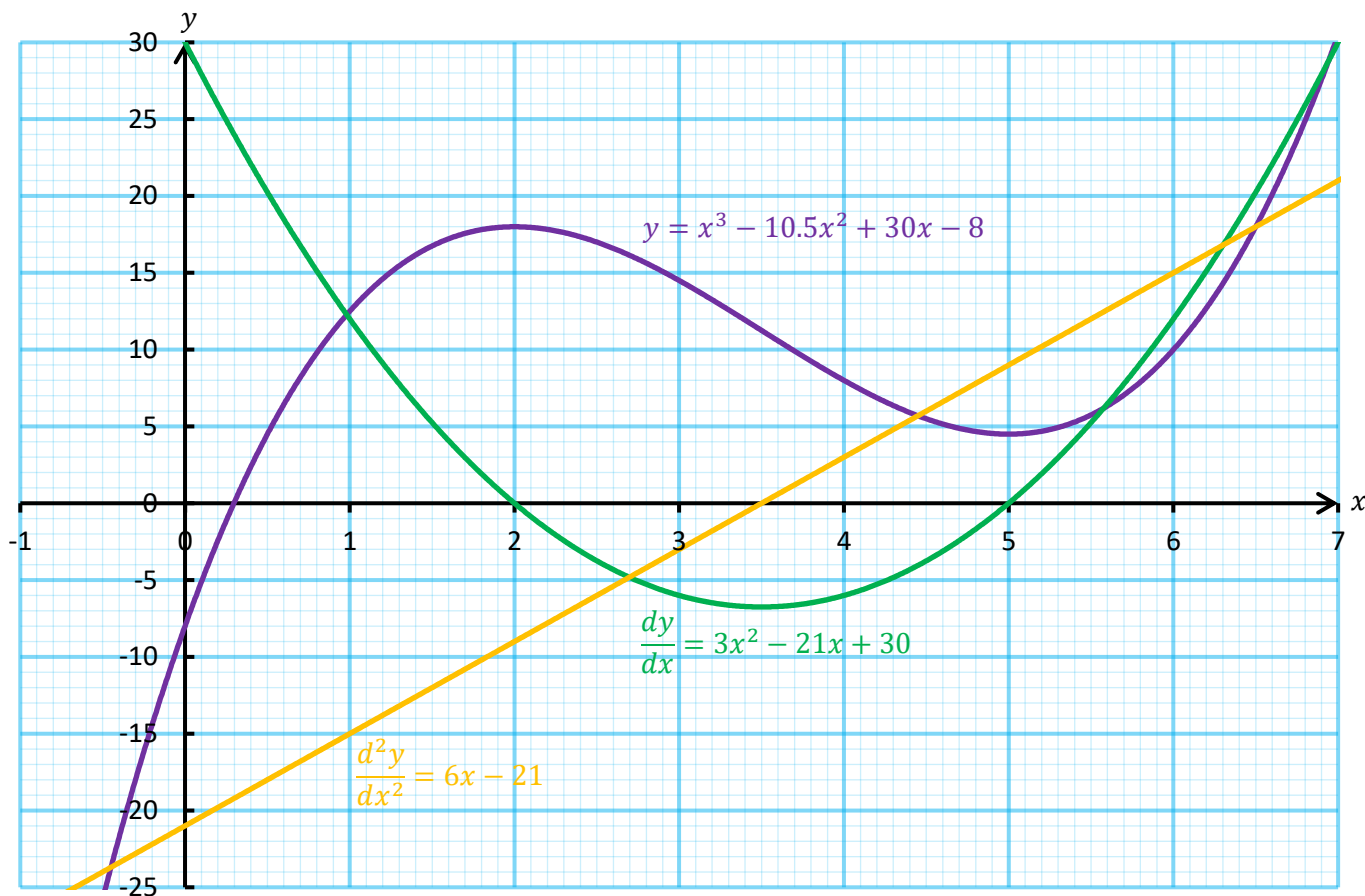
.....

.....

Pwyntiau Arhosol

Gadewch i ni eto ystyried yr enghraifft o'r tudalennau blaenorol, ble'r oedd $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$,

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 21x + 30$, a $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 21$. Mae'r graff isod yn dangos y tri ffwythiant hyn, a'r cysylltiadau rhyngddynt.



