

Uned 5 Pellach - Deunyddiau Aseu Enghreifftiol

i) $X \sim N(32, 4^2)$

'Inverse Normal'

a) i) ór gyfniannell / tablau

$$P(Z < 0.674489579) = 0.75$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < 0.674489579\right) = 0.75$$

$$P(X < 0.674489579 \sigma + \mu) = 0.75$$

$$P(X < 0.674489579 \times 4 + 32) = 0.75$$

$$P(X < 34.69795832) = 0.75$$

Y chwartzel uchaf (i 2 lle degol) yw 34.70.

Mae'r amser yn hirach na hyn ar 25% ór dyddiau

ii) Gadewch i $T = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.

$$E(T) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_5)$$

$$= 5E(X)$$

$$= 5 \times 32$$

$$= 160$$

$$\text{Var}(T) = 1^2 \text{Var}(X_1) + 1^2 \text{Var}(X_2) + \dots + 1^2 \text{Var}(X_5)$$

$$= 5 \text{Var}(X)$$

$$= 5 \times 16$$

$$= 80$$

$$T \sim N(160, 80)$$

$$P(T > 170) = 1 - P(T \leq 170)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{170 - 160}{\sqrt{80}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.118033989)$$

$$= 1 - 0.8682237614$$

$$= \underline{0.1318} \quad \text{i 4 lle degol}$$

$$b) Y \sim N(18, 2^2)$$

Mae'r papur Cymraeg yn dweud "yn ddub!"
bra mae'r papur Saesneg yn dweud
"more than twice". Rydym wedi defnyddio'r

$$P(X > 2Y) = P(X - 2Y > 0)$$

fersiwn Saesneg yma, gan
mai hwn sydd yn y
cynllun marcio.

Gadewch: $U = X - 2Y$

$$E(U) = E(X) - 2E(Y)$$

$$= 32 - 2 \times 18$$

$$= -4$$

$$\text{Var}(U) = 1^2 \text{Var}(X) + (-2)^2 \text{Var}(Y)$$

$$= 16 + 4 \times 4$$

$$= 32.$$

Felly $U \sim N(-4, 32)$.

$$P(U > 0) = P\left(Z > \frac{0 - (-4)}{\sqrt{32}}\right)$$

$$= P(Z > 0.7071067812)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.7071067812)$$

$$= 1 - 0.7602499389$$

$$= 0.2397500611$$

$$= \underline{0.2398} \text{ i 4 lle degol}$$

Uned 5 Pellach - Deunyddiau Asesu Enghreifftiol

- 2) Gadewch i X ddynodi cryfder korri y llinyn.
 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

a) $\sum x = 691$ $\sum x^2 = 47762.32$

$$\bar{x} = \frac{691}{10} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)$$

$$\bar{x} = 69.1 \quad s^2 = \frac{1}{9} (47762.32 - 10 \times 69.1^2)$$

$$s^2 = 1.58 \quad \text{Felly } \bar{X} \sim N(69.1, \frac{1.58}{10})$$

Cyfunng hyder 95% Felly $\frac{5}{2} = 2.5\%$ ymmhob cynffon.
 n yn isel felly angen defnyddio gwerth- t .

Ōr tablau ar gyfer dosraniad- t Student

($v = 9$, $p = 0.975$), gwelwn bod $P(X \leq 2.262) = 0.975$.

$$\begin{aligned} \text{Cyfunng hyder 95\%} &= \bar{x} \pm 2.262 \times \text{ESE}(\bar{X}) \\ &= 69.1 \pm 2.262 \times \sqrt{\frac{1.58}{10}} \end{aligned}$$

$$= 69.1 \pm 0.8991272168$$

$$= \underline{[68.20, 70.00]} \text{ i 2le degol.}$$

- b) Na, mae gwerth μ naillai'n gorwedd yn y cyfunng neu ddim, nid oes cwestiwn ynghylch tebygolrwydd.

Os yw'r brases yn cael ei chynnal nifer fawr o weithiau, byddwn nin disgwyl y byddai 95% o'r cyfyngau hyder a welir yn cynnwys μ .

Uned 5 Pellach - Deunyddiau Aesu Enghreifftiol

- 3) a) H_0 : Mae traul petrol modelau A a B yr un fath yn erbyn
 H_1 : Nid yw traul petrol modelau A a B yr un fath.

b) O'r tablau ystadegol ($n=6$, $m=6$, dwy gynffon 5%)
 ma'r gwerth critigol uchaf yn 31.

$$\text{Y gwerth critigol isaf yw } 6 \times 6 - 31 = 36 - 31 = 5.$$

Y manbarth critigol yw $(u \geq 31) \cup (u \leq 5)$.

c)		Trefn Sampl Llawn		Trefn		Curo	
A	B	A	B	A	B	A	B
86.3	84.9	83.1		1			6
84.2	85.1	84.2		2			6
85.8	84.8	84.7		3			6
83.1	86.5		84.8		4	3	
84.7	85.2		84.9		5	3	
85.3	85.5		85.2		6	3	
		85.3		7			3
			85.5		8	2	
		85.8		9			2
			85.9		10	1	
		86.3		11			1
			86.5		12	0	
		Cyfanswm		33	45	12	24

$$u_A = 33 - \frac{n(n+1)}{2} \quad u_B = 45 - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$u_A = 33 - \frac{6(6+1)}{2} \quad u_B = 45 - \frac{6(6+1)}{2}$$

$$u_A = 12$$

$$u_B = 24$$

$$u_A = 12 \quad u_B = 24$$

Dull amgen heb ddefnyddio'r golofn olaf 'curo'.

