TAG UF a Safon Uwch
MATHEMATEG

LLYFRYN FFORMIWLÂU

O fis Medi 2017

Cyhoeddwyd yn 2017

Mathemateg Bur

Mesureg

Arwynebedd arwyneb sffêr = $4\pi r^2$

Arwynebedd arwyneb crwm côn = $\pi r \times \text{uchder goledd}$

Cyfres Rhifyddeg

$S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n\,[2a + (n-1)d]$

Cyfres Geometrig

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$ ar gyfer | r | < 1

Symiannau

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

Cyfres Finomial

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \ldots + b^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

lle mae $\binom{n}{r} = {}^n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} x^r + \ldots \quad (|x| < 1,\, n \in \mathbb{R})$$

Logarithmau ac esbonyddolion

$$\mathrm{e}^{x \ln a} = a^x$$

Rhifau Cymhlyg

$$\{r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

Rhoddir israddau $z^n = 1$ gan $z = \mathrm{e}^{\frac{2\pi k \mathrm{i}}{n}}$, ar gyfer $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Cyfres Maclaurin a Chyfres Taylor

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^r}{r!} f^{(r)}(0) + \ldots$$

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) + \ldots$$

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{x^r}{r!} f^{(r)}(a) + \ldots$$

$$\mathrm{e}^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^r}{r!} + \ldots \qquad \text{ar gyfer pob } x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{r+1} \frac{x^r}{r} + \ldots \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} + \ldots \qquad \text{ar gyfer pob } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!} + \ldots \qquad \text{ar gyfer pob } x$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{2r+1} + \ldots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} + \ldots \qquad \text{ar gyfer pob } x$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2r}}{(2r)!} + \ldots \qquad \text{ar gyfer pob } x$$

$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2r+1}}{2r+1} + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$$

Ffwythiannau Hyperbolig

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left\{x + \sqrt{x^2 - 1}\right\} \qquad (x \ge 1)$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left\{x + \sqrt{x^2 + 1}\right\}$$

$$\tanh^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (|x| < 1)$$

Unfathiannau Trigonometrig

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \qquad (A \pm B \neq (k + \tfrac{1}{2})\pi)$

Ar gyfer $t = \tan\frac{1}{2}A$: $\sin A = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos A = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A - \cos B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

Fectorau

Cydran **a** yng nghyfeiriad **b** yw $\dfrac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$

Y pwynt sy'n rhannu *AB* yn y gymhareb $\lambda : \mu$ yw $\dfrac{\mu\,\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{\lambda + \mu}$

Hafaliad plân ar ffurf Gartesaidd yw $n_1x + n_2y + n_3z = k$

Y pellter perpendicwlar rhwng dwy linell sgiw yw $D = \dfrac{|(\mathbf{b}-\mathbf{a}).\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$ lle mae **a** a **b** yn fectorau safle o bwyntiau ar bob llinell a lle mae **n** yn gydberpendicwlar i'r ddwy linell.

Y pellter perpendicwlar rhwng pwynt a llinell yw $D = \dfrac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, lle mae cyfesurynnau'r pwynt yn (x_1, y_1) a hafaliad y llinell yn cael ei roi gan $ax + by = c$.

Y pellter perpendicwlar rhwng pwynt a phlân yw $D = \dfrac{|n_1\alpha + n_2\beta + n_3\gamma - k|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$, lle (α, β, γ) yw cyfesurynnau'r pwynt a $n_1x + n_2y + n_3z = k$ yw hafaliad y plân.

Trawsffurfiadau Matrics

Cylchdro gwrthglocwedd trwy θ o amgylch *O*: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Adlewyrchiad yn y llinell $y = (\tan\theta)x$: $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

Differiad

Ffwythiant	**Deilliad**
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sin^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\sinh^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh^{-1} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

Integriad (+ *cysonyn; $a > 0$ lle'n berthnasol*)

Ffwythiant	**Integryn**
$\tan x$	$\ln\lvert\sec x\rvert$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\operatorname{cosec} x$	$-\ln\lvert\operatorname{cosec} x + \cot x\rvert = \ln\lvert\tan(\tfrac{1}{2}x)\rvert$
$\sec x$	$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert = \ln\lvert\tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi)\rvert$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) \quad (\lvert x\rvert < a)$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) = \ln\left\{x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\} \quad (x > a)$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$	$\sinh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) = \ln\left\{x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\}$
$\dfrac{1}{a^2 - x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert = \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) \quad (\lvert x\rvert < a)$
$\dfrac{1}{x^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$

$$\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = uv - \int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Arwynebedd sector

$$A = \tfrac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(cyfesurynnau pegynlinol)}$$

Mathemateg Rhifiadol

Integriad rhifiadol

Rheol y trapesiwm: $\int_a^b y\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}h\{(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\}$, lle mae $h = \dfrac{b-a}{n}$

Datrys Hafaliadau'n Rhifiadol

Iteriad Newton-Raphson ar gyfer datrys $f(x) = 0$: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Mecaneg

