

Uned 5 Pellach Haf 2022

1) $X \sim N(\mu, 0.9)$

$$\bar{X} = \frac{1}{10} (X_1 + X_2 + \dots + X_{10})$$

$$\text{Nawr } \sum x_i = 15.5 + 14.9 + \dots + 15.1 \\ = 153.7$$

$$\bar{x} = \frac{153.7}{10}$$

$$\bar{x} = 15.37$$

$$\text{Felly } \bar{X} \sim N(15.37, \frac{0.9}{10})$$

$$\bar{X} \sim N(15.37, 0.09)$$

Cyfunng hyder 90% felly $\frac{10}{2} = 5\%$ ym mhob cynffon.
o'r tablau, $P(Z \leq 1.645) = 0.95$

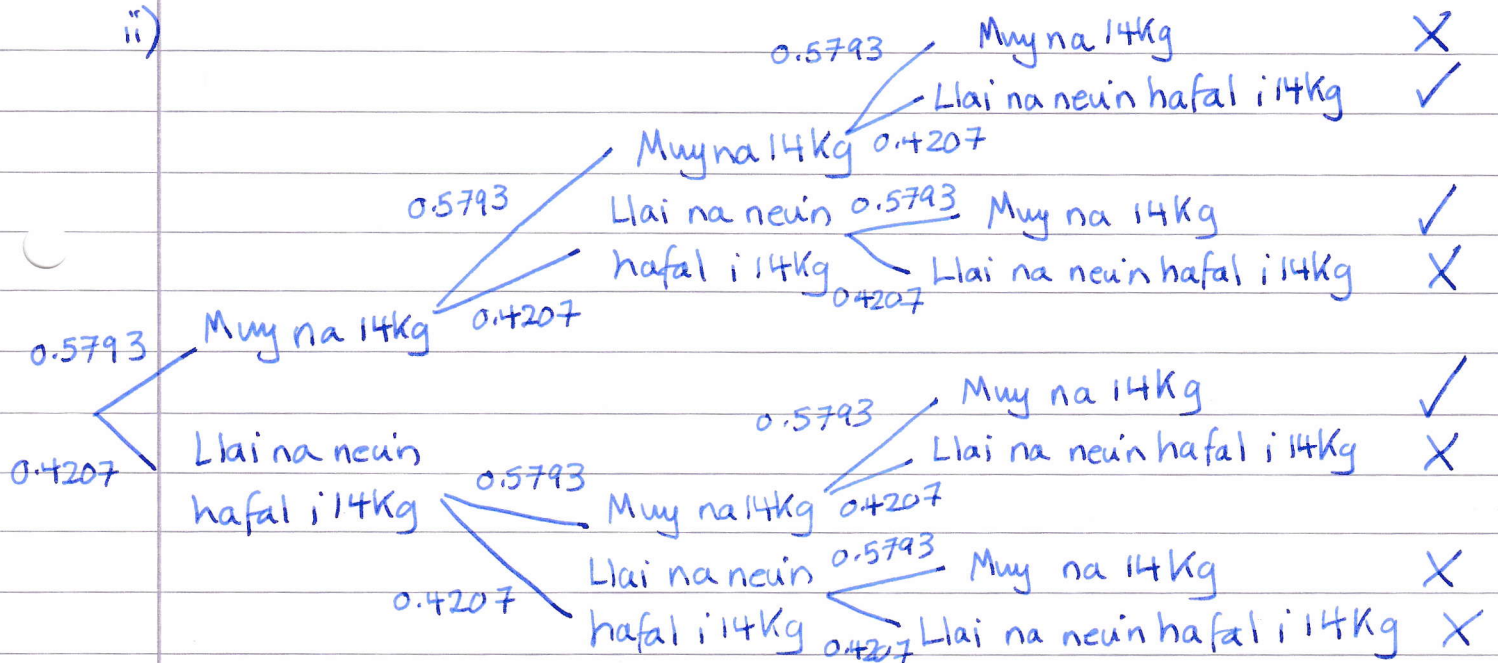
$$\begin{aligned} \text{Cyfunng hyder 90\%} &= \bar{x} \pm 1.645 \text{ SE}(\bar{X}) \\ &= 15.37 \pm 1.645 \sqrt{0.09} \\ &= 15.37 \pm 0.4935 \\ &= [14.8765, 15.8635] \end{aligned}$$

Wned 5 Pellach Haf 2022

2) $X \sim N(15, 5^2)$.

a) i) $P(X > 14) = 0.5793$ (Normal CD ar gyfrifiannell)

ii)



CWCH 1

CWCH 2

CWCH 3

Ateb: $0.5793 \times 0.5793 \times 0.4207$
 $+ 0.5793 \times 0.4207 \times 0.5793$
 $+ 0.4207 \times 0.5793 \times 0.5793$
 $= 0.423527877$
 $= 0.4235$ i 4 lle degol

b) $P(X + X + X + X + X + X + X + X > 160)$.