Mae unrhyw bwynt ble mae $\frac{dy}{dx} = 0$ yn cael ei alw'n **bwynt arhosol**. Ar y pwyntiau hyn, mae'r tangiad i'r gromlin yn llorweddol, ac nid yw'r gromlin yn cynyddu neu'n lleihau. Ar gyfer y gromlin $y = x^3 - 10.5x^2 + 30x - 8$, gwelwn o'r graff uchod fod dau bwynt arhosol, sef ble mae $x = 2$ a ble mae $x = 5$. Ar gyfer y pwynt arhosol cyntaf, ble mae $x = 2$,

- mae'r **gromlin biws** yn cyrraedd mocsimwm lleol;
- gwerth y **gromlin werdd** yw sero;
- mae gwerth y **linell oren** yn negatif.

Ar gyfer yr ail bwynt arhosol, ble mae $x = 5$,

- mae'r **gromlin biws** yn cyrraedd minimwm lleol;
- gwerth y **gromlin werdd** yw sero;
- mae gwerth y **linell oren** yn positif.

Gallwn ddefnyddio'r wybodaeth uchod i ffurfio strategaeth gychwynnol i ddarganfod cyfesurynnau a natur pwyntiau arhosol cromlin:

- Datrysych $\frac{dy}{dx} = 0$ i ddarganfod cyfesurynnau- x y pwyntiau arhosol.
- Amnewidiwch yn ôl i mewn i y i ddarganfod y cyfesurynnau- y .
- Amnewidiwch i mewn i $\frac{d^2y}{dx^2}$ i ddarganfod natur y pwyntiau arhosol. Os yw $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, yna mae'r pwynt arhosol yn bwynt minimwm lleol. Os yw $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, yna mae'r pwynt arhosol yn bwynt mocsimwm lleol.

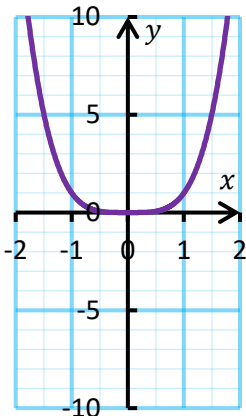
A series of horizontal dotted lines for writing.

Ail Ddeilliad Sero

Mewn achos ble mae $\frac{dy}{dx} = 0$ a $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, nid yw'n bosib dod i gasgliad yn syth ynghylch pa fath o bwynt arhosol sydd gennym. Yn hytrach, mae angen edrych ar arwydd $\frac{dy}{dx}$ bob ochr i'r pwynt arhosol.

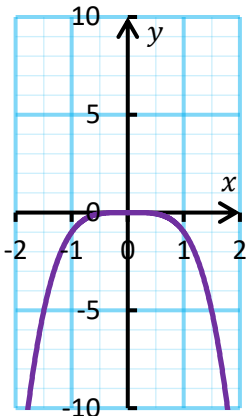
Enghraifft 2

(a) $y = x^4$



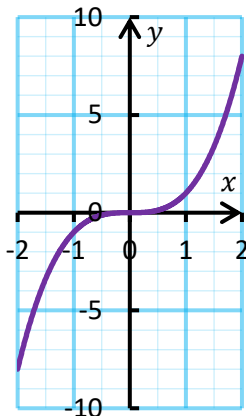
$\frac{dy}{dx} = 4x^3$

(b) $y = -x^4$



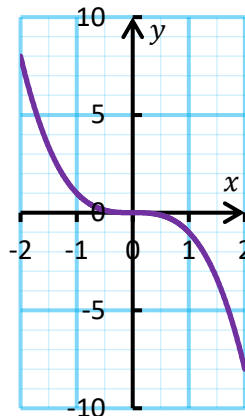
$\frac{dy}{dx} = -4x^3$

(c) $y = x^3$



$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

(ch) $y = -x^3$



$\frac{dy}{dx} = -3x^2$

Mae pwyntiau arhosol yn digwydd pan fo $\frac{dy}{dx} = 0$.