Nid yw 12 a 24 yn y rhanbarth critigol
felly rydym yn deubyn Ho sydd yn dweud bod
braul petrol modelau A a B yr yn fath.

Hynny yw, does dim gwahaniaeth yn nbraul petrol y
ddau fodel.

Uned 5 Pellach - Deunyddiau Asesu Enghreifftiol

4) a) $\hat{p} = \frac{1242}{1800}$

$$\hat{p} = 0.69$$

$$\begin{aligned} ESE &= \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{0.69(1-0.69)}{1800}} \\ &= 0.01090107028 \end{aligned}$$

Cyfunng hyder 95% felly $\frac{5}{2} = 2.5\%$ ym mhob cynffon.
O'r tablau, $P(Z \leq 1.960) = 0.975$
(n yn fawr felly dim angen gwerth-t.)

$$\begin{aligned} \text{Cyfunng hyder 95\%} &= \hat{p} \pm 1.960 \times ESE \\ &= 0.69 \pm 1.960 \times 0.01090107028 \\ &= 0.69 \pm 0.02136609776 \\ &= [0.6686, 0.7114] \text{ i 4 lle degol} \end{aligned}$$

b) $\hat{p}$ yw canolbwynt y cyfunng hyder.

$$\hat{p} = \frac{0.672 + 0.732}{2}$$

$$\hat{p} = 0.702$$

Nifer y bobl a ddwywedodd bod well ganddyn nhw win
coch na gwin gwyrn = $1000 \times \hat{p}$
 $= 1000 \times 0.702$
 $= 702.$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } ESE &= \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \\
 &= \sqrt{\frac{0.702(1-0.702)}{1000}} \\
 &= 0.01446360951
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cyfng hyder ?\%} &= \hat{p} \pm z \times ESE \\
 [0.672, 0.732] &= 0.702 \pm 0.01446360951 z \\
 0.732 - 0.672 &= 2 \times 0.01446360951 z \\
 0.06 &= 0.02892721902 z \\
 z &= 2.074171041
 \end{aligned}$$

dr gyfrifiannell, y tebygolrwydd yw 0.9809682856
 (neu gellid cael hwn dr tablau ystadegol).
 Felly mae $100\% - 98.09682856 = 1.903171441\%$
 ym mhob cyrffon.

$$\begin{aligned}
 \text{Lefel hyder y cyfng hyder yw} \\
 100\% - 2 \times 1.903171441\% &= 96.19365712\% \\
 &= \underline{96.2\%} \text{ i 3 ffigur ysbym}
 \end{aligned}$$

Uned 5 Pellach - Deunyddiau Asesu Enghreifftiol

- 5) a) μ_G = cymedr yr anifeiliaid guryw. $G \sim N(\mu_G, 0.5^2)$
 μ_B = cymedr yr anifeiliaid benyw. $B \sim N(\mu_B, 0.5^2)$
H₀: $\mu_G = \mu_B$ yn erbyn
H₁: $\mu_G \neq \mu_B$.

$$\begin{array}{ll} \text{b) } \sum g = 39.2 & \sum b = 46.6 \\ \bar{g} = \frac{39.2}{8} & \bar{b} = \frac{46.6}{10} \\ \bar{g} = 4.9 & \bar{b} = 4.66 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Y gwerth-p} &= P(\bar{G} = \bar{B}) \\ &= P(\bar{G} - \bar{B} = 0) \end{aligned}$$

$$\text{Gran fod } 4.9 - 4.66 = 0.24 > 0$$

$$\text{Y gwerth-p yw } 2P\left(\bar{G} - \bar{B} \geq \frac{\bar{g} - \bar{b} - 0}{SE(\bar{G} - \bar{B})}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Nawr } SE(\bar{G} - \bar{B}) &= \sqrt{\frac{0.5^2}{8} + \frac{0.5^2}{10}} \\ &= 0.2371708245 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Felly'r gwerth-p yw } &2P\left(\bar{G} - \bar{B} \geq \frac{4.9 - 4.66 - 0}{0.2371708245}\right) \\ &= 2P(\bar{G} - \bar{B} \geq 1.011928851) \\ &= 2P(Z \geq 1.011928851) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{yr} \\ \text{ystadegyn} \\ \text{prau} \end{array} \right. \\ &= 2(1 - P(Z < 1.01)) \\ &= 2(1 - 0.84375) \\ &= 2 \times 0.15625 \\ &= 0.3125 \end{aligned}$$

Gran fod y gwerth-p yn fwy na 0.05 nid oes digon o dystiolaeth i wrthod H₀ a dod i'r casgliad bod yna wahaniaeth rhwng y prysau cymedrig guryw a benyw. Felly rydym yn derbyn bod y ddau gymedr yn haf.