$E(X + X + \dots + X) = E(X) + E(X) + \dots + E(X)$
 $= 8 \times 15$
 $= 120$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + X + \dots + X) &= 1^2 \text{Var}(X) + 1^2 \text{Var}(X) + \dots + 1^2 \text{Var}(X) \\ &= 8 \times 5^2 \\ &= 200\end{aligned}$$

Felly $X + X + X + X + X + X + X + X \sim N(120, 200)$

$$P(X + X + X + X + X + X + X + X > 160) = 0.0023$$

i 4 lle degol

(Normal CD ar gyfrifiannell)

c) $P(\text{lleoliad B} > 2(\text{lleoliad A}))$

$$P(X + X + X + X + X > 2(X + X + X))$$

$$P(X + X + X + X + X > 2X + 2X + 2X)$$

$$P(X + X + X + X + X - 2X - 2X - 2X > 0)$$

$$E(X + X + X + X + X - 2X - 2X - 2X)$$

$$= E(X) + E(X) + E(X) + E(X) + E(X) - 2E(X) - 2E(X) - 2E(X)$$

$$= 15 + 15 + 15 + 15 + 15 - 2 \times 15 - 2 \times 15 - 2 \times 15$$

$$= -15$$

$$\text{Var}(X + X + X + X + X - 2X - 2X - 2X)$$

$$= 1^2 \text{Var}(X) + \dots + 1^2 \text{Var}(X) + (-2)^2 \text{Var}(X) + (-2)^2 \text{Var}(X) + (-2)^2 \text{Var}(X)$$

$$= 5 \text{Var}(X) + 12 \text{Var}(X)$$

$$= 17 \text{Var}(X)$$

$$= 17 \times 5^2$$

$$= 425$$

Felly $X + X + X + X + X - 2X - 2X - 2X \sim N(-15, 425)$

Gan ddefnyddio Normal CD ar gyfrifiannell,

$$P(X + X + X + X + X - 2X - 2X - 2X > 0) = \underline{\underline{0.2334}} \text{ i 4 lle degol}$$

Uned 5 Pellach Haf 2022

Trefnu or mwyaf i'r lleiaf

3) a) Mae'r prawf Mann-Whitney'n addas gan fod y datbwn drefnol, h.y. gellid ei drefnu or straen isaf i'r straen uchaf.

b) Gadewch i M_G = cymedr straen myfyrwyr y gogledd,
 M_D = cymedr straen myfyrwyr y de.

$H_0: M_G = M_D$ yn erbyn $H_1: M_G \neq M_D$.

or tablau ystadegol ($n=5$, $m=5$, dwy gynffon 5%)
mae'r gwerth critigol uchaf yn 22.

Y gwerth critigol isaf yw $5 \times 5 - 22 = 25 - 22 = 3$.

Y rhanbarth critigol yw $(U \geq 22) \cup (U \leq 3)$.

Trefn Sampl Llawn		Trefn		Curo	
G	D	G	D	G	D
67	26		70		5
55	70	67		4	
64	36	64		4	
60	57	60		4	
22	32		57		2
		55		3	
			36		1
			32		1
			26		1
		22		0	
Cyfanswm		25	30	15	10

gweler drosodd

$M_G = 15$ $M_D = 10$

Nid yw 10 ag 15 yn y rhanbarth critigol felly rydym yn derbyn H_0 , bod y myfyrwyr or gogledd a'r de yn teimlo'r straen i'r un raddau.

Dull amgen i ddarganfod M_G , M_D heb ddefnyddio'r golofn olaf 'curo':

$$M_G = 25 - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M_D = 30 - \frac{m(m+1)}{2}$$

$$M_G = 25 - \frac{5(5+1)}{2}$$

$$M_D = 30 - \frac{5(5+1)}{2}$$

$$M_G = 10$$

$$M_D = 15$$

- c) I wellair ymchwiliad dylair athro ystadegaeth roi'r prawf seicomebreg i lawer mwy o'r myfyrwyr, o'r gogledd ac o'r de.

