

Uned 5 Pellach Haf 2023

1) a) $\sum x = 2759$

$$\bar{\mu} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{2759}{9}$$

$$= 306.\dot{5}$$

$$\sum x^2 = 846081$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} (\sum x^2 - n\bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{9-1} \left(846081 - 9 \times \left(\frac{2759}{9} \right)^2 \right)$$

$$= 36.\dot{7}$$

b) Gadewch i X ddynodi'r amser mae tegell Alun yn cymryd i ferwi.
 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$H_0: \mu = 305 \text{ yn erbyn}$$

$$H_1: \mu > 305.$$

Gadewch i $\bar{X}$ ddynodi'r sampl o 9.

Gan dybio bod H_0 yn wir, mae $\bar{X} \sim N\left(305, \frac{\sigma^2}{9}\right)$

$$Y \text{ gwerth-}p \text{ yw } P(\bar{X} > 305)$$

$$= P\left(Z > \frac{306.\dot{5} - 305}{\sqrt{\frac{36.\dot{7}}{9}}}\right)$$

$$= P(Z > 0.7695095939)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.7695095939)$$

$$= 1 - 0.77935$$

(o'r tablau ystadegol)

$$= 0.22065$$

Gan fod 0.22065 yn fwy na 0.05 nid oes tystiolaeth ddigonol i wrthod H_0 . Felly nid oes tystiolaeth digonol i ddwedu bod y tegell yn hen degell.

c) Faint o ddŵr sy'n cael ei roi yn y tegell i ferwi.

Uned 5 Pellach Itaf 2023

- 2) X : cymedr μ , amrywiant σ^2 .
 Y : cymedr μ , amrywiant $K\sigma^2$. (X, Y yn annibynnol.)
 $\bar{X} = \frac{1}{20}(X_1 + X_2 + \dots + X_{20})$.
 $\bar{Y} = \frac{1}{25}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{25})$.

a) $T_1 = \frac{3\bar{X} + 7\bar{Y}}{10}$

$$\begin{aligned} E(T_1) &= E\left(\frac{3\bar{X} + 7\bar{Y}}{10}\right) \\ &= E\left(\frac{3}{10}\bar{X} + \frac{7}{10}\bar{Y}\right) \\ &= \frac{3}{10}E(\bar{X}) + \frac{7}{10}E(\bar{Y}) \\ &= \frac{3}{10}\mu + \frac{7}{10}\mu \\ &= \mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

Felly mae T_1 yn amcangyfrifyn diduedd ar gyfer μ .

b) $T_2 = \frac{\bar{X} + a^2\bar{Y}}{1+a}$, $a > 0$

$$\begin{aligned} E(T_2) &= E\left(\frac{\bar{X} + a^2\bar{Y}}{1+a}\right) \\ &= E\left(\frac{1}{1+a}\bar{X} + \frac{a^2}{1+a}\bar{Y}\right) \\ &= \frac{1}{1+a}E(\bar{X}) + \frac{a^2}{1+a}E(\bar{Y}) \\ &= \frac{1}{1+a}\mu + \frac{a^2}{1+a}\mu \\ &= \mu\left(\frac{1}{1+a} + \frac{a^2}{1+a}\right) \\ &= \mu\left(\frac{1+a^2}{1+a}\right). \end{aligned}$$

I fod yn amcangyfrifyn diduedd rhaid bod

$$\mu \left(\frac{1+a^2}{1+a} \right) = \mu$$

$$\frac{1+a^2}{1+a} = 1$$

$$1+a^2 = 1+a$$

$$a^2 = a$$

Naill ai $a=0$ neu $a=1$.