Uned 5 Pellach - Deunyddiau Besu Enghreifftiol

6) a)

Claf	Dull A	Dull B	Gwahaniaeth B-A	Gwahaniaethrif	Safle
A	121	126	5	5	4 ✓
B	133	131	-2	2	2
C	119	127	8	8	7 ✓
CH	142	152	10	10	9 ✓
D	151	145	-6	6	5
DD	139	151	12	12	10 ✓
E	161	157	-4	4	3
F	148	155	7	7	6 ✓
FF	151	160	9	9	8 ✓
G	125	126	1	1	1 ✓

W = swm y safleoedd efo gwahaniaeth gwreiddiol positif

$$W = 4 + 7 + 9 + 10 + 6 + 8 + 1$$

$$W = 45$$

b) O'r tablau ystadegol, y gwerth critigol ($n=10$, 1-gynffon 5%) yw 44.

Mae 45 yn fwy na 44 felly y casgliad ar y lefel amlyddor câd hwn yw bod Dull B yn mai darllenriad uwch na Dull A ar gyfartaledd. (Rydym yn derbyn H_1 .)

Uned 5 Pellach - Deunyddiau Aseru Enghreifftiol

7) $\theta \in (0, \frac{1}{3})$

x	1	3	5
$P(X=x)$	θ	$1-3\theta$	2θ

$$\begin{aligned} \text{a) } E(X) &= \sum x P(X=x) \\ &= 1(\theta) + 3(1-3\theta) + 5(2\theta) \\ &= \theta + 3 - 9\theta + 10\theta \\ &= 2\theta + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum x^2 P(X=x) \\ &= 1^2(\theta) + 3^2(1-3\theta) + 5^2(2\theta) \\ &= \theta + 9 - 27\theta + 50\theta \\ &= 24\theta + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 24\theta + 9 - [2\theta + 3]^2 \\ &= 24\theta + 9 - (4\theta^2 + 12\theta + 9) \\ &= 24\theta + 9 - 4\theta^2 - 12\theta - 9 \\ &= 12\theta - 4\theta^2 \\ &= 4\theta(3-\theta) \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) i) $V = \frac{\bar{X} - 3}{2}$

$$V = \frac{1}{2} \bar{X} - \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} E(V) &= E\left(\frac{1}{2} \bar{X} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} E(\bar{X}) - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} (2\theta + 3) - \frac{3}{2} \\ &= \theta + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \theta \end{aligned}$$

Felly mae V yn
amcangyfrifyn
diduedd ar gyfer θ .

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(V) &= \text{Var}\left(\frac{1}{2}\bar{X} - \frac{3}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{Var}(\bar{X}) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{4\theta(3-\theta)}{n} \right) \\
 &= \frac{\theta(3-\theta)}{n}
 \end{aligned}$$

c) Mae Y yn dilyn y dosraniad $B(n, \theta)$.

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= np \\
 &= n\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y) &= npq \\
 &= n\theta(1-\theta)
 \end{aligned}$$

$$W = \frac{Y}{n}$$

$$\begin{aligned}
 E(W) &= E\left(\frac{Y}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} E(Y) \\
 &= \frac{1}{n} (n\theta) \\
 &= \theta
 \end{aligned}$$

Felly mae W yn amcangyfrifyn diduedd ar gyfer θ .

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(W) &= \text{Var}\left(\frac{Y}{n}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \text{Var}(Y) \\
 &= \frac{1}{n^2} (n\theta(1-\theta)) \\
 &= \frac{\theta(1-\theta)}{n}
 \end{aligned}$$

$$\text{ch) } \text{Var}(V) = \frac{\theta(3-\theta)}{n} \quad \text{Var}(W) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Var}(V)}{\text{Var}(W)} &= \frac{\frac{\theta(3-\theta)}{n}}{\frac{\theta(1-\theta)}{n}} \\ &= \frac{\cancel{\theta}(3-\theta)}{\cancel{\theta}} \times \frac{\cancel{n}}{\theta(1-\theta)} \\ &= \frac{3-\theta}{1-\theta} \end{aligned}$$

Gan fod $\theta \in (0, \frac{1}{3})$ mae $\frac{3-\theta}{1-\theta} > 1$

gan fod $3 > 1$.

Felly mae $\text{Var}(V) > \text{Var}(W)$
ac felly W yw'r amcangyfrifyn gorau gan mai W
sydd â'r amrywiad lleiaf.