Uned 5 Pellach Haf 2022

Trefnu'r lleiaf i'r mwyaf

3) a) Maer prawf Mann-Whitney'n addas gan fod y datbain drefnol, h.y. gellid ei drefnu o'r straen isaf i'r straen uchaf.

b) Gadewch i M_G = cymedr straen myfynywr y gogledd,
 M_D = cymedr straen myfynywr y de.

$H_0: M_G = M_D$ yn erbyn $H_1: M_G \neq M_D$.

o'r tablau ystadegol ($n = 5$, $m = 5$, dwy gynffon 5%)
maer gwerth critigol uchaf yn 22.

Y gwerth critigol isaf yw $5 \times 5 - 22 = 25 - 22 = 3$.

Y rhanbarth critigol yw $(U \geq 22) \cup (U \leq 3)$.

Trefn Sampl Llawn		Trefn		Curo	
G	D	G	D	G	D
67	26	22	1	5	
55	70		2		4
64	36		3		4
60	57		4		4
22	32	55	5	2	
	57		6		3
	60		7	1	
	64		8	1	
	67		9	1	
	70		10		0
cyfanswm		30	25	10	15

gweler drosodd

$M_G = 10$ $M_D = 15$

Nid yw 10 a 15 yn y rhanbarth critigol felly rydym yn derbyn H_0 , bod y myfynywr o'r gogledd a'r de yn keimlo'r straen i'r un raddau.

Dull amgen i ddarganfod μ_G , μ_D heb ddcfnyddio'r golofn olaf 'curo':

$$\mu_G = 30 - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\mu_D = 25 - \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\mu_G = 30 - \frac{5(5+1)}{2}$$

$$\mu_D = 25 - \frac{5(5+1)}{2}$$

$$\mu_G = 15$$

$$\mu_D = 10$$

- c) I wellar ymchwiliad dylai'r athro ystadegaeth roi'r prawf seicometrig i lawer mwy o'r myfyrwyr, o'r gogledd ac o'r de.

Uned 5 Pellach Haf 2022

4) (a) $\hat{p} = \frac{940}{2000}$

$$\hat{p} = 0.47$$

$$\begin{aligned} \text{ESE} &= \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0.47(1-0.47)}{2000}} \\ &= 0.01116019713 \end{aligned}$$

Cyfunng hyder 95% felly $\frac{5}{2} = 2.5\%$ ym mhob cymffon.
o'r tablau, $P(Z \leq 1.960) = 0.975$. [n yn fawr felly dim
angen gwerth-t.]

$$\begin{aligned} \text{Cyfunng hyder 95\%} &= \hat{p} \pm 1.960 \text{ ESE} \\ &= 0.47 \pm 1.960 \times 0.01116019713 \\ &= 0.47 \pm 0.02187398638 \\ &= [0.4481, 0.4919] \text{ i 4 lle degol} \end{aligned}$$

- (b) 1) Rydym wedi amcangyfrif p a'r cyfeiliornad
safonol felly nid ydynt yn union gywir.
2) Rydym wedi defnyddio brasamcan normal i'r
dosraniad Binomial yn y cwertiau (er mwyn
darganfod yr 1.960).

(c) Cyfunng hyder 99% felly $\frac{1}{2} = 0.5\%$ ym mhob cynffon.
o'r tablau, $P(Z \leq 2.576) = 0.995$.

(n yn fawr felly dim angen gwerth-t.)

Rydym angen lled y cyfunng hyder ≤ 0.04

$$2 \times 2.576 \times \text{ESE} \leq 0.04$$

$$2 \times 2.576 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.04$$

$$5.152 \times \sqrt{\frac{0.47(1-0.47)}{n}} \leq 0.04$$

$$\sqrt{\frac{0.2491}{n}} \leq \frac{0.04}{5.152}$$

$$\sqrt{\frac{0.2491}{n}} \leq \frac{5}{644}$$

$$\frac{0.2491}{n} \leq \frac{25}{414736}$$

$$\frac{0.2491 \times 414736}{25} \leq n$$

$$4132.429504 \leq n$$

$$n \geq 4132.429504.$$

Gwerth cyfanrifol lleiaf posib n yw 4133.

Felly mae angen o leiaf 2133 oedolyn ychwanegol yn yr arolwg.