Gan fod a yn bositif, rhaid bod $a=1$.

$$\text{Felly } T_2 = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \text{Var}(T_1) &= \text{Var}\left(\frac{3\bar{X} + 7\bar{Y}}{10}\right) \\ &= \text{Var}\left(\frac{3}{10}\bar{X} + \frac{7}{10}\bar{Y}\right) \\ &= \left(\frac{3}{10}\right)^2 \text{Var}(\bar{X}) + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \text{Var}(\bar{Y}) \\ &= \frac{9}{100} \times \frac{\sigma^2}{20} + \frac{49}{100} \times \frac{K\sigma^2}{25} \\ &= \frac{9}{2000} \sigma^2 + \frac{49K}{2500} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \left(\frac{9}{2000} + \frac{49K}{2500} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_2) &= \text{Var}\left(\frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}\right) \\ &= \text{Var}\left(\frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{Y}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{Var}(\bar{X}) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{Var}(\bar{Y}) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{\sigma^2}{20} + \frac{1}{4} \times \frac{K\sigma^2}{25} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2}{80} + \frac{K\sigma^2}{100}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{80} + \frac{K}{100} \right)$$

ch) Rhaid cael $\text{Var}(T_1) = \text{Var}(T_2)$

$$\sigma^2 \left(\frac{9}{2000} + \frac{49K}{2500} \right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{80} + \frac{K}{100} \right)$$

$$\frac{9}{2000} + \frac{49K}{2500} = \frac{1}{80} + \frac{K}{100}$$

$$\frac{49K}{2500} - \frac{K}{100} = \frac{1}{80} - \frac{9}{2000}$$

$$\frac{6}{625} K = \frac{1}{125}$$

$$K = \frac{1}{125} \times \frac{625}{6}$$

$$K = \frac{5}{6} \quad \checkmark$$

d) $T_3 = (1-\lambda)\bar{X} + \lambda\bar{Y}$

$$\text{Var}(T_3) = \text{Var}((1-\lambda)\bar{X} + \lambda\bar{Y})$$

$$= (1-\lambda)^2 \text{Var}(\bar{X}) + \lambda^2 \text{Var}(\bar{Y})$$

$$= (1-\lambda)^2 \times \frac{\sigma^2}{20} + \lambda^2 \times \frac{K\sigma^2}{25}$$

$$= \frac{(1-\lambda)^2 \sigma^2}{20} + \frac{K\lambda^2 \sigma^2}{25}$$

Pryd mae hun ar ei leiaf?

Gradewch i ni ddifffferu meun perthynas â λ .

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\text{Var}(T_3))}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{(1-\lambda)^2 \sigma^2}{20} + \frac{K\lambda^2 \sigma^2}{25} \right) \\
 &= \frac{2(1-\lambda)(-1) \sigma^2}{20} + \frac{2K\lambda \sigma^2}{25} \\
 &= \frac{-\sigma^2(1-\lambda)}{10} + \frac{2K\lambda \sigma^2}{25}
 \end{aligned}$$

Pwyntiau arhosol $\Rightarrow \frac{d(\text{Var}(T_3))}{d\lambda} = 0$

$$\frac{-\sigma^2(1-\lambda)}{10} + \frac{2K\lambda \sigma^2}{25} = 0$$

$$\frac{2K\lambda \cancel{\sigma^2}}{25} = \frac{\cancel{\sigma^2}(1-\lambda)}{10}$$

$$\frac{2K\lambda}{25} = \frac{1-\lambda}{10}$$

$$20K\lambda = 25(1-\lambda)$$

$$20K\lambda = 25 - 25\lambda$$

$$20K\lambda + 25\lambda = 25$$

$$\lambda(20K + 25) = 25$$

$$\lambda = \frac{25}{20K + 25}$$

$$\lambda = \frac{5}{4K + 5}$$

Ydi hwn yn bwynt minimum?

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2(\text{Var}(T_3))}{d\lambda^2} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{-\sigma^2(1-\lambda)}{10} + \frac{2K\lambda \sigma^2}{25} \right) \\
 &= \frac{\sigma^2}{10} + \frac{2K\sigma^2}{25}
 \end{aligned}$$

Mae K yn gysonyn positif felly mi fydd hwn yn positif.
Felly mae $\lambda = \frac{5}{4K+5}$ yn rhoi gwerth minimum.