Mudiant mewn cylch

Cyflymder ardraws: $v = r\dot{\theta} = \omega r$

Cyflymiad rheiddiol: $-r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{v^2}{r} = -\omega^2 r$

Creiddiau Màs Gwrthrychau Unffurf

Laminâu Trionglog: $\dfrac{2}{3}$ ar hyd y llin ganol o'r fertig

Hanner cylch: $\dfrac{4r}{3\pi}$ o'r ymyl syth ar hyd echelin cymesuredd

Chwarter cylch: $\bar{x} = \dfrac{4r}{3\pi}$ $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$ o'r fertig

Tebygolrwydd ac Ystadegaeth

Tebygolrwydd

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B \mid A)$$

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \mid A')\,\mathrm{P}(A')}$$

Theorem Bayes: $\mathrm{P}(A_j \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A_j)\,\mathrm{P}(B \mid A_j)}{\Sigma\,\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B \mid A_i)}$

Dosraniadau arwahanol

Ar gyfer hapnewidyn arwahanol X yn cymryd gwerthoedd x_i gyda thebygolrwyddau p_i

Disgwyliad (cymedr): $\mathrm{E}(X) = \mu = \Sigma x_i p_i$

Amrywiant: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \Sigma(x_i - \mu)^2 p_i = \Sigma x_i^2 p_i - \mu^2$

Ar gyfer ffwythiant $\mathrm{g}(X)$: $\mathrm{E}(\mathrm{g}(X)) = \Sigma\,\mathrm{g}(x_i)\,p_i$

Dosraniadau arwahanol safonol:

Dosraniad X	$\mathrm{P}(X = x)$	Cymedr	Amrywiant
Binomial $\mathrm{B}(n,\ p)$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$
Poisson $\mathrm{Po}(\lambda)$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$	λ	λ

Dosraniadau di-dor

Ar gyfer hapnewidyn di-dor X gyda ffwythiant dwysedd tebygolrwydd f

Disgwyliad (cymedr): $\mathrm{E}(X) = \mu = \int x f(x)\,\mathrm{d}x$

Amrywiant: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \int (x-\mu)^2\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \mu^2$

Ar gyfer ffwythiant $\mathrm{g}(X)$: $\mathrm{E}(\mathrm{g}(X)) = \int \mathrm{g}(x) f(x)\,\mathrm{d}x$

Ffwythiant dosraniad cronnus: $\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

Dosraniadau di-dor safonol:

Dosraniad X	Ffwythiant Dwysedd Tebygolrwydd (P.D.F)	Cymedr	Amrywiant
Unffurf (Petryal) ar $[a, b]$ $\mathrm{U}[a,b]$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2
Esbonyddol $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

Algebra Disgwyliad

Ar gyfer hapnewidynnau annibynnol X ac Y

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y), \quad \mathrm{Var}(aX \pm bY) = a^2\,\mathrm{Var}(X) + b^2\,\mathrm{Var}(Y)$$

Dosraniadau samplu

Ar gyfer hapsampl $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o n arsylw annibynnol o ddosraniad â chymedr μ ac amrywiant σ^2

Mae $\bar{X}$ yn amcangyfrifyn diduedd ar gyfer μ, gyda $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Mae S^2 yn amcangyfrifyn diduedd ar gyfer σ^2, lle mae $S^2 = \dfrac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

Ar gyfer hapsampl o n arsylw o $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$\frac{\bar{\mathrm{X}} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

Os mai X yw'r nifer o lwyddiannau a arsylwir mewn n prawf Bernoulli annibynnol, lle mae p yw'r tebygolrwydd llwyddiant ym mhob un ohonynt, ac $Y = \dfrac{X}{n}$, yna mae

$$\mathrm{E}(Y) = p \quad \text{a} \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Ar gyfer hapsampl o n_x arsylw o $\mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ ac, yn annibynnol, hapsampl o n_y arsylw o $\mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Cydberthyniad ac Atchweliad

Ar gyfer sampl o n pâr o arsylwadau (x_i, y_i)

$$S_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$$

$$S_{yy} = \sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n}$$

$$S_{xy} = \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - \frac{\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n}$$

Mae mesur o gydgysylltiad llinol rhwng dau newidyn X a Y yn cael ei roi gan gyfernod cydberthyniad moment lluoswm r Pearson.

Ar gyfer y sampl $(x_1,y_1), (x_2,y_2),\ldots, (x_n,y_n)$, fe'i roddir gan $r = \dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$.

O gael data, gellir amcangyfrif paramedrau α a β y model atchweliad llinol gan ddefnyddio egwyddor swm lleiaf sgwariau.

Mae amcangyfrif swm lleiaf sgwariau $\hat{\beta}$ paramedr β yn cael ei roi gan $\hat{\beta} = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$.

Mae amcangyfrif swm lleiaf sgwariau $\hat{\alpha}$ paramedr α yn cael ei roi gan $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$.

Rhoddir y llinell atchweliad swm lleiaf sgwariau gan $y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$.

Rhoddir safle cyfernod cydberthyniad rhestrol Spearman gan $r_s = 1 - \dfrac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$.

SS/MLJ/W05(16)W
2.12.16