Uned 5 Pellach Haf 2022

5) (a) Gadewch i μ gynrychioli'r gwir amser cymedrig.

$$H_0: \mu = 38 \text{ yn erbyn}$$

$$H_1: \mu > 38.$$

$$\sum x = 2163$$

$$\bar{x} = \frac{2163}{50}$$

$$\bar{x} = 43.26$$

$$\sum x^2 = 98508$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} (\sum x^2 - n\bar{x}^2)$$

$$s^2 = \frac{1}{50-1} (98508 - 50 \times 43.26^2)$$

$$s^2 = 100.7473469$$

$$O \text{ dan } H_0, \bar{X} \sim N\left(38, \frac{100.7473469}{50}\right)$$

$$Y \text{ gwerth-}p \text{ yw } P(\bar{X} > 43.26) \text{ pan fo } H_0 \text{ yn wir} \\ = 0.00010546182$$

← Normal CD ar gyfrifiannell

Gan fod y gwerth- p yn llawer llai na 0.01 mae'r sampl yn darparu tystiolaeth gref iawn ar gyfer gwrthod H_0 . Felly rydym yn derbyn honiad y gohebydd bod y canlyniadau'n cymryd mwy o amser na 38 awr ar gyfartaledd.

Pennawd posib i'r ddefnyddio fyddai

"Labordy'n llusgo"i Erael wrth brofi guaged".

(b) Gydag n yn fawr mae Theorem y Delfan Ganol yn dweud bod $\bar{X}$, sef dosraniad cymedr hapsampl o arsylwadau amseroedd profion, yn agos at fod yn normal.

(c) Mae hapsampl yn well gan ei fod yn profi'r canlyniadau dros gyfnod hirach o amser. Gall hyn gynnwys pobl gwahanol yn gweinyddu'r profion, profion wedi'u gwneud ar adegau gwahanol o'r diwrnod (ac ar ddiwrnodau gwahanol), ac osgoi rhywun yn gwybod bod 50 canlyniad dilynol yn 'bwysig', ac felly'n eu gwneud yn gyflymach.

(ch) Mae angen cyfrifo amcangyfrifon diduedd ar gyfer cymedr ac amrywiant yr amseroedd, cyn defnyddio'r dosraniad-t Student i gyfrifor gwerth- p gan fod n yn isel.

ii) Mae angen tybio bod yr amseroedd yn y sampl yn ffurfio hapsampl o ddosraniad normal.

Uned 5 Pellach Itaf 2022

- 6) H_0 : canolrif yr is-rywogaeth arfaethedig yw 4.2cm yn erbyn
 H_1 : Mae canolrif yr is-rywogaeth arfaethedig yn wahanol i 4.2cm.

Hyd arferol	Hyd o'r sampl	Gwahaniaeth	Gwahaniaeth +if	Safle	
4.2	5.0	-0.8	0.8	5	
4.2	3.2	1	1	7	✓
4.2	4.9	-0.7	0.7	4	
4.2	4.0	0.2	0.2	2	✓
4.2	3.3	0.9	0.9	6	✓
4.2	4.2	0	0	X	
4.2	6.1	-1.9	1.9	9	
4.2	4.3	-0.1	0.1	1	
4.2	4.8	-0.6	0.6	3	
4.2	5.9	-1.7	1.7	8	

W = swm y safleoedd efo gwahaniaeth gureiddiol positif

$$W = 7 + 2 + 6$$

$$W = 15$$

o'r tablau ystadegol, y gwerth critigol uchaf
($n = 9$, 2-gynffwrdd 1%) yw 4.3.

$$\begin{aligned} \text{Y gwerth critigol isaf yw } \frac{1}{2}n(n+1) - 4.3 \\ = \frac{1}{2} \times 9 \times 10 - 4.3 \\ = 2 \end{aligned}$$

Mae 15 yn fwy na 2 felly y casgliad ar y lefel amlyddocâd hwn
yw bod dim gwahaniaeth amlyddocâd rhwng hydoddd y
sampl a'r boblogaeth gyffredinol o lyffantod boliau tân.
Felly dylai'r swolegydd roi goau i'w astudiaethau.

Uned 5 Pellach Itaf 2022

7) (a) $X \sim N(\alpha, \sigma^2)$
 $Y \sim N(\beta, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= E(X) + E(Y) \\ &= \alpha + \beta \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X+Y) &= 1^2 \text{Var}(X) + 1^2 \text{Var}(Y) \\ &= 1 \times \sigma^2 + 1 \times \sigma^2 \\ &= 2\sigma^2 \end{aligned}$$