Uned 5 Pellach Haf 2023

3) Curiad calon wrth orffwys 400m: $X \sim N(\mu, 4.7^2)$.

a)
$$\bar{X} = \frac{1}{90} (X_1 + X_2 + \dots + X_{90})$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{4014}{90}$$

$$= 44.6$$

Felly $\bar{X} \sim N(44.6, \frac{4.7^2}{90})$

Cyfunng hyder 99% felly $\frac{1}{2} = 0.5\%$ ym mhob cynffon.
o'r tablau, $P(Z \leq 2.576) = 0.995$

$$\text{Cyfunng hyder 99\%} = \bar{x} \pm 2.576 \text{SE}(\bar{x})$$

$$= 44.6 \pm 2.576 \times \sqrt{\frac{4.7^2}{90}}$$

$$= 44.6 \pm 1.276210936$$

$$= [43.3, 45.9] \text{ i un lle degol.}$$

b) Gyda cyfunng hyder llai bydd lled y cyfunng yn llai.

c) Curiad calon wrth orffwys y disgen: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

Cyfunng hyder 95% ar gyfer cymed yr RHR: $[49.4, 52.6]$

Cyfunng hyder 95% felly $\frac{5}{2} = 2.5\%$ ym mhob cynffon.
o'r tablau, $P(Z \leq 1.960) = 0.975$

$$\text{Cyfunng hyder 95\%} = \bar{y} \pm 1.960 \text{SE}(\bar{Y})$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cyfunng hyder } 95\% &= \bar{y} \pm 1.960 \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{100}} \\
 &= \bar{y} \pm 1.960 \times \frac{\sigma}{10} \\
 &= \bar{y} \pm 0.196\sigma
 \end{aligned}$$

Lled y cyfunng yw dwbl 0.196σ.

$$\text{Felly } 52.6 - 49.4 = 2 \times 0.196\sigma$$

$$3.2 = 0.392\sigma$$

$$\frac{3.2}{0.392} = \sigma$$

$$\sigma = 8.163265306 \dots$$

$$\sigma = \underline{8.16} \text{ i 2 le degol}$$

ch) Mae'r cyfngau hyder yn awgrymu bod cyfartaledd curiad calon gorffnys yr athletuwr disgen yn fwy na chyfartaledd curiad calon gorffnys yr athletuwr 400m.

Uned 5 Pellach Itaf 2023

4) Data cyn meun brefn:

0, 344, 351, 457, 480, 741, 781, 876, 1008

Y canolrif yw 480.

H_0 : Canolrif y dilgynwyr 'ar ôl' yw 480 yn erbyn

H_1 : Canolrif y dilgynwyr 'ar ôl' yn fwy na 480.

Cystadludd	Cyn	Ar ôl	Gwahaniaeth	Gwahaniaeth +f	Safle
A	480	841	361	361	6 ✓
B	1008	998	-10	10	1
C	0	751	751	751	8 ✓
D	344	344	0	0	/
E	351	954	603	603	7 ✓
F	781	542	-239	239	4
G	876	820	-56	56	2
H	741	1011	270	270	5 ✓
I	457	644	187	187	3 ✓

W = swm y safleoedd efo gwahaniaeth gureiddiol positif

$$W = 6 + 8 + 7 + 5 + 3$$

$$W = 29$$

o'r tablau ystadegol, y gwerth critigol uchaf

($n=8$, un gynffon 10%) yw 28.

Gan fod $29 > 28$ mae tystiolaeth ar gyfer gwrthdaro H_0 .

Felly rydym yn derbyn bod ymddangos ar y rhaglen yn cynyddu dilgynwyr ar y rhydwethiau cymdeithasol.

ii) os yw H_0 eisiau cynyddu ei ddilynuwr, dylai ymddangos ar y rhaglen.

b) ① Nid yw'r cwestiwn yn nodi bod dosraniad y data yn normal.