$4x^3 = 0$
 $x^3 = 0$
 $x = \sqrt[3]{0}$
 $x = 0$

$-4x^3 = 0$
 $x^3 = 0$
 $x = \sqrt[3]{0}$
 $x = 0$

$3x^2 = 0$
 $x^2 = 0$
 $x = \pm\sqrt{0}$
 $x = 0$

$-3x^2 = 0$
 $x^2 = 0$
 $x = \pm\sqrt{0}$
 $x = 0$

Ym mhob achos, mae pwynt arhosol ar y gromlin ble mae $x = 0$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2$

Os yw $x = 0$, mae

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12 \times 0^2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -12x^2$

Os yw $x = 0$, mae

$\frac{d^2y}{dx^2} = -12 \times 0^2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

Os yw $x = 0$, mae

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 \times 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$

Os yw $x = 0$, mae

$\frac{d^2y}{dx^2} = -6 \times 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

Ym mhob achos, mae $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Nid yw hyn yn bositif (pwynt minimwm) neu'n negatiff (pwynt macsimwm), felly mae angen i ni edrych ar arwydd $\frac{dy}{dx}$ bob ochr i'r pwynt arhosol, er mwyn i ni adnabod y math o bwynt arhosol.

Os yw $x = -1$, mae

$\frac{dy}{dx} = 4 \times (-1)^3$

$\frac{dy}{dx} = -4$ (negatiff)

Os yw $x = 1$, mae

$\frac{dy}{dx} = 4 \times 1^3$

$\frac{dy}{dx} = 4$ (positiff)

Graddiant negatiff gynt a phositiff wedyn felly pwynt **minimwm** yw (0, 0).

Os yw $x = -1$, mae

$\frac{dy}{dx} = -4 \times (-1)^3$

$\frac{dy}{dx} = 4$ (positiff)

Os yw $x = 1$, mae

$\frac{dy}{dx} = -4 \times 1^3$

$\frac{dy}{dx} = -4$ (negatiff)

Graddiant positiff gynt a negatiff wedyn felly pwynt **macsimwm** yw (0, 0).

Os yw $x = -1$, mae

$\frac{dy}{dx} = 3 \times (-1)^2$

$\frac{dy}{dx} = 3$ (positiff)

Os yw $x = 1$, mae

$\frac{dy}{dx} = 3 \times 1^2$

$\frac{dy}{dx} = 3$ (positiff)

Graddiant positiff gynt a phositiff wedyn felly pwynt **ffurfdro cynyddol** yw (0, 0).

Os yw $x = -1$, mae

$\frac{dy}{dx} = -3 \times (-1)^2$

$\frac{dy}{dx} = -3$ (negatiff)

Os yw $x = 1$, mae

$\frac{dy}{dx} = -3 \times 1^2$

$\frac{dy}{dx} = -3$ (negatiff)

Graddiant negatiff gynt a negatiff wedyn felly pwynt **ffurfdro gostyngol** yw (0, 0).



(CI Haf 2007)

10. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = x^3 - x^2 - x + 2.$$

Darganfyddwch gyfesurynnau pwyntiau arhosol C a darganfyddwch natur pob un o'r pwyntiau arhosol hyn. [7]

(CI Haf 2008)

9. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5.$$

Darganfyddwch gyfesurynnau a natur pob un o bwyntiau arhosol C .

[7]

(CI Haf 2010)

10. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = \frac{1}{2}x^3 - 6x + 3.$$

Darganfyddwch gyfesurynnau a natur pob un o bwyntiau arhosol C .

[6]

(CI Haf 2009)

10. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5.$$

- (a) Dangoswch mai un pwynt arhosol yn unig sydd gan C . Darganfyddwch gyfesurynnau'r pwynt hwn. [4]
- (b) Gwireddwch mai pwynt ffurfdro (*inflection*) yw'r pwynt arhosol hwn. [2]

(CI Gaeaf 2011)

10. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = x^3 + kx^2 - 9x - 10,$$

lle mae k yn gysonyn. Mae'r ddau bwynt arhosol ar graff C wedi'u dynodi gan Q ac R . Cyfesuryn- x Q yw -1 .