Felly $X+Y \sim N(180^\circ, 2\sigma^2)$

$$\begin{aligned} &P(180^\circ - \sigma < X+Y < 180^\circ + \sigma) \\ &= P\left(\frac{180^\circ - \sigma - 180^\circ}{\sqrt{2\sigma^2}} < Z < \frac{180^\circ + \sigma - 180^\circ}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \\ &= P\left(\frac{-\sigma}{\sqrt{2}\sigma} < Z < \frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < Z < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - P\left(Z < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 0.7602499563 - 0.2397500437 \\ &= 0.5204999126 \\ &= 0.52 \text{ i 2 le degol} \end{aligned}$$

$$(b) \quad T_1 = 45^\circ + \frac{1}{4}(3X - Y)$$

$$T_1 = 45^\circ + \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}Y$$

$$E(T_1) = 45^\circ + \frac{3}{4}E(X) - \frac{1}{4}E(Y)$$

$$E(T_1) = 45^\circ + \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta$$

$$E(T_1) + \beta = 45^\circ + \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta + \beta$$

$$E(T_1) + \beta = 45^\circ + \frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta$$

$$E(T_1) + \beta = 45^\circ + \frac{3}{4}(\alpha + \beta)$$

$$E(T_1) + \beta = 45^\circ + \frac{3}{4}(180^\circ)$$

$$E(T_1) + \beta = 45^\circ + 135^\circ$$

$$E(T_1) + \beta = 180^\circ$$

$$E(T_1) = 180^\circ - \beta$$

$$E(T_1) = \alpha$$

Felly mae T_1 yn amcangyfrifyn diduedd ar gyfer α .

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_1) &= \text{Var}\left(45^\circ + \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}Y\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{Var}(X) + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \text{Var}(Y) \\ &= \frac{9}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 \\ &= \frac{5}{8}\sigma^2 \end{aligned}$$

Yr amcangyfrifyn gorau yw T_1 gan fod $\frac{5}{8}\sigma^2$ yn llai na σ^2 .

$$(c) T_2 = \lambda X + (1-\lambda)(180^\circ - Y)$$

$$\begin{aligned} (i) E(T_2) &= E(\lambda X + (1-\lambda)(180^\circ - Y)) \\ &= E(\lambda X + (1-\lambda)180^\circ - (1-\lambda)Y) \\ &= \lambda E(X) + (1-\lambda)180^\circ - (1-\lambda)E(Y) \\ &= \lambda \alpha + (1-\lambda)180^\circ - (1-\lambda)\beta \\ &= \lambda \alpha + 180^\circ - \lambda 180^\circ - \beta + \lambda \beta \\ &= \lambda(\alpha + \beta - 180^\circ) + 180^\circ - \beta \\ &= \lambda(180^\circ - 180^\circ) + 180^\circ - \beta \\ &= 180^\circ - \beta \end{aligned}$$

$$E(T_2) = \alpha$$

Felly mae T_2 yn amcangyfrifyn diduedd ar gyfer α , beth bynnag yw gwerth λ .

$$\begin{aligned} (ii) \text{Var}(T_2) &= \text{Var}(\lambda X + (1-\lambda)(180^\circ - Y)) \\ &= \text{Var}(\lambda X + (1-\lambda)180^\circ - (1-\lambda)Y) \\ &= \lambda^2 \text{Var}(X) + 0 + (-1)^2 (1-\lambda)^2 \text{Var}(Y) \\ &= \lambda^2 \text{Var}(X) + (1-\lambda)^2 \text{Var}(Y) \\ &= \lambda^2 \sigma^2 + (1-\lambda)^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

(iii) Y gwerth ar gyfer λ sy'n rhoi amcangyfrifyn diduedd gorau ar gyfer α yw'r un sy'n rhoi gwerth lleiaf ar gyfer $\lambda^2 \sigma^2 + (1-\lambda)^2 \sigma^2$.

$$\begin{aligned} \text{Graddwch i } y &= \lambda^2 \sigma^2 + (1-\lambda)^2 \sigma^2 \\ \frac{dy}{d\lambda} &= 2\lambda \sigma^2 + 2(1-\lambda)(-1)\sigma^2 \\ &= 2\lambda \sigma^2 - 2(1-\lambda)\sigma^2 \\ &= 2\lambda \sigma^2 - 2\sigma^2 + 2\lambda \sigma^2 \\ &= 4\lambda \sigma^2 - 2\sigma^2 \end{aligned}$$

Gwerthoedd a rhosol $\Rightarrow \frac{dy}{d\lambda} = 0$

$$4\lambda\sigma^2 - 2\sigma^2 = 0$$

$$4\lambda\cancel{\sigma^2} = 2\cancel{\sigma^2}$$

$$4\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{2}{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Ydi hun yn weth minimum?

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} = 4\sigma^2$$

sydd wastad yn positif, felly mae $\lambda = \frac{1}{2}$ yn rhoi gwerth minimum.