② Ma'r data wedi'i baru.

Ynched 5 Pellach Itaf 2023

5) $X \sim N(75, 10^2)$

a) $\bar{X} \sim N\left(75, \frac{10^2}{5}\right)$

$P(\bar{X} < 70) = 0.1317762386$ (o'r cyfrifiannell).

b) $\bar{X} \sim N\left(75, \frac{10^2}{n}\right)$

$P(\bar{X} > 80) \approx 0.007$

$P\left(Z > \frac{80-75}{\sqrt{\frac{100}{n}}}\right) \approx 0.007$

$P\left(Z \leq \frac{80-75}{\sqrt{\frac{100}{n}}}\right) \approx 0.993$

$\frac{80-75}{\sqrt{\frac{100}{n}}} \approx 2.457$

(o'r tablau ystadegol)

$80-75 \approx 2.457 \sqrt{\frac{100}{n}}$

$5 \approx 2.457 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$

$5\sqrt{n} \approx 24.57$

$\sqrt{n} \approx 4.914$

$n \approx 24.147396$

Felly $n = 24$ i'r rhif cyfan agosaf

c) Dynion $X \sim N(75, 10^2)$
Merched $Y \sim N(68, 6^2)$

Gadewchi $T = X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$

$$\begin{aligned} E(T) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\ &= 75 + 75 + 75 + 68 + 68 + 68 + 68 \\ &= 497 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\ &= 1^2 \text{Var}(X_1) + 1^2 \text{Var}(X_2) + \dots + 1^2 \text{Var}(Y_4) \\ &= 10^2 + 10^2 + 10^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 \\ &= 444 \end{aligned}$$

Felly $T \sim N(497, 444)$.

$$\begin{aligned} P(T > 500) &= 0.4433924178 \quad (\text{ôr cyfrifiannell}) \\ &= \underline{\underline{0.4434}} \quad \text{i 4 lle degol} \end{aligned}$$

ch) Nid yw'r gweithwyr yn cael unrhyw buysau ychwanegol, ee bagiau.

Uned 5 Pellach Itaf 2023

Trefnu or mwyaf i'r lleiaf

- 6) Gadewch i μ_A = cymedr sawl briathlon ar gyfer aelodau
 μ_B = cymedr sawl briathlon ar gyfer rhai nad yw'n aelodau

$H_0: \mu_A = \mu_B$ yn erbyn $H_1: \mu_A > \mu_B$.

o'r tablau ystadegol ($n=6$, $m=6$, un gynffon 5%)
 mae'r gwerth critigol uchaf yn 29.

Y gwerth critigol isaf yw $6 \times 6 - 29 = 36 - 29$
 $= 7$

Y manbarth critigol yw $(U \geq 29) \cup (U \leq 7)$.

		Trefn Sampl Llawn		Trefn		Curo	
A	B	A	B	A	B	A	B
X	X	14		1		6	
14	X	12		2		6	
12	X		9		3		4
5	X		8		4		4
X	X	7		5		4	
X	X		6		6		3
		5		7		3	
			4		8		2
		3		9		2	
			2		10		1
		1		11		1	
			0		12		0
Cyfanswm				35	43	22	14

gweler drosodd

$U_A = 22$ $U_B = 14$

Dull amgen i ddarganfuod u_A , u_B heb ddefnyddio'r golofn olaf 'curo':

$$u_A = 35 - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$u_B = 43 - \frac{m(m+1)}{2}$$

$$u_A = 35 - \frac{6(6+1)}{2}$$

$$u_B = 43 - \frac{6(6+1)}{2}$$

$$u_A = 14$$

$$u_B = 22$$

Nid yw 14 a 22 yn y rhanbarth critigol felly nid oes eysbiolaeth digonol ar gyfer gwrthod H_0 . Felly nid oes eysbiolaeth digonol i ddweud bod aelodau o'r club yn rasio'n mwy aml na phobl sydd ddim yn aelodau.

b) Mae'r samplau'n annibynnol yn hytrach na wedi'u paru.