- (a) Darganfyddwch $\frac{dy}{dx}$ a thrwy hyn, dangoswch fod $k = -3$. [3]
- (b) Darganfyddwch gyfesuryn- x R . [2]
- (c) Darganfyddwch natur pob un o'r pwyntiau arhosol Q ac R . [2]

(CI Gaeaf 2005)

3. Hafaliad y gromlin C yw

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 12.$$

- (a) Darganfyddwch gyfesurynnau pwyntiau arhosol C a darganfyddwch natur pob un o'r pwyntiau hyn. [7]
- (b) Brasluniwch C . [3]
- (c) Nodwch, gan roi rheswm, nifer gwreiddiau real yr hafaliad

$$2x^3 - 6x^2 + 12 = 0. \quad [2]$$

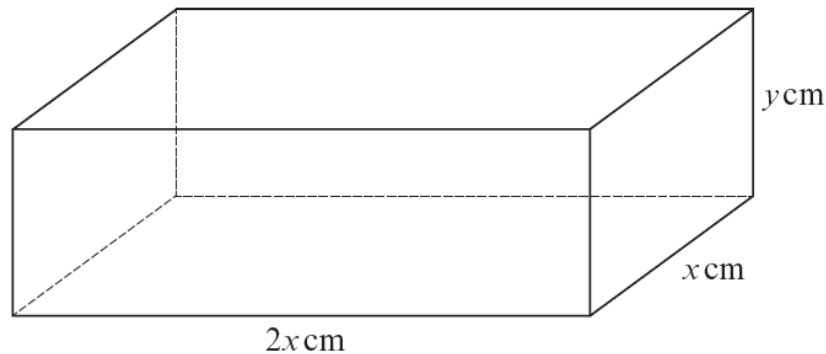
A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2013)

10. Mae'r diagram yn dangos bocs **caeëdig** ar ffurf ciwboid. Hyd y bocs yw $2x$ cm, ei led yw x cm a'i uchder yw y cm.



Cyfanswm arwynebedd arwyneb y bocs yw 108 cm^2 .

- (a) (i) Ysgrifennwch hafaliad yn cynnwys x ac y a thrwy hyn dangoswch fod

$$xy = 18 - \frac{2}{3}x^2.$$

- (ii) Trwy hyn dangoswch fod cyfaint $V \text{ cm}^3$ y bocs wedi'i roi gan

$$V = 36x - \frac{4}{3}x^3.$$

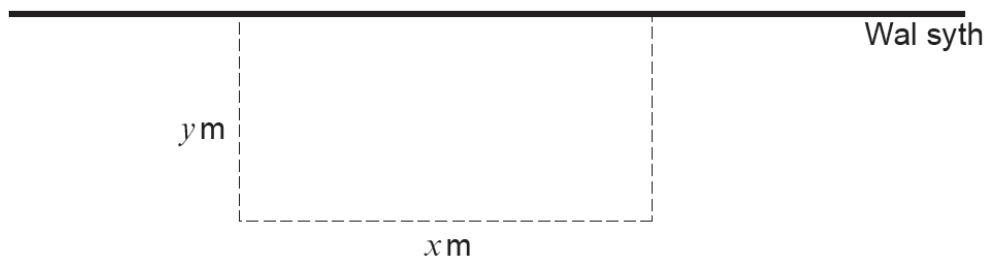
[3]

- (b) Darganfyddwch werth macsimwm V , gan ddangos mai gwerth macsimwm yw'r gwerth yr ydych wedi'i ddarganfod. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.

(CI Haf 2015)

10. Mae ffermwr defaid eisiau adeiladu corlan (*enclosure*) betryal ar gyfer ei anifeiliaid. Mae e'n penderfynu defnyddio wal syth ar gyfer un ochr o'r gorlan a ffens ar gyfer y tair ochr arall. Mae ef eisiau i arwynebedd y gorlan fod yn 800m^2 . Hydoedd ochrau'r gorlan betryal yw $x\text{ m}$ ac $y\text{ m}$, fel yn y diagram, a chyfanswm hyd y **ffens** yw $L\text{ m}$.



- (a) Dangoswch fod $L = x + \frac{1600}{x}$. [2]
- (b) Darganfyddwch werth minimwm L , gan ddangos mai gwerth minimwm yw'r gwerth rydych wedi'i ddarganfod. [5]

A series of horizontal dotted lines for writing.



(Uned I Haf 2024)

12. Mae gan gromlin C yr hafaliad $y = -x^3 + 12x - 20$.

- (a) Darganfyddwch gyfesurynnau pwyntiau arhosol (*stationary points*) C a darganfyddwch eu natur. [7]

A series of horizontal dotted lines for writing the answer.