Uned 5 Pellach Haf 2023

Trefnu ôr lleiaf i'r mwyaf

- 6) Gadewch i μ_A = cymedr sawl briathlon ar gyfer aelodau
 μ_B = cymedr sawl briathlon ar gyfer rhai nad yw'n aelodau

$H_0: \mu_A = \mu_B$ yn erbyn $H_1: \mu_A \neq \mu_B$.

Ôr tablau ystadegol ($n = 6$, $m = 6$, un gynffon 5%)

mae'r gwerth critigol uchaf yn 29.

Y gwerth critigol isaf yw $6 \times 6 - 29 = 36 - 29$
 $= 7$

Y rhanbarth critigol yw $(U \geq 29) \cup (U \leq 7)$.

		Trefn Sampl Llawn		Trefn		Curo	
A	B	A	B	A	B	A	B
X	X		0		1		6
X	X	1		2		5	
X	X		2		3		5
X	X	3		4		4	
X	X		4		5		4
X	X	5		6		3	
			6		7		3
		7		8		2	
			8		9		2
			9		10		2
		12		11		0	
		14		12		0	
		Cyfanswm		43	35	14	22

$U_A = 14$ $U_B = 22$

gweler drosodd

Dull amgen i ddarganfod u_A , u_B heb ddefnyddio'r golofn olaf 'curo':

$$u_A = 43 - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$u_B = 35 - \frac{m(m+1)}{2}$$

$$u_A = 43 - \frac{6(6+1)}{2}$$

$$u_B = 35 - \frac{6(6+1)}{2}$$

$$u_A = 22$$

$$u_B = 14$$

Nid yw 14 a 22 yn y rhanbarth critigol felly nid oes tystiolaeth digonol ar gyfer gwrthod H_0 . Felly nid oes tystiolaeth digonol i ddweud bod aelodau o'r club yn rasio'n mwy aml na phobl sydd ddim yn aelodau.

b) Mae'r samplau'n annibynnol yn hytrach na wedi'u paru.

Uned 5 Pellach Haf 2023

7) Gadewch i C gynrychioli amser y Cannobrek.

$$C \sim N(\mu_C, 0.75^2).$$

Gadewch i B gynrychioli amser y Bianchondale.

$$B \sim N(\mu_B, 0.6^2).$$

a) Yn y samplau, $\bar{c} = 19.5$, $\bar{b} = 17.3$.

$$\begin{aligned} SE(\bar{C} - \bar{B}) &= \sqrt{\frac{0.75^2}{6} + \frac{0.6^2}{5}} \\ &= 0.4071240597 \end{aligned}$$

$$\bar{C} - \bar{B} \sim N(\bar{c} - \bar{b}, SE(\bar{C} - \bar{B})^2)$$

$$\bar{C} - \bar{B} \sim N(19.5 - 17.3, 0.4071240597^2)$$

$$\bar{C} - \bar{B} \sim N(2.2, 0.16575).$$

Mae angen i'r cyfng hyder gynnuys 1.25.

$$\begin{aligned} \text{Yn gyffredinol, cyfng hyder } \% &= \bar{c} - \bar{b} \pm ? \times SE(\bar{C} - \bar{B}) \\ &= 2.2 \pm ? \times SE(\bar{C} - \bar{B}) \end{aligned}$$

Ar ei leiaf, gall $? \times SE(\bar{C} - \bar{B})$ fod yn $2.2 - 1.25 = 0.95$

$$\text{Felly } ? \times 0.4071240597 = 0.95$$

$$? = 2.333441066$$

o'r tablau ystadegol, $P(Z \leq 2.333441066)$ agosaf at 0.99

Felly mae 1% ym mhob cynffon a'r cyfng hyder yw 98%

b) Mae pob cyfnod prauaf 10km yn cael eu cynnal ar yr un cwrdd o dan amodau tebyg bob tro.